双摆系统的数值模拟与 Runge-Kutta 四阶方法

徐光远

2025 年 6 月 26 日

1 双摆系统概念

双摆是将一根单摆连接在另一个单摆的尾部所构成的系统。它表现出复杂的混沌行为，即使初始条件微小变化也会导致完全不同的运动轨迹。

2 物理建模

2.1 系统参数约定

摆杆 1 的长度 L_1，摆杆 2 的长度 L_2
摆球 1 的质量 m_1，摆球 2 的质量 m_2
摆杆 1 与竖直方向的夹角 θ_1，摆杆 2 与竖直方向的夹角 θ_2
角速度：$\omega_1 = \dot{\theta}_1$，$\omega_2 = \dot{\theta}_2$
重力加速度：取 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$

2.2 动能与势能分析

2.2.1 动能

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (L_1\omega_1)^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[(L_1\omega_1)^2 + (L_2\omega_2)^2 + 2L_1L_2\omega_1\omega_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

$$T = T_1 + T_2$$

2.2.2 势能

$$V_1 = -m_1 g L_1 \cos\theta_1$$

$$V_2 = -m_2 g \left(L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos\theta_2 \right)$$

$$V = V_1 + V_2$$

2.3 拉格朗日方程与运动方程

2.3.1 拉格朗日量

$$\mathcal{L} = T - V$$

2.3.2 拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

2.3.3 双摆运动方程

角加速度:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g(2m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\left(\omega_2^2 L_2 + \omega_1^2 L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right)}{L_1\left(2m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right)}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)\left(\omega_1^2 L_1 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + \omega_2^2 L_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\right)}{L_2\left(2m_1 + m_2 - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right)}$$

3 Runge-Kutta 四阶方法原理

对于微分方程 $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$，初始值 $y(t_0) = y_0$，步长 h:

1. 计算四个中间斜率:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(t_n, y_n) \\
k_2 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= h \cdot f(t_n + h, y_n + k_3)
\end{aligned}$$

2. 更新解:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

4 RK4 在双摆系统中的应用

4.1 状态变量定义

要描绘双摆系统，需跟踪四个状态量：

$$\mathbf{y} = [\theta_1, \omega_1, \theta_2, \omega_2]^T$$

对应的微分方程为：

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \omega_1 \\ \ddot{\theta}_1 = f_1(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) \\ \dot{\theta}_2 = \omega_2 \\ \ddot{\theta}_2 = f_2(\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2) \end{cases}$$

其中 $\ddot{\theta}_1$ $\ddot{\theta}_2$ 的方程已经推到

4.2 实现步骤

4.2.1 初始化

初始条件：$\theta_1^{(0)}, \omega_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \omega_2^{(0)}$
时间步长 h，总时间 T

4.2.2 迭代更新（第 n 步）

1. 计算 k_1：

$$\begin{aligned} k_1^{\theta_1} &= h \cdot \omega_1^{(n)} \\ k_1^{\omega_1} &= h \cdot f_1(\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}) \\ k_1^{\theta_2} &= h \cdot \omega_2^{(n)} \\ k_1^{\omega_2} &= h \cdot f_2(\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}) \end{aligned}$$

2. 计算 k_2（基于 k_1 的中点预测）：

$$\begin{aligned} k_2^{\theta_1} &= h \cdot \left(\omega_1^{(n)} + \frac{k_1^{\omega_1}}{2} \right) \\ k_2^{\omega_1} &= h \cdot f_1 \left(\theta_1^{(n)} + \frac{k_1^{\theta_1}}{2}, \theta_2^{(n)} + \frac{k_1^{\theta_2}}{2}, \omega_1^{(n)} + \frac{k_1^{\omega_1}}{2}, \omega_2^{(n)} + \frac{k_1^{\omega_2}}{2} \right) \\ k_2^{\theta_2} &= h \cdot \left(\omega_2^{(n)} + \frac{k_1^{\omega_2}}{2} \right) \\ k_2^{\omega_2} &= h \cdot f_2 \left(\theta_1^{(n)} + \frac{k_1^{\theta_1}}{2}, \theta_2^{(n)} + \frac{k_1^{\theta_2}}{2}, \omega_1^{(n)} + \frac{k_1^{\omega_1}}{2}, \omega_2^{(n)} + \frac{k_1^{\omega_2}}{2} \right) \end{aligned}$$

3. 计算 k_3（基于 k_2 的中点修正）:

$$k_3^{\theta_1} = h \cdot \left(\omega_1^{(n)} + \frac{k_2^{\omega_1}}{2}\right)$$
$$k_3^{\omega_1} = h \cdot f_1\left(\theta_1^{(n)} + \frac{k_2^{\theta_1}}{2}, \theta_2^{(n)} + \frac{k_2^{\theta_2}}{2}, \omega_1^{(n)} + \frac{k_2^{\omega_1}}{2}, \omega_2^{(n)} + \frac{k_2^{\omega_2}}{2}\right)$$
$$k_3^{\theta_2} = h \cdot \left(\omega_2^{(n)} + \frac{k_2^{\omega_2}}{2}\right)$$
$$k_3^{\omega_2} = h \cdot f_2\left(\theta_1^{(n)} + \frac{k_2^{\theta_1}}{2}, \theta_2^{(n)} + \frac{k_2^{\theta_2}}{2}, \omega_1^{(n)} + \frac{k_2^{\omega_1}}{2}, \omega_2^{(n)} + \frac{k_2^{\omega_2}}{2}\right)$$

4. 计算 k_4（基于 k_3 的终点预测）:

$$k_4^{\theta_1} = h \cdot \left(\omega_1^{(n)} + k_3^{\omega_1}\right)$$
$$k_4^{\omega_1} = h \cdot f_1\left(\theta_1^{(n)} + k_3^{\theta_1}, \theta_2^{(n)} + k_3^{\theta_2}, \omega_1^{(n)} + k_3^{\omega_1}, \omega_2^{(n)} + k_3^{\omega_2}\right)$$
$$k_4^{\theta_2} = h \cdot \left(\omega_2^{(n)} + k_3^{\omega_2}\right)$$
$$k_4^{\omega_2} = h \cdot f_2\left(\theta_1^{(n)} + k_3^{\theta_1}, \theta_2^{(n)} + k_3^{\theta_2}, \omega_1^{(n)} + k_3^{\omega_1}, \omega_2^{(n)} + k_3^{\omega_2}\right)$$

5. 更新变量:

$$\theta_1^{(n+1)} = \theta_1^{(n)} + \frac{1}{6}(k_1^{\theta_1} + 2k_2^{\theta_1} + 2k_3^{\theta_1} + k_4^{\theta_1})$$
$$\omega_1^{(n+1)} = \omega_1^{(n)} + \frac{1}{6}(k_1^{\omega_1} + 2k_2^{\omega_1} + 2k_3^{\omega_1} + k_4^{\omega_1})$$
$$\theta_2^{(n+1)} = \theta_2^{(n)} + \frac{1}{6}(k_1^{\theta_2} + 2k_2^{\theta_2} + 2k_3^{\theta_2} + k_4^{\theta_2})$$
$$\omega_2^{(n+1)} = \omega_2^{(n)} + \frac{1}{6}(k_1^{\omega_2} + 2k_2^{\omega_2} + 2k_3^{\omega_2} + k_4^{\omega_2})$$

4.3 更新坐标

$$\begin{cases} x_1 = L_1 \cdot \sin(\theta_1) \\ y_1 = -L_1 \cdot \cos(\theta_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + L_2 \cdot \sin(\theta_2) \\ y_2 = y_1 - L_2 \cdot \cos(\theta_2) \end{cases}$$

5 小结

通过拉格朗日方程推导了双摆系统的动力学模型，并阐述了 Runge-Kutta 四阶方法的基本原理与双摆系统中的实现步骤。RK4 通过四次中间斜率的加权平均，显著提高了数值积分的精度，能够有效捕捉双摆系统的混沌行为。