谓词逻辑

School of Computer Wuhan University



谓词逻辑

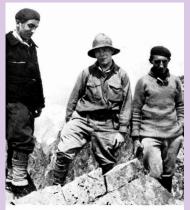
School of Computer Wuhan University



本章内容

- 1 谓词与量词
 - 谓词和项
 - 谓词公式的语法
 - 谓词公式的语义
- 2 谓词公式
 - 逻辑恒等式和永真蕴涵式
 - 谓词永真公式
 - 前束范式
- ③ 谓词公式的自然推理
 - 相关概念的复习
 - 量词的推理规则
 - 形式证明的例子
 - Mechanical Reasoning

Jacques Herbrand (1908-1931)



Jacques Herbrand (au centre) au cours de l'excursion où il trouva la mort

Outline

- 1 谓词与量词
 - 谓词和项
 - 谓词公式的语法
 - 谓词公式的语义
- 2 谓词公式
- 3 谓词公式的自然推理

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立:P,Q∀R;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的,但是,在抽象为原子后,彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息,为此引入项,谓词和量词,使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius).$

◆ロ > ← 個 > ← 直 > ← 直 > 一直 の へ で

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立:P,Q∀R;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的,但是,在抽象为原子后,彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息,为此引入项,谓词和量词,使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius).$

◆ロ > ← 個 > ← 直 > ← 直 > 一直 の へ で

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立:P,Q⊬R;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的,但是,在抽象为原子后,彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息,为此引入项,谓词和量词,使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius).$

◆ロ → ◆御 → ◆ 恵 → ● ● り へ ⊙

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立:P,Q∀R;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的,但是,在抽象为原子后,彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息,为此引入项,谓词和量词,使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius).$

◆ロ → ◆御 → ◆ 恵 → ● ● り へ ⊙

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立:P,Q∀R;
- 原因: *P*, *Q*和*R*所描述的对象是相关的,但是,在抽象为原子后,彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息,为此引入项,谓词和量词,使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius).$

◆ロ → ◆部 → ◆ き → を ● り へ で

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立:P,Q∀R;
- 原因: *P*, *Q*和*R*所描述的对象是相关的,但是,在抽象为原子后,彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息,为此引入项,谓词和量词,使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius).$

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立:P,Q∀R;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的,但是,在抽象为原子后,彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息,为此引入项,谓词和量词,使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x (MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius).$

Extensions to First-order Logic

谓词逻辑

- 真假值的运算规则和命题逻辑一致;
- 真假值与对象相关;
- 有足够的表达能力,数学语言完全能够用一阶逻辑表达;
- 注意: 计算机中很多的现象不能用一阶逻辑表达;
- Logic in computer science: Combinatory Logic, Hoare Logic, Temporal Logic, Dynamic Logic, Linear Logic, High Order Logic, etc.

- 将"命题"(陈述句)分解为"主语+谓语";
- 个体词(或,项):在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词符号:在简单命题中,表示个体的性质或个体间关系的符号,常用大写字母表示,如P,Q,R,...

- P(x): 若P表示谓词"大于3", x 为个体词, P(x) 即为 x > 3;
- Q(x,y): 若Q表示谓词"大于等于", x,y 为个体词, Q(x,y) 即为 $x \ge y$.

- 将"命题"(陈述句)分解为"主语+谓语";
- 个体词(或,项):在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词符号:在简单命题中,表示个体的性质或个体间关系的符号,常用大写字母表示,如P,Q,R,...

- P(x): 若P表示谓词"大于3", x 为个体词,P(x) 即为 x > 3;
- Q(x, y): 若Q表示谓词"大于等于", x, y 为个体词, Q(x, y) 即为 $x \ge y$.

- 将"命题"(陈述句)分解为"主语+谓语";
- 个体词(或,项):在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词符号:在简单命题中,表示个体的性质或个体间关系的符号,常用大写字母表示,如P,Q,R,...

- P(x): 若P表示谓词"大于3", x 为个体词, P(x) 即为 x > 3;
- Q(x, y): 若Q表示谓词"大于等于", x, y 为个体词, Q(x, y) 即为 $x \ge y$.

- 将"命题"(陈述句)分解为"主语+谓语";
- 个体词(或,项):在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词符号:在简单命题中,表示个体的性质或个体间关系的符号,常用大写字母表示,如P,Q,R,...

- P(x): 若P表示谓词"大于3", x 为个体词, P(x) 即为 x > 3;
- Q(x, y): 若Q表示谓词"大于等于", x, y 为个体词, Q(x, y) 即为 $x \ge y$.

- 将"命题"(陈述句)分解为"主语+谓语";
- 个体词(或,项):在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词符号:在简单命题中,表示个体的性质或个体间关系的符号,常 用大写字母表示,如P,Q,R,...

- P(x): 若P表示谓词"大于3", x 为个体词, P(x) 即为 x > 3;
- Q(x, y): 若Q表示谓词"大于等于", x, y 为个体词, Q(x, y) 即为 $x \ge y$.

Example

① "x 大于3": P(x)

② "x大于y": Q(x,y)

③ "x+1 大于x": R(x)

④ 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

■ 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:

② " \times 大于3": GREATER(x,3)

③ "x大于y": GREATER(x, y)

④ "x+1大于x": GREATER(plus(x,1),x)

⑤ 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数,变量和函数符号组合成的对象,称之为项(terms).

Example

① "×大于3": P(x)

② "x大于y": Q(x,y)

③ "x+1大于x": R(x)

① 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:

② " \times 大于3": GREATER(x,3)

③ "x 大于y": GREATER(x, y)

④ "x+1大于x": GREATER(plus(x,1),x)

⑤ 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数,变量和函数符号组合成的对象,称之为项(terms).

| ◆□▶ ◆圖▶ ◆圖▶ | ■ | 夕久@

Example

① "x 大于3": P(x)

② "x大于y": Q(x, y)

③ "x+1大于x": R(x)

④ 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

■ 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:

② " \times 大于3": GREATER(x,3)

③ "x 大于y": GREATER(x, y)

④ "x+1大于x": GREATER(plus(x,1),x)

Example

① "x 大于3": P(x)

② "x大于y": Q(x,y)

③ "x+1大于x": R(x)

❶ 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

① 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:

② " \times 大于3": GREATER(x,3)

③ "x 大于y": GREATER(x, y)

④ "x+1大于x": GREATER(plus(x,1),x)

Example

① "x 大于3": P(x)

② "x大于y": Q(x,y)

③ "x+1大于x": R(x)

④ 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

● 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:

② "x 大于3": GREATER(x,3)

③ "x 大于y": GREATER(x, y)

③ "x+1大于x": GREATER(plus(x,1),x)

Example

① "x 大于3": P(x)

② "x大于y": Q(x, y)

③ "x+1大于x": R(x)

● 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

❶ 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:

② "x大于3": GREATER(x,3)

③ "x大于y": GREATER(x, y)

④ "x+1大于x": GREATER(plus(x,1),x)

Example

● "x 大于3": P(x)

② "x大于y": Q(x, y)

③ "x+1大于x": R(x)

❶ 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

● 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:

② "x 大于3": GREATER(x,3)

③ "x 大于y": GREATER(x, y)

④ "x+1大于x": GREATER(plus(x,1),x)

Example

① "x 大于3": P(x)

② "x大于y": Q(x,y)

③ "x+1大于x": R(x)

❶ 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

❶ 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:

② "x大于3": GREATER(x,3)

③ "x大于y": GREATER(x, y)

③ "x+1 大于x": GREATER(plus(x,1),x)

Example

① "x大于3": P(x)

② "x大于y": Q(x, y)

③ "x+1大于x": R(x)

● 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

● 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:

② "x大于3": GREATER(x,3)

③ "x大于y": GREATER(x, y)

③ "x+1大于x": GREATER(plus(x,1),x)

Example

① "x loves y": Love(x, y)

2 "x's father loves x": Love(father(x), x)

"John's father loves John": Love(father(John), John)

Remark

也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:

• "x is y's father": FATHER(x, y)

Example

• "x loves y": Love(x, y)

2 "x's father loves x": Love(father(x), x)

 $oldsymbol{3}$ "John loves Mary": Love(John, Mary)

• "John's father loves John": Love(father(John), John)

Remark

• 也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:

• "x is y's father": FATHER(x, y)

Example

• "x loves y": Love(x, y)

2 "x's father loves x": Love(father(x), x)

 \bullet "John loves Mary": Love(John, Mary)

"John's father loves John": Love(father(John), John)

Remark

也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:

• "x is y's father": FATHER(x, y)

Example

• "x loves y": Love(x, y)

2 "x's father loves x": Love(father(x), x)

 \bullet "John loves Mary": Love(John, Mary)

"John's father loves John": Love(father(John), John)

Remark

也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:

• "x is y's father": FATHER(x, y)

Example

① "x loves y": Love(x, y)

2 "x's father loves x": Love(father(x), x)

3 "John loves Mary": Love(John, Mary)

"John's father loves John": Love(father(John), John)

Remark

• 也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:

• "x is y's father": FATHER(x, y)

Example

① "x loves y": Love(x, y)

2 "x's father loves x": Love(father(x), x)

 \bullet "John loves Mary": Love(John, Mary)

"John's father loves John": Love(father(John), John)

Remark

• 也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:

• "x is y's father": FATHER(x, y)

Example

• "x loves y": Love(x, y)

2 "x's father loves x": Love(father(x), x)

3 "John loves Mary": Love(John, Mary)

"John's father loves John": Love(father(John), John)

Remark

• 也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:

• "x is y's father": FATHER(x, y)

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常量符号 (constant symbols): 3, John, Mary,...
- 变量符号 (variables): *x*, *y*, *z*,...
- 函数符号 (functions): *plus*, *father*, *f*, *g*,...
- 谓词符号 (predicate): MAN, GREATER, LOVE, P, Q, R,...
- 各种符号应和具体形式化对象相关

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常量符号 (constant symbols): 3, John, Mary,...
- 变量符号 (variables): *x*, *y*, *z*,...
- 函数符号 (functions): *plus*, *father*, *f*, *g*,...
- 谓词符号 (predicate): MAN, GREATER, LOVE, P, Q, R,...
- 各种符号应和具体形式化对象相关

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常量符号 (constant symbols): 3, John, Mary,...
- 变量符号 (variables): *x*, *y*, *z*,...
- 函数符号 (functions): *plus*, *father*, *f*, *g*,...
- 谓词符号 (predicate): MAN, GREATER, LOVE, P, Q, R,...
- 各种符号应和具体形式化对象相关

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常量符号 (constant symbols): 3, John, Mary,...
- 变量符号 (variables): *x*, *y*, *z*,...
- 函数符号 (functions): plus, father, f, g,...
- 谓词符号 (predicate): MAN, GREATER, LOVE, P, Q, R,...
- 各种符号应和具体形式化对象相关

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常量符号 (constant symbols): 3, John, Mary,...
- 变量符号 (variables): *x*, *y*, *z*,...
- 函数符号 (functions): plus, father, f, g,...
- 谓词符号 (predicate): MAN, GREATER, LOVE, P, Q, R,...
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

- 每个函数符号都固定参数的个数, f 的参数的个数为 n, 称为 n 元 函数(n-ary function), 如: plus 是2元函数, father 是1元函数;
- 0元函数退化为常数;
- 每个谓词符号都固定参数的个数, P 的参数的个数为 n, 称 为 n 元谓词(n-ary predicate),如: LOVE 和GREATER 是2元谓词, MAN 和 MORTAL 是1元谓词;
- 0元谓词退化为命题.

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

- 常量符号、变量符号是项;
- ② $\ddot{a} f$ 是一个n元函数符号, t_1, t_2, \ldots, t_n 是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

① *x*, 1是项.

by Def(I)

2 plus(x,1)是项.

by (1) + Def(2)

③ plus(plus(x,1),1)是项.

by 2+Def(2)

by 3+Def2

5

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

- 常量符号、变量符号是项;
- ② 若 f是一个n元函数符号, $t_1, t_2, ..., t_n$ 是已经定义的项,则 $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

① *x*, 1 走 项.

by Def ①

② *plus*(x,1)是项.

by ①+Def②

③ plus(plus(x,1),1)是项.

by 2+Def2

• plus(plus(plus(x,1),1),1)是项.

by 3+Def2

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

- 常量符号、变量符号是项;
- $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ 也是项;
- 3 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

- 常量符号、变量符号是项;
- ② 若 f是一个n元函数符号, $t_1, t_2, ..., t_n$ 是已经定义的项,则 $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

- **●** *x*,1是项.
- ② plus(x,1)是项.
- ③ plus(plus(x,1),1)是项.
- ④ plus(plus(plus(x,1),1),1)是项.

by Def(I)

by 1+Def(2)

by 2 + Def 2

by (3) + Def(2)

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

- 常量符号、变量符号是项;
- ② $\ddot{a} f$ 是一个n元函数符号, t_1, t_2, \ldots, t_n 是已经定义的项,则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

- **1** x,1是项.
- ② *plus*(x,1)是项.
- ③ plus(plus(x,1),1)是项.
- plus(plus(plus(x,1),1),1)是项.
- 5

by Def(I)

by (1)+Def(2)

by 2 + Def 2

by 3 + Def(2)

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

- 常量符号、变量符号是项;
- ② 若 f是一个n元函数符号, $t_1, t_2, ..., t_n$ 是已经定义的项,则 $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

1 x,1是项.

② plus(x,1)是项.

③ plus(plus(x,1),1)是项.

• plus(plus(plus(x,1),1),1)是项.

6

by Def(I)

by (1)+Def(2)

by (2)+Def(2)

by 3+Def(2)

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

- 常量符号、变量符号是项;
- ② 若 f是一个n元函数符号, $t_1, t_2, ..., t_n$ 是已经定义的项,则 $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ 也是项;
- 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

1 x,1是项.

② *plus*(x,1)是项.

3 *plus*(*plus*(*x*, 1), 1) 是项.

• plus(plus(plus(x,1),1),1)是项.

by Def(I)

by (1)+Def(2)

by 2+Def2

by ③+Def②

4D> 4B> 4B> 4B> B 990

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

- 常量符号、变量符号是项;
- ② 若 f是一个n元函数符号, $t_1, t_2, ..., t_n$ 是已经定义的项,则 $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ 也是项;
- ③ 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

1 x,1是项.

② *plus*(x,1)是项.

3 plus(plus(x,1),1)是项.

4 plus(plus(plus(x,1),1),1)是项.

6

by Def(I)

by (1)+Def(2)

by (2)+Def(2)

by ③+Def②

Definition (原子公式)

若 P 是 n元谓词符号, t_1, t_2, \ldots, t_n 是项,则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是原子公式 (简称原子 atom).

Example

- \bullet MAN(x), MORTAL(Confucius);
- $extbf{2} ext{ Love}(father(John), John);$
- GREATER(plus(plus(x,1),1),x).

Remark

- 谓词原子和命题一样有真假值.
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式是谓词公式.
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律,如 $P(t_1) \to Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \lor Q(t_2, t_3)$

◆ロト ◆厨 ト ◆ 豆 ト ◆ 豆 ・ 夕 Q C

Definition (原子公式)

若 P 是 n元谓词符号, t_1, t_2, \ldots, t_n 是项,则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是原子公式 (简称原子 atom).

Example

- \bullet *MAN*(x), *MORTAL*(Confucius);
- $ext{2} ext{ Love}(father(John), John);$
- **3**GREATER(plus(plus(x,1),1),x).

Remark

- 谓词原子和命题一样有真假值.
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式是谓词公式.
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律,如 $P(t_1) \to Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \lor Q(t_2, t_3)$

◆ロ > ◆個 > ◆ 重 > ◆ 重 > り へ ②

Definition (原子公式)

若 P 是 n元谓词符号, t_1, t_2, \ldots, t_n 是项,则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是原子公式 (简称原子 atom).

Example

- \bullet *MAN*(x), *MORTAL*(Confucius);
- $2 \ Love(father(John), John);$

Remark

- 谓词原子和命题一样有真假值.
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式是谓词公式.
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律,如 $P(t_1) \to Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \lor Q(t_2, t_3)$

◆ロ > ◆個 > ◆ 重 > ◆ 重 > り へ ②

Definition (原子公式)

若 P 是 n元谓词符号, t_1, t_2, \ldots, t_n 是项,则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是原子公式 (简称原子 atom).

Example

- \bullet *MAN*(x), *MORTAL*(Confucius);
- 2 Love(father(John), John);

Remark

- 谓词原子和命题一样有真假值.
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式是谓词公式
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律,如 $P(t_1) \to Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \lor Q(t_2, t_3)$

Definition (原子公式)

若 P 是 n元谓词符号, t_1, t_2, \ldots, t_n 是项,则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是原子公式 (简称原子 atom).

Example

- \bullet *MAN*(x), *MORTAL*(Confucius);
- $2 \ Love(father(John), John);$

Remark

- 谓词原子和命题一样有真假值.
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式是谓词公式.
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律,如 $P(t_1) \to Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \lor Q(t_2, t_3)$

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ · 臺 · 夕Qぐ

Definition (原子公式)

若 P 是 n元谓词符号, t_1, t_2, \ldots, t_n 是项,则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是原子公式 (简称原子 atom).

Example

- \bullet *MAN*(x), *MORTAL*(Confucius);
- $2 \ Love(father(John), John);$

- 谓词原子和命题一样有真假值.
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式是谓词公式.
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律,如 $P(t_1) \to Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \lor Q(t_2, t_3)$

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数.
- There exists a number that is prime.
- ullet For every number x, there exists a number y such that x < y

- 不涉及到某个特定的个体
- 对个体所在的对象集合的整体性质进行描述
- 引入新的逻辑符号 量词(Quantifier) 描述对象的整体性质

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数.
- There exists a number that is prime.
- ullet For every number x, there exists a number y such that x < y

- 不涉及到某个特定的个体
- 对个体所在的对象集合的整体性质进行描述
- 引入新的逻辑符号 量词(Quantifier) 描述对象的整体性质

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数.
- There exists a number that is prime.
- For every number x, there exists a number y such that x < y.

Remark

- 不涉及到某个特定的个体
- 对个体所在的对象集合的整体性质进行描述
- 引入新的逻辑符号 量词(Quantifier) 描述对象的整体性质

YaoYu

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数.
- There exists a number that is prime.
- For every number x, there exists a number y such that x < y.

- 不涉及到某个特定的个体.
- 对个体所在的对象集合的整体性质进行描述
- 引入新的逻辑符号 量词(Quantifier) 描述对象的整体性质

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数.
- There exists a number that is prime.
- For every number x, there exists a number y such that x < y.

- 不涉及到某个特定的个体.
- 对个体所在的对象集合的整体性质进行描述.
- 引入新的逻辑符号 量词(Quantifier) 描述对象的整体性质

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数.
- There exists a number that is prime.
- For every number x, there exists a number y such that x < y.

- 不涉及到某个特定的个体.
- 对个体所在的对象集合的整体性质进行描述.
- 引入新的逻辑符号 量词(Quantifier) 描述对象的整体性质.

量词 (2/2)

量词

全称量词(Universal)	特称量词(Existentail)
forall x	there exists an x
for every x	for some x
for each x	for at least one x
A	3

- 每个有理数都是实数. $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$.
- There exists a number that is prime. $\exists x Prime(x)$.
- For every number x, there exists a number y such that x < y $\forall x (\exists y Less(x, y))$.

量词 (2/2)

量词

全称量词(Universal)	特称量词(Existentail)
forall x	there exists an x
for every x	for some x
for each x	for at least one x
A	3

- 每个有理数都是实数. $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$.
- There exists a number that is prime. $\exists x Prime(x)$.
- For every number x, there exists a number y such that x < y $\forall x (\exists y Less(x, y))$.

量词 (2/2)

量词

全称量词(Universal)	特称量词(Existentail)
forall x	there exists an x
for every x	for some x
for each x	for at least one x
A	3

- 每个有理数都是实数. $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$.
- There exists a number that is prime. $\exists x Prime(x)$.
- For every number x, there exists a number y such that x < y. $\forall x (\exists y Less(x, y))$.

- Base: T, F和谓词原子是WFF;
- 2 Inductive rules:
- ③ 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFF,称为谓词公式, 简称为公式.

Definition (合式公式(WFF)的归纳定义)

- Base: T, F和谓词原子是WFF;
- 2 Inductive rules:
 - 若 F, G 是 WFF, 则 $(\neg F), (F \land G), (F \lor G), (F \to G), (F \leftrightarrow G)$ 是 WFF; [F, G称为归纳定义中的元变量(metavariable)];
- ③ 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFF,称为谓词公式, 简称为公式.

YaoYu

- Base: T, F和谓词原子是WFF;
- 2 Inductive rules:
 - 若 F, G 是 WFF, 则 $(\neg F), (F \land G), (F \lor G), (F \to G), (F \leftrightarrow G)$ 是 WFF; [F, G称为归纳定义中的元变量(metavariable)];
 - 若 F 是WFF, x 是变量符号,则 (∀xF), (∃xF) 是 WFF;
- 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFF,称为谓词公式, 简称为公式.

- Base: T, F和谓词原子是WFF;
- 2 Inductive rules:
 - 若 F, G 是 WFF, 则 $(\neg F), (F \land G), (F \lor G), (F \to G), (F \leftrightarrow G)$ 是 WFF; [F, G称为归纳定义中的元变量(metavariable)];
 - 若 F 是WFF, x 是变量符号,则 $(\forall xF)$, $(\exists xF)$ 是 WFF;
- 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFF,称为谓词公式, 简称为公式。

- Base: T, F和谓词原子是WFF;
- 2 Inductive rules:
 - 若 F, G 是 WFF, 则 $(\neg F), (F \land G), (F \lor G), (F \to G), (F \leftrightarrow G)$ 是 WFF; [F, G称为归纳定义中的元变量(metavariable)];
 - 若 F 是WFF, x 是变量符号,则 $(\forall xF)$, $(\exists xF)$ 是 WFF;
- 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFF,称为谓词公式, 简称为公式。

- **1** MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius), MORTAL(Confucius) \not \not \not \forall WFF; (by Def①)
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ 是 WFF; (by Def②+①)
- ③ $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ 是 WFF; (by Def③+②)
- ② $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius))$ 是 WFF; (by Def(2)+③①)
- $(((\forall x (MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius)) MORTAL(Confucius)) \not \succeq WFF; (by Def(2)+(4)(1))$

- **1** MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius), MORTAL(Confucius) \not \not \not \forall WFF; (by Def①)
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ \not WFF; (by Def②+①)
- **③** $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ 是 WFF; (by Def③+②)
- ① $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius))$ 是 WFF; (by Def②+③①)
- $(((\forall x (MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius)) MORTAL(Confucius)) \not \succeq WFF; (by Def(2)+(4)(1))$

- **1** MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius), MORTAL(Confucius) \not \not \not \forall WFF; (by Def①)
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ \not WFF; (by Def②+①)
- **③** $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ \not WFF; (by Def③+②)
- ① $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius))$ 是 WFF; (by Def②+③①)

- **1** MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius), MORTAL(Confucius) \not \not \not \forall WFF; (by Def①)
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ \not WFF; (by Def②+①)
- **③** $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ \not WFF; (by Def③+②)
- **①** $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius))$ 是 WFF; (by Def(②+③①)
- ⑤ $(((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius)) \rightarrow MORTAL(Confucius))$ \not WFF; (by Def(2)+(④(1))

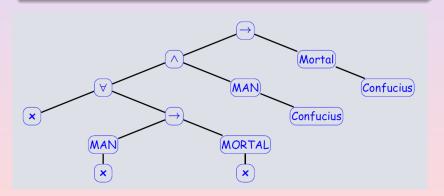
Example

- **①** MAN(x), MORTAL(x), MAN(Confucius), MORTAL(Confucius) \not \not \not \not WFF; (by Def①)
- ② $(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))$ \not WFF; (by Def②+①)
- **③** $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)))$ \not WFF; (by Def③+②)
- **①** $((\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \land MAN(Confucius))$ 是 WFF; (by Def(②+③①)

公式的语法树

Example

• $(((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius)) \to MORTAL(Confucius))$



- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

括号,
$$\forall$$
, \exists , \neg , \land , \lor , \rightarrow , \leftrightarrow

• 同一2元运算符号按从左到右进行结合.

- ② $\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \land MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:
 括号、∀、∃、¬、∧、∨、→、↔
- 同一2元运算符号按从左到右进行结合

- ② $\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \land MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$
- 3 $\forall x P(x) \to Q(x) \equiv (\forall x P(x)) \to Q(x) \neq \forall x (P(x) \to Q(x)).$

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:
 括号、∀、∃、¬、∧、∨、→、↔
- 同一2元运算符号按从左到右进行结合.

- $\forall x (MAN(x) \to MORTAL(x)) \land MAN(Confucius) \to \\ MORTAL(Confucius)$

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:
 括号, ∀, ∃, ¬, ∧, ∨, →, ↔
- 同一2元运算符号按从左到右进行结合.

- $\forall x (MAN(x) \to MORTAL(x)) \land MAN(Confucius) \to \\ MORTAL(Confucius)$

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:
 括号, ∀, ∃, ¬, ∧, ∨, →, ↔
- 同一2元运算符号按从左到右进行结合.

- $\forall x (MAN(x) \to MORTAL(x)) \land MAN(Confucius) \to MORTAL(Confucius)$

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:
 括号、∀、∃、¬、∧、∨、→、↔
- 同一2元运算符号按从左到右进行结合.

- $\forall x (MAN(x) \to MORTAL(x)) \land MAN(Confucius) \to MORTAL(Confucius)$

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \forall x (C(x) \to B(x)).$

Remark(Why not $\forall x (C(x) \land B(x))$?)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有 涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也 能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x (C(x) \to B(x))$ 能正确反映上述关系
- $\forall x(C(x) \land B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \land B(张三) 为假, \forall x(C(x) \land B(x)) 亦假;$
- " $C(x) \rightarrow$ " $\pi \rightarrow 2\pi R$ 定条件.

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- *B*(*x*): *x*去过北京;
- $\bullet \ \forall x (C(x) \to B(x)).$

Remark(Why not $\forall x (C(x) \land B(x))$?)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有 涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也 能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \land B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \land B(张三) 为假, \forall x(C(x) \land B(x)) 亦假;$
- " $C(x) \rightarrow$ " $\pi \rightarrow 2\pi R$ 定条件.

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \forall x (C(x) \to B(x)).$

Remark(Why not $\forall x (C(x) \land B(x))$?)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有 涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也 能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x (C(x) \to B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \land B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \land B(张三) 为假, \forall x(C(x) \land B(x)) 亦假;$
- " $C(x) \rightarrow$ " $\pi \rightarrow 2\pi R$ 定条件.

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\forall x (C(x) \rightarrow B(x)).$

Remark(Why not $\forall x (C(x) \land B(x))$?)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有 涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也 能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \land B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \land B(张三) 为假, \forall x(C(x) \land B(x)) 亦假;$
- " $C(x) \rightarrow$ " $\pi \rightarrow 2\pi R$ 定条件.

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \forall x (C(x) \to B(x)).$

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有 涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也 能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x (C(x) \to B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \land B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(\mathcal{X}=) \land B(\mathcal{X}=)$ 为假, $\forall x(C(x) \land B(x))$ 亦假;
- " $C(x) \rightarrow$ " $\pi \rightarrow 2\pi R$ 定条件.

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \forall x (C(x) \to B(x)).$

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有 涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也 能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \land B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(\mathcal{X}=) \land B(\mathcal{X}=)$ 为假, $\forall x(C(x) \land B(x))$ 亦假;
- " $C(x) \rightarrow$ " $\pi \rightarrow 2\pi R$ 定条件

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\forall x (C(x) \rightarrow B(x)).$

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有 涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也 能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \land B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \land B(张三) 为假, \forall x(C(x) \land B(x)) 亦假;$

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \forall x (C(x) \to B(x)).$

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有 涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也 能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \land B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \land B(张三) 为假, \forall x(C(x) \land B(x)) 亦假;$

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \exists x (C(x) \land B(x)).$

Remark(Why not $\exists x (C(x) \rightarrow B(x))$?)

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x (C(x) \land B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \to B(张三)$ 为真, $\exists x(C(x) \to B(x))$ 亦真;
- " $C(x) \wedge$ " 称为特称限定条件.

◆ロト ◆部ト ◆恵ト ◆恵ト ・恵 ・ 夕久○

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- *B*(*x*): *x*去过北京;
- $\bullet \exists x (C(x) \land B(x)).$

Remark(Why not $\exists x (C(x) \rightarrow B(x))$?)

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x (C(x) \land B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \to B(张三)$ 为真, $\exists x(C(x) \to B(x))$ 亦真;
- " $C(x) \wedge$ " 称为特称限定条件.

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ ■ 釣९@

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \exists x (C(x) \land B(x)).$

Remark(Why not $\exists x (C(x) \rightarrow B(x))$?)

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x (C(x) \land B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(\mathcal{R} =) \to B(\mathcal{R} =)$ 为真, $\exists x(C(x) \to B(x))$ 亦真;
- " $C(x) \wedge$ "称为特称限定条件.

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \exists x (C(x) \land B(x)).$

Remark(Why not $\exists x (C(x) \rightarrow B(x))$?)

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到 不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证 该特称量词公式是假;
- $\exists x (C(x) \land B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \to B(张三)$ 为真, $\exists x(C(x) \to B(x))$ 亦真;
- " $C(x) \wedge$ " 称为特称限定条件.

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \exists x (C(x) \land B(x)).$

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x (C(x) \land B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \to B(张三)$ 为真, $\exists x(C(x) \to B(x))$ 亦真;
- "C(x)∧"称为特称限定条件.

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \exists x (C(x) \land B(x)).$

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x (C(x) \land B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \to B(张三)$ 为真, $\exists x(C(x) \to B(x))$ 亦真;
- "C(x) ∧ " 称为特称限定条件.

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \exists x (C(x) \land B(x)).$

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x (C(x) \land B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \to B(张三)$ 为真, $\exists x(C(x) \to B(x))$ 亦真;
- "C(x)∧"称为特称限定条件

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- C(x): x是这个班的学生;
- B(x): x去过北京;
- $\bullet \ \exists x (C(x) \land B(x)).$

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x (C(x) \land B(x))$ 能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$ 则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \to B(张三)$ 为真, $\exists x(C(x) \to B(x))$ 亦真;
- " $C(x) \wedge$ " 称为特称限定条件.

喝酒者悖论

- There is someone in the pub such that, if he is drinking, everyone in the pub is drinking.
- $\bullet \exists x (D(x) \to \forall y D(y)).$

喝酒者悖论

- There is someone in the pub such that, if he is drinking, everyone in the pub is drinking.
- $\bullet \ \exists x (D(x) \to \forall y D(y)).$

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x, y): $y \neq x$ 的最好的朋友;
- Inequal(x, y): x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于: "对任意的 z, 如果 z 不等于 y,
 则 x 和 z 不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)));$
- 引入中缀谓词" \neq ": $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$; $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;

◆ロ → ◆部 → ◆ き → を ● り へ で

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x,y): y \in x$ 的最好的朋友;
- Inequal(x, y): x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于: "对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)));$
- 引入中级谓词" \neq ": $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$; $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- ☞ 常用记号 \exists ! 表示"存在唯一": $\forall x \exists ! y B(x, y)$

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x, y): $y \in x$ 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y) : x \rightarrow y \in X$ 是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于: "对任意的 z, 如果 z 不等于 y,
 则 x 和 z 不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)));$
- 引入中级谓词" \neq ": $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$; $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;

常用记亏 \exists ! 表示 存在唯一: $\forall x \exists$! yB(x, y)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x,y): y \in x$ 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y) : x \rightarrow y \in X$ 是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于: "对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)));$
- 引入中缀谓词" \neq ": $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$; $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 常用记号 \exists ! 表示"存在唯一": $\forall x \exists ! y B(x, y)$

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x, y): $y \in x$ 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y) : x \rightarrow y \in X$ 是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于: "对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)));$
- 引入中缀谓词" \neq ": $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$; $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 常用记号 \exists ! 表示"存在唯一": $\forall x \exists ! y B(x, y)$.

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x, y): $y \in x$ 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y) : x \rightarrow y \in X$ 是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于: "对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)));$
- □
 引入中缀谓词"≠": Inequal(x, y) $\triangleq x \neq y$;

 $\forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x,z)));$

■ 常用记号 \exists ! 表示"存在唯一": $\forall x \exists ! y B(x, y)$

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x, y): $y \in x$ 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y) : x \rightarrow y \in X$ 是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于: "对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)));$
- 引入中缀谓词" \neq ": $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$; $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- 屬 常用记号 ∃! 表示"存在唯一": $\forall x$ ∃!yB(x, y)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- B(x, y): $y \in x$ 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y) : x \rightarrow y \in X$ 是不同的对象;
- 唯一性: "y是唯一的"等价于: "对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)));$
- 引入中级谓词" \neq ": $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$; $\forall x \exists y (B(x, y) \land \forall z (z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;
- ☞ 常用记号 \exists ! 表示"存在唯一": $\forall x \exists$! yB(x, y).

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor:
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

- IS 引入函数符号: succ(x) 表示 x 的直接后继, pred(x)表示 x 的直接 前驱;
- $A_1 \quad \forall x \exists y ((y = succ(x)) \land \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
- $A_2 \quad \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \land \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

◆□ > ◆圖 > ◆量 > ● ● 9 < ○</p>

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

- 引入函数符号: succ(x) 表示 x 的直接后继, pred(x)表示 x 的直接 前驱;
- $A_1 \quad \forall x \exists y ((y = succ(x)) \land \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
- $A_2 \quad \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \land \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

◆□ > ◆圖 > ◆量 > ● ● 9 < ○</p>

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

- 『 引入函数符号: succ(x) 表示 x 的直接后继, pred(x)表示 x 的直接 前驱;
- $A_1 \quad \forall x \exists y ((y = succ(x)) \land \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
- $A_2 \quad \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \quad \forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y((y = pred(x)) \land \forall z(z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

- 引入函数符号: succ(x) 表示 x 的直接后继, pred(x)表示 x 的直接 前驱;
- $A_1 \quad \forall x \exists y ((y = succ(x)) \land \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
- $A_2 \quad \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \quad \forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y((y = pred(x)) \land \forall z(z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

- 引入函数符号: succ(x) 表示 x 的直接后继, pred(x)表示 x 的直接 前驱;
- $A_1 \quad \forall x \exists y ((y = succ(x)) \land \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
- $A_2 \quad \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \quad \forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y((y = pred(x)) \land \forall z(z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

◆ロト ◆御 ト ◆ 恵 ト ◆ 恵 ・ 夕 Q ○

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

- 引入函数符号: succ(x) 表示 x 的直接后继, pred(x)表示 x 的直接 前驱;
- $A_1 \quad \forall x \exists y ((y = succ(x)) \land \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
- $A_2 \quad \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \land \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

◆□▶◆圖▶◆臺▶◆臺▶ 臺 かへで

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

- 引入函数符号: succ(x) 表示 x 的直接后继, pred(x)表示 x 的直接 前驱;
- $A_1 \quad \forall x \exists y ((y = succ(x)) \land \forall z (z = succ(x) \rightarrow y = z));$
- $A_2 \quad \neg \exists x (0 = succ(x));$
- $A_3 \quad \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y ((y = pred(x)) \land \forall z (z = pred(x) \rightarrow y = z))).$

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域,F 中出现的 x 称 为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也 称为自由变量(free variable).

- $\bullet \ \forall x \exists y P(x,y) \land Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y \text{ is } P(x, y)$;
- P中的 x和 y 是约束变量;
- Q中的 x 是自由变量

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称 为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也 称为自由变量(free variable).

- $\forall x \exists y P(x, y) \land Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y \text{ is } P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称 为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也 称为自由变量(free variable).

Example

- $\bullet \ \forall x \exists y P(x,y) \land Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y \text{ is } P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量

□ → ◆□ → ◆ Ē → ◆ Ē → ◆ ◆ ◆ ◆ ◆

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称 为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也 称为自由变量(free variable).

Example

- $\bullet \ \forall x \exists y P(x,y) \land Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y \text{ is } P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量

□ → ◆□ → ◆ Ē → ◆ Ē → ◆ ◆ ◆ ◆ ◆

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称 为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也 称为自由变量(free variable).

Example

- $\bullet \ \forall x \exists y P(x,y) \land Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is P(x, y);
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q中的 x 是自由变量

□ → ◆□ → ◆ Ē → ◆ Ē → ◆ ◆ ◆ ◆ ◆

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称 为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也 称为自由变量(free variable).

Example

- $\bullet \ \forall x \exists y P(x,y) \land Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is P(x, y);
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量

1 > ◆ 回 > ◆ 豆 > ◆ 豆 * り < ○</p>

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称 为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也 称为自由变量(free variable).

- $\bullet \ \forall x \exists y P(x,y) \land Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is P(x, y);
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q中的 x 是自由变量

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称 为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也 称为自由变量(free variable).

- $\bullet \ \forall x \exists y P(x,y) \land Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is P(x, y);
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

Remark

- 谓词 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的语义解释和对象 x_1, x_2, \ldots, x_n 相关;
- 解释一个谓词公式需要解释:对象和原子两个部分.

Definition

F 是一谓词公式,F 的一个解释 I 包含一个集合 \mathcal{D} (称为论域 Domain), 及:

- 每个常量符号对应于 D 中的一个元素;
- ② 每个 n元函数符号对应于一个 $D^n \longrightarrow D$ 的函数;
- **③** 每个 n元谓词符号对应于一个 D^n → {0,1}的函数.

Definition (公式F在解释I下的真值)

设 F 是一谓词公式, F在解释 I下的真值记为: F_I, 其归纳定义如下:

- - $F|_{I} = \begin{cases} \neg(A|_{I}), & \text{if} \quad F = \neg A \\ (A|_{I}) \wedge (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \wedge B \\ (A|_{I}) \vee (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \vee B \\ (A|_{I}) \rightarrow (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \rightarrow B \\ (A|_{I}) \leftrightarrow (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \leftrightarrow B \end{cases}$
- ② 若 $F = \forall xG$, $F|_I = 1$, iff, 对约束变量 x 在 D 中的每个取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
- ② $\overline{A}F = \exists xG, \ F|_I = 1$, iff, 存在约束变量 x 在 D 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 使得 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
- ③ 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定 D 中的值时公式才有解释.

<ロ > ← □ >

Definition (公式F在解释I下的真值)

设 F 是一谓词公式, F在解释 I下的真值记为: F I, 其归纳定义如下:

- 2

$$F|_{I} = \begin{cases} \neg(A|_{I}), & \text{if} \quad F = \neg A \\ (A|_{I}) \wedge (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \wedge B \\ (A|_{I}) \vee (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \vee B \\ (A|_{I}) \rightarrow (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \rightarrow B \\ (A|_{I}) \leftrightarrow (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

- ② $\dot{x}F = \forall xG, \ F|_I = 1$, iff, 对约束变量 $x \in \mathcal{D}$ 中的每个取值 $d \in \mathcal{D}$ 都有 $G(d/x)|_I = 1$: 否则 $F|_I = 0$:
- ⑤ 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定 D 中的值时公式才有解释.

Definition (公式F在解释I下的真值)

设 F 是一谓词公式, F在解释I下的真值记为: F_I, 其归纳定义如下:

- 若 $F = P(t_1, t_2, ..., t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, ..., t_n|_I$, 是 项 $t_1, t_2, ..., t_n$ 在 I 下的取值,则 $F|_I = P(t_1|_I, t_2|_I, ..., t_n|_I)$;
 - $F|_{I} = \begin{cases} \neg(A|_{I}), & \text{if} \quad F = \neg A \\ (A|_{I}) \wedge (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \wedge B \\ (A|_{I}) \vee (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \vee B \\ (A|_{I}) \rightarrow (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \rightarrow B \\ (A|_{I}) \leftrightarrow (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \leftrightarrow B \end{cases}$
- ③ 若 $F = \forall xG$, $F|_{I} = 1$, iff, 对约束变量 x 在 D 中的每个取值 $d \in D$, 都有 $G(d/x)|_{I} = 1$; 否则 $F|_{I} = 0$;
- $\overrightarrow{A}F = \exists xG, \ F|_I = 1$, iff, 存在约束变量 x 在 \mathcal{D} 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 使得 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
- ③ 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定 D 中的值时公式才有解释.

◆ロ > 4回 > 4 豆 > 4 豆 > 4 回 > 4

Definition (公式F在解释I下的真值)

设 F 是一谓词公式, F在解释I下的真值记为: F₁, 其归纳定义如下:

- 项 t_1, t_2, \ldots, t_n 在 I 下的取值,则 $F|_I = P(t_1|_I, t_2|_I, \ldots, t_n|_I)$;

$$F|_{I} = \begin{cases} \neg(A|_{I}), & \text{if} \quad F = \neg A \\ (A|_{I}) \wedge (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \wedge B \\ (A|_{I}) \vee (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \vee B \\ (A|_{I}) \rightarrow (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \rightarrow B \\ (A|_{I}) \leftrightarrow (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

- ③ 若 $F = \forall xG$, $F|_{I} = 1$, iff, 对约束变量 x 在 D 中的每个取 值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_{I} = 1$; 否则 $F|_{I} = 0$;
- ④ 若 $F = \exists xG$, $F_I = 1$, iff, 存在约束变量 x 在 D 中的取值 $d \in D$, 使 得 $G(d/x)|_{I}=1$; 否则 $F|_{I}=0$;

4□ > 4♠ > 4 ≥ > 4 ≥ >

Definition (公式F在解释I下的真值)

设 F 是一谓词公式, F在解释I下的真值记为: F_I, 其归纳定义如下:

- 2

$$F|_{I} = \begin{cases} \neg(A|_{I}), & \text{if} \quad F = \neg A \\ (A|_{I}) \wedge (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \wedge B \\ (A|_{I}) \vee (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \vee B \\ (A|_{I}) \rightarrow (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \rightarrow B \\ (A|_{I}) \leftrightarrow (B|_{I}), & \text{if} \quad F = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

- ③ $\overline{AF} = \forall xG$, $F|_I = 1$, iff, 对约束变量 $x \in \mathcal{D}$ 中的每个取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
- 若 $F = \exists xG$, $F|_I = 1$, iff, 存在约束变量 x 在 D 中的取值 $d \in D$, 使得 $G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
- ⑤ 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定 D 中的值时公式才有解释.

Example (1/2)

- ① 公式 $\forall x P(x)$ 和 $\exists x \neg P(x)$;
- **2** $\mathcal{D} = \{1, 2\}$
- **4** $(\forall x P(x))|_I = 0$, because $P|_I(2) = 0$;
- **3** $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, because $P|_I(2) = 0, (\neg P)|_I(2) = 1$.

Example (2/2)

- ① 公式 $G = \forall x (P(x) \rightarrow Q(f(x), a));$
- **2** $\mathcal{D} = \{1, 2\}$
- **3** $\begin{array}{c|c|c|c|c} a & f(1) & f(2) \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \end{array}$
- $(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I,x=1} = P|_{I}(1) \to Q|_{I}(2, 1) = 1;$
- **6** $(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I,x=2} = P|_{I}(2) \to Q|_{I}(1, 1) = 1;$

Outline

- 1 谓词与量词
- 2 谓词公式
 - 逻辑恒等式和永真蕴涵式
 - 谓词永真公式
 - 前束范式
- ③ 谓词公式的自然推理

Definition

- 公式 G 是可满足的 (相容的, satisfiable, consistent), iff, 存在解 释 I, 使得: $G|_{I}=1$, 称 I 是 G 的模型 (model);
- 公式 G 是矛盾的 (永假的, unsatisfiable, invalid), iff, 对所有的解 释 $I, G|_{I} = 0$;
- 公式 G 是永真的 (valid), iff, 对所有的解释 I, $G|_{I}=1$.

由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不 |

Definition

- 公式 G 是可满足的 (相容的, satisfiable, consistent), iff, 存在解释 I, 使得: $G|_{I}=1$, 称 I 是 G 的模型 (model);
- 公式 G 是矛盾的 (永假的, unsatisfiable, invalid), iff, 对所有的解释 I, $G|_{I}=0$;
- 公式 G 是永真的 (valid), iff, 对所有的解释 I, $G|_{I}=1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, 所以该公式是可满足的,但不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x)) \ \exists x \neq n$;
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall y D(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;

由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的,因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假.

Definition

- 公式 G 是可满足的 (相容的, satisfiable, consistent), iff, 存在解释 I, 使得: $G|_{I}=1$, 称 I 是 G 的模型 (model);
- 公式 G 是矛盾的 (永假的, unsatisfiable, invalid), iff, 对所有的解释 I, $G|_{I}=0$;
- 公式 G 是永真的 (valid), iff, 对所有的解释 I, $G|_{I}=1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_{I} = 1$, 所以该公式是可满足的,但不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x))$ 是永真的;
- $\exists x(D(x) \to \forall yD(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;

由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的,因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假.

Definition

- 公式 G 是可满足的 (相容的, satisfiable, consistent), iff, 存在解释 I, 使得: $G|_{I}=1$, 称 I 是 G 的模型 (model);
- 公式 G 是矛盾的 (永假的, unsatisfiable, invalid), iff, 对所有的解释 I, $G|_{I}=0$;
- 公式 G 是永真的 (valid), iff, 对所有的解释 I, $G|_{I}=1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_{I} = 1$, 所以该公式是可满足的,但不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x)) \ \exists x \land p(x)$
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall yD(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;

由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的,因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假.

| **ト 4回 ト 4 三 ト 4 三 ト 1 三 り** 9 0 0

Definition

- 公式 G 是可满足的 (相容的, satisfiable, consistent), iff, 存在解释 I, 使得: $G|_{I}=1$, 称 I 是 G 的模型 (model);
- 公式 G 是矛盾的 (永假的, unsatisfiable, invalid), iff, 对所有的解释 I, $G|_{I}=0$;
- 公式 G 是永真的 (valid), iff, 对所有的解释 I, $G|_{I}=1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_{I} = 1$, 所以该公式是可满足的,但不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x)) \ \exists x \land p(x)$
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall yD(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;

由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的,因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假.

| **ト 4回 ト 4 三 ト 4 三 ト 1 三 り** 9 0 0

Definition

- 公式 G 是可满足的 (相容的, satisfiable, consistent), iff, 存在解释 I, 使得: $G|_{I}=1$, 称 I 是 G 的模型 (model);
- 公式 G 是矛盾的 (永假的, unsatisfiable, invalid), iff, 对所有的解释 I, $G|_{I}=0$;
- 公式 G 是永真的 (valid), iff, 对所有的解释 I, $G|_{I}=1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, 所以该公式是可满足的,但不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x)) \ \exists x \land p(x)$
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall yD(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;

由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的,因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假.

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff $F \leftrightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I(F \leftrightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I$, $F|_I = G|_I$.

Definition (永真蕴涵关系的等价定义)

- $F \Rightarrow G$;
- iff $F \to G$ 是永真的;
- iff $\forall I(F \rightarrow G)|_{I} = 1$;
- iff $\forall I, F|_I \leqslant G|_I$;
- iff $\forall I$, if $F|_I = 1$, then $G|_I = 1$;
- iff $\forall I$, if $G|_I = 0$, then $F|_I = 0$.

◆□▶ ◆圖▶ ◆臺▶ ◆臺▶ 臺 めなぐ

Remark

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律

- $\bullet \ \forall x P(x) \to \exists x Q(x,y) \Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \lor \exists x Q(x,y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性,对称性和传递性,不等式的传递性等.

Remark

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

- $\bullet \ \forall x P(x) \to \exists x Q(x,y) \Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \lor \exists x Q(x,y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性,对称性和传递性,不等式的传递性等.

Remark

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

- $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x, y) \Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x, y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性,对称性和传递性,不等式的传递性等.

Remark

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

- $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x, y) \Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \lor \exists x Q(x, y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性,对称性和传递性,不等式的传递性等.

Remark

- 所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;
- 谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.

- $\bullet \ \forall x P(x) \to \exists x Q(x,y) \Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \lor \exists x Q(x,y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性,对称性和传递性,不等式的传递性等.

更名规则

Theorem (更名规则)

设 F(x) 表示含自由变量 x 的公式, 若变量 y 不出现再公式 F(x) 中,则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$
$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

Remark

 $\bullet \ \forall x P(x,y) \Leftrightarrow \forall y P(y,y)$

 $\bullet \ \forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall y P(y,y)$

因为上球更夕徒约声与非约声的关系发生了亦少。

更名规则

Theorem (更名规则)

设 F(x) 表示含自由变量 x 的公式, 若变量 y 不出现再公式 F(x) 中,则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$
$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

Remark

- $\bullet \ \forall x P(x,y) \Leftrightarrow \forall y P(y,y)$
- $\bullet \ \forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall y P(y,y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化.

更名规则

Theorem (更名规则)

设 F(x) 表示含自由变量 x 的公式, 若变量 y 不出现再公式 F(x) 中,则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$
$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

Remark

- $\bullet \ \forall x P(x,y) \Leftrightarrow \forall y P(y,y)$
- $\bullet \ \forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall y P(y,y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化

更名规则

Theorem (更名规则)

设 F(x) 表示含自由变量 x 的公式, 若变量 y 不出现再公式 F(x) 中,则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$
$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

Remark

- $\forall x P(x, y) \Leftrightarrow \forall y P(y, y)$
- $\bullet \ \forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall y P(y,y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化.

量词的解消

Theorem (量词的解消)

设 F 是不含自由变量 x 的公式,则:

$$\forall xF \Leftrightarrow F$$
$$\exists xF \Leftrightarrow F$$

Theorem (特例与量词的关系)

设 a 是常量符号,则:

$$\forall x F(x) \Rightarrow F(x)$$
$$F(a) \Rightarrow \exists x F(x)$$

Remark

- 注意,特例化没有恒等关系;如:
- $\mathcal{D} = \{1, 2\}, \ a = 1, \ F(1) = 0, \ F(2) = 1, \ 此时 F(a) 为假, 但是, ∃xF(x) 为真.$

量词的解消

Theorem (量词的解消)

设F是不含自由变量x的公式,则:

$$\forall xF \Leftrightarrow F$$
$$\exists xF \Leftrightarrow F$$

Theorem (特例与量词的关系)

设 a 是常量符号,则:

$$\forall x F(x) \Rightarrow F(x)$$
$$F(a) \Rightarrow \exists x F(x)$$

Remark

- 注意,特例化没有恒等关系;如:
- $\mathcal{D} = \{1, 2\}, \ a = 1, \ F(1) = 0, \ F(2) = 1, \ 此时 F(a) 为假, 但是, ∃xF(x) 为真.$

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有:

$$(\neg(\forall x F(x)))|_I = 1$$
 iff $(\forall x F(x))|_I = 0$ iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land F(d)|_I = 0$ iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land \neg F(d)|_I = 1$ iff $(\exists x \neg F(x))|_I = 1$

◆ロ > ◆ 個 > ◆ 重 > ◆ 重 > り へ で

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有:

$$(\neg(\forall xF(x)))|_I=1$$

 $\mathbf{iff} \ (\forall x F(x))|_I = 0$

iff 存在 $d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_{I} = 0$

iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land \neg F(d)|_I = 1$

iff $(\exists x \neg F(x))|_I = 1$

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有:

◆ロ > ◆昼 > ◆昼 > ● ● の へ ○

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有:

$$(\neg(\forall x F(x)))|_I = 1$$
 iff $(\forall x F(x))|_I = 0$ iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land F(d)|_I = 0$ iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land \neg F(d)|_I = 1$ iff $(\exists x \neg F(x))|_I = 1$

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有:

$$(\neg(\forall x F(x)))|_I = 1$$
 iff $(\forall x F(x))|_I = 0$ iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land F(d)|_I = 0$ iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land \neg F(d)|_I = 1$ iff $(\exists x \neg F(x))|_I = 1$

◆ロト ◆団ト ◆豆ト ◆豆ト ・豆 ・ から(*)

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有:

$$(\neg(\forall x F(x)))|_I = 1$$
 iff $(\forall x F(x))|_I = 0$ iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land F(d)|_I = 0$ iff 存在 $d \in \mathcal{D} \land \neg F(d)|_I = 1$ iff $(\exists x \neg F(x))|_I = 1$

Example (极限)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 的 x, 当 $0 < |x x_0| \le \delta$ 时,有 $|f(x) f(x_0)| \le \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x, 使 得 $0 < |x x_0| \le \delta$ 和 $|f(x) f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立

Example

$$\neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg(\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \lor |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon))$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \land |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

Example (极限)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 的 x, 当 $0 < |x x_0| \le \delta$ 时,有 $|f(x) f(x_0)| \le \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x, 使 得 $0 < |x x_0| \le \delta$ 和 $|f(x) f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$\neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg(\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \lor |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon))$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \land |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

Example (极限)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 的 x, 当 $0 < |x x_0| \le \delta$ 时,有 $|f(x) f(x_0)| \le \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x, 使 得 $0 < |x x_0| \le \delta$ 和 $|f(x) f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$\neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg(\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \lor |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon))$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \land |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

◆ロ → ◆ 部 → ◆ き → ◆ き ・ り へ で

Example (极限)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 的 x, 当 $0 < |x x_0| \le \delta$ 时,有 $|f(x) f(x_0)| \le \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x, 使 得 $0 < |x x_0| \le \delta$ 和 $|f(x) f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$\neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

- $\Leftrightarrow \neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg(\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x x_0| \leqslant \delta) \lor |f(x) f(x_0)| \leqslant \epsilon))$
- $\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x x_0| \leqslant \delta) \land |f(x) f(x_0)| > \epsilon).$

Example (极限)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 的 x, 当 $0 < |x x_0| \le \delta$ 时,有 $|f(x) f(x_0)| \le \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x, 使 得 $0 < |x x_0| \le \delta$ 和 $|f(x) f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$\neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg(\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \lor |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon))$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \land |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

Example (极限)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 的 x, 当 $0 < |x x_0| \le \delta$ 时,有 $|f(x) f(x_0)| \le \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x, 使 得 $0 < |x x_0| \le \delta$ 和 $|f(x) f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$\neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall \epsilon \exists \delta \forall x (\neg(\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \lor |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon))$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon \forall \delta \exists x ((\epsilon > 0 \land \delta > 0 \land 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \land |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

Theorem (辖域的扩张与收缩 (extension & restriction))

设x不在公式G中出现,则:

$$(\forall x F(x)) \land G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \land G)$$

$$(\forall x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \lor G)$$

$$(\exists x F(x)) \land G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \land G)$$

$$(\exists x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \lor G)$$

Example

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y)$$

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y P(y)) \qquad (代入+替换)$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y) \qquad (代入)$$

◆□ > ◆□ > ◆ = > ◆ = → ○ へ ○ ○

Theorem (辖域的扩张与收缩 (extension & restriction))

设x不在公式G中出现,则:

$$(\forall x F(x)) \land G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \land G)$$
$$(\forall x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \lor G)$$
$$(\exists x F(x)) \land G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \land G)$$
$$(\exists x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \lor G)$$

Example

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y)$$

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y P(y)) \qquad (代入+替换)$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y) \qquad (代入)$$

Theorem (辖域的扩张与收缩 (extension & restriction))

设x不在公式G中出现,则:

$$(\forall x F(x)) \land G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \land G)$$

$$(\forall x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \lor G)$$

$$(\exists x F(x)) \land G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \land G)$$

 $(\exists x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \lor G)$

Example

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y)$$

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y P(y)) \qquad (代入+替换)$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y) \qquad (代入)$$

Theorem (辖域的扩张与收缩 (extension & restriction))

设x不在公式G中出现,则:

$$(\forall x F(x)) \land G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \land G)$$

$$(\forall x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \forall x (F(x) \lor G)$$

$$(\exists x F(x)) \land G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \land G)$$

$$(\exists x F(x)) \lor G \Leftrightarrow \exists x (F(x) \lor G)$$

Example

$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y)$$
$$\forall x \forall y (P(x) \lor P(y))$$
$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y P(y)) \qquad (代入+替换)$$
$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y P(y) \qquad (代入)$$

Theorem (量词的分配形式)

设 F(x) 和 G(x) 是两谓词公式,则:

- $\exists x (F(x) \lor G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

Remark

- ③和④没有恒等式;
- 同样 $\exists \tau R(\tau) \land \exists \tau G(\tau)$ 为直 $\exists \tau (R(\tau) \land G(\tau))$ 为假

Theorem (量词的分配形式)

设 F(x) 和 G(x) 是两谓词公式,则:

- $\exists x (F(x) \lor G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$
- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \lor G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

Remark

- ③和4没有恒等式;
- 如解释为, F(x): x 是偶数, G(x): x 是奇数, M, A 自然数集合中, $\forall x(F(x) \lor G(x))$ 为真, A0, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A9,
- 同样, $\exists x F(x) \land \exists x G(x)$ 为真, $\exists x (F(x) \land G(x))$ 为假.

◆ロ → ◆ 個 → ◆ 重 → ● ● り へ ○

Theorem (量词的分配形式)

设 F(x) 和 G(x) 是两谓词公式,则:

- $\exists x (F(x) \lor G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

Remark

- ③和④没有恒等式;
- 如解释为, F(x): x 是偶数, G(x): x 是奇数,则,在自然数集合中, $\forall x(F(x) \lor G(x))$ 为真,但, $\forall xF(x) \lor \forall xG(x)$ 为假;
- $\beta \neq A$, $\exists x F(x) \land \exists x G(x) \Rightarrow A$, $\exists x (F(x) \land G(x)) \Rightarrow A$.

◆ロ → 4 回 → 4 三 → 4 三 → 9 へ ○

Theorem (量词的分配形式)

设 F(x) 和 G(x) 是两谓词公式,则:

- $\exists x (F(x) \lor G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

Remark

- ③和4没有恒等式;
- 如解释为, F(x): x 是偶数, G(x): x 是奇数,则,在自然数集合中, $\forall x(F(x) \lor G(x))$ 为真,但, $\forall xF(x) \lor \forall xG(x)$ 为假;
- 同样, $\exists x F(x) \land \exists x G(x)$ 为真, $\exists x (F(x) \land G(x))$ 为假.

◆ロ → ◆団 → ◆ 豆 → ◆ 豆 ・ 夕 Q ○

Example

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \lor \exists x Q(x)$$

Q(x) (代入+分配形式)

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x)$$

(替换+量词否定)

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q($$

(代入+蕴涵表达式)

Example

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$$
 (代入+替換)

$$\Leftrightarrow \exists x(\neg P(x)) \lor \exists xQ(x) \quad (\land \land + \land \land \land \land)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x) \quad (替换+量词否足)$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$
 (代入+蕴涵表达式)

<ロ > ◆回 > ◆ ● > ◆ ● > ● 9 へ ○

Example

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x)) \qquad \qquad (代入+替换)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (代入+分配形式)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (替换+量词否定)$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \qquad (代入+蕴涵表达式)$$

Example

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x)) \qquad \qquad (代入+替换)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (代入+分配形式)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (替换+量词否定)$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \qquad (代入+經濟表达式)$$

4 D > 4 B > 4 E > 4 E > 9 Q G

Example

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \to Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x)) \qquad (代入+替换)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (代入+分配形式)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x P(x)) \lor \exists x Q(x) \qquad (替换+量词否定)$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \qquad (代入+蕴涵表达式)$$

多个量词的处理

Theorem (多个量词的处理)

- $\exists x \exists y F(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x,y)$
- $\exists y \forall x F(x,y) \Longrightarrow \forall x \exists y F(x,y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

 $\bullet \ \forall x \exists y LOVE(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x LOVE(x,y);$

4 D > 4 B > 4 B > 4 B > 9 Q C

多个量词的处理

Theorem (多个量词的处理)

- $\exists x \exists y F(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x,y)$
- $\exists y \forall x F(x,y) \Longrightarrow \forall x \exists y F(x,y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

- $\forall x \exists y LOVE(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x LOVE(x, y);$

多个量词的处理

Theorem (多个量词的处理)

- $\exists x \exists y F(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x,y)$
- $\exists y \forall x F(x,y) \Longrightarrow \forall x \exists y F(x,y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

- $\forall x \exists y LOVE(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x LOVE(x, y);$
- $\forall x \exists y (x + y = 0) \Rightarrow \exists y \forall x (x + y = 0).$

对偶原理

Definition (对偶公式)

设 G 是一个仅含有 \forall , \exists 和 \neg , \land , \lor 运算符号的公式. G 的对偶公式 G^* 是把 G 中的 \forall , \exists , \land , \lor 和 \mathbf{T} , \mathbf{F} 分别替换 为 \exists , \forall , \lor , \land 和 \mathbf{F} , \mathbf{T} , 且保持原有的运算关系所得到的公式.

Theorem (对偶定理)

设F和G是满足上述条件的公式,则

• $F \Leftrightarrow G$ iff $F^* \Leftrightarrow G^*$;

• $F \Rightarrow G$ iff $G^* \Rightarrow F^*$.

对偶原理

Definition (对偶公式)

设 G 是一个仅含有 \forall , \exists 和 \neg , \land , \lor 运算符号的公式. G 的对偶公式 G^* 是把 G 中的 \forall , \exists , \land , \lor 和 \mathbf{T} , \mathbf{F} 分别替换 为 \exists , \forall , \lor , \land 和 \mathbf{F} , \mathbf{T} , 且保持原有的运算关系所得到的公式.

Theorem (对偶定理)

设F和G是满足上述条件的公式,则

- $F \Leftrightarrow G$ iff $F^* \Leftrightarrow G^*$;
- $F \Rightarrow G$ iff $G^* \Rightarrow F^*$.

对偶原理

Definition (对偶公式)

设 G 是一个仅含有 \forall , \exists 和 \neg , \land , \lor 运算符号的公式. G 的对偶公式 G^* 是把 G 中的 \forall , \exists , \land , \lor 和 \mathbb{T} , \mathbb{F} 分别替换 为 \exists , \forall , \lor , \land 和 \mathbb{F} , \mathbb{T} , 且保持原有的运算关系所得到的公式.

Theorem (对偶定理)

设F和G是满足上述条件的公式,则

- $F \Leftrightarrow G$ iff $F^* \Leftrightarrow G^*$;
- $F \Rightarrow G$ iff $G^* \Rightarrow F^*$.

Example(1/2)

- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \lor G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$
 - $\forall x \exists y F(x,y) \Longrightarrow \exists y \exists x F(x,y)$
- $\forall y \forall x F(x,y) \Longrightarrow \exists x \forall y F(x,y)$

Example(1/2)

- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$
- $\forall y \forall x F(x,y) \exists x \forall y F(x,y)$

Example(1/2)

- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$
- $\forall y \forall x F(x,y) \exists x \forall y F(x,y)$

Example(1/2)

- $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Longrightarrow \forall x (F(x) \lor G(x))$
- $\exists x (F(x) \land G(x)) \Longrightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

◆ロ > ◆ 個 > ◆ 量 > ◆ 量 > り へ ②

Example(2/2)

Example

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg R(x) \lor \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land \bigcirc$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land \bigcirc$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land \bigcirc$$

ロ > 4回 > 4 差 > 4 差 > 差 り 9 @

aoYu 45/71

Example(2/2)

Example

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg R(x) \lor \neg Q(x)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x ((\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land B(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land \forall x B(x)$$

$$\Rightarrow \forall x (\neg P(x) \lor \neg R(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

□ → ◆ □ → ◆ 豊 → ◆ 豊 → 夕 へ で

Example(2/2)的补充证明

存在 B 使得 $(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \lor \neg R) \land B$

Proof.

$$(\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow B \land ((\neg P \lor \neg R) \lor (P \land R))$$

$$\Leftrightarrow B \land ((\neg P \lor \neg R)) \lor (B \land (P \land R))$$

$$\Leftrightarrow C \lor ((\neg P \lor Q) \land (\neg R \lor \neg Q) \land (P \land R))$$

$$\Leftrightarrow C \lor ((\neg P \land P \lor Q \land P) \land (\neg R \lor \neg Q) \land R)$$

$$\Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land (\neg R \land R \lor \neg Q \land R))$$

$$\Leftrightarrow C \lor (Q \land P \land \neg Q \land R)$$

$$\Leftrightarrow C \lor F$$

Example(2/2)一个有问题的证明

Proof.

用CP规则等价证明

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x))$$

$$1 \qquad \Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

2
$$\Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$$

$$\Rightarrow \forall x (R(x) \rightarrow \neg P(x))$$

第3步推导出错:局部变换中对不等式使用替换规则!

$$f(A(x) \Rightarrow B(x) \text{ then } \forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$$
?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意解释 I , 任意的 $d\in\mathcal{D}$, if $A|_{I}(d)$ 为真, then $B|_{I}(d)$ 为真.

设 $\forall x A(x)|_I$ 为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_{I}(d)$ 为真,所以 $B|_{I}(d)$ 为真,

即 $\forall x B(x)|_I$ 为真.

Example(2/2)一个有问题的证明

Proof.

用CP规则等价证明

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$
$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \land \forall x (R(x) \to \neg Q(x))$$
$$1 \Leftrightarrow \forall x ((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x)))$$

2
$$\Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \land (Q(x) \to \neg R(x)))$$

$$3 \qquad \Rightarrow \forall x (R(x) \to \neg P(x))$$

第3步推导出错:局部变换中对不等式使用替换规则!

if
$$A(x) \Rightarrow B(x)$$
 then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意解释 I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_{I}(d)$ 为真, then $B|_{I}(d)$ 为真.

设 $\forall x A(x)|_I$ 为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_{I}(d)$ 为真,所以 $B|_{I}(d)$ 为真,

即 $\forall x B(x)|_I$ 为真.

Example(错误使用替换规则)

Example

$$\forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \exists x \neg (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \neg \underbrace{\exists x (\neg P(x) \land \neg Q(x))}_{C(x)}$$

$$\xrightarrow{D(x)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

错误:局部变换中对不等式使用替换规则!

$$C(x) \Rightarrow D(x) \implies \neg C(x) \Rightarrow \neg D(x)$$

前束范式的定义

Definition (前束范式)

形如: $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n(M)$ 的公式称为前束范式 (Prenix Normal Form), 其中:

$$Q_i x_i = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Example

- $\bullet \ \forall x \forall y (P(x,y) \land Q(x))$
- $\bullet \ \forall x \forall y \exists z (P(x,y) \to Q(x,z))$

Definition

设公式 $F \Leftrightarrow G$, 其中 G 是前束范式, 称 G 为公式 F 的前束范式.

◆ロ > ◆団 > ◆ 量 > ◆ 量 > り < ②</p>

前束范式求解

Theorem

对任意的公式 F, 存在公式 G, 使得 G 是 F 的前束范式.

求解步骤

- ① 消除 \rightarrow , \leftrightarrow ;
- ② 用De Morgan律消除对非原子子公式的否定;
- ③ 对约束变量的重新命名;
- ④ 量词的外提(量词的吸收,扩张和分配等定律的使用).

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\not\Longrightarrow \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\not\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\Rightarrow \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$$

√ Q (~

51/71

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\Rightarrow \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$$

$$1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists x Q(x)$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor O(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\Rightarrow \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$$

$$\bowtie \forall x (P(x) \lor Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \lor \forall y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x (P(x) \lor \forall y Q(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \lor Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$1 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists x Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \lor Q(x))$$

$$2 \Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \lor \exists y Q(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \lor Q(y))$$

Outline

- 1 谓词与量词
- 2 谓词公式
- ③ 谓词公式的自然推理
 - 相关概念的复习
 - 量词的推理规则
 - 形式证明的例子
 - Mechanical Reasoning

Definition

设 H_1, H_2, \ldots, H_n , C是公式, 称C是 H_1, H_2, \ldots, H_n 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n) = 1$, 则有: I(C) = 1. 记为 $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

- \bullet $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$
- ② $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C;$
- $\bullet \neg ((H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- ⑤ $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **③** $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{E} \mathring{\mathcal{X}} \mathring{\mathcal{A}};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}.$

◆□▶ ◆□▶ ◆臺▶ ◆臺▶ ■ 釣९♡

Definition

设 H_1, H_2, \ldots, H_n , C是公式,称C是 H_1, H_2, \ldots, H_n 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n) = 1$, 则有: I(C) = 1. 记为 $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C;$
- ② $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- $\bullet \neg ((H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- **⑤** $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **⑤** $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{E} \hat{x} \hat{p};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}.$

Definition

设 $H_1, H_2, ..., H_n$, C是公式, 称C是 $H_1, H_2, ..., H_n$ 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) = 1$, 则有: I(C) = 1. 记为 $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C;$
- ② $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- $\bullet (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C;$
- **④** $\neg((H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- **⑤** $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **⑤** $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{L} \mathring{\mathcal{A}} \mathring{\mathcal{A}};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}.$

Definition

设 H_1, H_2, \ldots, H_n , C是公式, 称C是 H_1, H_2, \ldots, H_n 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n) = 1$, 则有: I(C) = 1. 记为 $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C;$
- ② $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **④** ¬ $((H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- ⑤ $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **6** $(H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n \land \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{L} \mathring{\mathcal{A}}_{\mathfrak{p}};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}.$

Definition

设 $H_1, H_2, ..., H_n$, C是公式, 称C是 $H_1, H_2, ..., H_n$ 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) = 1$, 则有: I(C) = 1. 记为 $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C;$
- ② $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **④** ¬ $((H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- **⑤** $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **⑤** $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{L} \mathring{\mathcal{A}} \mathring{\mathcal{A}};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}.$

◆□▶◆□▶◆□▶◆□▶ □ り<</p>

Definition

设 $H_1, H_2, ..., H_n$, C是公式, 称C是 $H_1, H_2, ..., H_n$ 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) = 1$, 则有: I(C) = 1. 记为 $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C;$
- ② $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- $\bullet (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C;$
- **④** ¬ $((H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- **⑤** $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **⑤** $(H_1 \land H_2 \land ... \land H_n \land \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{L} \mathring{\mathcal{A}} \mathring{\mathcal{A}};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}.$

Definition

设 $H_1, H_2, ..., H_n$, C是公式, 称C是 $H_1, H_2, ..., H_n$ 的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果 $I(H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) = 1$, 则有: I(C) = 1. 记为 $H_1, H_2, ..., H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

- $\bullet H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C;$
- ② $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$ 是重言式;
- **④** ¬ $((H_1 \land H_2 \land ... \land H_n) \rightarrow C)$ 是矛盾式;
- **⑤** $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是矛盾式;
- **o** $(H_1 \land H_2 \land ... \land H_n \land \neg C) \rightarrow \mathbb{F} \mathcal{L} \mathring{\mathcal{A}} \mathring{\mathcal{A}};$
- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}.$

Definition

- ① 存在 H_j , 使得: $C_i = H_j$; (引入条件)
- ② $C_i = \mathbb{T}$; (引入永真)
- **⑤** 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_{i_i}$ (恒等变换)
- 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$; (不等变换)

Definition

- ① 存在 H_j , 使得: $C_i = H_j$; (引入条件)
- ② $C_i = \mathbb{T}$; (引入永真)
- **③** 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_{i_i}$ (恒等变换)
- 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_{i_j}$ (不等变换)

Definition

- ① 存在 H_j , 使得: $C_i = H_j$; (引入条件)
- ② $C_i = \mathbb{T}$; (引入永真)
- **③** 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$; (恒等变换)
- 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \dots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_{i}$; (不等变换)

Definition

- ① 存在 H_j , 使得: $C_i = H_j$; (引入条件)
- ② $C_i = \mathbb{T}$; (引入永真)
- **③** 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$; (恒等变换)
- 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$; (不等变换)

- ❶ 恒等和不等变换;
- ② 设结论为假,证明条件亦假;
- ③ 设前提为真,证明结论亦真;
- 4 证明序列

- ❶ 恒等和不等变换;
- ② 设结论为假,证明条件亦假;
- ③ 设前提为真,证明结论亦真;
- 4 证明序列

- ❶ 恒等和不等变换;
- ② 设结论为假,证明条件亦假;
- ③ 设前提为真,证明结论亦真;
- 4 证明序列

- ❶ 恒等和不等变换;
- ② 设结论为假,证明条件亦假;
- ③ 设前提为真,证明结论亦真;
- 4 证明序列.

相关记号

Notation

 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \ldots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\bullet \ \forall y P(x,y) \lor Q(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(x,z) \lor Q(x,y) \triangleq G(x,y).$

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则:两个量词的分离和两个量词 的引入;
- 在处理量词时切记:约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性 (Gödel's completeness theorem).

◆ロ > ◆ 母 > ◆ き > ◆ き * り < で</p>

相关记号

Notation

 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \ldots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\bullet \ \forall y P(x,y) \lor Q(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(x,z) \lor Q(x,y) \triangleq G(x,y).$

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则:两个量词的分离和两个量词 的引入;
- 在处理量词时切记:约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性 (Gödel's completeness theorem).

◆ロ → ◆ 個 → ◆ 重 → ● ● り へ ○

Notation

 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \ldots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x, z);$
- $\bullet \ \forall y P(x,y) \lor Q(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(x,z) \lor Q(x,y) \triangleq G(x,y).$

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则:两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记:约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性 (Gödel's completeness theorem).

◆ロ → ◆ 個 → ◆ 重 → ● ● り へ ○

Notation

 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \ldots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\bullet \ \forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x,z);$
- $\bullet \ \forall y P(x,y) \lor Q(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(x,z) \lor Q(x,y) \triangleq G(x,y).$

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则:两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记:约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性 (Gödel's completeness theorem).

Notation

 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \ldots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\bullet \ \forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x,z);$
- $\bullet \ \forall y P(x,y) \lor Q(x,y) \Leftrightarrow \forall z P(x,z) \lor Q(x,y) \triangleq G(x,y).$

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则:两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记:约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性 (Gödel's completeness theorem).

Notation

 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: x_1, x_2, \ldots, x_n 在公式 F 自由出现.

Example

- $\bullet \ \forall y P(y) \lor Q(x) \lor R(z) \triangleq F(x,z);$
- $\bullet \ \forall y P(x, y) \lor Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \lor Q(x, y) \triangleq G(x, y).$

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则:两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记:约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性 (Gödel's completeness theorem).

←□ → ←□ → ←□ → □ → へ○

Universal Specification

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)}$$
 (US) $\frac{\forall x F(x)}{F(c)}$ (US)

F 中出现的约束变量.

☞ 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

Example

∀x∀yP(x, y) ⊢ ∀yP(x, y), 其中: F(x) ≜ ∀yP(x, y);
 ∀x∃uP(x, y) ⊬∃uP(y, y), 因为: y 在 ∀uP(x, y) 中约束

• $\forall x P(x) \rightarrow Q Y P(x) \rightarrow Q;$

● 原因:IIS规则中的量词辖域是整个公式, 而不是局部的子公司

Universal Specification

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)}$$
 (US) $\frac{\forall x F(x)}{F(c)}$ (US)

☞ y 一定不是在公式 F 中出现的约束变量.

☞ 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

Example

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, $\not = \forall y P(x, y)$;
- ∀x∃yP(x, y) ⊬∃yP(y, y), 因为: y 在 ∀yP(x, y) 中约束出现;
- $\forall x P(x) \rightarrow Q \nvdash P(x) \rightarrow Q$;
- 原因:US规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式

◆ロト ◆部ト ◆恵ト ◆恵ト ・恵 ・夕久○

Universal Specification

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)}$$
 (US) $\frac{\forall x F(x)}{F(c)}$ (US)

☞ y 一定不是在公式 F 中出现的约束变量.

曖 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

Example

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, $\not = \psi : F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- $\forall x \exists y P(x, y)$ $\vdash \exists y P(y, y)$, 因为: y 在 $\forall y P(x, y)$ 中约束出现;
- $\forall x P(x) \rightarrow Q \nvdash P(x) \rightarrow Q$;
- 原因:US规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式

◆ロト ◆部ト ◆恵ト ◆恵ト ・恵 ・夕久○

Universal Specification

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)}$$
 (US) $\frac{\forall x F(x)}{F(c)}$ (US)

☞ y 一定不是在公式 F 中出现的约束变量.

曖 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

Example

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, $\not = \forall y P(x, y)$;
- $\forall x \exists y P(x, y) \nvdash \exists y P(y, y)$, 因为: y 在 $\forall y P(x, y)$ 中约束出现;
- $\bullet \ \forall x P(x) \to Q \nvdash P(x) \to Q;$
- 原因:US规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式

◆ロト ◆部ト ◆恵ト ◆恵ト ・恵 ・夕久○

Universal Specification

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)}$$
 (US) $\frac{\forall x F(x)}{F(c)}$ (US)

☞ y 一定不是在公式 F 中出现的约束变量.

曖 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

Example

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, $\not\perp P$: $F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- $\forall x \exists y P(x, y) \nvdash \exists y P(y, y)$, 因为: y 在 $\forall y P(x, y)$ 中约束出现;
- $\bullet \ \forall x P(x) \rightarrow Q \not\vdash P(x) \rightarrow Q;$
- 原因:US规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式.

◆ロ > ← 固 > ← 直 > ← 直 > 一直 * り へ ○

Existensial Specification

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}$$
 (ES)

☞ c 是新引入的常量符号.

曖 对应的不等式: $∃xF(x) \Rightarrow F(c)$

Example

• $\exists u \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y), \text{ \sharp $\psi \colon P(x) \triangleq \exists y P(x, y)$;}$

 $\mathbb{E}_{\mathbb{R}^{N}}(\mathbb{R}^{N}) = \mathbb{E}_{\mathbb{R}^{N}}(\mathbb{R}^{N}) =$

 $\bullet \ \exists x P(x) \to Q \nvdash P(a) \to Q;$

● 原因:ES规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式

Existensial Specification

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}$$
 (ES)

☞ c 是新引入的常量符号.

曖 对应的不等式: $∃xF(x) \Rightarrow \overline{F(c)}$

Example

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$, $\not = \exists y P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash P(a, a)$, 因为: a 在 P(x, a) 中已经出现;
- $\bullet \exists x P(x) \to Q \nvdash P(a) \to Q;$
- 原因:ES规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式

Existensial Specification

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}$$
 (ES)

☞ c 是新引入的常量符号.

曖 对应的不等式: $∃xF(x) \Rightarrow \overline{F(c)}$

Example

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$, $\not = \exists y P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash P(a, a)$, 因为: $a \in P(x, a)$ 中已经出现;
- $\bullet \ \exists x P(x) \to Q \nvdash P(a) \to Q;$
- 原因:ES规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式

◆ロト ◆御 ト ◆ 恵 ト ◆ 恵 ・ 夕 Q ○

Existensial Specification

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}$$
 (ES)

☞ c 是新引入的常量符号.

☞ 对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$

Example

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$, $\not = \exists y P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash P(a, a)$, 因为: a 在 P(x, a) 中已经出现;
- $\exists x P(x) \to Q \nvdash P(a) \to Q$;
- 原因:ES规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式

Existensial Specification

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}$$
 (ES)

☞ c 是新引入的常量符号.

☞ 对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$

Example

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y), \not \perp \varphi : F(x) \triangleq \exists y P(x, y);$
- $\exists x P(x, a) \nvdash P(a, a)$, 因为: a 在 P(x, a) 中已经出现;
- $\exists x P(x) \to Q \nvdash P(a) \to Q$;
- 原因:ES规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式.

Existential Generalization

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)}$$
 (EG) $\frac{F(x)}{\exists y F(y)}$ (EG)

☞ y 是新引入的变量符号.

☞ 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

Example

• $\exists x P(x, a) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$, $\not\exists r \vdash F(y) \triangleq \exists x P(x, y)$;

• $\exists x P(x,a) \lor \exists x \exists x P(x,a)$,因为: x 在 $\exists x P(x,a)$ 中已经约束出现;

• $P(a) \to \exists y Q(y) \lor \exists x P(x) \to \exists y Q(y), \exists x 轄域 是 P(x), 而 不是整个公式。$

Existential Generalization

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)}$$
 (EG) $\frac{F(x)}{\exists y F(y)}$ (EG)

☞ y 是新引入的变量符号.

☞ 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

Example

- $\exists x P(x, a) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$, $\not = \forall x P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash \exists x \exists x P(x, x)$, 因为: $x \in \exists x P(x, a)$ 中已经约束出现;
- $P(a) \to \exists y Q(y) \nvdash \exists x P(x) \to \exists y Q(y)$, $\exists x$ 辖域是P(x), 而不是整个公式...

Existential Generalization

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)}$$
 (EG) $\frac{F(x)}{\exists y F(y)}$ (EG)

☞ y 是新引入的变量符号.

☞ 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

Example

- $\exists x P(x, a) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$, $\not = \forall x P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash \exists x \exists x P(x, x)$, 因为: x 在 $\exists x P(x, a)$ 中已经约束出现;
- $P(a) \to \exists y Q(y) \lor \exists x P(x) \to \exists y Q(y)$, $\exists x$ 辖域是P(x), 而不是整个公式.

Existential Generalization

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)}$$
 (EG) $\frac{F(x)}{\exists y F(y)}$ (EG)

☞ y 是新引入的变量符号.

☞ 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

Example

- $\exists x P(x, a) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$, $\not = \forall x P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash \exists x \exists x P(x, x)$, 因为: x 在 $\exists x P(x, a)$ 中已经约束出现;
- $P(a) \to \exists y Q(y) \nvdash \exists x P(x) \to \exists y Q(y)$, $\exists x$ 辖域是P(x), 而不是整个公式.

Universal Generalization

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)}$$
 (UG)

☞ x 不在 F 中约束出现,且 F 要对 x 的所有取值成立. ☞ 对应的不等式: $F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$.

Example

• $P(x, a) \vdash \forall x P(x, a), \not\exists r : F(x) \triangleq P(x, a);$

• $P(x) \to \exists y Q(y) \lor \forall x P(x) \to \exists y Q(y), \forall x$ 辖域是P(x),而不是整

P(x, a) Y ∀nP(x, n), a 是常量符号,不能用UG规则。

Universal Generalization

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)}$$
 (UG)

☞ x 不在 F 中约束出现,且 F 要对 x 的所有取值成立. **☞** 对应的不等式: $F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$.

Example

- $P(x) \to \exists y Q(y) \nvdash \forall x P(x) \to \exists y Q(y), \forall x$ 辖域是P(x),而不是整个公式.
- P(x,a) $\forall y P(x,y)$, a 是常量符号,不能用UG规则.

◆□▶◆圖▶◆臺▶◆臺▶ 臺 かへで

Universal Generalization

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)}$$
 (UG)

☞ x 不在 F 中约束出现,且 F 要对 x 的所有取值成立. ☞ 对应的不等式: $F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$.

Example

- $P(x, a) \vdash \forall x P(x, a)$, $\not = P(x, a)$;
- $P(x) \to \exists y Q(y) \nvdash \forall x P(x) \to \exists y Q(y), \forall x$ 辖域是P(x),而不是整个公式.
- P(x, a) \(\neq \forall y P(x, y), a 是常量符号,不能用UG规则.

Universal Generalization

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)}$$
 (UG)

☞ x 不在 F 中约束出现,且 F 要对 x 的所有取值成立. ☞ 对应的不等式: $F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$.

Example

- $P(x, a) \vdash \forall x P(x, a)$, $\not\perp + : F(x) \triangleq P(x, a)$;
- $P(x) \to \exists y Q(y) \nvdash \forall x P(x) \to \exists y Q(y), \forall x$ 辖域是P(x),而不是整个公式.
- P(x, a) ⊬ $\forall y P(x, y)$, a 是常量符号,不能用UG规则.

◆ロト ◆団 ▶ ◆ 豊 ト ・ 豊 ・ 夕 Q (?)

Example

- $\exists y F(x,y)$ (①+US)

- $\exists y \forall x F(x, y)$ (4)+EG)

Remark

- $\bullet \ \exists y \forall x F(x,y) \ \not\sqsubseteq \ \forall x \exists y F(x,y)$
- US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;
- 这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.

Example

- $\exists y F(x,y)$ (①+US)

- $\exists y \forall x F(x, y)$ (4)+EG)

Remark

- $\bullet \exists y \forall x F(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x,y)$
- US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;
- 这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则

Example

- $\exists y F(x,y)$ (①+US)

- $\exists y \forall x F(x,y)$ (4)+EG)

Remark

- $\bullet \ \exists y \forall x F(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x,y)$
- US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;
- 这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则

Example

- $\exists y F(x,y)$ (①+US)
- **3** $F(x, c_x)$ (2)+ES)
- $\exists y \forall x F(x, y)$ (4)+EG)

Remark

- $\bullet \ \exists y \forall x F(x,y) \stackrel{\Rightarrow}{\leftarrow} \forall x \exists y F(x,y)$
- US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;
- 这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.

Example

- (P)
- $P(c) \to Q(c)$ (1)+US
- $\exists y P(y)$ (P)
 - (3)+ES
- \bullet P(c)
- Q(c)((2)(4)+MP)
- $\exists x Q(x)$ (5)+EG

- (4) 用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

Example

- (P)
- $\exists y P(y)$ (P)
- \bullet P(c)(3)+ES
- Q(c)((2)(4)+MP)
- $\exists x Q(x)$
 - (5)+EG

Remark

- (4) 用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没 有关系);

◆□▶◆圖▶◆臺▶◆臺▶

Example

Remark

 $\exists x Q(x)$

- ④ 用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;

(5)+EG

• 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US)

◆□ > ◆□ > ◆ □ > ◆ □ > ◆ □ > ◆ ○ ○

Example

- (P) $\exists y P(y)$ (P) \bullet P(c)(3)+ES
- Q(c)((2)(4)+MP)
- $\exists x Q(x)$ (5)+EG

Remark

- (4) 用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没 有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).

Example

 Q(c) ((2)(4)+MP)

5 Q(c) (2)4+MP)

 $\exists x Q(x)$

(5+EG)

(P)

Remark

- ④ 用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系:先特殊(ES), 后一般(US).

- 证明方法的选择:直接证明;间接证明(CP规则,反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件)
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意:避免US+ES后再UG

- 证明方法的选择:直接证明;间接证明(CP规则,反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意:避免US+ES后再UG

- 证明方法的选择:直接证明;间接证明(CP规则,反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意:避免US+ES后再UG

- 证明方法的选择:直接证明;间接证明(CP规则,反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意:避免US+ES后再UG

- 证明方法的选择:直接证明;间接证明(CP规则,反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意:避免US+ES后再UG.

完成证明序列

- $H_1: \\ \forall x(\neg P(x) \lor P(f(x)))$
- **2** $H_2: P(a)$
- \bullet $C: \exists x P(f(x))$

完成证明序列

- $H_1: \\ \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x)))$
- **2** $H_2: P(a)$
- \bullet $C: \exists x P(f(x))$

- **9** P(f(a)) (3.4+MP)
 - $\exists x P(f(x))$

(P)

完成证明序列

- \bullet H_1 :
 - $\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x)))$
- **2** $H_2: P(a)$

- $P(a) \to P(J(a)) \tag{1+1}$
- - $\exists x P(f(x))$ (5)+E

完成证明序列

- $\begin{array}{ll}
 \bullet & H_1: \\
 \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x)))
 \end{array}$
- **2** $H_2: P(a)$
- \bullet $C: \exists x P(f(x))$

- **5** P(f(a)) (3.4+MP
 - $\exists x P(f(x))$

完成证明序列

- $\begin{array}{ll}
 \bullet & H_1: \\
 \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x)))
 \end{array}$
- **2** $H_2: P(a)$
- \bullet $C: \exists x P(f(x))$

- $\bullet P(a)$ (P)
- **3** P(f(a)) (3.4)+MP
- $\exists x P(f(x))$

(5)+EG

完成证明序列

- $\begin{array}{ll}
 \bullet & H_1: \\
 \forall x(\neg P(x) \lor P(f(x)))
 \end{array}$
- **2** $H_2: P(a)$
- \bullet $C: \exists x P(f(x))$

- $\bullet P(a)$ (P)
- **3** P(f(a)) (3.4+MP)

(5)+EG

完成证明序列

$$\begin{array}{ll}
\bullet & H_1: \\
\forall x(\neg P(x) \lor P(f(x)))
\end{array}$$

- **2** $H_2: P(a)$
- \bullet $C: \exists x P(f(x))$

$$\bullet P(a)$$
 (P)

3
$$P(f(a))$$
 (3.4+MP)

完成下列推理的形式证明

条件:

- 纪检人员审查了该部门的每一 个非VIP人员;
- ② 该部门有腐败分子存在并且仅 被同类审查过;
- ③ VIP不是腐败分子.

结论:有纪检人员是腐败分子.

E(x): x是该部门的人员:

 $V(x): x \notin VIP$

S(x, y): x是被y审查

C(x): x是纪检人员

P(x): x是腐败分子

完成下列推理的形式证明

条件:

- 纪检人员审查了该部门的每一 个非VIP人员;
- ② 该部门有腐败分子存在并且仅 被同类审查过:
- ③ VIP不是腐败分子.

结论:有纪检人员是腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(x): x是VIP;

S(x,y): x是被y审查;

C(x): x是纪检人员;

P(x): x是腐败分子.

完成下列推理的形式证明

条件:

● 纪检人员审查了该部门的每一 个非VIP人员;

② 该部门有腐败分子存在并且仅 被同类审查过:

3 VIP不是腐败分子.

结论: 有纪检人员是腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(x): x是VIP;

S(x,y): x是被y审查;

C(x): x是纪检人员;

P(x): x是腐败分子.

 $\bullet H_1: \ \forall x (E(x) \land \neg V(x) \to \exists y (C(y) \land S(x,y)))$

完成下列推理的形式证明

条件:

● 纪检人员审查了该部门的每一 个非VIP人员;

② 该部门有腐败分子存在并且仅被同类审查过;

③ VIP不是腐败分子.

结论: 有纪检人员是腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(x): x是VIP;

S(x,y): x是被y审查;

C(x): x是纪检人员;

P(x): x是腐败分子.

 $\bullet H_1: \ \forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$

 $2 H_2: \exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$

完成下列推理的形式证明

条件:

● 纪检人员审查了该部门的每一 个非VIP人员;

② 该部门有腐败分子存在并且仅 被同类审查过:

■ VIP不是腐败分子.

结论: 有纪检人员是腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

V(x): $x \in VIP$;

S(x, y): x是被y审查;

C(x): x是纪检人员;

P(x): x是腐败分子.

 $2 H_2: \exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$

完成下列推理的形式证明

条件:

● 纪检人员审查了该部门的每一 个非VIP人员;

② 该部门有腐败分子存在并且仅被同类审查过;

■ VIP不是腐败分子.

结论:有纪检人员是腐败分子.

E(x): x是该部门的人员;

 $V(x): x \in VIP;$

S(x, y): x是被y审查;

C(x): x是纪检人员;

P(x): x是腐败分子.

 $\bullet \quad C: \ \exists x (P(x) \land C(x))$

◆□ > ◆□ > ◆ = > ◆ = > ○ へ ○

- \bullet $C: \exists x (P(x) \land C(x))$
- P(y)))

◆□▶◆御▶◆選▶◆選▶・選

- $\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \rightarrow P(y)))$ (P
- $E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a, y) \to P(y))$ ((1)+ES)
- P(a)(2)+简化式)
- ① E(a) (②+简化式)
- ⑤ $\forall y(S(a,y) \to P(y))$ (②+简化式)

- 3 $\neg V(a)$ (3)7)+MT)
- $\forall x (E(x) \land \neg V(x) \rightarrow \\ \exists y (C(y) \land S(x,y)))$ (P)

- - $\mathfrak{S} C(b) \wedge S(a,b)$ (12+ES)
- $O(0) \land D(a, b) \qquad (E) \vdash US$
- **6** C(b) (73+简化式

- **8** $P(b) \land C(b)$ (15+17)
- $P(0) \land C(0) \qquad (13+1)$

- $\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$ (F
- $2 E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a,y) \to P(y))$
- (①+ES) (②+答(ルギ)
- P(a)(②+简化式)
- **日**(a) (C(a a)) D(a) (の) 数ルギ

- **3** $\neg V(a)$ (3)7+MT)
- $\exists y (E(x) \land \neg V(x) \to \exists y (C(y) \land S(x, y)))$ (P)

- $E(a) \land \neg V(a) \to \exists y (C(y) \land S(a, y))$
- $\exists y (C(y) \land S(a, y))$ (101)+MP
- $C(b) \wedge S(a,b)$ (12+ES)
- $O(0) \land D(0,0) \qquad (42 + 125)$
- **1** C(b) (13+简化式
- (13+间化系
- S(a,b) (13+简化式)
- $P(b) \land C(b) \qquad (4E+1)$

- $\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$ (P
- $E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a, y) \to P(y))$ ((1)+ES)
- (〇 + 答かよ)
- **3** *P*(a) (②+简化式)
- **④** *E*(*a*) (②+简化式)

- 3 V(a) (3)7)+MT)

- $\exists y (C(y) \land S(a,y))$ (1011)+MP
- $C(b) \wedge S(a,b)$ (12+ES
- **⑤** *C(b)* (**⑥**3+简化式
- **⑤** S(a, b) (【3+简化式)
- P(b) (17476+MP)
- **8** $P(b) \wedge C(b)$ **15**+17
- $\exists x (P(x) \land C(x))$

$$\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$$
 (P

- $E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a,y) \to P(y))$
- (①+ES) ③ P(a) (②+简化式)
- ④ E(a)(②+简化式)

- $V(a) \to \neg P(a) \qquad (b) + 0S$
- **3** $\neg V(a)$ (3.7+MT)

$$E(a) \land \neg V(a) \to \exists y (C(y) \land S(a, y))$$

- $\exists y (C(y) \land S(a,y))$ (1011)+MP
- $P(a,b) \rightarrow P(b) \qquad (6+15)$
- **⑤** *C(b)* (**⑥**3+简化式
- ⑤ S(a, b)
 (₺)
- P(b) (1416+MP)
- $\exists x (P(x) \land C(x))$

マロナスタナスミナスミナー 意

- $\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \rightarrow P(y)))$ (F
- - (①+ES)
- **3** P(a) (2)+简化式)
- (2)+简化式)
- 5 $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
- $\forall x (V(x) \to \neg F(x))$
- $3 \neg V(a)$ (3)7+MT)
- $\exists y (E(x) \land \neg V(x) \to \\ \exists y (C(y) \land S(x, y)))$ (P)

- $\exists y (C(y) \land S(a, y))$ (1011+MP)
- $C(b) \wedge S(a,b)$ (12+ES
- **⑤** C(b) **(13**+简化式
- **⑤** S(a,b) (**③**+简化式)

- $\exists x (P(x) \land C(x))$

- $\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \rightarrow P(y)))$
- $E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a, y) \to P(y))$ (1)+ES)
- **3** *P(a)* ((2)+简化式)
- **4** *E*(*a*) (②+简化式
- E(a) (②+简化式)
 ∀y(S(a, y) → P(y)) (②+简化式)
- $Vy(S(a,y) \to F(y)) \quad (2) + \mathbb{I} \times \mathbb{I}$
- $V(a) \to \neg P(a) \qquad (\textcircled{6} + US)$
- **8** $\neg V(a)$ (3.7)+MT)

- $E(a) \land \neg V(a) \to \exists y (C(y) \land S(a, y))$
- $E(a) \land \neg V(a)$ (4)+(3)
- $\exists y (C(y) \land S(a,y))$ (1011)+MP
- $C(b) \wedge S(a,b)$ (12+ES)
- $Q S(a, b) \rightarrow P(b)$ (5±11S
- **⑤** C(b) (13+简化式
- **⑥** S(a, b) (**戊**3+简化式)
- **B** $P(b) \wedge C(b)$ (15+17)
- $\exists x (P(x) \land C(x))$

- $\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \rightarrow P(y)))$ (F
- $2 E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a,y) \to P(y))$
 - (①+ES)
- **③** *P(a)* (②+简化式)
- **④** *E*(*a*) (②+简化式)

- $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (6)+US)

- $E(a) \land \neg V(a) \to \exists y (C(y) \land S(a, y))$
- $E(a) \land \neg V(a) \tag{4+8}$
- $\exists y (C(y) \land S(a,y))$ (IDI)+MP]
- $Q S(a, b) \rightarrow P(b)$ (5±11S
- **⑤** C(b) (**③**+简化式
- ⑤ S(a, b) (13+简化式
 - P(b) (1416+MP)
 - **B** $P(b) \wedge C(b)$ **(15+17)**
- $\exists x (P(x) \land C(x))$

 \bullet $C: \exists x (P(x) \land C(x))$

$$\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$$
 (F

- $E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a, y) \rightarrow P(y))$
 - (1)+ES
- Θ P(a)(2)+简化式)
- $\bullet \quad E(a)$ (2)+简化式)
- ((2)+简化式)
- (P)
- $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (⑥+US)
- (37+MT)
- $\exists y (C(y) \land S(x,y))$ (P)

◆□▶◆御▶◆選▶◆選▶・選

 $\bullet C: \exists x (P(x) \land C(x))$

$$\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$$
 (P

 $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y (S(a, y) \to P(y))$

$$V(a) \rightarrow \neg P(a)$$
 (6)+US)

$$E(a) \land \neg V(a) \to \exists y (C(y) \land S(a, y))$$
 (9)+US)

$$\exists y (C(y) \land S(a,y))$$
 (1011)+MP

$$P(a,b) \rightarrow P(b) \qquad (6+1)$$

$$P(b)$$
 (1416+MP)

3
$$P(b) \wedge C(b)$$
 (15+17)

$$\exists x (P(x) \land C(x))$$

 \bullet $C: \exists x (P(x) \land C(x))$

$$\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$$
 (P

$$2 E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a,y) \to P(y))$$

$$V(a) \rightarrow \neg P(a)$$
 (6)+US)

$$\exists y (C(y) \land S(a, y))$$
 (101)+MP)

$$\mathbf{Q} S(a,b) \to P(b) \tag{5.4}$$

$$P(b)$$
 (1416+MP)

3
$$P(b) \wedge C(b)$$
 (15+17)

$$\exists m(P(m) \land C(m))$$
 (3) $\exists m(P(m) \land C(m))$

$$\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$$
 (P

 $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y (S(a, y) \to P(y))$

(①+ES)

3 P(a) (②+简化式)

● E(a)(②+简化式)

 $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (6)+US)

 $\exists y (C(y) \land \neg V(x) \rightarrow \exists y (C(y) \land S(x,y)))$ (P)

$$E(a) \land \neg V(a) \to \exists y (C(y) \land S(a, y))$$

$$(9)+US)$$

 $\exists y (C(y) \land S(a, y))$ (101)+MP)

 $S(a,b) \to P(b) \tag{5}+US$

15 S(a, b) (13+简化式)

B $P(b) \wedge C(b)$ (15+17)

 $\exists m(P(m) \land C(m))$ (8 + EC

←□ → ←□ → ←□ → ←□ → □ □

$$2 H_2: \exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$$

$$\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$$
 (P

 $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y (S(a, y) \to P(y))$

 $(\mathbb{D}+\mathsf{ES})$

④ *E*(*a*) (②+简化式)

5
$$\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$$
 (②+简化式)

$$V(a) \to \neg P(a) \qquad (\textcircled{6} + US)$$

$$\forall x (E(x) \land \neg V(x) \to \\ \exists y (C(y) \land S(x, y)))$$
 (P)

$$E(a) \land \neg V(a) \to \exists y (C(y) \land S(a, y))$$

$$(\textcircled{9} + US)$$

$$\exists y (C(y) \land S(a, y)) \qquad (\textcircled{D}\textcircled{D} + \mathsf{MP})$$

$$S(a,b) \to P(b) \tag{5}+05$$

13
$$P(b) \wedge C(b)$$
 14.5 + **17**

- $\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$ (P
- $2 E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a,y) \to P(y))$
 - (①+ES)
- **3** P(a) (②+简化式)
- (2)+简化式)
- 5 $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
- $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (6) + US
- $V(a) \to \neg P(a) \qquad (\textcircled{6} + US)$

- $E(a) \land \neg V(a) \to \exists y (C(y) \land S(a, y))$ (9 + US)

- **⑤** C(b) (**③**+简化式)
- S(a,b) (13+简化式)
- $O(b) \land C(b)$ (15.17)
- $P(0) \land C(0) \qquad (13+1)$
 - $\mathcal{C}(x) \wedge \mathcal{C}(x)$

 $2 H_2: \exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \rightarrow P(y)))$

 $\bullet C: \exists x (P(x) \land C(x))$

- $\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$ (P)
- $2 E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a,y) \to P(y))$
 - (①+ES)
- P(a)(②+简化式)
- (2)+简化式)
- 5 $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
- $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (6)+US)

- $\exists y (E(x) \land \neg V(x) \to \\ \exists y (C(y) \land S(x,y)))$ (P)

- $E(a) \land \neg V(a) \to \exists y (C(y) \land S(a, y))$ (9)+US)
- $\exists y (C(y) \land S(a, y))$ (101)+MP)
- $C(b) \wedge S(a,b)$ (12+ES)
- $S(a,b) \to P(b)$ (5)+US)
- ⑤ C(b) (瓜3+简化式)
- **⑤** S(a,b) (13+简化式)
- P(b) (1415+MP
- **8** $P(b) \wedge C(b)$ (15+17)

メロナス部とスラとスラと、夏

- $\bullet C: \exists x (P(x) \land C(x))$

- $\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$ (P)
- $2 E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a,y) \to P(y))$
 - (①+ES)
- **③** *P(a)* (②+简化式)
- E(a)(②+简化式)
- **⑤** $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
- $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (6)+US)

- $\exists y (E(x) \land \neg V(x) \to \\ \exists y (C(y) \land S(x,y)))$ (P)

- $E(a) \land \neg V(a) \to \exists y (C(y) \land S(a, y))$ $(\mathfrak{G} + \mathsf{US})$
- $\exists y (C(y) \land S(a, y)) \qquad (\textcircled{D}\textcircled{D} + \mathsf{MP})$

- ⑤ C(b) (①3+简化式)
- **⑥** S(a, b) (【3+简化式)
 - P(b) (1315+MP)
- **3** $P(b) \wedge C(b)$ **(15+17)**

 \bullet $C: \exists x (P(x) \land C(x))$

- $\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \rightarrow$ P(y)))
- $E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a, y) \rightarrow P(y))$
 - (1)+ES
- Θ P(a)(2)+简化式)
- $\bullet \quad E(a)$ (2)+简化式)
- ((2)+简化式)
- (P)
- $V(a) \rightarrow \neg P(a)$
- (⑥+US) (3)(7)+MT)
- $\exists y (C(y) \land S(x,y))$ (P)

- (9) + US)
- $\mathbf{0}$ $E(a) \wedge \neg V(a)$ (4+8)
- $\exists y (C(y) \land S(a, y))$ (1011) + MP
- $C(b) \wedge S(a,b)$ (12+ES)
- $S(a,b) \rightarrow P(b)$ (5)+US
- C(b)(13+简化式)
- $\mathfrak{G}(a,b)$ (13+简化式)
- $\mathbf{O} P(b)$ (1310+MP)

◆□▶◆御▶◆選▶◆選▶・選

$$\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$$
 (P)

 $E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a,y) \to P(y))$

(1+ES)

4 *E*(a) (2)+简化式)

5
$$\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$$
 (②+简化式)

$$V(a) \to \neg P(a) \qquad (\textcircled{6} + US)$$

$$E(a) \land \neg V(a) \to \exists y (C(y) \land S(a, y))$$

$$(\mathfrak{G} + \mathsf{US})$$

$$\exists y (C(y) \land S(a, y))$$
 (1011)+MP)

$$C(b) \wedge S(a,b)$$
 (12+ES)

$$S(a,b) \to P(b)$$
 (5)+US)

$$P(b)$$
 (1416+MP)

- $\exists x (E(x) \land P(x) \land \forall y (S(x,y) \to P(y)))$ (P)
- $2 E(a) \land P(a) \land \forall y (S(a,y) \to P(y))$
 - (①+ES)
- P(a)(②+简化式)
- E(a)(②+简化式)
- 5 $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
- $\forall x(v(x) \to \neg F(x))$

- $E(a) \land \neg V(a) \to \exists y (C(y) \land S(a, y))$ (9)+US)

- $S(a,b) \to P(b)$ (5)+US)
- **⑤** C(b) (**瓜**3+简化式)
- ⑤ S(a, b) (13+简化式)
- P(b) (1416+MP)
- $\exists x (P(x) \land C(x))$ (\(\text{\mathbb{(B+EG)}}\)

Mechanized Reasoning Systems

- Coq | a proof assistant base on the calculus of inductive constructions.
- HOL | an interactive environment for machine-assisted theorem-proving in higher-order logic.
- Isabelle | a generic theorem prover in which logics can be specified and used.
- More... (http://vl.fmnet.info/)

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic (FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如: Prolog中的Horn子句(Horn Clause)是可计算的.

Definition

形如 $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \lor L_2 \lor \dots L_m)$ 的公式称为 Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

设 C_1, C_2, \ldots, C_k, C 是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \wedge C$ 的可满足性是可计算的; 当其不可满足,则 $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \vdash \neg C$.

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic (FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如: Prolog中的Horn子句(Horn Clause)是可计算的.

Definition

形如 $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \lor L_2 \lor \dots L_m)$ 的公式称为 Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

设 C_1, C_2, \ldots, C_k, C 是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \wedge C$ 的可满足性是可计算的; 当其不可满足,则 $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \vdash \neg C$.

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic (FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如: Prolog中的Horn子句(Horn Clause)是可计算的.

Definition

形如 $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (L_1 \lor L_2 \lor \dots L_m)$ 的公式称为 Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

设 C_1, C_2, \ldots, C_k, C 是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \wedge C$ 的可满足性是可计算的; 当其不可满足,则 $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \vdash \neg C$.

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), \ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), \ P(a), \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法 ② $\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x)))$ (P) ③ $\neg P(a) \lor P(f(a))$ (①+US) ③ $P(a) \to P(f(a))$ (①+T) ④ P(a) (P) ④ P(f(a)) (③④+MP) ④ $\forall x \Rightarrow P(f(x))$ (所かP) ④ $\neg P(f(a))$ (⑤+US)

反证法

3
$$P(f(a))$$
 3 4+MP

$$\neg P(f(a))$$
 (6)+US)

Resolution

● ¬P(f(x))(附加PP

○ ¬P(J(a)) (④◎+☆-

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), \ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), \ P(a), \ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

- \bullet $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (1)+T)
- **5** P(f(a)) ((3)(4)+MP
- **⑤** ∀x¬P(f(x)) (附加P)
- **8** F (5+7)

Resolution

P(a) (P) P(a) (P) $P(a) \lor P(f(a))$ (①②+令一) P(f(a)) (②③+删除) P(f(a)) (例如P)

○ ¬P(f(a)) (④⑤+合一) (④⑥+刪吟 → 5)

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), \ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), \ P(a), \ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

$$\mathbf{A} P(a)$$
 (F

5
$$P(f(a))$$
 ((3)(4)+MP

6
$$\forall x \neg P(f(x))$$
 (附加P)

$$\bigcirc \neg P(f(a))$$
 (6+US)

$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), \ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), \ P(a), \ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法 • $\forall x(\neg P(x) \lor P(f(x)))$ (P) • $\neg P(a) \lor P(f(a))$ (①+US) • $P(a) \to P(f(a))$ (①+T) • P(a) (P) • P(f(a)) (③④+MP) • $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)



$$\forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), \ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$

$$\iff \forall x (\neg P(x) \lor P(f(x))), \ P(a), \ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法 ① $\forall x(\neg P(x) \lor P(f(x)))$ (P) ② $\neg P(a) \lor P(f(a))$ (①+US) ③ $P(a) \to P(f(a))$ (①+T) ④ P(a) (P) ③ P(f(a)) (③④+MP) ④ $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P) ④ $\neg P(f(a))$ (⑤+US)



反证法

5
$$P(f(a))$$
 (3.4+MP)

$$\neg P(f(a))$$
 (6+US)

反证法

$$\bullet$$
 $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (1)+T)

$$\bullet P(a)$$
 (P)

5
$$P(f(a))$$
 ((3)(4)+MP)

$$P(f(a))$$
 (6+US)





69/71

反证法

5
$$P(f(a))$$
 ((3)(4)+MP)

$$(34+NF)$$

⑤
$$\forall x \neg P(f(x))$$
 (附加P)

Resolution

◆ロ > ◆ 個 > ◆ き > ◆ き > り へ で

反证法

5
$$P(f(a))$$
 ((3)(4)+MP)

$$(34+NF)$$

⑤
$$\forall x \neg P(f(x))$$
 (附加P)

Resolution

◆ロ > ◆ 個 > ◆ き > ◆ き > り へ で

反证法

6
$$\forall x \neg P(f(x))$$
 (附加P)

$$P(a) \vee P(f(a)) \quad (\bigcirc \bigcirc + \triangle \rightarrow)$$

6
$$\neg P(f(a))$$
 (4)5)+合一

反证法

6
$$\forall x \neg P(f(x))$$
 (附加P)

$$\bullet \neg P(x) \lor P(f(x)) \tag{P}$$

$$P(J(a))$$
 (2.3)+ $M(R)$

⑤
$$\neg P(f(x))$$
 (附加P

6
$$\neg P(f(a))$$
 (④⑤+合一)

反证法

5
$$P(f(a))$$
 ((3)(4)+MP)

$$\bullet \neg P(x) \lor P(f(x)) \tag{P}$$

③ ¬
$$P(a)$$
 ∨ $P(f(a))$ (①②+含一)

$$D(f(x)) \qquad \qquad (\text{with} x - D)$$

6
$$\neg P(f(a))$$
 (45+合一

反证法

6
$$\forall x \neg P(f(x))$$
 (附加P)

$$\bullet \neg P(x) \lor P(f(x)) \tag{P}$$

3
$$\neg P(a) \lor P(f(a))$$
 (12+4-)

⑤
$$\neg P(f(x))$$
 (附加P

①
$$\neg P(f(a))$$
 (④⑤+合一)

反证法

6
$$\forall x \neg P(f(x))$$
 (附加P)

Resolution

$$\bullet \neg P(x) \lor P(f(x)) \tag{P}$$

③
$$\neg P(a) \lor P(f(a))$$
 (①②+合一)

6
$$\neg P(f(a))$$
 (4) (4) (5) + 合一)

◆□▶◆圖▶◆臺▶◆臺▶

反证法

5
$$P(f(a))$$
 (3.4+MP)

Resolution

$$\bullet \neg P(x) \lor P(f(x)) \tag{P}$$

3
$$\neg P(a) \lor P(f(a))$$
 (①②+合一)

◆□▶◆圖▶◆臺▶◆臺▶

反证法

5
$$P(f(a))$$
 (3.4)+MP)

6
$$\forall x \neg P(f(x))$$
 (附加P)

Resolution

$$\bullet \neg P(x) \lor P(f(x)) \tag{P}$$

③
$$\neg P(a) \lor P(f(a))$$
 (①②+合一)

4
$$P(f(a))$$
 (②3+删除)

本章小结

- 1 谓词与量词
 - 谓词和项
 - 谓词公式的语法
 - 谓词公式的语义
- 2 谓词公式
 - 逻辑恒等式和永真蕴涵式
 - 谓词永真公式
 - 前束范式
- ③ 谓词公式的自然推理
 - 相关概念的复习
 - 量词的推理规则
 - 形式证明的例子
 - Mechanical Reasoning

Reference books



《离散数学》讲义.

Kenneth H. Rosen.

《离散数学及其应用》(原书第8版本科教学版).

机械工业出版社.

刘玉珍

《离散数学》.

武汉大学出版社.