谓　词　逻　辑

School of Computer
Wuhan University

谓　词　逻　辑

School of Computer
Wuhan University

本章内容

1. 谓词与量词
   - 谓词和项
   - 谓词公式的语法
   - 谓词公式的语义
2. 谓词公式
   - 逻辑恒等式和永真蕴涵式
   - 谓词永真公式
   - 前束范式
3. 谓词公式的自然推理
   - 相关概念的复习
   - 量词的推理规则
   - 形式证明的例子
   - Mechanical Reasoning

Jacques Herbrand (1908-1931)

Jacques HERBRAND *(au centre)*
au cours de l'excursion où il trouva la mort

Outline

1. 谓词与量词
   - 谓词和项
   - 谓词公式的语法
   - 谓词公式的语义
2. 谓词公式
3. 谓词公式的自然推理

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看，R是P和Q的有效结论；
- 但是，如果用命题逻辑来表达则不成立：$P, Q \nvdash R$；
- 原因：P, Q和R所描述的对象是相关的，但是，在抽象为原子后，彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律；
- 解决方法：让原子中有对象的信息，为此引入项，谓词和量词，使得语句的真假和对象相关；
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看，R是P和Q的有效结论；
- 但是，如果用命题逻辑来表达则不成立：$P, Q \nvdash R$;
- 原因：P, Q和R所描述的对象是相关的，但是，在抽象为原子后，彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律；
- 解决方法：让原子中有对象的信息，为此引入项，谓词和量词，使得语句的真假和对象相关；
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看，R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立:$P, Q \nvdash R$;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的,但是,在抽象为原子后,彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息,为此引入项,谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看, R是P和Q的有效结论;
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立:$P, Q \nvdash R$;
- 原因: P, Q和R所描述的对象是相关的,但是,在抽象为原子后,彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律;
- 解决方法: 让原子中有对象的信息,为此引入项,谓词和量词, 使得语句的真假和对象相关;
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看，R是P和Q的有效结论；
- 但是，如果用命题逻辑来表达则不成立：$P, Q \nvdash R$;
- 原因：P, Q和R所描述的对象是相关的，但是，在抽象为原子后，彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律；
- 解决方法：让原子中有对象的信息，为此引入项，谓词和量词，使得语句的真假和对象相关；
- $(\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看，R是P和Q的有效结论；
- 但是，如果用命题逻辑来表达则不成立：$P, Q \nvdash R$；
- 原因：P, Q和R所描述的对象是相关的，但是，在抽象为原子后，彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律；
- 解决方法：让原子中有对象的信息，为此引入项，谓词和量词，使得语句的真假和对象相关；
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看，R是P和Q的有效结论；
- 但是,如果用命题逻辑来表达则不成立:$P, Q \nvdash R$;
- 原因：P, Q和R所描述的对象是相关的,但是,在抽象为原子后,彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律；
- 解决方法：让原子中有对象的信息,为此引入项,谓词和量词，使得语句的真假和对象相关；
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Extensions to First-order Logic

谓词逻辑

- 真假值的运算规则和命题逻辑一致;
- 真假值与对象相关;
- 有足够的表达能力,数学语言完全能够用一阶逻辑表达;
- 注意: 计算机中很多的现象不能用一阶逻辑表达;
- Logic in computer science: Combinatory Logic, Hoare Logic,Temporal Logic, Dynamic Logic, Linear Logic, High Order Logic, etc.

谓词

谓词符号

- 将“命题”(陈述句)分解为“主语+谓语”;
- 个体词(或,项):在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词符号:在简单命题中,表示个体的性质或个体间关系的符号,常用大写字母表示,如$P, Q, R, \ldots$

Example (谓词)

- $P(x)$: 若P表示谓词“大于3”, x 为个体词,$P(x)$ 即为 $x > 3$;
- $Q(x, y)$: 若Q表示谓词“大于等于”, x, y 为个体词, $Q(x, y)$ 即为 $x \geq y$.

谓词

谓词符号

- 将“命题”(陈述句)分解为“主语+谓语”;
- 个体词(或,项):在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词符号:在简单命题中,表示个体的性质或个体间关系的符号,常用大写字母表示,如$P, Q, R, \ldots$

Example (谓词)

- $P(x)$: 若P表示谓词“大于3”, x 为个体词, $P(x)$ 即为 $x > 3$;
- $Q(x, y)$: 若Q表示谓词“大于等于”, x, y 为个体词, $Q(x, y)$ 即为 $x \geq y$.

谓词

谓词符号

- 将"命题"(陈述句)分解为"主语+谓语";
- 个体词(或,项):在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词符号:在简单命题中,表示个体的性质或个体间关系的符号,常用大写字母表示,如$P, Q, R, \ldots$

Example (谓词)

- $P(x)$: 若P表示谓词"大于3", x 为个体词, $P(x)$ 即为 $x > 3$;
- $Q(x, y)$: 若Q表示谓词"大于等于", x, y 为个体词, $Q(x, y)$ 即为 $x \geq y$.

谓词

谓词符号

- 将“命题”(陈述句)分解为“主语+谓语”;
- 个体词(或,项):在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词符号:在简单命题中,表示个体的性质或个体间关系的符号,常用大写字母表示,如$P, Q, R, \ldots$

Example (谓词)

- $P(x)$: 若P表示谓词“大于3”, x 为个体词,$P(x)$ 即为 $x > 3$;
- $Q(x, y)$: 若Q表示谓词“大于等于”, x, y 为个体词, $Q(x, y)$ 即为 $x \geq y$.

谓词

谓词符号

- 将"命题"(陈述句)分解为"主语+谓语";
- 个体词(或,项):在简单命题中,表示主语的符号;
- 谓词符号:在简单命题中,表示个体的性质或个体间关系的符号,常用大写字母表示,如$P, Q, R, \ldots$

Example (谓词)

- $P(x)$: 若P表示谓词"大于3", x 为个体词,$P(x)$ 即为 $x > 3$;
- $Q(x, y)$: 若Q表示谓词"大于等于", x, y 为个体词, $Q(x, y)$ 即为 $x \geq y$.

项 Terms (1/2)

Example

1. "x大于3"： $P(x)$
2. "x大于y"： $Q(x,y)$
3. "x+1大于x"： $R(x)$
4. 所描述的对象不同，但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

1. 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3，上述关系可表示为：
2. "x大于3"： $GREATER(x,3)$
3. "x大于y"： $GREATER(x,y)$
4. "x+1大于x"： $GREATER(plus(x,1),x)$
5. 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数，变量和函数符号组合成的对象，称之为项(terms).

项 Terms (1/2)

Example

1. "x大于3": $P(x)$
2. "x大于y": $Q(x, y)$
3. "x+1大于x": $R(x)$
4. 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

1. 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:
2. "x大于3": $GREATER(x, 3)$
3. "x大于y": $GREATER(x, y)$
4. "x+1大于x": $GREATER(plus(x, 1), x)$
5. 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数, 变量和函数符号组合成的对象,称之为项(terms).

项 Terms (1/2)

Example

1. "x大于3": $P(x)$
2. "x大于y": $Q(x, y)$
3. "x+1大于x": $R(x)$
4. 所描述的对象不同，但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

1. 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3，上述关系可表示为：
2. "x大于3": $GREATER(x, 3)$
3. "x大于y": $GREATER(x, y)$
4. "x+1大于x": $GREATER(plus(x, 1), x)$
5. 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数、变量和函数符号组合成的对象，称之为项(terms).

项 Terms (1/2)

Example

1. "x大于3": $P(x)$
2. "x大于y": $Q(x, y)$
3. "x+1大于x": $R(x)$
4. 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

1. 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:
2. "x大于3": $GREATER(x, 3)$
3. "x大于y": $GREATER(x, y)$
4. "x+1大于x": $GREATER(plus(x, 1), x)$
5. 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数, 变量和函数符号组合成的对象,称之为项(terms).

项 Terms (1/2)

Example

1. "x大于3": $P(x)$
2. "x大于y": $Q(x, y)$
3. "x+1大于x": $R(x)$
4. 所描述的对象不同，但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

1. 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3，上述关系可表示为：
2. "x大于3": $GREATER(x, 3)$
3. "x大于y": $GREATER(x, y)$
4. "x+1大于x": $GREATER(plus(x, 1), x)$
5. 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数，变量和函数符号组合成的对象，称之为项(terms).

项 Terms (1/2)

Example

1. "x大于3": $P(x)$
2. "x大于y": $Q(x, y)$
3. "x+1大于x": $R(x)$
4. 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

1. 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:
2. "x大于3": $GREATER(x, 3)$
3. "x大于y": $GREATER(x, y)$
4. "x+1大于x": $GREATER(plus(x, 1), x)$
5. 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数, 变量和函数符号组合成的对象,称之为项(terms).

项 Terms (1/2)

Example

1. "x大于3": $P(x)$
2. "x大于y": $Q(x, y)$
3. "x+1大于x": $R(x)$
4. 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

1. 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:
2. "x大于3": $GREATER(x, 3)$
3. "x大于y": $GREATER(x, y)$
4. "x+1大于x": $GREATER(plus(x, 1), x)$
5. 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数, 变量和函数符号组合成的对象,称之为项(terms).

项 Terms (1/2)

Example

1. "x大于3": $P(x)$
2. "x大于y": $Q(x, y)$
3. "x+1大于x": $R(x)$
4. 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

1. 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:
2. "x大于3": $GREATER(x, 3)$
3. "x大于y": $GREATER(x, y)$
4. "x+1大于x": $GREATER(plus(x, 1), x)$
5. 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数, 变量和函数符号组合成的对象,称之为项(terms).

项 Terms (1/2)

Example

1. "x大于3": $P(x)$
2. "x大于y": $Q(x, y)$
3. "x+1大于x": $R(x)$
4. 所描述的对象不同,但是对象之间的关系是相同的(GREATER).

Example

1. 引入表示对象关系的函数plus和常数对象3, 上述关系可表示为:
2. "x大于3": $GREATER(x, 3)$
3. "x大于y": $GREATER(x, y)$
4. "x+1大于x": $GREATER(plus(x, 1), x)$
5. 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数, 变量和函数符号组合成的对象,称之为项(terms).

项 Terms (2/2)

Example

1. "x loves y": $Love(x, y)$
2. "x's father loves x": $Love(father(x), x)$
3. "John loves Mary": $Love(John, Mary)$
4. "John's father loves John": $Love(father(John), John)$

Remark

- 也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:
- "x is y's father": $FATHER(x, y)$
- "x's father loves x": $FATHER(y, x) \wedge LOVE(y, x)$

项 Terms (2/2)

Example

1. "x loves y": $Love(x, y)$
2. "x's father loves x": $Love(father(x), x)$
3. "John loves Mary": $Love(John, Mary)$
4. "John's father loves John": $Love(father(John), John)$

Remark

- 也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:
- "x is y's father": $FATHER(x, y)$
- "x's father loves x": $FATHER(y, x) \wedge LOVE(y, x)$

项 Terms (2/2)

Example

1. "x loves y": $Love(x, y)$
2. "x's father loves x": $Love(father(x), x)$
3. "John loves Mary": $Love(John, Mary)$
4. "John's father loves John": $Love(father(John), John)$

Remark

- 也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:
- "x is y's father": $FATHER(x, y)$
- "x's father loves x": $FATHER(y, x) \wedge LOVE(y, x)$

项 Terms (2/2)

Example

1. "x loves y": $Love(x, y)$
2. "x's father loves x": $Love(father(x), x)$
3. "John loves Mary": $Love(John, Mary)$
4. "John's father loves John": $Love(father(John), John)$

Remark

- 也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:
- "x is y's father": $FATHER(x, y)$
- "x's father loves x": $FATHER(y, x) \wedge LOVE(y, x)$

项 Terms (2/2)

Example

1. "x loves y": $Love(x, y)$
2. "x's father loves x": $Love(father(x), x)$
3. "John loves Mary": $Love(John, Mary)$
4. "John's father loves John": $Love(father(John), John)$

Remark

- 也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:
- "x is y's father": $FATHER(x, y)$
- "x's father loves x": $FATHER(y, x) \wedge LOVE(y, x)$

项 Terms (2/2)

Example

1. "x loves y": $Love(x, y)$
2. "x's father loves x": $Love(father(x), x)$
3. "John loves Mary": $Love(John, Mary)$
4. "John's father loves John": $Love(father(John), John)$

Remark

- 也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:
- "x is y's father": $FATHER(x, y)$
- "x's father loves x": $FATHER(y, x) \wedge LOVE(y, x)$

项 Terms (2/2)

Example

1. "x loves y": $Love(x, y)$
2. "x's father loves x": $Love(father(x), x)$
3. "John loves Mary": $Love(John, Mary)$
4. "John's father loves John": $Love(father(John), John)$

Remark

- 也可以在谓词中不使用函数,这样需要引入更多的谓词,使得谓词公式过于复杂,如:
- "x is y's father": $FATHER(x, y)$
- "x's father loves x": $FATHER(y, x) \wedge LOVE(y, x)$

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常量符号 (constant symbols): $3,\ John,\ Mary, \ldots$
- 变量符号 (variables): $x,\ y,\ z, \ldots$
- 函数符号 (functions): $plus,\ father,\ f,\ g, \ldots$
- 谓词符号 (predicate): $MAN,\ GREATER,\ LOVE,\ P,\ Q,\ R, \ldots$
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常量符号 (constant symbols): $3, \ John, \ Mary, \ldots$
- 变量符号 (variables): $x, \ y, \ z, \ldots$
- 函数符号 (functions): $plus, \ father, \ f, \ g, \ldots$
- 谓词符号 (predicate): $MAN, \ GREATER, \ LOVE, \ P, \ Q, \ R, \ldots$
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常量符号 (constant symbols): $3,\ John,\ Mary, \ldots$
- 变量符号 (variables): $x,\ y,\ z, \ldots$
- 函数符号 (functions): $plus,\ father,\ f,\ g, \ldots$
- 谓词符号 (predicate): $MAN,\ GREATER,\ LOVE,\ P,\ Q,\ R, \ldots$
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常量符号 (constant symbols): $3,\ John,\ Mary, \ldots$
- 变量符号 (variables): $x,\ y,\ z, \ldots$
- 函数符号 (functions): $plus,\ father,\ f,\ g, \ldots$
- 谓词符号 (predicate): $MAN,\ GREATER,\ LOVE,\ P,\ Q,\ R, \ldots$
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常量符号 (constant symbols): $3, \ John, \ Mary, \ldots$
- 变量符号 (variables): $x, \ y, \ z, \ldots$
- 函数符号 (functions): $plus, \ father, \ f, \ g, \ldots$
- 谓词符号 (predicate): $MAN, \ GREATER, \ LOVE, \ P, \ Q, \ R, \ldots$
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

参数问题

Remark

- 每个函数符号都固定参数的个数，f 的参数的个数为 n，称为 n 元函数(n-ary function)，如：$plus$ 是2元函数，$father$ 是1元函数；
- 0元函数退化为常数；
- 每个谓词符号都固定参数的个数，P 的参数的个数为 n，称为 n 元谓词(n-ary predicate)，如：$LOVE$ 和 $GREATER$ 是2元谓词，MAN 和 $MORTAL$ 是1元谓词；
- 0元谓词退化为命题.

项的定义

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

1. 常量符号、变量符号是项;
2. 若 f是一个n元函数符号, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
3. 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

1. $x, 1$是项. by Def①
2. $plus(x, 1)$是项. by ①+Def②
3. $plus(plus(x, 1), 1)$是项. by ②+Def②
4. $plus(plus(plus(x, 1), 1), 1)$是项. by ③+Def②
5. ......

项的定义

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

1. 常量符号、变量符号是项;
2. 若 f是一个n元函数符号,$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是已经定义的项,则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
3. 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

1. $x, 1$是项. by Def①
2. $plus(x, 1)$是项. by ①+Def②
3. $plus(plus(x, 1), 1)$是项. by ②+Def②
4. $plus(plus(plus(x, 1), 1), 1)$是项. by ③+Def②
5. ……

项的定义

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

1. 常量符号、变量符号是项；
2. 若 f是一个n元函数符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是已经定义的项，则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项；
3. 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

1. $x, 1$是项. by Def①
2. $plus(x, 1)$是项. by ①+Def②
3. $plus(plus(x, 1), 1)$是项. by ②+Def②
4. $plus(plus(plus(x, 1), 1), 1)$是项. by ③+Def②
5. $\ldots\ldots$

项的定义

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

1. 常量符号、变量符号是项；
2. 若 f是一个n元函数符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是已经定义的项，则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项；
3. 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

1. $x, 1$是项. by Def①
2. $plus(x, 1)$是项. by ①+Def②
3. $plus(plus(x, 1), 1)$是项. by ②+Def②
4. $plus(plus(plus(x, 1), 1), 1)$是项. by ③+Def②
5. ……

项的定义

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

1. 常量符号、变量符号是项；
2. 若 f是一个n元函数符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是已经定义的项，则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项；
3. 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

1. $x, 1$是项. by Def①
2. $plus(x, 1)$是项. by ①+Def②
3. $plus(plus(x, 1), 1)$是项. by ②+Def②
4. $plus(plus(plus(x, 1), 1), 1)$是项. by ③+Def②
5. ……

项的定义

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

1. 常量符号、变量符号是项;
2. 若 f是一个n元函数符号, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
3. 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

1. $x, 1$是项. by Def①
2. $plus(x, 1)$是项. by ①+Def②
3. $plus(plus(x, 1), 1)$是项. by ②+Def②
4. $plus(plus(plus(x, 1), 1), 1)$是项. by ③+Def②
5. ......

项的定义

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

1. 常量符号、变量符号是项;
2. 若 f是一个n元函数符号, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是已经定义的项, 则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
3. 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

1. $x, 1$是项. by Def①
2. $plus(x, 1)$是项. by ①+Def②
3. $plus(plus(x, 1), 1)$是项. by ②+Def②
4. $plus(plus(plus(x, 1), 1), 1)$是项. by ③+Def②
5. ......

项的定义

Definition (项 (Terms)的归纳定义)

1. 常量符号、变量符号是项;
2. 若 f是一个n元函数符号,$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是已经定义的项,则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
3. 所有的项都是由以上规则在有限步内生成.

Example

1. $x, 1$是项. by Def①
2. $plus(x, 1)$是项. by ①+Def②
3. $plus(plus(x, 1), 1)$是项. by ②+Def②
4. $plus(plus(plus(x, 1), 1), 1)$是项. by ③+Def②
5. $\ldots\ldots$

谓词

Definition (原子公式)

若 P 是 n元谓词符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是项，则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式（简称原子 atom）.

Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(Confucius)$;
2. $Love(father(John), John)$;
3. $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), x)$.

Remark

- 谓词原子和命题一样有真假值.
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式是谓词公式.
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律，如 $P(t_1) \to Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \vee Q(t_2, t_3)$

谓词

Definition (原子公式)

若 P 是 n元谓词符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是项，则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式 (简称原子 atom).

Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(Confucius)$;
2. $Love(father(John), John)$;
3. $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), x)$.

Remark

- 谓词原子和命题一样有真假值.
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式是谓词公式.
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律，如 $P(t_1) \to Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \vee Q(t_2, t_3)$

谓词

Definition (原子公式)

若 P 是 n元谓词符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是项，则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式(简称原子 atom).

Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(Confucius)$;
2. $Love(father(John), John)$;
3. $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), x)$.

Remark

- 谓词原子和命题一样有真假值.
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式是谓词公式.
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律，如 $P(t_1) \to Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \vee Q(t_2, t_3)$

谓词

Definition (原子公式)

若 P 是 n元谓词符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是项，则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式（简称原子 atom）.

Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(Confucius)$;
2. $Love(father(John), John)$;
3. $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), x)$.

Remark

- 谓词原子和命题一样有真假值.
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式是谓词公式.
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律，如 $P(t_1) \to Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \vee Q(t_2, t_3)$

谓词

Definition (原子公式)

若 P 是 n元谓词符号，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是项，则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式（简称原子 atom）.

Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(Confucius)$;
2. $Love(father(John), John)$;
3. $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), x)$.

Remark

- 谓词原子和命题一样有真假值.
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式是谓词公式.
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律，如 $P(t_1) \to Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \vee Q(t_2, t_3)$

谓词

Definition (原子公式)

若 P 是 n元谓词符号, $t_1, t_2, \ldots, t_n$是项, 则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式(简称原子 atom).

Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(Confucius)$;
2. $Love(father(John), John)$;
3. $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), x)$.

Remark

- 谓词原子和命题一样有真假值.
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式是谓词公式.
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律, 如 $P(t_1) \rightarrow Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \vee Q(t_2, t_3)$

量词 (1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数.
- There exists a number that is prime.
- For every number x, there exists a number y such that $x < y$.

Remark

- 不涉及到某个特定的个体.
- 对个体所在的对象集合的整体性质进行描述.
- 引入新的逻辑符号 — 量词(Quantifier) — 描述对象的整体性质.

量词 (1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数.
- There exists a number that is prime.
- For every number x, there exists a number y such that $x < y$.

Remark

- 不涉及到某个特定的个体.
- 对个体所在的对象集合的整体性质进行描述.
- 引入新的逻辑符号 — 量词(Quantifier) — 描述对象的整体性质.

量词 (1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数.
- There exists a number that is prime.
- For every number x, there exists a number y such that $x < y$.

Remark

- 不涉及到某个特定的个体.
- 对个体所在的对象集合的整体性质进行描述.
- 引入新的逻辑符号 — 量词(Quantifier) — 描述对象的整体性质.

量词 (1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数.
- There exists a number that is prime.
- For every number x, there exists a number y such that $x < y$.

Remark

- 不涉及到某个特定的个体.
- 对个体所在的对象集合的整体性质进行描述.
- 引入新的逻辑符号 — 量词(Quantifier) — 描述对象的整体性质.

量词 (1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数.
- There exists a number that is prime.
- For every number x, there exists a number y such that $x < y$.

Remark

- 不涉及到某个特定的个体.
- 对个体所在的对象集合的整体性质进行描述.
- 引入新的逻辑符号 — 量词(Quantifier) — 描述对象的整体性质.

量词 (1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数.
- There exists a number that is prime.
- For every number x, there exists a number y such that $x < y$.

Remark

- 不涉及到某个特定的个体.
- 对个体所在的对象集合的整体性质进行描述.
- 引入新的逻辑符号 — 量词(Quantifier) — 描述对象的整体性质.

量词 (2/2)

量词

全称量词(Universal)	特称量词(Existentail)
forall x for every x for each x	there exists an x for some x for at least one x
$\forall$	$\exists$

Example

- 每个有理数都是实数. $\forall x(Q(x) \to R(x))$.
- There exists a number that is prime. $\exists x Prime(x)$.
- For every number x, there exists a number y such that $x < y$. $\forall x(\exists y Less(x, y))$.

量词 (2/2)

量词

全称量词(Universal)	特称量词(Existentail)
forall x for every x for each x	there exists an x for some x for at least one x
$\forall$	$\exists$

Example

- 每个有理数都是实数. $\forall x(Q(x) \to R(x))$.
- There exists a number that is prime. $\exists x Prime(x)$.
- For every number x, there exists a number y such that $x < y$. $\forall x(\exists y Less(x, y))$.

量词 (2/2)

量词

全称量词(Universal)	特称量词(Existentail)
forall x for every x for each x	there exists an x for some x for at least one x
$\forall$	$\exists$

Example

- 每个有理数都是实数. $\forall x(Q(x) \to R(x))$.
- There exists a number that is prime. $\exists x Prime(x)$.
- For every number x, there exists a number y such that $x < y$. $\forall x(\exists y Less(x, y))$.

合式公式 (Well Formed Formulas)

Definition (合式公式(WFF)的归纳定义)

1. Base: $\mathbb{T}, \mathbb{F}$和谓词原子是WFF;
2. Inductive rules:
   - 若 F, G 是 WFF, 则 $(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$ 是 WFF; [F, G称为归纳定义中的元变量(metavariable)];
   - 若 F 是WFF, x 是变量符号, 则 $(\forall x F)$, $(\exists x F)$ 是 WFF;
3. 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFF,称为谓词公式,简称为公式.

合式公式 (Well Formed Formulas)

Definition (合式公式(WFF)的归纳定义)

1. Base: $\mathbb{T}, \mathbb{F}$和谓词原子是WFF;
2. Inductive rules:
   - 若 F, G 是 WFF, 则 $(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$ 是 WFF; [F, G称为归纳定义中的元变量(metavariable)];
   - 若 F 是WFF, x 是变量符号, 则 $(\forall x F)$, $(\exists x F)$ 是 WFF;
3. 极小性条款: 由以上规则在有限步生成的都是WFF, 称为谓词公式, 简称为公式.

合式公式 (Well Formed Formulas)

Definition (合式公式(WFF)的归纳定义)

1. Base: $\mathbb{T}, \mathbb{F}$和谓词原子是WFF;
2. Inductive rules:
   - 若 F, G 是 WFF, 则 $(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$ 是 WFF; [F, G称为归纳定义中的元变量(metavariable)];
   - 若 F 是WFF, x 是变量符号, 则 $(\forall x F)$, $(\exists x F)$ 是 WFF;
3. 极小性条款: 由以上规则在有限步生成的都是WFF, 称为谓词公式, 简称为公式.

合式公式 (Well Formed Formulas)

Definition (合式公式(WFF)的归纳定义)

1. Base: $\mathbb{T}, \mathbb{F}$和谓词原子是WFF;
2. Inductive rules:
   - 若 F, G 是 WFF, 则 $(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \to G), (F \leftrightarrow G)$ 是 WFF; [F, G称为归纳定义中的元变量(metavariable)];
   - 若 F 是WFF, x 是变量符号, 则 $(\forall x F)$, $(\exists x F)$ 是 WFF;
3. 极小性条款: 由以上规则在有限步生成的都是WFF, 称为谓词公式, 简称为公式.

合式公式 (Well Formed Formulas)

Definition (合式公式(WFF)的归纳定义)

1. Base: $\mathbb{T}, \mathbb{F}$和谓词原子是WFF;
2. Inductive rules:
   - 若 F, G 是 WFF, 则 $(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \to G), (F \leftrightarrow G)$ 是 WFF; [F, G称为归纳定义中的元变量(metavariable)];
   - 若 F 是WFF, x 是变量符号,则 $(\forall x F)$, $(\exists x F)$ 是 WFF;
3. 极小性条款:由以上规则在有限步生成的都是WFF,称为谓词公式,简称为公式.

Example

Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(x)$, $MAN(Confucius)$, $MORTAL(Confucius)$ 是 WFF; (by Def①)
2. $(MAN(x) \to MORTAL(x))$是 WFF; (by Def②+①)
3. $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x)))$是 WFF; (by Def③+②)
4. $((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius))$是 WFF; (by Def②+③①)
5. $(((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius)) \to MORTAL(Confucius))$是 WFF; (by Def②+④①)

Example

Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(x)$, $MAN(Confucius)$, $MORTAL(Confucius)$ 是 WFF;（by Def①）
2. $(MAN(x) \to MORTAL(x))$是 WFF;（by Def②+①）
3. $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x)))$是 WFF;（by Def③+②）
4. $((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius))$是 WFF;（by Def②+③①）
5. $(((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius)) \to MORTAL(Confucius))$是 WFF;（by Def②+④①）

Example

Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(x)$, $MAN(Confucius)$, $MORTAL(Confucius)$ 是 WFF; (by Def①)
2. $(MAN(x) \to MORTAL(x))$是 WFF; (by Def②+①)
3. $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x)))$是 WFF; (by Def③+②)
4. $((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius))$是 WFF; (by Def②+③①)
5. $(((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius)) \to MORTAL(Confucius))$是 WFF; (by Def②+④①)

Example

Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(x)$, $MAN(Confucius)$, $MORTAL(Confucius)$ 是 WFF; (by Def①)
2. $(MAN(x) \to MORTAL(x))$是 WFF; (by Def②+①)
3. $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x)))$是 WFF; (by Def③+②)
4. $((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius))$是 WFF; (by Def②+③①)
5. $(((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius)) \to MORTAL(Confucius))$是 WFF; (by Def②+④①)

Example

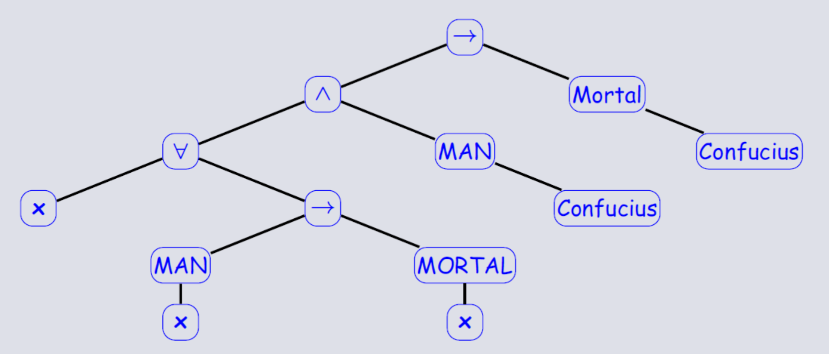
Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(x)$, $MAN(Confucius)$, $MORTAL(Confucius)$ 是 WFF; (by Def①)
2. $(MAN(x) \to MORTAL(x))$是 WFF; (by Def②+①)
3. $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x)))$是 WFF; (by Def③+②)
4. $((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius))$是 WFF; (by Def②+③①)
5. $(((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius)) \to MORTAL(Confucius))$是 WFF; (by Def②+④①)

公式的语法树

Example

- $(((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius)) \to MORTAL(Confucius))$



约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

$$括号,\ \forall,\ \exists,\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

- 同一2元运算符号按从左到右进行结合.

Example

1. $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \equiv (\forall x(\exists y(\forall z P(x, y, z))));$
2. $\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \wedge MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$
3. $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \equiv (\forall x P(x)) \rightarrow Q(x) \neq \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)).$

约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

$$\text{括号},\ \forall,\ \exists,\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

- 同一2元运算符号按从左到右进行结合.

Example

1. $\forall x \exists y \forall z P(x,y,z) \equiv (\forall x(\exists y(\forall z P(x,y,z))))$;
2. $\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \wedge MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$
3. $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \equiv (\forall x P(x)) \rightarrow Q(x) \neq \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

$$\text{括号},\ \forall,\ \exists,\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

- 同一2元运算符号按从左到右进行结合.

Example

1. $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \equiv (\forall x(\exists y(\forall z P(x, y, z))))$;
2. $\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \wedge MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$
3. $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \equiv (\forall x P(x)) \rightarrow Q(x) \neq \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

$$括号,\quad \forall,\quad \exists,\quad \neg,\quad \wedge,\quad \vee,\quad \rightarrow,\quad \leftrightarrow$$

- 同一2元运算符号按从左到右进行结合.

Example

1. $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \equiv (\forall x(\exists y(\forall z P(x, y, z))))$;
2. $\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \wedge MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$
3. $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \equiv (\forall x P(x)) \rightarrow Q(x) \neq \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

  括号, $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

- 同一2元运算符号按从左到右进行结合.

Example

1. $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \equiv (\forall x(\exists y(\forall z P(x, y, z))))$;
2. $\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \wedge MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$
3. $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \equiv (\forall x P(x)) \rightarrow Q(x) \neq \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

  括号, $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

- 同一2元运算符号按从左到右进行结合.

Example

1. $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \equiv (\forall x(\exists y(\forall z P(x, y, z))))$;
2. $\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \wedge MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$
3. $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \equiv (\forall x P(x)) \rightarrow Q(x) \neq \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

符号化谓词公式 (1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$.

Remark(Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$?)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \wedge B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:$C(张三) \wedge B(张三)$为假,$\forall x(C(x) \wedge B(x))$亦假;
- "$C(x) \to$"称为全称限定条件.

符号化谓词公式 (1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$.

Remark(Why not $\forall x(C(x) \land B(x))$?)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \land B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:$C(张三) \land B(张三)$为假,$\forall x(C(x) \land B(x))$亦假;
- "$C(x) \to$"称为全称限定条件.

符号化谓词公式 (1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$.

Remark(Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$?)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \wedge B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:$C(张三) \wedge B(张三)$为假,$\forall x(C(x) \wedge B(x))$亦假;
- "$C(x) \to$"称为全称限定条件.

符号化谓词公式 (1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$.

Remark(Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$?)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \wedge B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:$C(张三) \wedge B(张三)$为假,$\forall x(C(x) \wedge B(x))$亦假;
- "$C(x) \to$"称为全称限定条件.

符号化谓词公式 (1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京；
- $C(x)$: x是这个班的学生；
- $B(x)$: x去过北京；
- $\forall x(C(x) \to B(x))$.

Remark(Why not $\forall x(C(x) \land B(x))$?)

- 如果该断言为真，表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中；没有涉及到不是这个班学生的情况，即：如果张三不是这个班的学生，也能保证该全称量词公式是真；
- $\forall x(C(x) \to B(x))$能正确反映上述关系；
- $\forall x(C(x) \land B(x))$则不能，因为，如果张三不是这个班的学生，则：$C(张三) \land B(张三)$为假，$\forall x(C(x) \land B(x))$亦假；
- "$C(x) \to$ "称为全称限定条件.

符号化谓词公式 (1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$.

Remark(Why not $\forall x(C(x) \land B(x))$?)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \land B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:$C$(张三) $\land$ B(张三)为假,$\forall x(C(x) \land B(x))$亦假;
- "$C(x) \to$ "称为全称限定条件.

符号化谓词公式 (1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$.

Remark(Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$?)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \wedge B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:$C(张三) \wedge B(张三)$为假,$\forall x(C(x) \wedge B(x))$亦假;
- "$C(x) \to$"称为全称限定条件.

符号化谓词公式 (1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$.

Remark(Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$?)

- 如果该断言为真,表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该全称量词公式是真;
- $\forall x(C(x) \to B(x))$能正确反映上述关系;
- $\forall x(C(x) \wedge B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:$C(张三) \wedge B(张三)$为假,$\forall x(C(x) \wedge B(x))$亦假;
- "$C(x) \to$ "称为全称限定条件.

符号化谓词公式 (2/5)

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark(Why not $\exists x(C(x) \to B(x))$?)

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:$C(张三) \to B(张三)$为真,$\exists x(C(x) \to B(x))$亦真;
- "$C(x) \wedge$ "称为特称限定条件.

符号化谓词公式 (2/5)

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark(Why not $\exists x(C(x) \to B(x))$?)

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:$C(张三) \to B(张三)$为真,$\exists x(C(x) \to B(x))$亦真;
- ”$C(x) \wedge$ ”称为特称限定条件.

符号化谓词公式 (2/5)

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark(Why not $\exists x(C(x) \to B(x))$?)

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$则不能,因为, 如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \to B(张三)$为真,$\exists x(C(x) \to B(x))$亦真;
- "$C(x) \wedge$"称为特称限定条件.

符号化谓词公式 (2/5)

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark(Why not $\exists x(C(x) \to B(x))$?)

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \to B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:$C(张三) \to B(张三)$为真,$\exists x(C(x) \to B(x))$亦真;
- "$C(x) \wedge$ "称为特称限定条件.

符号化谓词公式 (2/5)

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark(Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$?)

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \rightarrow B(张三)$为真,$\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$亦真;
- "$C(x) \wedge$"称为特称限定条件.

符号化谓词公式 (2/5)

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark(Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$?)

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:$C(张三) \rightarrow B(张三)$为真,$\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$亦真;
- "$C(x) \wedge$"称为特称限定条件.

符号化谓词公式 (2/5)

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark(Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$?)

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$则不能,因为,如果张三不是这个班的学生,则:$C(\text{张三}) \rightarrow B(\text{张三})$为真,$\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$亦真;
- "$C(x) \wedge$"称为特称限定条件.

符号化谓词公式 (2/5)

Example

- 这个班有学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark(Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$?)

- 如果该断言为假,表示这个班的学生都没有去过北京;没有涉及到不是这个班学生的情况,即:如果张三不是这个班的学生,也能保证该特称量词公式是假;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$能正确反映上述关系;
- $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$则不能,因为, 如果张三不是这个班的学生,则: $C(张三) \rightarrow B(张三)$为真,$\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$亦真;
- "$C(x) \wedge$"称为特称限定条件.

符号化谓词公式 (3/5)

喝酒者悖论

- There is someone in the pub such that, if he is drinking, everyone in the pub is drinking.
- $\exists x(D(x) \to \forall y D(y))$.

符号化谓词公式 (3/5)

喝酒者悖论

- There is someone in the pub such that, if he is drinking, everyone in the pub is drinking.
- $\exists x(D(x) \to \forall y D(y))$.

符号化谓词公式 (4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性:“y是唯一的”等价于:“对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (Inequal(z, y) \to \neg B(x, z)))$;

☞ 引入中缀谓词"$\neq$": $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$;
$\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z (z \neq y \to \neg B(x, z)))$;

☞ 常用记号 $\exists!$ 表示“存在唯一”: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式 (4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x,y)$： y 是 x 的最好的朋友；
- $Inequal(x,y)$： x 和 y 是不同的对象；
- 唯一性："y是唯一的"等价于："对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友"；
- $\forall x\exists y(B(x,y)\land\forall z(Inequal(z,y)\to\neg B(x,z)))$;

☞ 引入中缀谓词"$\neq$": $Inequal(x,y)\triangleq x\neq y$;
$\forall x\exists y(B(x,y)\land\forall z(z\neq y\to\neg B(x,z)))$;

☞ 常用记号 $\exists!$ 表示"存在唯一": $\forall x\exists!yB(x,y)$.

符号化谓词公式 (4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x,y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x,y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性:"y是唯一的"等价于:"对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y(B(x,y) \wedge \forall z(Inequal(z,y) \rightarrow \neg B(x,z)))$;

☞ 引入中缀谓词"$\neq$": $Inequal(x,y) \triangleq x \neq y$;
$\forall x \exists y(B(x,y) \wedge \forall z(z \neq y \rightarrow \neg B(x,z)))$;

☞ 常用记号 $\exists!$ 表示"存在唯一": $\forall x \exists! y B(x,y)$.

符号化谓词公式 (4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友；
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象；
- 唯一性：“y是唯一的”等价于：“对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友”；
- $\forall x \exists y(B(x, y) \wedge \forall z(Inequal(z, y) \rightarrow \neg B(x, z)))$;

☞ 引入中缀谓词"≠": $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$;
$\forall x \exists y(B(x, y) \wedge \forall z(z \neq y \rightarrow \neg B(x, z)))$;

☞ 常用记号 $\exists!$ 表示“存在唯一”: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式 (4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x,y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x,y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性:"y是唯一的"等价于:"对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友";
- $\forall x \exists y(B(x,y) \wedge \forall z(Inequal(z,y) \to \neg B(x,z)))$;

☞ 引入中缀谓词"$\neq$": $Inequal(x,y) \triangleq x \neq y$;
$\forall x \exists y(B(x,y) \wedge \forall z(z \neq y \to \neg B(x,z)))$;

☞ 常用记号 $\exists!$ 表示"存在唯一": $\forall x \exists! y B(x,y)$.

符号化谓词公式 (4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性:“y是唯一的”等价于:“对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x \exists y(B(x, y) \wedge \forall z(Inequal(z, y) \to \neg B(x, z)))$;

☞ 引入中缀谓词"$\neq$": $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$;

$\forall x \exists y(B(x, y) \wedge \forall z(z \neq y \to \neg B(x, z)))$;

☞ 常用记号 $\exists!$ 表示“存在唯一”: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式 (4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$: y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$: x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性:“y是唯一的”等价于:“对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x \exists y(B(x, y) \wedge \forall z(Inequal(z, y) \to \neg B(x, z)))$;

☞ 引入中缀谓词"$\neq$": $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$;
$\forall x \exists y(B(x, y) \wedge \forall z(z \neq y \to \neg B(x, z)))$;

☞ 常用记号 $\exists!$ 表示“存在唯一”: $\forall x \exists! y B(x, y)$.

符号化谓词公式 (4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x, y)$： y 是 x 的最好的朋友;
- $Inequal(x, y)$： x 和 y 是不同的对象;
- 唯一性: “y是唯一的”等价于: “对任意的 z, 如果 z 不等于 y, 则 x 和 z 不是最好的朋友”;
- $\forall x\exists y(B(x, y) \wedge \forall z(Inequal(z, y) \to \neg B(x, z)))$;

☞ 引入中缀谓词"$\neq$": $Inequal(x, y) \triangleq x \neq y$;
$\forall x\exists y(B(x, y) \wedge \forall z(z \neq y \to \neg B(x, z)))$;

☞ 常用记号 $\exists!$ 表示“存在唯一”: $\forall x\exists! yB(x, y)$.

符号化谓词公式 (5/5)

Example (Peano自然数公理)

A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);

A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;

A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

☞ 引入函数符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$表示 x 的直接前驱;

A_1 $\forall x \exists y((y = succ(x)) \wedge \forall z(z = succ(x) \rightarrow y = z))$;

A_2 $\neg \exists x(0 = succ(x))$;

A_3 $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y((y = pred(x)) \wedge \forall z(z = pred(x) \rightarrow y = z)))$.

符号化谓词公式 (5/5)

Example (Peano自然数公理)

A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);

A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;

A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

☞ 引入函数符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$表示 x 的直接前驱;

A_1 $\forall x \exists y((y = succ(x)) \wedge \forall z(z = succ(x) \rightarrow y = z))$;

A_2 $\neg \exists x(0 = succ(x))$;

A_3 $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y((y = pred(x)) \wedge \forall z(z = pred(x) \rightarrow y = z)))$.

符号化谓词公式 (5/5)

Example (Peano自然数公理)

- A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);
- A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;
- A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

- ☞ 引入函数符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$表示 x 的直接前驱;

A_1 $\forall x \exists y((y = succ(x)) \wedge \forall z(z = succ(x) \rightarrow y = z))$;

A_2 $\neg \exists x(0 = succ(x))$;

A_3 $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y((y = pred(x)) \wedge \forall z(z = pred(x) \rightarrow y = z)))$.

符号化谓词公式 (5/5)

Example (Peano自然数公理)

A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);

A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;

A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

☞ 引入函数符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$表示 x 的直接前驱;

A_1 $\forall x \exists y((y = succ(x)) \wedge \forall z(z = succ(x) \to y = z))$;

A_2 $\neg \exists x(0 = succ(x))$;

A_3 $\forall x(x \neq 0 \to \exists y((y = pred(x)) \wedge \forall z(z = pred(x) \to y = z)))$.

符号化谓词公式 (5/5)

Example (Peano自然数公理)

A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);

A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;

A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

☞ 引入函数符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$表示 x 的直接前驱;

A_1 $\forall x \exists y((y = succ(x)) \wedge \forall z(z = succ(x) \to y = z))$;

A_2 $\neg \exists x(0 = succ(x))$;

A_3 $\forall x(x \neq 0 \to \exists y((y = pred(x)) \wedge \forall z(z = pred(x) \to y = z)))$.

符号化谓词公式 (5/5)

Example (Peano自然数公理)

A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);

A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;

A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

☞ 引入函数符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$表示 x 的直接前驱;

A_1 $\forall x \exists y((y = succ(x)) \wedge \forall z(z = succ(x) \to y = z))$;

A_2 $\neg \exists x(0 = succ(x))$;

A_3 $\forall x(x \neq 0 \to \exists y((y = pred(x)) \wedge \forall z(z = pred(x) \to y = z)))$.

符号化谓词公式 (5/5)

Example (Peano自然数公理)

A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);

A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;

A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

☞ 引入函数符号: $succ(x)$ 表示 x 的直接后继, $pred(x)$表示 x 的直接前驱;

A_1 $\forall x \exists y((y = succ(x)) \wedge \forall z(z = succ(x) \to y = z))$;

A_2 $\neg \exists x(0 = succ(x))$;

A_3 $\forall x(x \neq 0 \to \exists y((y = pred(x)) \wedge \forall z(z = pred(x) \to y = z)))$.

辖域 (Scope)

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

辖域 (Scope)

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

辖域 (Scope)

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

辖域 (Scope)

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \land Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

辖域 (Scope)

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

辖域 (Scope)

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

辖域 (Scope)

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式, F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域, F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence), x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

辖域 (Scope)

Definition (辖域)

- 形如: $\forall x(F)$ ($\exists x(F)$) 的子公式，F 称为全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域;
- 设子公式 F 是全称(特称)量词 $\forall x$ ($\exists x$) 的辖域，F 中出现的 x 称为约束出现(bound occurrence)，x 也称为约束变量(bound variable);
- 子公式 F 没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence)，x 也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P 中的 x 和 y 是约束变量;
- Q 中的 x 是自由变量.

谓词公式的语义 (1/2)

Remark

- 谓词$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$的语义解释和对象 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 相关；
- 解释一个谓词公式需要解释：对象和原子两个部分.

Definition

F 是一谓词公式，F 的一个解释 I 包含一个集合 D (称为论域 Domain)，及：

1. 每个常量符号对应于 D 中的一个元素；
2. 每个 n元函数符号对应于一个 $D^n \longrightarrow D$的函数；
3. 每个 n元谓词符号对应于一个 $D^n \longrightarrow \{0, 1\}$的函数.

谓词公式的语义 (2/2)

Definition (公式F在解释I下的真值)

设 F 是一谓词公式,F在解释I下的真值记为: $F|_I$, 其归纳定义如下:

1. 若$F = P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \ldots, t_n|_I$, 是项 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 在 I 下的取值,则 $F|_I = P(t_1|_I, t_2|_I, \ldots, t_n|_I)$;
2. $$F|_I = \begin{cases} \neg(A|_I), & \text{if} \quad F = \neg A \\ (A|_I) \wedge (B|_I), & \text{if} \quad F = A \wedge B \\ (A|_I) \vee (B|_I), & \text{if} \quad F = A \vee B \\ (A|_I) \to (B|_I), & \text{if} \quad F = A \to B \\ (A|_I) \leftrightarrow (B|_I), & \text{if} \quad F = A \leftrightarrow B \end{cases}$$
3. 若$F = \forall x G$, $F|_I = 1$, iff, 对约束变量 x 在 D 中的每个取值 $d \in D$, 都有$G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
4. 若$F = \exists x G$, $F|_I = 1$, iff, 存在约束变量 x 在 D 中的取值 $d \in D$, 使得$G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
5. 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定 D 中的值时公式才有解释.

谓词公式的语义 (2/2)

Definition (公式F在解释I下的真值)

设 F 是一谓词公式,F在解释I下的真值记为: $F|_I$, 其归纳定义如下:

1. 若$F = P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \ldots, t_n|_I$, 是项 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 在 I 下的取值,则 $F|_I = P(t_1|_I, t_2|_I, \ldots, t_n|_I)$;
2. $$F|_I = \begin{cases} \neg(A|_I), & \text{if} \quad F = \neg A \\ (A|_I) \wedge (B|_I), & \text{if} \quad F = A \wedge B \\ (A|_I) \vee (B|_I), & \text{if} \quad F = A \vee B \\ (A|_I) \rightarrow (B|_I), & \text{if} \quad F = A \rightarrow B \\ (A|_I) \leftrightarrow (B|_I), & \text{if} \quad F = A \leftrightarrow B \end{cases}$$
3. 若$F = \forall x G$, $F|_I = 1$, iff, 对约束变量 x 在 D 中的每个取值 $d \in D$, 都有$G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
4. 若$F = \exists x G$, $F|_I = 1$, iff, 存在约束变量 x 在 D 中的取值 $d \in D$, 使得$G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
5. 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定 D 中的值时公式才有解释.

谓词公式的语义 (2/2)

Definition (公式F在解释I下的真值)

设 F 是一谓词公式,F在解释I下的真值记为: $F|_I$, 其归纳定义如下:

1. 若$F = P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \ldots, t_n|_I$, 是项 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 在 I 下的取值, 则 $F|_I = P(t_1|_I, t_2|_I, \ldots, t_n|_I)$;
2. $$F|_I = \begin{cases} \neg(A|_I), & \text{if} \quad F = \neg A \\ (A|_I) \wedge (B|_I), & \text{if} \quad F = A \wedge B \\ (A|_I) \vee (B|_I), & \text{if} \quad F = A \vee B \\ (A|_I) \rightarrow (B|_I), & \text{if} \quad F = A \rightarrow B \\ (A|_I) \leftrightarrow (B|_I), & \text{if} \quad F = A \leftrightarrow B \end{cases}$$
3. 若$F = \forall x G$, $F|_I = 1$, iff, 对约束变量 x 在 $\mathcal{D}$ 中的每个取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有$G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
4. 若$F = \exists x G$, $F|_I = 1$, iff, 存在约束变量 x 在 $\mathcal{D}$ 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 使得$G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
5. 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定 $\mathcal{D}$ 中的值时公式才有解释.

谓词公式的语义 (2/2)

Definition (公式F在解释I下的真值)

设 F 是一谓词公式,F在解释I下的真值记为: $F|_I$, 其归纳定义如下:

1. 若$F = P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \ldots, t_n|_I$, 是项 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 在 I 下的取值,则 $F|_I = P(t_1|_I, t_2|_I, \ldots, t_n|_I)$;
2. $$F|_I = \begin{cases} \neg(A|_I), & \text{if} \quad F = \neg A \\ (A|_I) \wedge (B|_I), & \text{if} \quad F = A \wedge B \\ (A|_I) \vee (B|_I), & \text{if} \quad F = A \vee B \\ (A|_I) \rightarrow (B|_I), & \text{if} \quad F = A \rightarrow B \\ (A|_I) \leftrightarrow (B|_I), & \text{if} \quad F = A \leftrightarrow B \end{cases}$$
3. 若$F = \forall x G$, $F|_I = 1$, iff, 对约束变量 x 在 $\mathcal{D}$ 中的每个取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有$G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
4. 若$F = \exists x G$, $F|_I = 1$, iff, 存在约束变量 x 在 $\mathcal{D}$ 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 使得$G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
5. 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定 $\mathcal{D}$ 中的值时公式才有解释.

谓词公式的语义 (2/2)

Definition (公式F在解释I下的真值)

设 F 是一谓词公式,F在解释I下的真值记为: $F|_I$, 其归纳定义如下:

1. 若$F = P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, 设 $t_1|_I, t_2|_I, \ldots, t_n|_I$, 是项 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 在 I 下的取值,则 $F|_I = P(t_1|_I, t_2|_I, \ldots, t_n|_I)$;
2. $$F|_I = \begin{cases} \neg(A|_I), & \text{if} \quad F = \neg A \\ (A|_I) \wedge (B|_I), & \text{if} \quad F = A \wedge B \\ (A|_I) \vee (B|_I), & \text{if} \quad F = A \vee B \\ (A|_I) \rightarrow (B|_I), & \text{if} \quad F = A \rightarrow B \\ (A|_I) \leftrightarrow (B|_I), & \text{if} \quad F = A \leftrightarrow B \end{cases}$$
3. 若$F = \forall x G$, $F|_I = 1$, iff, 对约束变量 x 在 $\mathcal{D}$ 中的每个取值 $d \in \mathcal{D}$, 都有$G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
4. 若$F = \exists x G$, $F|_I = 1$, iff, 存在约束变量 x 在 $\mathcal{D}$ 中的取值 $d \in \mathcal{D}$, 使得$G(d/x)|_I = 1$; 否则 $F|_I = 0$;
5. 对于含有自由变量的公式,只有在每个自由变量都取定 $\mathcal{D}$ 中的值时公式才有解释.

Example (1/2)

Example

1. 公式 $\forall x P(x)$ 和 $\exists x \neg P(x)$;
2. $\mathcal{D} = \{1, 2\}$
3.

$P\|_I(1)$	$P\|_I(2)$
1	0

4. $(\forall x P(x))|_I = 0$, because $P|_I(2) = 0$;
5. $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, because $P|_I(2) = 0, (\neg P)|_I(2) = 1$.

Example (2/2)

Example

1. 公式 $G = \forall x(P(x) \to Q(f(x), a))$;
2. $\mathcal{D} = \{1, 2\}$
3.

a	$f(1)$	$f(2)$
1	2	1

4.

$P\|_I(1)$	$P\|_I(2)$	$Q\|_I(1,1)$	$Q\|_I(1,2)$	$Q\|_I(2,1)$	$Q\|_I(2,2)$
0	1	1	1	0	1

5. $(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I,x=1} = P|_I(1) \to Q|_I(2,1) = 1$;
6. $(P(x) \to Q(f(x), a))|_{I,x=2} = P|_I(2) \to Q|_I(1,1) = 1$;
7. $(\forall x(P(x) \to Q(f(x), a)))|_I = 1$.

Outline

1 谓词与量词

2 谓词公式
- 逻辑恒等式和永真蕴涵式
- 谓词永真公式
- 前束范式

3 谓词公式的自然推理

谓词公式的形态

Definition

- 公式 G 是可满足的 (相容的, satisfiable, consistent), iff, 存在解释 I, 使得: $G|_I = 1$, 称 I 是 G 的模型 (model);
- 公式 G 是矛盾的 (永假的, unsatisfiable, invalid), iff, 对所有的解释 I, $G|_I = 0$;
- 公式 G 是永真的 (valid), iff, 对所有的解释 I, $G|_I = 1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, 所以该公式是可满足的,但不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x))$ 是永真的;
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall y D(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;

由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的, 因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假.

谓词公式的形态

Definition

- 公式 G 是可满足的 (相容的, satisfiable, consistent), iff, 存在解释 I, 使得: $G|_I = 1$, 称 I 是 G 的模型 (model);
- 公式 G 是矛盾的 (永假的, unsatisfiable, invalid), iff, 对所有的解释 I, $G|_I = 0$;
- 公式 G 是永真的 (valid), iff, 对所有的解释 I, $G|_I = 1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, 所以该公式是可满足的,但不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x))$ 是永真的;
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall y D(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;

由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的, 因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假.

谓词公式的形态

Definition

- 公式 G 是可满足的 (相容的，satisfiable, consistent), iff, 存在解释 I, 使得: $G|_I = 1$, 称 I 是 G 的模型 (model);
- 公式 G 是矛盾的 (永假的，unsatisfiable, invalid), iff, 对所有的解释 I, $G|_I = 0$;
- 公式 G 是永真的 (valid), iff, 对所有的解释 I, $G|_I = 1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, 所以该公式是可满足的，但不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x))$ 是永真的;
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall y D(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;

由于对每个公式有无限多的解释，因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的，因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假，该公式就永假.

谓词公式的形态

Definition

- 公式 G 是可满足的 (相容的, satisfiable, consistent), iff, 存在解释 I, 使得: $G|_I = 1$, 称 I 是 G 的模型 (model);
- 公式 G 是矛盾的 (永假的,unsatisfiable, invalid), iff, 对所有的解释 I, $G|_I = 0$;
- 公式 G 是永真的 (valid), iff, 对所有的解释 I, $G|_I = 1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, 所以该公式是可满足的,但不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x))$ 是永真的;
- $\exists x(D(x) \to \forall y D(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;

由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的, 因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假.

谓词公式的形态

Definition

- 公式 G 是可满足的 (相容的, satisfiable, consistent), iff, 存在解释 I, 使得: $G|_I = 1$, 称 I 是 G 的模型 (model);
- 公式 G 是矛盾的 (永假的,unsatisfiable, invalid), iff, 对所有的解释 I, $G|_I = 0$;
- 公式 G 是永真的 (valid), iff, 对所有的解释 I, $G|_I = 1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, 所以该公式是可满足的,但不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x))$ 是永真的;
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall y D(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;

由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的, 因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假.

谓词公式的形态

Definition

- 公式 G 是可满足的 (相容的, satisfiable, consistent), iff, 存在解释 I, 使得: $G|_I = 1$, 称 I 是 G 的模型 (model);
- 公式 G 是矛盾的 (永假的,unsatisfiable, invalid), iff, 对所有的解释 I, $G|_I = 0$;
- 公式 G 是永真的 (valid), iff, 对所有的解释 I, $G|_I = 1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, 所以该公式是可满足的,但不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x))$ 是永真的;
- $\exists x(D(x) \to \forall y D(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;

由于对每个公式有无限多的解释,因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的;但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的, 因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假,该公式就永假.

逻辑等价和永真蕴涵关系(1/2)

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff $F \leftrightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I (F \leftrightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I,\ \ F|_I = G|_I$.

Definition (永真蕴涵关系的等价定义)

- $F \Rightarrow G$;
- iff $F \rightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I (F \rightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I,\ \ F|_I \leqslant G|_I$;
- iff $\forall I$, if $F|_I = 1$, then $G|_I = 1$;
- iff $\forall I$, if $G|_I = 0$, then $F|_I = 0$.

逻辑等价和永真蕴涵关系(2/2)

Remark

- *所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;*
- *谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.*

Example

- $\forall x P(x) \to \exists x Q(x, y) \Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x, y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性,对称性和传递性,不等式的传递性等.

逻辑等价和永真蕴涵关系(2/2)

Remark

- *所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;*
- *谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.*

Example

- $\forall x P(x) \to \exists x Q(x, y) \Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x, y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性,对称性和传递性,不等式的传递性等.

逻辑等价和永真蕴涵关系(2/2)

Remark

- *所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;*
- *谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.*

Example

- $\forall x P(x) \to \exists x Q(x, y) \Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x, y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性, 对称性和传递性, 不等式的传递性等.

逻辑等价和永真蕴涵关系(2/2)

Remark

- *所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;*
- *谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.*

Example

- $\forall x P(x) \to \exists x Q(x, y) \Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \lor \exists x Q(x, y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性,对称性和传递性,不等式的传递性等.

逻辑等价和永真蕴涵关系(2/2)

Remark

- *所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;*
- *谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.*

Example

- $\forall x P(x) \to \exists x Q(x, y) \Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x, y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性,对称性和传递性,不等式的传递性等.

更名规则

Theorem (更名规则)

设 $F(x)$ 表示含自由变量 x 的公式,若变量 y 不出现再公式 $F(x)$ 中,则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$

$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

Remark

- $\forall x P(x, y) \Leftrightarrow \forall y P(y, y)$
- $\forall x \forall y P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall y P(y, y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化.

更名规则

Theorem (更名规则)

设 $F(x)$ 表示含自由变量 x 的公式,若变量 y 不出现再公式 $F(x)$ 中,则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$
$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

Remark

- $\forall x P(x, y) \not\Leftrightarrow \forall y P(y, y)$
- $\forall x \forall y P(x, y) \not\Leftrightarrow \forall y \forall y P(y, y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化.

更名规则

Theorem (更名规则)

设 $F(x)$ 表示含自由变量 x 的公式,若变量 y 不出现再公式 $F(x)$ 中,则:

$$\forall xF(x) \Leftrightarrow \forall yF(y)$$

$$\exists xF(x) \Leftrightarrow \exists yF(y)$$

Remark

- $\forall xP(x, y) \not\Leftrightarrow \forall yP(y, y)$
- $\forall x\forall yP(x, y) \not\Leftrightarrow \forall y\forall yP(y, y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化.

更名规则

Theorem (更名规则)

设 $F(x)$ 表示含自由变量 x 的公式,若变量 y 不出现再公式 $F(x)$ 中,则:

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$
$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

Remark

- $\forall x P(x, y) \not\Leftrightarrow \forall y P(y, y)$
- $\forall x \forall y P(x, y) \not\Leftrightarrow \forall y \forall y P(y, y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化.

量词的解消

Theorem (量词的解消)

设 F 是不含自由变量 x 的公式,则:

$$\forall x F \Leftrightarrow F$$

$$\exists x F \Leftrightarrow F$$

Theorem (特例与量词的关系)

设 a 是常量符号,则:

$$\forall x F(x) \Rightarrow F(x)$$

$$F(a) \Rightarrow \exists x F(x)$$

Remark

- 注意,特例化没有恒等关系;如:
- $\mathcal{D} = \{1, 2\}$, $a = 1$, $F(1) = 0$, $F(2) = 1$, 此时 $F(a)$ 为假, 但是, $\exists x F(x)$ 为真.

量词的解消

Theorem (量词的解消)

设 F 是不含自由变量 x 的公式,则:

$$\forall x F \Leftrightarrow F$$

$$\exists x F \Leftrightarrow F$$

Theorem (特例与量词的关系)

设 a 是常量符号,则:

$$\forall x F(x) \Rightarrow F(x)$$

$$F(a) \Rightarrow \exists x F(x)$$

Remark

- 注意,特例化没有恒等关系;如:
- $\mathcal{D} = \{1, 2\}$, $a = 1$, $F(1) = 0$, $F(2) = 1$, 此时 $F(a)$ 为假, 但是, $\exists x F(x)$ 为真.

量词的否定

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有:

$$\begin{aligned} & (\neg(\forall x F(x)))|_I = 1 \\ \text{iff} \quad & (\forall x F(x))|_I = 0 \\ \text{iff} \quad & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_I = 0 \\ \text{iff} \quad & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_I = 1 \\ \text{iff} \quad & (\exists x \neg F(x))|_I = 1 \end{aligned}$$

□

量词的否定

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有：

$$
\begin{aligned}
& (\neg(\forall x F(x)))|_I = 1 \\
\text{iff} \quad & (\forall x F(x))|_I = 0 \\
\text{iff} \quad & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_I = 0 \\
\text{iff} \quad & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_I = 1 \\
\text{iff} \quad & (\exists x \neg F(x))|_I = 1
\end{aligned}
$$

□

量词的否定

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有：

$$
\begin{aligned}
& (\neg(\forall x F(x)))|_I = 1 \\
\text{iff} \quad & (\forall x F(x))|_I = 0 \\
\text{iff} \quad & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_I = 0 \\
\text{iff} \quad & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_I = 1 \\
\text{iff} \quad & (\exists x \neg F(x))|_I = 1
\end{aligned}
$$

□

量词的否定

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有：

$$\begin{aligned} & (\neg(\forall x F(x)))|_I = 1 \\ \text{iff} \quad & (\forall x F(x))|_I = 0 \\ \text{iff} \quad & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_I = 0 \\ \text{iff} \quad & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_I = 1 \\ \text{iff} \quad & (\exists x \neg F(x))|_I = 1 \end{aligned}$$

□

量词的否定

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有：

$$\begin{aligned} & (\neg(\forall x F(x)))|_I = 1 \\ \text{iff} \quad & (\forall x F(x))|_I = 0 \\ \text{iff} \quad & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_I = 0 \\ \text{iff} \quad & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_I = 1 \\ \text{iff} \quad & (\exists x \neg F(x))|_I = 1 \end{aligned}$$

□

量词的否定

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释 I 有:

$$\begin{aligned} & (\neg(\forall x F(x)))|_I = 1 \\ \text{iff} \quad & (\forall x F(x))|_I = 0 \\ \text{iff} \quad & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_I = 0 \\ \text{iff} \quad & \text{存在 } d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_I = 1 \\ \text{iff} \quad & (\exists x \neg F(x))|_I = 1 \end{aligned}$$

□

Example — 极限和发散的定义

Example (极限)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x, 当 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 时,有 $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x, 使得 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$
\begin{aligned}
& \neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon)); \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\neg(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \vee |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\epsilon\forall\delta\exists x((\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).
\end{aligned}
$$

Example — 极限和发散的定义

Example (极限)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x, 当 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 时,有 $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x, 使得 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$
\begin{aligned}
& \neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \to |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon)); \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\neg(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \vee |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\epsilon\forall\delta\exists x((\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).
\end{aligned}
$$

Example — 极限和发散的定义

Example (极限)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x, 当 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 时,有 $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x, 使得 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$
\begin{aligned}
& \neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon)); \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\neg(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \vee |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists\epsilon\forall\delta\exists x((\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).
\end{aligned}
$$

Example — 极限和发散的定义

Example (极限)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x, 当 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 时,有 $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x, 使得 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$\neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\neg(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \vee |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon))$$

$$\Leftrightarrow \exists\epsilon\forall\delta\exists x((\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

Example — 极限和发散的定义

Example (极限)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x, 当 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 时,有 $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x, 使得 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$\neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$
$$\Leftrightarrow \neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\neg(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \vee |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon))$$
$$\Leftrightarrow \exists\epsilon\forall\delta\exists x((\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

Example — 极限和发散的定义

Example (极限)

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 x, 当 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 时,有 $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$;
- 存在 $\epsilon > 0$, 并且对任意的 $\delta > 0$, 存在 x, 使得 $0 < |x - x_0| \leqslant \delta$ 和 $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$ 同时成立.

Example

$$
\begin{aligned}
&\neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));\\
\Leftrightarrow\ &\neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\neg(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \vee |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon))\\
\Leftrightarrow\ &\exists\epsilon\forall\delta\exists x((\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).
\end{aligned}
$$

量词辖域的扩张与收缩

Theorem (辖域的扩张与收缩 (extension & restriction))

设 x 不在公式 G 中出现,则:

$$
\begin{aligned}
(\forall x F(x)) \wedge G &\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge G) \\
(\forall x F(x)) \vee G &\Leftrightarrow \forall x(F(x) \vee G) \\
(\exists x F(x)) \wedge G &\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge G) \\
(\exists x F(x)) \vee G &\Leftrightarrow \exists x(F(x) \vee G)
\end{aligned}
$$

Example

$$\forall x \forall y(P(x) \vee P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

$$
\begin{aligned}
& \forall x \forall y(P(x) \vee P(y)) & \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \vee \forall y P(y)) & \text{(代入+替换)} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall y P(y) & \text{(代入)}
\end{aligned}
$$

量词辖域的扩张与收缩

Theorem (辖域的扩张与收缩 (extension & restriction))

设 x 不在公式 G 中出现,则:

$$(\forall x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge G)$$
$$(\forall x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \forall x(F(x) \vee G)$$
$$(\exists x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge G)$$
$$(\exists x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \exists x(F(x) \vee G)$$

Example

$$\forall x \forall y(P(x) \vee P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y(P(x) \vee P(y)) & \\ \Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \vee \forall y P(y)) & \text{(代入+替换)} \\ \Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall y P(y) & \text{(代入)} \end{aligned}$$

量词辖域的扩张与收缩

Theorem (辖域的扩张与收缩 (extension & restriction))

设 x 不在公式 G 中出现,则:

$$(\forall x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge G)$$
$$(\forall x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \forall x(F(x) \vee G)$$
$$(\exists x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge G)$$
$$(\exists x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \exists x(F(x) \vee G)$$

Example

$$\forall x \forall y(P(x) \vee P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y(P(x) \vee P(y)) & \\ \Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \vee \forall y P(y)) & \text{(代入+替换)} \\ \Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall y P(y) & \text{(代入)} \end{aligned}$$

量词辖域的扩张与收缩

Theorem (辖域的扩张与收缩 (extension & restriction))

设 x 不在公式 G 中出现,则:

$$
\begin{aligned}
(\forall x F(x)) \wedge G &\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge G) \\
(\forall x F(x)) \vee G &\Leftrightarrow \forall x(F(x) \vee G) \\
(\exists x F(x)) \wedge G &\Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge G) \\
(\exists x F(x)) \vee G &\Leftrightarrow \exists x(F(x) \vee G)
\end{aligned}
$$

Example

$$\forall x \forall y(P(x) \vee P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

$$
\begin{aligned}
& \forall x \forall y(P(x) \vee P(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \vee \forall y P(y)) && \text{(代入+替换)} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall y P(y) && \text{(代入)}
\end{aligned}
$$

量词的分配形式

Theorem (量词的分配形式)

设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是两谓词公式，则：

1. $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$
2. $\exists x(F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$
3. $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \boxed{\Rightarrow} \forall x(F(x) \vee G(x))$
4. $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \boxed{\Rightarrow} \exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$

Remark

- ③和④没有恒等式；
- 如解释为，$F(x)$：x 是偶数，$G(x)$：x 是奇数，则，在自然数集合中，$\forall x(F(x) \vee G(x))$ 为真，但，$\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$ 为假；
- 同样，$\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$ 为真，$\exists x(F(x) \wedge G(x))$ 为假.

量词的分配形式

Theorem (量词的分配形式)

设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是两谓词公式，则：

1. $\forall x(F(x) \land G(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \land \forall x G(x)$
2. $\exists x(F(x) \lor G(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \lor \exists x G(x)$
3. $\forall x F(x) \lor \forall x G(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \lor G(x))$
4. $\exists x(F(x) \land G(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \land \exists x G(x)$

Remark

- ③和④没有恒等式；
- 如解释为，$F(x)$: x 是偶数，$G(x)$: x 是奇数，则，在自然数集合中，$\forall x(F(x) \lor G(x))$ 为真，但，$\forall x F(x) \lor \forall x G(x)$ 为假；
- 同样，$\exists x F(x) \land \exists x G(x)$ 为真，$\exists x(F(x) \land G(x))$ 为假.

量词的分配形式

Theorem (量词的分配形式)

设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是两谓词公式,则:

1. $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$
2. $\exists x(F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$
3. $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
4. $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

Remark

- ③和④没有恒等式;
- 如解释为, $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 是奇数,则,在自然数集合中, $\forall x(F(x) \vee G(x))$ 为真,但, $\forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ 为假;
- 同样, $\exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$ 为真, $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ 为假.

量词的分配形式

Theorem (量词的分配形式)

设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是两谓词公式,则:

1. $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$
2. $\exists x(F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$
3. $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
4. $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

Remark

- ③和④没有恒等式;
- 如解释为, $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 是奇数,则,在自然数集合中, $\forall x(F(x) \vee G(x))$ 为真,但, $\forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ 为假;
- 同样, $\exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$ 为真, $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ 为假.

蕴涵词和等值词的处理

Example

$$\exists x(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$
\begin{aligned}
& \exists x(P(x) \to Q(x)) & \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) & (\text{代入+替换}) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg P(x)) \vee \exists x Q(x) & (\text{代入+分配形式}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall x P(x)) \vee \exists x Q(x) & (\text{替换+量词否定}) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \to \exists x Q(x) & (\text{代入+蕴涵表达式})
\end{aligned}
$$

蕴涵词和等值词的处理

Example

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$$

$$\begin{aligned}
& \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) & \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) & \text{(代入+替换)} \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg P(x)) \vee \exists x Q(x) & \text{(代入+分配形式)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall x P(x)) \vee \exists x Q(x) & \text{(替换+量词否定)} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) & \text{(代入+蕴涵表达式)}
\end{aligned}$$

蕴涵词和等值词的处理

Example

$$\exists x(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\begin{aligned}
& \exists x(P(x) \to Q(x)) & \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) & \text{(代入+替换)} \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg P(x)) \vee \exists x Q(x) & \text{(代入+分配形式)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall x P(x)) \vee \exists x Q(x) & \text{(替换+量词否定)} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \to \exists x Q(x) & \text{(代入+蕴涵表达式)}
\end{aligned}$$

蕴涵词和等值词的处理

Example

$$\exists x(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\begin{aligned}
&\exists x(P(x) \to Q(x)) && \\
\Leftrightarrow\ &\exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) && (\text{代入+替换}) \\
\Leftrightarrow\ &\exists x(\neg P(x)) \vee \exists x Q(x) && (\text{代入+分配形式}) \\
\Leftrightarrow\ &\neg(\forall x P(x)) \vee \exists x Q(x) && (\text{替换+量词否定}) \\
\Leftrightarrow\ &\forall x P(x) \to \exists x Q(x) && (\text{代入+蕴涵表达式})
\end{aligned}$$

蕴涵词和等值词的处理

Example

$$\exists x(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$

$$\begin{aligned}
& \exists x(P(x) \to Q(x)) & \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) & (\text{代入+替换}) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg P(x)) \vee \exists x Q(x) & (\text{代入+分配形式}) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall x P(x)) \vee \exists x Q(x) & (\text{替换+量词否定}) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \to \exists x Q(x) & (\text{代入+蕴涵表达式})
\end{aligned}$$

多个量词的处理

Theorem (多个量词的处理)

1. $\forall x \forall y F(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x F(x,y)$
2. $\exists x \exists y F(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x,y)$
3. $\forall x \forall y F(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x F(x,y)$
4. $\exists y \forall x F(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x,y)$
5. $\forall x \exists y F(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x,y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

- $\forall x \exists y LOVE(x,y) \nRightarrow \exists y \forall x LOVE(x,y)$;
- $\forall x \exists y (x+y=0) \nRightarrow \exists y \forall x (x+y=0)$.

多个量词的处理

Theorem (多个量词的处理)

1. $\forall x \forall y F(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x F(x, y)$
2. $\exists x \exists y F(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$
3. $\forall x \forall y F(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x F(x, y)$
4. $\exists y \forall x F(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x, y)$
5. $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

- $\forall x \exists y LOVE(x, y) \not\Rightarrow \exists y \forall x LOVE(x, y)$;
- $\forall x \exists y (x + y = 0) \not\Rightarrow \exists y \forall x (x + y = 0)$.

多个量词的处理

Theorem (多个量词的处理)

1. $\forall x \forall y F(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x F(x, y)$
2. $\exists x \exists y F(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x, y)$
3. $\forall x \forall y F(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x F(x, y)$
4. $\exists y \forall x F(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x, y)$
5. $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

- $\forall x \exists y LOVE(x, y) \not\Rightarrow \exists y \forall x LOVE(x, y)$;
- $\forall x \exists y (x + y = 0) \not\Rightarrow \exists y \forall x (x + y = 0)$.

对偶原理

Definition (对偶公式)

设 G 是一个仅含有 $\forall, \exists$ 和 $\neg, \wedge, \vee$ 运算符号的公式. G 的对偶公式 G^* 是把 G 中的 $\forall, \exists, \wedge, \vee$ 和 $\mathbb{T}, \mathbb{F}$ 分别替换为 $\exists, \forall, \vee, \wedge$ 和 $\mathbb{F}, \mathbb{T}$, 且保持原有的运算关系所得到的公式.

Theorem (对偶定理)

设 F 和 G 是满足上述条件的公式, 则

- $F \Leftrightarrow G$ iff $F^* \Leftrightarrow G^*$;
- $F \Rightarrow G$ iff $G^* \Rightarrow F^*$.

对偶原理

Definition (对偶公式)

设 G 是一个仅含有 $\forall, \exists$ 和 $\neg, \wedge, \vee$ 运算符号的公式. G 的对偶公式 G^* 是把 G 中的 $\forall, \exists, \wedge, \vee$ 和 $\mathbb{T}, \mathbb{F}$ 分别替换为 $\exists, \forall, \vee, \wedge$ 和 $\mathbb{F}, \mathbb{T}$, 且保持原有的运算关系所得到的公式.

Theorem (对偶定理)

设 F 和 G 是满足上述条件的公式, 则

- $F \Leftrightarrow G$ iff $F^* \Leftrightarrow G^*$;
- $F \Rightarrow G$ iff $G^* \Rightarrow F^*$.

对偶原理

Definition (对偶公式)

设 G 是一个仅含有 $\forall, \exists$ 和 $\neg, \wedge, \vee$ 运算符号的公式. G 的对偶公式 G^* 是把 G 中的 $\forall, \exists, \wedge, \vee$ 和 $\mathbb{T}, \mathbb{F}$ 分别替换为 $\exists, \forall, \vee, \wedge$ 和 $\mathbb{F}, \mathbb{T}$, 且保持原有的运算关系所得到的公式.

Theorem (对偶定理)

设 F 和 G 是满足上述条件的公式,则

- $F \Leftrightarrow G$ *iff* $F^* \Leftrightarrow G^*$;
- $F \Rightarrow G$ *iff* $G^* \Rightarrow F^*$.

Example(1/2)

- $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

- $\forall x\exists yF(x, y) \Rightarrow \exists y\exists xF(x, y)$
- $\forall y\forall xF(x, y) \Rightarrow \exists x\forall yF(x, y)$

Example(1/2)

- $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

- $\forall x\exists yF(x, y) \Rightarrow \exists y\exists xF(x, y)$
- $\forall y\forall xF(x, y) \Rightarrow \exists x\forall yF(x, y)$

Example(1/2)

- $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$

- $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$
- $\forall y \forall x F(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$

Example(1/2)

- $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \Rightarrow \forall x(F(x) \vee G(x))$
- $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$

- $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$
- $\forall y \forall x F(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$

Example(2/2)

Example

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x(R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \land \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg P(x))$$

$$\begin{aligned}
& \forall x(P(x) \to Q(x)) \land \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x))) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg R(x) \lor \neg Q(x))) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x((\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land \boxed{B(x)}) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land \forall x B(x) \\
\Rightarrow\ & \forall x(\neg P(x) \lor \neg R(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(R(x) \to \neg P(x))
\end{aligned}$$

□

Example(2/2)

Example

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x(R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \land \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg P(x))$$

$$\begin{aligned}
& \forall x(P(x) \to Q(x)) \land \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x((P(x) \to Q(x)) \land (R(x) \to \neg Q(x))) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg R(x) \lor \neg Q(x))) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x((\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land \boxed{B(x)}) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(\neg P(x) \lor \neg R(x)) \land \forall x B(x) \\
\Rightarrow\ & \forall x(\neg P(x) \lor \neg R(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(R(x) \to \neg P(x))
\end{aligned}$$

□

Example(2/2)的补充证明

存在 B 使得 $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge B$

Proof.

$$
\begin{aligned}
& \underbrace{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q)}_{B} \\
\Leftrightarrow\ & B \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee (P \wedge R)) \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{B \wedge ((\neg P \vee \neg R))}_{C} \vee (B \wedge (P \wedge R)) \\
\Leftrightarrow\ & C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge (P \wedge R)) \\
\Leftrightarrow\ & C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R) \\
\Leftrightarrow\ & C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R)) \\
\Leftrightarrow\ & C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \\
\Leftrightarrow\ & C \vee \mathbb{F}
\end{aligned}
$$

□

Example(2/2)一个有问题的证明

Proof.

用CP规则等价证明

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg P(x))$$

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \to \neg Q(x))$$

1 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge (R(x) \to \neg Q(x)))$

2 $\Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(x) \to \neg R(x)))$

3 $\Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg P(x))$

第3步推导出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意解释 I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 $\forall x A(x)|_I$为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_I(d)$ 为真,所以 $B|_I(d)$ 为真,

即 $\forall x B(x)|_I$为真. □

Example(2/2)一个有问题的证明

Proof.

用CP规则等价证明

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg P(x))$$

$$\begin{array}{lll} & & \forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \\ 1 & & \Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge (R(x) \to \neg Q(x))) \\ 2 & & \Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(x) \to \neg R(x))) \\ 3 & & \Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg P(x)) \end{array}$$

第3步推导出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意解释 I, 任意的 $d \in \mathcal{D}$, if $A|_I(d)$ 为真, then $B|_I(d)$ 为真.

设 $\forall x A(x)|_I$为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有 $A|_I(d)$ 为真,所以 $B|_I(d)$ 为真,

即 $\forall x B(x)|_I$为真. □

Example(错误使用替换规则)

Example

$$
\begin{aligned}
& \forall x(P(x) \vee Q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg \exists x \neg (P(x) \vee Q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg \underbrace{\exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))}_{C(x)} \\
\boxed{\Rightarrow}\ & \neg \underbrace{(\exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x))}_{D(x)} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)
\end{aligned}
$$

错误:局部变换中对不等式使用替换规则!

$$C(x) \Rightarrow D(x) \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad \neg C(x) \Rightarrow \neg D(x)$$

前束范式的定义

Definition (前束范式)

形如：$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n(M)$ 的公式称为前束范式 (Prenix Normal Form)，其中：

$$Q_i x_i = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Example

- $\forall x \forall y (P(x, y) \wedge Q(x))$
- $\forall x \forall y \exists z (P(x, y) \to Q(x, z))$

Definition

设公式 $F \Leftrightarrow G$，其中 G 是前束范式，称 G 为公式 F 的前束范式.

前束范式求解

Theorem

对任意的公式 F,存在公式 G,使得 G 是 F 的前束范式.

求解步骤

1. 消除 $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
2. 用De Morgan律消除对非原子子公式的否定;
3. 对约束变量的重新命名;
4. 量词的外提(量词的吸收,扩张和分配等定律的使用).

Example

Example

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$
$$\not\Leftrightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$$
$$\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y Q(y)$$
$$\Leftrightarrow \forall x(P(x) \vee \forall y Q(y))$$
$$\Leftrightarrow \forall x \forall y(P(x) \vee Q(y))$$

Example

$$\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$$
1 $$\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)$$
$$\Leftrightarrow \exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$$
2 $$\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y))$$
$$\Leftrightarrow \exists x \exists y(\neg P(x) \vee Q(y))$$

Example

Example

$$\begin{aligned} & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\ \not\Leftrightarrow\ & \forall x (P(x) \vee Q(x)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned} & \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \\ 1 \quad \Leftrightarrow\ & \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\ \Leftrightarrow\ & \exists x (\neg P(x) \vee Q(x)) \\ 2 \quad \Leftrightarrow\ & \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)) \\ \Leftrightarrow\ & \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y)) \end{aligned}$$

Example

Example

$$
\begin{aligned}
& \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
\cancel{\Leftrightarrow}\ & \forall x (P(x) \vee Q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
& & \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \\
1 & \Leftrightarrow & \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
& \Leftrightarrow & \exists x (\neg P(x) \vee Q(x)) \\
2 & \Leftrightarrow & \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)) \\
& \Leftrightarrow & \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))
\end{aligned}
$$

Example

Example

$$
\begin{aligned}
& \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
\not\Leftrightarrow\ & \forall x (P(x) \vee Q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
& & \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \\
1 & \Leftrightarrow & \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
& \Leftrightarrow & \exists x (\neg P(x) \vee Q(x)) \\
2 & \Leftrightarrow & \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)) \\
& \Leftrightarrow & \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))
\end{aligned}
$$

Example

Example

$$
\begin{aligned}
& \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
\not\Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \vee Q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \forall y(P(x) \vee Q(y))
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
& \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \\
1 \quad \Leftrightarrow\ & \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) \\
2 \quad \Leftrightarrow\ & \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \exists y(\neg P(x) \vee Q(y))
\end{aligned}
$$

Example

Example

$$
\begin{aligned}
& \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
\not\Leftrightarrow\ & \forall x (P(x) \vee Q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
& \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
1 \quad \Leftrightarrow\ & \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x (\neg P(x) \vee Q(x)) \\
2 \quad \Leftrightarrow\ & \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))
\end{aligned}
$$

Example

Example

$$
\begin{aligned}
& \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
\cancel{\Leftrightarrow}\ & \forall x(P(x) \vee Q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \forall y(P(x) \vee Q(y))
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
& & \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\
1 & \Leftrightarrow & \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
& \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) \\
2 & \Leftrightarrow & \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)) \\
& \Leftrightarrow & \exists x \exists y(\neg P(x) \vee Q(y))
\end{aligned}
$$

Outline

1. 谓词与量词
2. 谓词公式
3. 谓词公式的自然推理
   - 相关概念的复习
   - 量词的推理规则
   - 形式证明的例子
   - Mechanical Reasoning

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n, C$是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) = 1$, 则有：$I(C) = 1$. 记为$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价：

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \to C$是重言式；
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C$;
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \to C)$是矛盾式；
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式；
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \to \mathbb{F}$是永真；
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n, C$是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) = 1$，则有：$I(C) = 1$. 记为$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价：

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$是重言式;
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C$;
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C)$是矛盾式;
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式;
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F}$是永真;
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C是公式,称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) = 1$, 则有: $I(C) = 1$. 记为$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \to C$是重言式;
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C$;
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \to C)$是矛盾式;
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式;
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \to \mathbb{F}$是永真;
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) = 1$, 则有: $I(C) = 1$. 记为$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$是重言式;
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C$;
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C)$是矛盾式;
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式;
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F}$是永真;
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I，如果$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) = 1$，则有：$I(C) = 1$. 记为$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价：

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$是重言式；
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C$;
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C)$是矛盾式；
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式；
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \rightarrow \mathbb{F}$是永真；
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n, C$是公式,称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) = 1$, 则有: $I(C) = 1$. 记为$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价:

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \to C$是重言式;
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C$;
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \to C)$是矛盾式;
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式;
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \to \mathbb{F}$是永真;
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n, C$是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I，如果$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) = 1$，则有：$I(C) = 1$. 记为$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价：

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \to C$是重言式；
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C$;
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \to C)$是矛盾式；
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式；
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \to \mathbb{F}$是永真；
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

证明序列

Definition

设，$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一组条件，一个证明序列是一组形如：$C_1, C_2, \ldots, C_m$的公式序列，其中每个C_i满足下述条件中的一个：

1. 存在H_j，使得：$C_i = H_j$；(引入条件)
2. $C_i = \mathbb{T}$；(引入永真)
3. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \leq i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$；(恒等变换)
4. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \leq i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$；(不等变换)

证明序列

Definition

设，$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一组条件，一个证明序列是一组形如：$C_1, C_2, \ldots, C_m$的公式序列，其中每个C_i满足下述条件中的一个：

1. 存在H_j，使得：$C_i = H_j$; (引入条件)
2. $C_i = \mathbb{T}$; (引入永真)
3. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \leq i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$; (恒等变换)
4. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$，其中：$i_j \leq i$，并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$; (不等变换)

证明序列

Definition

设, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是一组条件, 一个证明序列是一组形如: $C_1, C_2, \ldots, C_m$ 的公式序列, 其中每个 C_i 满足下述条件中的一个:

1. 存在 H_j, 使得: $C_i = H_j$; (引入条件)
2. $C_i = \mathbb{T}$; (引入永真)
3. 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$; (恒等变换)
4. 存在 $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$; (不等变换)

证明序列

Definition

设,$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一组条件,一个证明序列是一组形如:
$C_1, C_2, \ldots, C_m$的公式序列,其中每个C_i满足下述条件中的一个:

1. 存在H_j, 使得: $C_i = H_j$; (引入条件)
2. $C_i = \mathbb{T}$; (引入永真)
3. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$; (恒等变换)
4. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且: $C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$; (不等变换)

证明有效结论的方法

Remark

1. 恒等和不等变换;
2. 设结论为假,证明条件亦假;
3. 设前提为真,证明结论亦真;
4. 证明序列.

证明有效结论的方法

Remark

1. 恒等和不等变换;
2. 设结论为假,证明条件亦假;
3. 设前提为真,证明结论亦真;
4. 证明序列.

证明有效结论的方法

Remark

1. 恒等和不等变换;
2. 设结论为假,证明条件亦假;
3. 设前提为真,证明结论亦真;
4. 证明序列.

证明有效结论的方法

Remark

1. 恒等和不等变换;
2. 设结论为假,证明条件亦假;
3. 设前提为真,证明结论亦真;
4. 证明序列.

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z)$;
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y)$.

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则: 两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记:约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性 (Gödel's completeness theorem).

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z)$;
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y)$.

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则: 两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记:约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性 (Gödel's completeness theorem).

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z)$;
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y)$.

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则: 两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记:约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性(Gödel's completeness theorem).

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z)$;
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y)$.

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则: 两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记:约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性 (Gödel's completeness theorem).

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为：$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z)$;
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y)$.

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用；
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则：两个量词的分离和两个量词的引入；
- 在处理量词时切记：约束与非约束的关系不能改变！
- 同命题逻辑一样，一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性 (Gödel's completeness theorem).

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示变量为: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 在公式 F 自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z)$;
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y)$.

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则: 两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记:约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样,一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性 (Gödel's completeness theorem).

全称指定规则 (US规则)

Universal Specification

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)}\ \text{(US)} \qquad\qquad \frac{\forall x F(x)}{F(c)}\ \text{(US)}$$

- ☞ y 一定不是在公式 F 中出现的约束变量.
- ☞ 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

Example

- $\forall x \forall y P(x,y) \vdash \forall y P(x,y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x,y)$;
- $\forall x \exists y P(x,y) \nvdash \exists y P(y,y)$, 因为: y 在 $\forall y P(x,y)$ 中约束出现;
- $\forall x P(x) \to Q \nvdash P(x) \to Q$;
- 原因:US规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式.

全称指定规则 (US规则)

Universal Specification

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} \text{(US)} \qquad \frac{\forall x F(x)}{F(c)} \text{(US)}$$

☞ y 一定不是在公式 F 中出现的约束变量.

☞ 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

Example

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- $\forall x \exists y P(x, y) \nvdash \exists y P(y, y)$, 因为: y 在 $\forall y P(x, y)$ 中约束出现;
- $\forall x P(x) \to Q \nvdash P(x) \to Q$;
- 原因:US规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式.

全称指定规则 (US规则)

Universal Specification

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} \text{ (US)} \qquad \frac{\forall x F(x)}{F(c)} \text{ (US)}$$

☞ y 一定不是在公式 F 中出现的约束变量.

☞ 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

Example

- $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y P(x, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x, y)$;
- $\forall x \exists y P(x, y) \nvdash \exists y P(y, y)$, 因为: y 在 $\forall y P(x, y)$ 中约束出现;
- $\forall x P(x) \to Q \nvdash P(x) \to Q$;
- 原因:US规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式.

全称指定规则 (US规则)

Universal Specification

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)}\ (\text{US}) \qquad \frac{\forall x F(x)}{F(c)}\ (\text{US})$$

☞ y 一定不是在公式 F 中出现的约束变量.

☞ 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

Example

- $\forall x \forall y P(x,y) \vdash \forall y P(x,y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x,y)$;
- $\forall x \exists y P(x,y) \nvdash \exists y P(y,y)$, 因为: y 在 $\forall y P(x,y)$ 中约束出现;
- $\forall x P(x) \to Q \nvdash P(x) \to Q$;
- 原因:US规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式.

全称指定规则 (US规则)

Universal Specification

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)} \text{(US)} \qquad \frac{\forall x F(x)}{F(c)} \text{(US)}$$

☞ y 一定不是在公式 F 中出现的约束变量.

☞ 对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

Example

- $\forall x \forall y P(x,y) \vdash \forall y P(x,y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x,y)$;
- $\forall x \exists y P(x,y) \nvdash \exists y P(y,y)$, 因为: y 在 $\forall y P(x,y)$ 中约束出现;
- $\forall x P(x) \rightarrow Q \nvdash P(x) \rightarrow Q$;
- 原因:US规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式.

特称指定规则 (ES规则)

Existensial Specification

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}\ \text{(ES)}$$

- ☞ c 是新引入的常量符号.
- ☞ 对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$

Example

- $\exists x \exists y P(x,y) \vdash \exists y P(a,y)$, 其中: $F(x) \triangleq \exists y P(x,y)$;
- $\exists x P(x,a) \nvdash P(a,a)$, 因为: a 在 $P(x,a)$ 中已经出现;
- $\exists x P(x) \to Q \nvdash P(a) \to Q$;
- 原因:ES规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式.

特称指定规则 (ES规则)

Existensial Specification

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}\ \text{(ES)}$$

☞ c 是新引入的常量符号.
☞ 对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$

Example

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \exists y P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash P(a, a)$, 因为: a 在 $P(x, a)$ 中已经出现;
- $\exists x P(x) \rightarrow Q \nvdash P(a) \rightarrow Q$;
- 原因:ES规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式.

特称指定规则 (ES规则)

Existensial Specification

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)} \text{ (ES)}$$

☞ c 是新引入的常量符号.
☞ 对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$

Example

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \exists y P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash P(a, a)$, 因为: a 在 $P(x, a)$ 中已经出现;
- $\exists x P(x) \to Q \nvdash P(a) \to Q$;
- 原因:ES规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式.

特称指定规则（ES规则）

Existensial Specification

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)} \text{(ES)}$$

☞ c 是新引入的常量符号.
☞ 对应的不等式：$\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$

Example

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$，其中：$F(x) \triangleq \exists y P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash P(a, a)$，因为：$a$ 在 $P(x, a)$ 中已经出现；
- $\exists x P(x) \to Q \nvdash P(a) \to Q$;
- 原因：ES规则中的量词辖域是整个公式，而不是局部的子公式.

特称指定规则 (ES规则)

Existensial Specification

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)} \text{ (ES)}$$

☞ c 是新引入的常量符号.
☞ 对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$

Example

- $\exists x \exists y P(x, y) \vdash \exists y P(a, y)$, 其中: $F(x) \triangleq \exists y P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash P(a, a)$, 因为: a 在 $P(x, a)$ 中已经出现;
- $\exists x P(x) \to Q \nvdash P(a) \to Q$;
- 原因:ES规则中的量词辖域是整个公式,而不是局部的子公式.

特称推广规则 (EG规则)

Existential Generalization

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)}\ (\text{EG}) \qquad\qquad \frac{F(x)}{\exists y F(y)}\ (\text{EG})$$

☞ y 是新引入的变量符号.
☞ 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

Example

- $\exists x P(x,a) \vdash \exists y \exists x P(x,y)$, 其中: $F(y) \triangleq \exists x P(x,y)$;
- $\exists x P(x,a) \nvdash \exists x \exists x P(x,x)$, 因为: x 在 $\exists x P(x,a)$ 中已经约束出现;
- $P(a) \rightarrow \exists y Q(y) \nvdash \exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$, $\exists x$辖域是$P(x)$, 而不是整个公式.

特称推广规则 (EG规则)

Existential Generalization

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)}\ (\text{EG}) \qquad \frac{F(x)}{\exists y F(y)}\ (\text{EG})$$

☞ y 是新引入的变量符号.
☞ 对应的不等式：$F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

Example

- $\exists x P(x, a) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$，其中：$F(y) \triangleq \exists x P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash \exists x \exists x P(x, x)$，因为：$x$ 在 $\exists x P(x, a)$ 中已经约束出现;
- $P(a) \to \exists y Q(y) \nvdash \exists x P(x) \to \exists y Q(y)$, $\exists x$辖域是$P(x)$, 而不是整个公式.

特称推广规则 (EG规则)

Existential Generalization

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)}\ (\text{EG}) \qquad \frac{F(x)}{\exists y F(y)}\ (\text{EG})$$

☞ y 是新引入的变量符号.
☞ 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

Example

- $\exists x P(x, a) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$, 其中: $F(y) \triangleq \exists x P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash \exists x \exists x P(x, x)$, 因为: x 在 $\exists x P(x, a)$ 中已经约束出现;
- $P(a) \to \exists y Q(y) \nvdash \exists x P(x) \to \exists y Q(y)$, $\exists x$辖域是$P(x)$, 而不是整个公式.

特称推广规则 (EG规则)

Existential Generalization

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)} \text{(EG)} \qquad \frac{F(x)}{\exists y F(y)} \text{(EG)}$$

☞ y 是新引入的变量符号.
☞ 对应的不等式: $F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

Example

- $\exists x P(x, a) \vdash \exists y \exists x P(x, y)$, 其中: $F(y) \triangleq \exists x P(x, y)$;
- $\exists x P(x, a) \nvdash \exists x \exists x P(x, x)$, 因为: x 在 $\exists x P(x, a)$ 中已经约束出现;
- $P(a) \to \exists y Q(y) \nvdash \exists x P(x) \to \exists y Q(y)$, $\exists x$辖域是$P(x)$, 而不是整个公式.

全称推广规则 (UG规则)

Universal Generalization

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)}\ \text{(UG)}$$

☞ x 不在 F 中约束出现，且 F 要对 x 的所有取值成立.

☞ 对应的不等式：$F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$.

Example

- $P(x,a) \vdash \forall x P(x,a)$，其中：$F(x) \triangleq P(x,a)$;
- $P(x) \to \exists y Q(y) \nvdash \forall x P(x) \to \exists y Q(y)$, $\forall x$辖域是$P(x)$，而不是整个公式.
- $P(x,a) \nvdash \forall y P(x,y)$，$a$是常量符号，不能用UG规则.

全称推广规则 (UG规则)

Universal Generalization

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} \text{ (UG)}$$

☞ x 不在 F 中约束出现，且 F 要对 x 的所有取值成立.
☞ 对应的不等式：$F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$.

Example

- $P(x, a) \vdash \forall x P(x, a)$，其中：$F(x) \triangleq P(x, a)$;
- $P(x) \to \exists y Q(y) \nvdash \forall x P(x) \to \exists y Q(y)$，$\forall x$辖域是$P(x)$，而不是整个公式.
- $P(x, a) \nvdash \forall y P(x, y)$，$a$ 是常量符号，不能用UG规则.

全称推广规则 (UG规则)

Universal Generalization

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} \text{ (UG)}$$

☞ x 不在 F 中约束出现,且 F 要对 x 的所有取值成立.
☞ 对应的不等式: $F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$.

Example

- $P(x,a) \vdash \forall x P(x,a)$, 其中: $F(x) \triangleq P(x,a)$;
- $P(x) \to \exists y Q(y) \nvdash \forall x P(x) \to \exists y Q(y)$, $\forall x$辖域是$P(x)$,而不是整个公式.
- $P(x,a) \nvdash \forall y P(x,y)$, a 是常量符号,不能用UG规则.

全称推广规则 (UG规则)

Universal Generalization

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)} \text{ (UG)}$$

☞ x 不在 F 中约束出现，且 F 要对 x 的所有取值成立.
☞ 对应的不等式：$F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$.

Example

- $P(x,a) \vdash \forall x P(x,a)$，其中：$F(x) \triangleq P(x,a)$;
- $P(x) \to \exists y Q(y) \nvdash \forall x P(x) \to \exists y Q(y)$，$\forall x$辖域是$P(x)$，而不是整个公式.
- $P(x,a) \nvdash \forall y P(x,y)$，$a$ 是常量符号，不能用UG规则.

注释 (1/2)

Example

1. $\forall x \exists y F(x, y)$ (P)
2. $\exists y F(x, y)$ (①+US)
3. $F(x, c_x)$ (②+ES)
4. $\forall x F(x, c_x)$ (③+UG)
5. $\exists y \forall x F(x, y)$ (④+EG)

Remark

- $\exists y \forall x F(x, y) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \forall x \exists y F(x, y)$
- *US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关；*
- *这样，US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.*

注释 (1/2)

Example

1. $\forall x \exists y F(x, y)$ (P)
2. $\exists y F(x, y)$ (①+US)
3. $F(x, c_x)$ (②+ES)
4. $\forall x F(x, c_x)$ (③+UG)
5. $\exists y \forall x F(x, y)$ (④+EG)

Remark

- $\exists y \forall x F(x, y) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \forall x \exists y F(x, y)$
- *US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;*
- *这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.*

注释 (1/2)

Example

1. $\forall x \exists y F(x, y)$ (P)
2. $\exists y F(x, y)$ (①+US)
3. $F(x, c_x)$ (②+ES)
4. $\forall x F(x, c_x)$ (③+UG)
5. $\exists y \forall x F(x, y)$ (④+EG)

Remark

- $\exists y \forall x F(x, y) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \forall x \exists y F(x, y)$
- *US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;*
- *这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.*

注释 (1/2)

Example

1. $\forall x \exists y F(x, y)$ (P)
2. $\exists y F(x, y)$ (①+US)
3. $F(x, c_x)$ (②+ES)
4. $\forall x F(x, c_x)$ (③+UG)
5. $\exists y \forall x F(x, y)$ (④+EG)

Remark

- $\exists y \forall x F(x, y) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \forall x \exists y F(x, y)$
- *US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;*
- *这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.*

注释 (2/2)

Example

1 $\forall x(P(x)\to Q(x))$	(P)	1 $\exists y P(y)$	(P)
2 $P(c)\to Q(c)$	(①+US)	2 $P(c)$	(①+ES)
3 $\exists y P(y)$	(P)	3 $\forall x(P(x)\to Q(x))$	(P)
4 $P(c)$	(③+ES)	4 $P(c)\to Q(c)$	(③+US)
5 $Q(c)$	(②④+MP)	5 $Q(c)$	(②④+MP)
6 $\exists x Q(x)$	(⑤+EG)	6 $\exists x Q(x)$	(⑤+EG)

Remark

- *④ 用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);*
- *US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;*
- *特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).*

注释 (2/2)

Example

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	(P)	1	$\exists y P(y)$	(P)
2	$P(c) \to Q(c)$	(①+US)	2	$P(c)$	(①+ES)
3	$\exists y P(y)$	(P)	3	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	(P)
4	$P(c)$	(③+ES)	4	$P(c) \to Q(c)$	(③+US)
5	$Q(c)$	(②④+MP)	5	$Q(c)$	(②④+MP)
6	$\exists x Q(x)$	(⑤+EG)	6	$\exists x Q(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④ *用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);*
- *US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;*
- *特殊和一般的关系:先特殊(ES), 后一般(US).*

注释 (2/2)

Example

1 $\forall x(P(x) \to Q(x))$	(P)	1 $\exists y P(y)$	(P)
2 $P(c) \to Q(c)$	(①+US)	2 $P(c)$	(①+ES)
3 $\exists y P(y)$	(P)	3 $\forall x(P(x) \to Q(x))$	(P)
4 $\boxed{P(c)}$	(③+ES)	4 $P(c) \to Q(c)$	(③+US)
5 $Q(c)$	(②④+MP)	5 $Q(c)$	(②④+MP)
6 $\exists x Q(x)$	(⑤+EG)	6 $\exists x Q(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④ 用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系:先特殊(ES), 后一般(US).

注释 (2/2)

Example

1	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	(P)	1	$\exists y P(y)$	(P)
2	$P(c) \to Q(c)$	(①+US)	2	$P(c)$	(①+ES)
3	$\exists y P(y)$	(P)	3	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	(P)
4	$P(c)$	(③+ES)	4	$P(c) \to Q(c)$	(③+US)
5	$Q(c)$	(②④+MP)	5	$Q(c)$	(②④+MP)
6	$\exists x Q(x)$	(⑤+EG)	6	$\exists x Q(x)$	(⑤+EG)

Remark

- ④ 用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);
- US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;
- 特殊和一般的关系：先特殊(ES), 后一般(US).

注释 (2/2)

Example

1. $\forall x(P(x) \to Q(x))$ (P)
2. $P(c) \to Q(c)$ (①+US)
3. $\exists y P(y)$ (P)
4. $\boxed{P(c)}$ (③+ES)
5. $Q(c)$ (②④+MP)
6. $\exists x Q(x)$ (⑤+EG)

1. $\exists y P(y)$ (P)
2. $P(c)$ (①+ES)
3. $\forall x(P(x) \to Q(x))$ (P)
4. $P(c) \to Q(c)$ (③+US)
5. $Q(c)$ (②④+MP)
6. $\exists x Q(x)$ (⑤+EG)

Remark

- ④ *用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);*
- *US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;*
- *特殊和一般的关系:先特殊(ES), 后一般(US).*

形式证明的主要步骤

主要步骤

- 证明方法的选择:直接证明;间接证明(CP规则,反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词), 注意:避免US+ES后再UG.

形式证明的主要步骤

主要步骤

- 证明方法的选择:直接证明;间接证明(CP规则,反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词),注意:避免US+ES后再UG.

形式证明的主要步骤

主要步骤

- 证明方法的选择:直接证明;间接证明(CP规则,反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词),注意:避免US+ES后再UG.

形式证明的主要步骤

主要步骤

- 证明方法的选择:直接证明;间接证明(CP规则,反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词),注意:避免US+ES后再UG.

形式证明的主要步骤

主要步骤

- 证明方法的选择:直接证明;间接证明(CP规则,反证法等);
- ES+ US 去掉量词(注意:引入的变量和常量的限定条件);
- 处理好特殊和一般的关系;
- 等同写命题公式的证明序列;
- UG和EG加量词(if 结论中有量词),注意:避免US+ES后再UG.

Example (1/2)

完成证明序列

1. H_1 : $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
2. H_2 : $P(a)$
3. C : $\exists x P(f(x))$

1	$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$	(P)
2	$\neg P(a) \vee P(f(a))$	(①+US)
3	$P(a) \to P(f(a))$	(①+T)
4	$P(a)$	(P)
5	$P(f(a))$	(③④+MP)
6	$\exists x P(f(x))$	(⑤+EG)

Example (1/2)

完成证明序列

1. H_1 : $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
2. H_2 : $P(a)$
3. C : $\exists x P(f(x))$

1	$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$	(P)
2	$\neg P(a) \vee P(f(a))$	(①+US)
3	$P(a) \rightarrow P(f(a))$	(①+T)
4	$P(a)$	(P)
5	$P(f(a))$	(③④+MP)
6	$\exists x P(f(x))$	(⑤+EG)

Example (1/2)

完成证明序列

1. H_1 : $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
2. H_2 : $P(a)$
3. C : $\exists x P(f(x))$

1	$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$	(P)
2	$\neg P(a) \vee P(f(a))$	(①+US)
3	$P(a) \rightarrow P(f(a))$	(①+T)
4	$P(a)$	(P)
5	$P(f(a))$	(③④+MP)
6	$\exists x P(f(x))$	(⑤+EG)

Example (1/2)

完成证明序列

1. $H_1: \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
2. $H_2: P(a)$
3. $C: \exists x P(f(x))$

1	$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$	(P)
2	$\neg P(a) \vee P(f(a))$	(①+US)
3	$P(a) \to P(f(a))$	(①+T)
4	$P(a)$	(P)
5	$P(f(a))$	(③④+MP)
6	$\exists x P(f(x))$	(⑤+EG)

Example (1/2)

完成证明序列

1. H_1 : $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
2. H_2 : $P(a)$
3. C : $\exists x P(f(x))$

1	$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$	(P)
2	$\neg P(a) \vee P(f(a))$	(①+US)
3	$P(a) \rightarrow P(f(a))$	(①+T)
4	$P(a)$	(P)
5	$P(f(a))$	(③④+MP)
6	$\exists x P(f(x))$	(⑤+EG)

Example (1/2)

完成证明序列

1. H_1 : $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
2. H_2 : $P(a)$
3. C : $\exists x P(f(x))$

1	$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$	(P)
2	$\neg P(a) \vee P(f(a))$	(①+US)
3	$P(a) \rightarrow P(f(a))$	(①+T)
4	$P(a)$	(P)
5	$P(f(a))$	(③④+MP)
6	$\exists x P(f(x))$	(⑤+EG)

Example (1/2)

完成证明序列

1. H_1 : $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
2. H_2 : $P(a)$
3. C : $\exists x P(f(x))$

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\exists x P(f(x))$ (⑤+EG)

Example (2/2)

完成下列推理的形式证明

条件：

1. 纪检人员审查了该部门的每一个非VIP人员；
2. 该部门有腐败分子存在并且仅被同类审查过；
3. VIP不是腐败分子.

结论：有纪检人员是腐败分子.

$E(x)$: x是该部门的人员；

$V(x)$: x是VIP；

$S(x,y)$: x是被y审查；

$C(x)$: x是纪检人员；

$P(x)$: x是腐败分子.

1. $H_1: \forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \land C(x))$

Example (2/2)

完成下列推理的形式证明

条件:

1. 纪检人员审查了该部门的每一个非VIP人员;
2. 该部门有腐败分子存在并且仅被同类审查过;
3. VIP不是腐败分子.

结论: 有纪检人员是腐败分子.

$E(x)$: x是该部门的人员;

$V(x)$: x是VIP;

$S(x, y)$: x是被y审查;

$C(x)$: x是纪检人员;

$P(x)$: x是腐败分子.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y(C(y) \wedge S(x, y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x, y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

Example (2/2)

完成下列推理的形式证明

条件:

1. 纪检人员审查了该部门的每一个非VIP人员;
2. 该部门有腐败分子存在并且仅被同类审查过;
3. VIP不是腐败分子.

结论: 有纪检人员是腐败分子.

$E(x)$: x是该部门的人员;

$V(x)$: x是VIP;

$S(x,y)$: x是被y审查;

$C(x)$: x是纪检人员;

$P(x)$: x是腐败分子.

1. H_1 : $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. H_2 : $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \to P(y)))$
3. H_3 : $\forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. C : $\exists x(P(x) \wedge C(x))$

Example (2/2)

完成下列推理的形式证明

条件：

1. 纪检人员审查了该部门的每一个非VIP人员;
2. 该部门有腐败分子存在并且仅被同类审查过;
3. VIP不是腐败分子.

结论：有纪检人员是腐败分子.

$E(x)$: x是该部门的人员;

$V(x)$: x是VIP;

$S(x,y)$: x是被y审查;

$C(x)$: x是纪检人员;

$P(x)$: x是腐败分子.

1. H_1 : $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. H_2 : $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$
3. H_3 : $\forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. C : $\exists x(P(x) \wedge C(x))$

Example (2/2)

完成下列推理的形式证明

条件:

1. 纪检人员审查了该部门的每一个非VIP人员;
2. 该部门有腐败分子存在并且仅被同类审查过;
3. VIP不是腐败分子.

结论: 有纪检人员是腐败分子.

$E(x)$: x是该部门的人员;
$V(x)$: x是VIP;
$S(x,y)$: x是被y审查;
$C(x)$: x是纪检人员;
$P(x)$: x是腐败分子.

1. H_1 : $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. H_2 : $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$
3. H_3 : $\forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. C : $\exists x(P(x) \wedge C(x))$

Example (2/2)

完成下列推理的形式证明

条件：

1. 纪检人员审查了该部门的每一个非VIP人员；
2. 该部门有腐败分子存在并且仅被同类审查过；
3. VIP不是腐败分子.

结论：有纪检人员是腐败分子.

$E(x)$: x是该部门的人员；
$V(x)$: x是VIP;
$S(x,y)$: x是被y审查；
$C(x)$: x是纪检人员；
$P(x)$: x是腐败分子.

1. $H_1: \forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \land C(x))$

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \to P(y)))$ (P)
2. $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a,y) \to P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \to P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \to \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \to \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) \to \exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \wedge S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \to P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \wedge C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y(C(y) \wedge S(x, y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x, y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x, y) \to P(y)))$ (P)
2. $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a, y) \to P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a, y) \to P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \to \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \to \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y(C(y) \wedge S(x, y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) \to \exists y(C(y) \wedge S(a, y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \wedge S(a, y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \wedge S(a, b)$ (⑫+ES)
14. $S(a, b) \to P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a, b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \wedge C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \land C(x))$

1. $\exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$ (P)
2. $E(a) \land P(a) \land \forall y(S(a,y) \to P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \to P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \to \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \to \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \land \neg V(a) \to \exists y(C(y) \land S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \land \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \land S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \land S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \to P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \land C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \land C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x, y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x, y) \rightarrow P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x, y) \rightarrow P(y)))$ (P)
2. $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a, y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x, y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(a, y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \wedge S(a, y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \wedge S(a, b)$ (⑫+ES)
14. $S(a, b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a, b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \wedge C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1	$\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$	(P)
2	$E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$	(①+ES)
3	$P(a)$	(②+简化式)
4	$E(a)$	(②+简化式)
5	$\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$	(②+简化式)
6	$\forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$	(P)
7	$V(a) \rightarrow \neg P(a)$	(⑥+US)
8	$\neg V(a)$	(③⑦+MT)
9	$\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$	(P)
10	$E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(a,y))$	(⑨+US)
11	$E(a) \wedge \neg V(a)$	(④+⑧)
12	$\exists y(C(y) \wedge S(a,y))$	(⑩⑪+MP)
13	$C(b) \wedge S(a,b)$	(⑫+ES)
14	$S(a,b) \rightarrow P(b)$	(⑤+US)
15	$C(b)$	(⑬+简化式)
16	$S(a,b)$	(⑬+简化式)
17	$P(b)$	(⑭⑯+MP)
18	$P(b) \wedge C(b)$	(⑮+⑰)
19	$\exists x(P(x) \wedge C(x))$	(⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$ (P)
2. $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \wedge S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \wedge C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

---

1. $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$ (P)
2. $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \wedge S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \wedge C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \land C(x))$

1	$\exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$	(P)
2	$E(a) \land P(a) \land \forall y(S(a,y) \to P(y))$	(①+ES)
3	$P(a)$	(②+简化式)
4	$E(a)$	(②+简化式)
5	$\forall y(S(a,y) \to P(y))$	(②+简化式)
6	$\forall x(V(x) \to \neg P(x))$	(P)
7	$V(a) \to \neg P(a)$	(⑥+US)
8	$\neg V(a)$	(③⑦+MT)
9	$\forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$	(P)
10	$E(a) \land \neg V(a) \to \exists y(C(y) \land S(a,y))$	(⑨+US)
11	$E(a) \land \neg V(a)$	(④+⑧)
12	$\exists y(C(y) \land S(a,y))$	(⑩⑪+MP)
13	$C(b) \land S(a,b)$	(⑫+ES)
14	$S(a,b) \to P(b)$	(⑤+US)
15	$C(b)$	(⑬+简化式)
16	$S(a,b)$	(⑬+简化式)
17	$P(b)$	(⑭⑯+MP)
18	$P(b) \land C(b)$	(⑮+⑰)
19	$\exists x(P(x) \land C(x))$	(⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \land C(x))$

1. $\exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$ (P)
2. $E(a) \land P(a) \land \forall y(S(a,y) \to P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \to P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \to \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \to \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \land \neg V(a) \to \exists y(C(y) \land S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \land \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \land S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \land S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \to P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \land C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \land C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$ (P)
2. $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \wedge S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \wedge C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$ (P)
2. $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \wedge S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \wedge C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$ (P)
2. $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \wedge S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \wedge C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \land C(x))$

1. $\exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$ (P)
2. $E(a) \land P(a) \land \forall y(S(a,y) \to P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \to P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \to \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \to \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \land \neg V(a) \to \exists y(C(y) \land S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \land \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \land S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \land S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \to P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \land C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \land C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$ (P)
2. $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \wedge S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \wedge C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$ (P)
2. $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \wedge S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \wedge C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1	$\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \to P(y)))$	(P)
2	$E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a,y) \to P(y))$	(①+ES)
3	$P(a)$	(②+简化式)
4	$E(a)$	(②+简化式)
5	$\forall y(S(a,y) \to P(y))$	(②+简化式)
6	$\forall x(V(x) \to \neg P(x))$	(P)
7	$V(a) \to \neg P(a)$	(⑥+US)
8	$\neg V(a)$	(③⑦+MT)
9	$\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$	(P)
10	$E(a) \wedge \neg V(a) \to \exists y(C(y) \wedge S(a,y))$	(⑨+US)
11	$E(a) \wedge \neg V(a)$	(④+⑧)
12	$\exists y(C(y) \wedge S(a,y))$	(⑩⑪+MP)
13	$C(b) \wedge S(a,b)$	(⑫+ES)
14	$S(a,b) \to P(b)$	(⑤+US)
15	$C(b)$	(⑬+简化式)
16	$S(a,b)$	(⑬+简化式)
17	$P(b)$	(⑭⑯+MP)
18	$P(b) \wedge C(b)$	(⑮+⑰)
19	$\exists x(P(x) \wedge C(x))$	(⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \land C(x))$

1. $\exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$ (P)
2. $E(a) \land P(a) \land \forall y(S(a,y) \to P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \to P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \to \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \to \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \land \neg V(a) \to \exists y(C(y) \land S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \land \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \land S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \land S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \to P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \land C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \land C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \to P(y)))$ (P)
2. $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a,y) \to P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \to P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \to \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \to \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) \to \exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \wedge S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \to P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \wedge C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \to \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \land C(x))$

1. $\exists x(E(x) \land P(x) \land \forall y(S(x,y) \to P(y)))$ (P)
2. $E(a) \land P(a) \land \forall y(S(a,y) \to P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \to P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \to \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \to \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \land \neg V(x) \to \exists y(C(y) \land S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \land \neg V(a) \to \exists y(C(y) \land S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \land \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \land S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \land S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \to P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \land C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \land C(x))$ (⑱+EG)

Example (2/2)Cont.

1. $H_1: \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$
2. $H_2: \exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$
3. $H_3: \forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$
4. $C: \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $\exists x(E(x) \wedge P(x) \wedge \forall y(S(x,y) \rightarrow P(y)))$ (P)
2. $E(a) \wedge P(a) \wedge \forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+简化式)
6. $\forall x(V(x) \rightarrow \neg P(x))$ (P)
7. $V(a) \rightarrow \neg P(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+MT)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(x,y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(C(y) \wedge S(a,y))$ (⑩⑪+MP)
13. $C(b) \wedge S(a,b)$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $P(b) \wedge C(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Mechanized Reasoning Systems

- Coq | a proof assistant base on the calculus of inductive constructions.
- HOL | an interactive environment for machine-assisted theorem-proving in higher-order logic.
- Isabelle | a generic theorem prover in which logics can be specified and used.
- More... (http://vl.fmnet.info/)

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic (FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如:Prolog中的Horn子句(Horn Clause)是可计算的.

Definition

形如$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \ldots L_m)$ 的公式称为 Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

设 $C_1, C_2, \ldots, C_k, C$ 是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \wedge C$ 的可满足性是可计算的;当其不可满足,则 $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \vdash \neg C$.

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic (FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如:Prolog中的Horn子句(Horn Clause)是可计算的.

Definition

形如$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \ldots L_m)$ 的公式称为 Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

设 $C_1, C_2, \ldots, C_k, C$ 是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \wedge C$ 的可满足性是可计算的;当其不可满足,则 $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \vdash \neg C$.

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic (FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如:Prolog中的Horn子句(Horn Clause)是可计算的.

Definition

形如$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \ldots L_m)$ 的公式称为 Horn Clause, 其中 L_i 是原子或原子的否定.

Theorem

设 $C_1, C_2, \ldots, C_k, C$ 是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \wedge C$ 的可满足性是可计算的;当其不可满足,则 $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \vdash \neg C$.

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $\square$ (④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $\square$ (④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $\square$ (④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $\square$ (④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $\square$ (④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $\square$ (④⑥+删除,矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a), \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $\square$ (④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $\square$ (④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a), \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $\square$ (④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $\square$ (④⑥+删除,矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $[]$ (④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $[]$ (④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1	$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$	(P)
2	$\neg P(a) \vee P(f(a))$	(①+US)
3	$P(a) \to P(f(a))$	(①+T)
4	$P(a)$	(P)
5	$P(f(a))$	(③④+MP)
6	$\forall x \neg P(f(x))$	(附加P)
7	$\neg P(f(a))$	(⑥+US)
8	$\mathbb{F}$	(⑤+⑦)

Resolution

1	$\neg P(x) \vee P(f(x))$	(P)
2	$P(a)$	(P)
3	$\neg P(a) \vee P(f(a))$	(①②+合一)
4	$P(f(a))$	(②③+删除)
5	$\neg P(f(x))$	(附加P)
6	$\neg P(f(a))$	(④⑤+合一)
7	$[]$	(④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $[]$ (④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\iff \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a), \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $[]$ (④⑥+删除,矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $[]$ (④⑥+删除，矛盾)

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))),\ P(a),\ \vdash \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \to P(f(a))$ (①+T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤+⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+合一)
7. $[]$ (④⑥+删除,矛盾)

本章小结

1. 谓词与量词
    - 谓词和项
    - 谓词公式的语法
    - 谓词公式的语义
2. 谓词公式
    - 逻辑恒等式和永真蕴涵式
    - 谓词永真公式
    - 前束范式
3. 谓词公式的自然推理
    - 相关概念的复习
    - 量词的推理规则
    - 形式证明的例子
    - Mechanical Reasoning

Reference books

王汉飞
《离散数学》讲义.

Kenneth H. Rosen.
《离散数学及其应用》(原书第8版本科教学版).
机械工业出版社.

刘玉珍
《离散数学》.
武汉大学出版社.