Содержание

1 ДИФФЕРЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА 5

Введение 5

1.1 Что называется решением дифференциального уравнения 7

1.2 Общее решение и вычисление значений произвольной постоянной в решении задачи Коши 10

1.3 Классификация уравнений первого порядка 12

1.4 Решение уравнений с разделяющимися переменными 17

1.5 Однородные дифференциальные уравнения 20

1.6 Линейные уравнения первого порядка 26

1.7 Уравнения в полных дифференциалах 30

1.8 Уравнение Бернулли 38

1.9 Интегрирующий множитель 44

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА 48

Введение 48

2.1 Что называется решением дифференциального уравнения 51

2.2 Общее решение уравнения второго порядка и вычисление значений произвольных постоянных в решении задачи Коши 56

2.3 Подстановки для уравнений второго порядка 60

2.4 Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 65

2.5 Вычисление значений произвольных постоянных в решении задачи Коши..70

2.6 Вид частного решения неоднородного уравнения.....75

2.7 Частное решение неоднородного уравнения 81

3 Индивидуальные задания по теме: «Дифференциальные уравнения» 87

3.1 Примерный типовой вариант заданий..............................88

3.2 Решение примеров типового варианта заданий 89

3.3 Варианты заданий 107

Литература. 137

1 ДИФФЕРЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Введение

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Ответ на вопрос о том, при каких условиях дифференциальное уравнение имеет решение, дает теорема Коши, которая называется теоремой существования и единственности решения дифференциального уравнения.

Условия, в силу которых функция $y = \varphi(x)$ принимает заданное значение y_0 в заданной точке x_0 называют начальными условиями и записывают обычно так:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \text{ или } y(x_0) = y_0$$

Отыскание решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям,– одна из важнейших задач теории дифференциальных уравнений. Эта задача называется задачей Коши.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y=\varphi(x,C)$, зависящая от аргумента x и произвольной постоянной C, которая при любом значении C удовлетворяет уравнению, такая, что любое решение данного уравнения может быть получено из $y=\varphi(x,C)$ соответствующим выбором постоянной C.

Частным решением дифференциального уравнения называется функция $y=\varphi(x,C_0)$, которая получается из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при определенном значении постоянной $C=C_0$. Для выделения частного решения необходимо задать начальные условия. Иногда частным решением называют решение какой-нибудь задачи Коши.

Итак, дифференциальное уравнение совместно с начальными условиями

$$y' = f(x,y),$$

$$y\big|_{x=x_0} = y_0$$

называется задачей Коши, а ее решение – частным решением.

Геометрически общее решение $y=\varphi(x,C)$ представляет собой семейство интегральных кривых, зависящее от произвольной постоянной C, а частное решение $y=\varphi(x,C_0)$ – одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через заданную точку (x_0, y_0).

1.1 Что называется решением дифференциального уравнения

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Для решения следующих примеров необходимо найти производную заданной функции, затем функцию и ее производную подставить в заданное дифференциальное уравнение и доказать тождество.

Пример 1.1.1. Проверить, что функция $y = 2\ln^2(x-3) + x$ является решением дифференциального уравнения

$$xy' - y = \frac{4x\ln(x-3)}{x-3} - 2\ln^2(x-3)$$

Решение. Найдем производную заданной функции

$$y' = \frac{4\ln(x-3)}{x-3} + 1$$

и подставим функцию и производную в дифференциальное уравнение

$$x\left(\frac{4\ln(x-3)}{x-3} + 1\right) - \left(2\ln^2(x-3) + x\right) = \frac{4x\ln(x-3)}{x-3} - 2\ln^2(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4x\ln(x-3)}{x-3} + x - 2\ln^2(x-3) - x = \frac{4x\ln(x-3)}{x-3} - 2\ln^2(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4x\ln(x-3)}{x-3} - 2\ln^2(x-3) = \frac{4x\ln(x-3)}{x-3} - 2\ln^2(x-3).$$

Левая часть равна правой части, следовательно, функция является решением.

Пример 1.1.2. Проверить, что функция $y^2 + 2xy = \cos 3x$ является решением дифференциального уравнения

$$y'(2y + 2x) + 2y = -3\sin 3x.$$

Решение. В этом примере надо найти производную неявной функции, для этого продифференцируем соотношение $y^2 + 2xy = \cos 3x$, считая, что $y = y(x)$:

$$2yy' + 2y + 2xy' = -3\sin 3x \Rightarrow$$

$$y'(2y + 2x) + 2y = -3\sin 3x \Rightarrow y' = -\frac{2y + 3\sin 3x}{2y + 2x}$$

Подставим производную в дифференциальное уравнение

$$-\frac{2y + 3\sin 3x}{2y + 2x}(2y + 2x) + 2y = -3\sin 3x \Rightarrow$$

$$-2y - 3\sin 3x + 2y = -3\sin 3x \Rightarrow$$

$$-3\sin 3x = -3\sin 3x.$$

Левая часть равна правой части, следовательно, функция является решением.

Примеры для самостоятельного решения

Проверить, что данная функция является решением дифференциального уравнения:

№1 $y = tg\,2x + x,\ xy' - y = \dfrac{2x}{\cos^2 2x} - tg\,2x.$

№2. $y = 3e^{-x^2},\ y' + 2xy = 0.$

№3. $y = (x+1)^2,\ y'^2 = 4y.$

№4. $y^2 + 2xy = e^{3x},\ y'(2y + 2x) + 2y = 3e^{3x}.$

№5. $y^2 + 3xy = \sin 5x,\ y'(2y + 3x) + 3y = 5\cos 5x.$

1.2 Общее решение и вычисление значений произвольной постоянной в решении задачи Коши

Пример 1.2.1. Найти общее решение и вычислить значение произвольной постоянной в решении задачи Коши:

$$y' = 2\sin 3x - x^2,\ y\big|_{x=0} = 2.$$

Решение. В данном примере дано простейшее дифференциальное уравнение с правой частью, зависящей только от x. Для его решения необходимо проинтегрировать правую часть:

$$y = -\frac{2}{3}\cos 3x - \frac{x^3}{3} + C.$$

Это общее решение дифференциального уравнения. Используем начальное условие для нахождения значения произвольной постоянной:

$$2 = -\frac{2}{3}\cos(3\cdot 0) + 0 + C.$$

$$2 = -\frac{2}{3}\cdot 1 + 0 + C \Rightarrow C = 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow C = \frac{8}{3}.$$

Ответ. $C = \frac{8}{3}$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти общее решение и вычислить значение произвольной постоянной в решении задачи Коши:

№1. $y' = \dfrac{3}{\sin^2 x} + 2,\ y\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 1.$ Ответ. $C = 4 - \dfrac{\pi}{2}.$

№2. $y' = \dfrac{2}{\cos^2 3x} + 4x^3,\ y\big|_{x=0} = 1.$ Ответ. $C = 0.$

№3. $y' = 3e^{2x} + 5,\ y\big|_{x=0} = \dfrac{3}{2}.$ Ответ. $C = 0.$

1.3 Классификация уравнений первого порядка

Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

1.*Уравнения с разделяющимися переменными*:

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(x).$$

Заменив y' на $\frac{dy}{dx}$, разделив обе части на $f_2(y)$. и умножив на dx приведем уравнение к виду

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

В этом уравнении переменная x входит только в правую часть, а переменная y– только в левую часть (т.е. переменные разделены).

2.*Однородным дифференциальным уравнением* называется уравнение, правая часть которого зависит от отношения $\frac{y}{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{или } y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Дифференциальное уравнение вида $P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0$ будет однородным, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ есть однородные функции одинаковой степени k:

$$P(\lambda x, \lambda y)dy = \lambda^k P(x, y),\ Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k Q(x, y).$$

Например, $P(x,y)$ и $Q(x,y)$–однородные многочлены, если $P(x,y)=3x^2+4xy-2y^2$ и $Q(x,y)=x^2-y^2$.

3.Уравнение вида $y'+p(x)y=f(x)$. называется *линейным уравнением первого порядка*. Название уравнения объясняется тем, что неизвестная функция и ее производная входят в уравнение линейно, т.е. в первой степени, и не умножаются друг на друга.

Если $f(x)=0$, то уравнение имеет вид

$$y'+p(x)y=0$$

и называется *линейным однородным уравнением*. Если $f(x)\neq 0$, то уравнение называют *линейным неоднородным уравнением.*

4.Нелинейное уравнение вида $y'+p(x)y=f(x)y^n$. называется *уравнением Бернулли*, при n=0 и n=1 это уравнение является линейным. Уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению подстановкой $z=y^{1-n}$.

5.Уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если правая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u=u(x,y)$:

$$du=P(x,y)dy+Q(x,y)dx..$$

Если такая функция найдена, то общее решение (общий интеграл) уравнения имеет вид

$$u(x,y)=C.$$

Уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Пример 1.3.1. Определить тип уравнения

$$2\sin(x+3)\cdot ydx+3\cos(y+2)\cdot xdy=0.$$

Решение. Перенесем второе слагаемое в правую часть

$$2\sin(x+3)\cdot ydx=-3\cos(y+2)\cdot xdy.$$

Разделим уравнение на xy:

$$\frac{2\sin(x+3)}{x}dx=-\frac{3\cos(y+2)}{y}dy.$$

В левой части содержится только переменная x, а в правой – y. Следовательно, это уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 1.3.2. Определить тип уравнения

$$2x^2dx+\left(3x^2-2y^2\right)dy=0.$$

Решение. Перенесем первое слагаемое в правую часть

$$\left(3x^2-2y^2\right)dy=-2x^2dx.$$

Разделим уравнение на $(3x^2 - 2y^2)dx$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^2}{3x^2 - 2y^2}.$$

Числитель и знаменатель правой части разделим на x^2:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^2}{3x^2 - 2y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{3\frac{x^2}{x^2} - 2\frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Уравнение привели к виду $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Следовательно, данное уравнение является однородным.

Можно рассуждать и иначе. Поскольку функции $P(x,y) = 2x^2$ и $Q(x,y) = 3x^2 - 2y^2$, входящие в уравнение, есть однородные (квадратичные) многочлены, то данное уравнение – однородное.

Пример 1.3.3. Определить тип уравнения

$$y' + 5ye^{3x} = 2x^4 + 1.$$

Решение. Это линейное уравнение, так как y' и y входят в уравнение в первой степени и не умножаются друг на друга.

Пример 1.3.4. Определить тип уравнения

$$y' - 3y \cdot tgx = y^4 \sin^2 x.$$

Решение. Это линейное уравнение по левой части, наличие вправой части y^4 приводит к тому, что мы относим его к уравнению Бернулли.

Пример 1.3.5. Определить тип уравнения

$$\left(e^{2x}+3y\right)dx+\left(e^{4y}+3x\right)dy=0.$$

Решение. Это уравнение не является уравнением с разделяющимися переменными, оно не однородное и нелинейное (из-за функций e^{2x}, e^{4y}). Проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Для этого найдем частные производные:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(e^{2x}+3y\right)}{\partial y}=3,\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\left(e^{4y}+3x\right)}{\partial x}=3$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

следовательно, это уравнение в полных дифференциалах.

1.4 Решение уравнений с разделяющимися переменными

В этом разделе рассмотрены уравнения с разделяющимися переменными. Во всех примерах необходимо разделить переменные, проинтегрировать и получить общее решение дифференциального уравнения.

Замечание. Поскольку при разделении переменных часто приходится делить на выражения, которые могут обратиться в нуль, то возможны потери решений. В рамках данной работы этот вопрос не рассматривается.

Пример 1.4.1. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{2}{y}\sqrt{x+1}.$$

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными. Представим производную в виде отношения дифференциалов

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}\sqrt{x+1}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$ydy = 2\sqrt{x+1}dx \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ответ. $\frac{y^2}{2} = \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$

Пример 1.4.2. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{x\left(y^2+2\right)}{y\left(x^2+1\right)}.$$

Решение. Представим производную в виде отношения дифференциалов и разделим переменные:

$$\frac{ydy}{y^2+2} = \frac{xdx}{x^2+1}.$$

Преобразуем дифференциалы слева и справа в числителях дробей

$$ydy = \frac{1}{2}dy^2,\ xdx = \frac{1}{2}dx^2$$

и проинтегрируем

$$\frac{1}{2}\frac{dy^2}{y^2+2} = \frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln y^2+2 = \frac{1}{2}\ln x^2+1+\frac{1}{2}\ln C.$$

Пропотенцируем полученное соотношение

$$y^2+2 = C\left(x^2+1\right).$$

Ответ. $y^2+2 = C\left(x^2+1\right).$

Примеры для самостоятельного решения

Найти общее решение следующих уравнений:

№1. $y' = y \cdot tg3x.$

Ответ. $y^3 = \dfrac{C}{\cos 3x}.$

№2. $y' = \dfrac{tg5x}{y}.$

Ответ. $\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{1}{5}\ln\cos 5x + C.$

№3 $e^{x^2} y' = 3x.$

Ответ. $y = -\dfrac{3}{2}e^{-x^2} + C.$

№4. $3xe^{3y} y' = \ln^4 x.$

Ответ. $e^{3y} = \dfrac{\ln^5 x}{5} + C.$

Найти общее решение и вычислить значение произвольной постоянной в решении задачи Коши:

№5. $xy' = 3y,\ y\big|_{x=2} = 1.$ Ответ. $C = \dfrac{1}{8}.$

№6. $yy' = 4,\ y\big|_{x=-1} = 4.$ Ответ. $C = 24.$

1.5 Однородные дифференциальные уравнения

Однородное уравнение необходимо привести к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Затем вводится новая искомая функция $u = \frac{y}{x}$, для чего делается замена $y = ux$, и, следовательно, $y' = xu' + u$. Уравнение при этом становится уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 1.5.1. Найти общее решение однородного уравнения

$$(2x + 3y)dx + xdy = 0.$$

Решение. Перенесем первое слагаемое в правую часть:

$$xdy = -(2x + 3y)dx.$$

Разделим уравнение на выражение xdx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 3y}{x} \Rightarrow y' = -\left(2 + 3\frac{y}{x}\right).$$

Уравнение привели к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Положим $u = \frac{y}{x}$. или $y = xu$. Тогда $y' = .xu' + u$. Подставляя в уравнение выражения для yи y', получаем

$$.xu' + u = -2 - 3u \Rightarrow xu' = -2 - 4u.$$

В полученном уравнении представим $u' = \dfrac{du}{dx}$. и разделим переменные:

$$x\frac{du}{dx} = -2 - 4u \Rightarrow \frac{du}{4u+2} = -\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{d(4u+2)}{4u+2} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{d(4u+2)}{4u+2} = -4\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln 4u+2 = -4\ln|x| + \ln C \Rightarrow \ln 4u+2 = \ln\frac{C}{x^4} \Rightarrow 4u+2 = \frac{C}{x^4}$$

Этот выражение можно (но не обязательно) упростить, разделив левую и правую части на 2, при этом $\dfrac{C}{2}$ обозначим новой буквой *C*. Заменяя *u* на $\dfrac{y}{x}$ получаем

$$2\frac{y}{x} + 1 = \frac{C}{x^4}.$$

Приведем к общему знаменателю:

$$2x^3y + x^4 = C.$$

Для данного уравнения можно указать три (по крайней мере) равносильных ответа:

1) $4\dfrac{y}{x} + 2 = \dfrac{C}{x^4}$. 2) $2\dfrac{y}{x} + 1 = \dfrac{C}{x^4}$. 3) $2x^3y + x^4 = C$.

Это обстоятельство нужно иметь в виду, выбирая правильный ответ в тесте (или сравнивая свой ответ с ответом, указанным в задачнике).

Мы выбираем третий ответ:

Ответ. $2x^3y + x^4 = C.$

Пример 1.5.2. Найти общее решение однородного уравнения

$$2y' = \frac{2y}{x} + \left(\frac{2y}{x}\right)^2.$$

Решение. Это уравнение имеет вид $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Положим $u = \frac{y}{x}$, или $y = xu$. Тогда $y' = .xu' + u$. Подставляя в уравнение выражения для y и y', получаем:

$$2(xu' + u) = 2u + (2u)^3,$$

$$2xu' + 2u = 2u + (2u)^3,$$

$$2xu' = (2u)^3.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, представив $u' = \frac{du}{dx}$, решим его:

$$2x\frac{du}{dx} = (2u)^3 \Rightarrow 2\frac{du}{(2u)^3} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(2u)^{1-3}}{1-3} = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{(2u)^{-2}}{-2} = \ln|x| + C.$$

Заменяя *u* на $\dfrac{y}{x}$ получаем ответ

$$\frac{\left(\dfrac{2y}{x}\right)^{-2}}{-2}=\ln|x|+C.$$

Ответ можно оставить в таком виде, а можно преобразовать:

$$-\frac{x^2}{-8y^2}=\ln|x|+C$$

или

$$\ln|x|+\frac{x^2}{8y^2}=C.$$

Ответ. $\ln|x|+\dfrac{x^2}{8y^2}=C.$

Пример 1.5.3. Найти общее решение однородного уравнения

$$3y'=\frac{3y}{x}+\left(\frac{1}{\sin\left(\dfrac{3y}{x}\right)}\right).$$

Решение. Это уравнение имеет вид $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Положим $u=\dfrac{y}{x}$, или $y=xu$. Тогда $y'=.xu'+u$. Подставляя в уравнение выражения для y и y', получаем:

$$3(xu'+u)=3u+\frac{1}{\sin(3u)}\Rightarrow 3xu'=\frac{1}{\sin(3u)}.$$

Решаем уравнение с разделяющимися переменными

$$3x\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sin(3u)}\Rightarrow 3\sin(3u)du=\frac{dx}{x}\Rightarrow -\cos(3u)=\ln|x|+C.$$

Полученное выражение можно записать с константой в логарифмическом виде

$$-\cos(3u)=\ln|x|+\ln C$$

Заменяя uна $\frac{y}{x}$ получаем ответ

$$-\cos\left(\frac{3y}{x}\right)=\ln|Cx|$$

или

$$\cos\left(\frac{3y}{x}\right)=\ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

Ответ. $\cos\left(\frac{3y}{x}\right)=\ln\left|\frac{C}{x}\right|.$

Примеры для самостоятельного решения

Найти общее решение однородных уравнений:

№1. $5y'=\frac{5y}{x}+\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{5y}{x}\right)}\right).$

Ответ. $\sin\left(\frac{5y}{x}\right)=\ln|Cx|.$

№2. $3y' = \frac{3y}{x} + \sqrt{\frac{3y}{x} + 4}.$

Ответ. $2\sqrt{\frac{3y}{x} + 4} = \ln|Cx|.$

№3. $2y' = \frac{2y}{x} + ctg\left(\frac{2y}{x}\right).$

Ответ. $\cos\left(\frac{2y}{x}\right) = Cx.$

№4. $3y' = \frac{3y}{x} + \cos^2\left(\frac{3y}{x}\right).$

Ответ. $tg\left(\frac{3y}{x}\right) = \ln|x| + C.$

1.6 Линейные уравнения первого порядка

Линейные уравнения можно решать *методом вариации произвольной постоянной и методом Бернулли*. Оба метода очень похожи, и выбор метода дело вкуса. Ниже рассматриваются оба метода.

Пример 1.6.1. Найти общее решение линейного уравнения

$$y' - 2\frac{y}{x} = x^2 \cos 3x.$$

Решение. Это уравнение решим методом Бернулли. Положим $y = u(x) \cdot v(x)$, или $y = uv$. Тогда $y = u'v + uv'$. Подставляя в уравнение выражения для y и y', получаем

$$u'v + uv' - 2\frac{uv}{x} = x^2 \cos 3x$$

преобразуем это уравнение:

$$u'v + u\left(v' - 2\frac{v}{x}\right) = x^2 \cos 3x. \qquad (6.1)$$

Найдем $v(x)$ из условия $v' - 2\frac{v}{x} = 0$:

$$\frac{dv}{dx} - 2\frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = 2\ln|x| + \ln C \Rightarrow v = Cx^2$$

Полагая $C = 1$ получим $v = x^2$. Теперь найдем $u(x)$, для чего подставим $v = x^2$ в уравнение (6.1):

$$u'x^2 = x^2\cos 3x \Rightarrow u' = \cos 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos 3x \Rightarrow du = \cos 3x dx \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

Следовательно, решение $y = u(x)\cdot v(x)$ равно

$$y = x^2\left(\frac{\sin 3x}{3} + C\right).$$

Ответ. $y = x^2\left(\dfrac{\sin 3x}{3} + C\right).$

Следующий пример решим другим методом – методом вариации произвольной постоянной.

Пример 1.6.2. Найти общее решение линейного уравнения

$$y' - 5xy = 3x^2 e^{\frac{5x^2}{2}}.$$

Решение. Решим сначала линейное однородное уравнение, положив правую часть данного уравнения равной нулю:

$$y' - 5xy = 0.$$

Это уравнение можно решить методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} - 5xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = 5xdx \Rightarrow \ln|y| = \frac{5x^2}{2} + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln e^{\frac{5x^2}{2}} + \ln C \Rightarrow y = Ce^{\frac{5x^2}{2}}.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = C(x)e^{\frac{5x^2}{2}}.$$

где $C(x)$ – неизвестная функция. Найдем производную y':

$$y' = C'(x)e^{\frac{5x^2}{2}} + C(x)5xe^{\frac{5x^2}{2}}.$$

Подставим yи y' в исходное уравнение

$$C'(x)e^{\frac{5x^2}{2}} + C(x)5xe^{\frac{5x^2}{2}} - C(x)5xe^{\frac{5x^2}{2}} = 3x^2e^{\frac{5x^2}{2}} \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{\frac{5x^2}{2}} = 3x^2e^{\frac{5x^2}{2}} \Rightarrow C'(x) = 3x^2 \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = 3x^2 \Rightarrow$$

$$dC(x) = 3x^2dx \Rightarrow C(x) = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + C \Rightarrow C(x) = \frac{3x^3}{3} + C.$$

$$C(x) = x^3 + C.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = e^{\frac{5x^2}{2}}\left(x^3 + C\right).$$

Ответ. $y = e^{\frac{5x^2}{2}}\left(x^3 + C\right).$

Примеры для самостоятельного решения

Найти общее решение линейных уравнений.

№1. $y' - \dfrac{2y}{x} = 3x^2.$

Ответ. $y = x^2(3x + C).$

№2. $y' + \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{x-2}{x-1}.$

Ответ. $y = \dfrac{\dfrac{x^2}{2} - 2x + C}{x-1}.$

№3. $y' - \dfrac{y}{x-2} = (x-2)e^{3x}.$

Ответ. $y = (x-2)\left(\dfrac{1}{3}e^{3x} + C\right).$

№4 $y' - 3tgx \cdot y = \dfrac{x^2}{\cos^3 x}.$

Ответ. $y = \dfrac{1}{\cos^3 x}\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right).$

№5. $y' - 3\dfrac{y}{x} = x^3 \cos 2x.$

Ответ. $y = x^3\left(\dfrac{\sin 2x}{2} + C\right).$

1.7 Уравнения в полных дифференциалах

Пример 1.7.1. Найти общее решение уравнения

$$.\ \left(6x^2\sin y-3y^2\sin x\right)dx+\left(2x^3\cos y+6y\cos x\right)dy=0.$$

Решение. Проверим выполнение условия

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(6x^2\sin y-3y^2\sin x\right)}{\partial y}=6x^2\cos y-6y\sin x,$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\left(2x^3\cos y+6y\cos x\right)}{\partial x}=6x^2\cos y-6y\sin x,$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

следовательно, это уравнение в полных дифференциалах и

$$P(x,y)dy+Q(x,y)dx=du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Общее решение уравнения в полных дифференциалах имеет вид: $u(x,y)=C$.

Найдем функцию $u(x,y)$. Для этого проинтегрируем тождество $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$, считая $y = const$:

$$u(x,y)=\int\left(6x^2\sin y-3y^2\sin x\right)dx.$$

Интегрируя, получаем

$$u(x,y) = 2x^3 \sin y + 3y^2 \cos x + \varphi(y), \qquad (7.1)$$

где $\varphi(y)$ пока неопределенная функция. Найдем частную производную по y найденной функции $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2x^3 \cos y + 6y \cos x + \varphi'(y),$$

Приравнивая найденную частную производную $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ и известную функцию $Q(x,y)$: $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$, получим

$$2x^3 \cos y + 6y \cos x + \varphi'(y) = 2x^3 \cos y + 6y \cos x \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C.$$

Подставив найденное значение $\varphi(y)$ в выражение (7.1), найдем общее решение исходного уравнения

$$2x^3 \sin y + 3y^2 \cos x = C.$$

Ответ. $2x^3 \sin y + 3y^2 \cos x = C.$

Пример 1.7.2. Найти общее решение уравнения

$$\left(\frac{2y^3}{x} + 6x \ln y\right)dx + \left(6y^2 \ln x + \frac{3x^2}{y}\right)dy = 0.$$

Решение. Проверим выполнение условия

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\dfrac{2y^3}{x}+6x\ln y\right)}{\partial y}=\frac{6y^2}{x}+\frac{6x}{y},$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\left(6y^2\ln x+\dfrac{3x^2}{y}\right)}{\partial x}=\frac{6y^2}{x}+\frac{6x}{y},$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

следовательно, это уравнение в полных дифференциалах.

Найдем функцию $u(x,y)$ интегрируя тождество $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=P(x,y)$, считая $y = const$:

$$u(x,y)=\int\left(\frac{2y^3}{x}+6x\ln y\right)dx.$$

Интегрируя, получаем

$$u(x,y)=2y^3\ln x+3x^2\ln y+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ пока неопределенная функция. Найдем частную производную $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ от полученной функции:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=6y^2\ln x+\frac{3x^2}{y}+\varphi'(y).$$

Приравняем частную производную $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ к функции $Q(x,y)$:

$$6y^2\ln x+\frac{3x^2}{y}+\varphi'(y)=6y^2\ln x+\frac{3x^2}{y}\Rightarrow\varphi'(y)=0\Rightarrow\varphi(y)=C.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$2y^3\ln x+3x^2\ln y=C.$$

Ответ. $2y^3\ln x+3x^2\ln y=C.$

Примеры для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнений в полных дифференциалах

№1. $(x+y+2)dx+(x+3y+4)dy=0.$

Ответ. $\frac{x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+xy+2x+4y=C.$

№2. $\left(\frac{2y^3}{x}-\frac{3y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{3}{x}+4y\ln x\right)dy=0.$

Ответ. $2y^2\ln|x|+\frac{3y}{x}=C.$

№3. $\left(3x^2+2xy^3\right)dx+\left(3x^2y^2-2y^3\right)dy=0.$

Ответ. $2x^3+2x^2y^3-y^4=C.$

Замечание к разделам 1.5, 1.6 и 1.7:

Иногда одно и тоже уравнение можно отнести к различным типам и, следовательно, их можно решать различными способами. Поясним это следующим примером:

Найти общее решение уравнения

$$(x+2y)dx + 2xdy = 0.$$

Решение1. Это уравнение можно привести к виду $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$:

Перенесем первое слагаемое в правую часть

$$2xdy = -(x+2y)dx.$$

Разделим уравнение на выражение xdx:

$$2\frac{dy}{dx} = -\frac{x+2y}{x} \Rightarrow 2y' = -\left(1+2\frac{y}{x}\right).$$

Положим $u = \dfrac{y}{x}$, или $y = xu$. Тогда $y' = xu' + u$. Подставляя в уравнение выражения для yи y', получаем

$$2(xu'+u) = -1-2u \Rightarrow 2xu' = -1-4u.$$

Решаем уравнение с разделяющимися переменными

$$2x\frac{du}{dx} = -1-4u \Rightarrow \frac{2du}{4u+1} = -\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\frac{2}{4}\cdot\frac{d(4u+1)}{4u+1}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{d(4u+1)}{4u+1}=-2\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\ln|4u+1|=-2\ln|x|+\ln C\Rightarrow\ln|4u+1|=\ln\left|\frac{C}{x^2}\right|\Rightarrow 4u+1=\frac{C}{x^2}$$

Заменяя uна $\frac{y}{x}$ получаем

$$4\frac{y}{x}+1=\frac{C}{x^2}$$

Это выражение можно преобразовать:

$$4xy+x^2=C.$$

Решение2. Это уравнение похоже на уравнение в полных дифференциалах.

Проверим выполнение условия $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial(x+2y)}{\partial y}=2,\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(2x)}{\partial x}=2.$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

следовательно, это уравнение в полных дифференциалах.

Найдем функцию $u(x,y)$:

$$u(x,y)=\int(x+2y)dx.$$

Интегрируя, получаем

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + 2xy + \varphi(y).$$

Найдем частную производную $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 2x + \varphi'(y).$$

Приравняем частную производную $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ функции $Q(x, y)$:

$$2x + \varphi'(y) = 2x \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$\frac{x^2}{2} + 2xy = C.$$

Если последнее выражение умножить на 2 и $2C$ обозначить как C, то получим ответ

$$x^2 + 4xy = C.$$

Этот ответ совпадает с ответом, полученным первым способом.

Решение 3. Поменяем слагаемые местами

$$2xdy + (x + 2y)dx = 0.$$

Разделим левую и правую части уравнения на dx:

$$2x\frac{dy}{dx}+(x+2y)=0.$$

Раскроем скобки и перенесем x вправо

$$2x\frac{dy}{dx}+2y=-x.$$

После выполненных преобразований уравнение оказалось также и линейным. Решим сначала соответствующее линейное однородное уравнение, затем найдем решение неоднородного уравнения:

$$2x\frac{dy}{dx}+2y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow y=\frac{C(x)}{x}.$$

$$y'=\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}\Rightarrow y'=\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}.$$

$$2x\left(\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}\right)+2\frac{C(x)}{x}=-x\Rightarrow 2C'(x)=-x.$$

$$2dC(x)=-xdx\Rightarrow 2C(x)=-\frac{x^2}{2}+C\Rightarrow C(x)=-\frac{x^2}{4}+C.$$

$$y=\frac{C(x)}{x}=\frac{-\frac{x^2}{4}+C}{x}\Rightarrow xy+\frac{x^2}{4}=4xy+x^2=C.$$

Ответ совпадает с ответами, полученными первым и вторым способами.

1.8 Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли $y' + p(x)y = f(x)y^n$ сводится к линейному уравнению подстановкой $z = y^{1-n}$.

Пример 1.8.1. Найти общее решение уравнения Бернулли

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{3}xy^{-2}.$$

Решение. Умножим левую и правую части уравнения на y^2:

$$y' \cdot y^2 + \frac{y^3}{x} = \frac{2}{3}x.$$

и сделаем замену переменной $z = y^3$. В этом случае $z' = 3y^2 \cdot y'$, следовательно $y^2 \cdot y' = \frac{z'}{3}$. После замены переменных получим линейное уравнение:

$$\frac{z'}{3} + \frac{z}{x} = \frac{2}{3}x.$$

Решим соответствующее линейное однородное уравнение:

$$\frac{z'}{3} + \frac{z}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{3dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = \ln C - 3\ln|x|,$$

$$z = \frac{C}{x^3}.$$

В полученном решении варьируем постоянную C:

$$C = C(x),\ z' = \frac{C'(x)x^3 - 3x^2C(x)}{x^6}.$$

и подставим в исходное неоднородное уравнение

$$\frac{C'(x)x^3 - 3x^2C(x)}{3x^6} + \frac{C(x)}{x^4} = \frac{2}{3}x,$$

$$\frac{C'(x)}{3x^3} = \frac{2}{3}x \Rightarrow dC(x) = 2x^4 dx.$$

Интегрируя это уравнение и подставляя найденное выражение для $C = C(x)$ в решение однородного уравнения, находим

$$C(x) = \frac{2}{5}x^5 + C,$$

$$z = \frac{\frac{2}{5}x^5 + C}{x^3}.$$

Делая обратную замену переменных, получим общее решение:

$$y^3 = \frac{1}{x^3}\left(\frac{2}{5}x^5 + C\right)$$

или

$$y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{2}{5}x^5} + C.$$

Ответ. $y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{2}{5}x^5} + C.$

Уравнения Бернулли можно решать сразу как линейные уравнения, поэтому в соответствии с разделом 6 решим один пример методом вариации произвольной постоянной, а другой методом Бернулли.

Пример 1.8.2. Найти общее решение уравнения Бернулли

$$y' - xy = -2x^2y^2e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Решение. Решим сначала линейное однородное уравнение, положив правую часть данного уравнения равной нулю:

$$y' - xy = 0.$$

Решим это уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} - xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = xdx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln e^{\frac{x^2}{2}} + \ln C \Rightarrow y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Общее решение исходного уравнения будем искать в виде $y = C(x)e^{\frac{x^2}{2}}$, где $C(x)$ – неизвестная функция. Найдем производную y':

$$y' = C'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + C(x)xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

Подставим y и y' в исходное уравнение

$$C'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + C(x)xe^{\frac{x^2}{2}} - C(x)xe^{\frac{x^2}{2}} = -2x^2\left(C(x)e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{\frac{x^2}{2}} = -2x^2C^2(x)e^{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow C'(x) = -2x^2C^2(x) \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{\frac{x^2}{2}} = -2x^2C^2(x)e^{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow C'(x) = -2x^2C^2(x) \Rightarrow$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = -2x^2C^2(x) \Rightarrow \frac{dC(x)}{C^2(x)} = -2x^2dx \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{C(x)} = -\frac{2x^3}{3} + C \Rightarrow \frac{1}{C(x)} = \frac{2x^3}{3} + C$$

Из последнего выражения находим функцию $C(x)$:

$$C(x) = \frac{1}{\frac{2x^3}{3} + C}$$

Общее решение исходного уравнения

$$y=\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\frac{2x^3}{3}+C}$$

Ответ может быть представлен в другом виде

$$y^{-1}=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{2x^3}{3}+C\right).$$

Ответ. $y^{-1}=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{2x^3}{3}+C\right).$

Пример 1.8.3. Найти общее решение уравнения Бернулли

$$y'-\frac{y}{x}=-\frac{x^{-2}}{2}\cos 3x\cdot y^3.$$

Решение. Это уравнение решим методом Бернулли. Положим $y=u(x)\cdot v(x)$, или $y=uv$. Тогда $y'=u'v+uv'$. Подставляя в уравнение выражения для y и y', получаем

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=-\frac{x^{-2}}{2}\cos 3x\cdot(uv)^3$$

преобразуем это уравнение

$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=-\frac{x^{-2}}{2}\cos 3x\cdot u^3v^3.$$

Найдем $v(x)$ из условия $v'-\frac{v}{x}=0$:

$$\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x}=0\Rightarrow\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|v|=\ln|x|+\ln C\Rightarrow v=Cx.$$

Полагая C=1, получим $v = x$. Теперь найдем $u(x)$:

$$u'x = -\frac{x^{-2}}{2}\cos 3x \cdot u^3 v^3 \Rightarrow u' = -\frac{u^3 \cos 3x}{2}.$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u^3 \cos 3x}{2} \Rightarrow \frac{du}{u^3} = -\frac{\cos 3x}{2}dx \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{6}\sin 3x + C \Rightarrow \frac{1}{u^2} = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

$$u^2 = \frac{1}{\frac{1}{3}\sin 3x + C}.$$

Решение $y = u(x)\cdot v(x)$ представим в виде $y^2 = u^2(x)\cdot v^2(x)$:

$$y^2 = \frac{x^2}{\frac{\sin 3x}{3} + C}.$$

Этот ответ может быть записан также следующим образом:

$$y^{-2} = x^{-2}\left(\frac{\sin 3x}{3} + C\right).$$

Ответ. $y^{-2} = x^{-2}\left(\frac{\sin 3x}{3} + C\right)$.

Примеры для самостоятельного решения

Следующие уравнения Бернулли рекомендуется решить разными способами и сравнить полученные ответы.

№ 1. Найти общее решение уравнения

$$y' - tgx \cdot y = -\frac{x^2}{2\cos^2 x} y^{-1}.$$

Ответ, $y^2 = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{x^3}{3} + C\right)$.

№2. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{3}{2} x \ln x \cdot y^{-1}.$$

Ответ. $y^2 = x^2\left(\frac{3\ln^2 x}{2} + C\right)$.

№3. Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{3}{2} x^2 \cdot y^{-1}.$$

Ответ. $y^2 = \frac{1}{x^2}\left(\frac{3}{5} x^5 + C\right)$.

№4. Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{2}{3} x^3 y^{-2}.$$

Ответ. $y^2 = \frac{1}{x^3}\left(\frac{2}{7} x^7 + C\right)$.

1.9 Интегрирующий множитель

Иногда, когда дифференциальное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, удается подобрать функцию $\mu = f(x, y)$, после умножения на которую, уравнение становится уравнением в полных дифференциалах.

В данной работе не рассматривается способ нахождения интегрирующего множителя. В рассматриваемых примерах только проверяется предложенный множитель и затем решается уравнение в полных дифференциалах.

Пример 1.9.1. Проверить, что функция $\mu = x^2$ является интегрирующим множителем для уравнения

$$\left(\frac{2y}{x} - 3x^2\right)dx + dy = 0$$

и решить уравнение в полных дифференциалах.

Решение. Сначала убедимся, что это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\dfrac{2y}{x} - 3x^2\right)}{\partial y} = \frac{2}{x}, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

следовательно, это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Умножим заданное уравнение на предложенный интегрирующий множитель:

$$x^2\left(\left(\frac{2y}{x}-3x^2\right)dx+dy\right)=0\Rightarrow$$

$$x^2\left(\frac{2y}{x}-3x^2\right)dx+x^2dy=0\Rightarrow$$

$$\left(2xy-3x^4\right)dx+x^2dy=0.$$

Проверим выполнение условия $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(2xy-3x^4\right)}{\partial y}=2x,\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial x^2}{\partial x}=2x.$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

следовательно, это уравнение в полных дифференциалах.

Найдем функцию $u(x,y)$:

$$u(x,y)=\int\left(2xy-3x^4\right)dx,$$

интегрируя, получим

$$u(x,y)=x^2y-\frac{3x^5}{5}+\varphi(y).$$

Найдем частную производную $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=x^2+\varphi'(y).$$

Приравняем частную производную $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ и функцию $Q(x,y)$:

$$x^2+\varphi'(y)=x^2 \Rightarrow \varphi'(y)=0 \Rightarrow \varphi(y)=C..$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x^2y-\frac{3x^5}{5}=C.$$

Ответ. $x^2y-\frac{3x^5}{5}=C.$

Примеры для самостоятельного решения

№1. Проверить, что функция $\mu=e^{-3x}$ является интегрирующим множителем для уравнения

$$\left(3y+(2x+1)e^{3x}\right)dx-dy=0$$

и решить уравнение в полных дифференциалах.

Ответ. $\frac{2x^2}{2}+x-e^{-3x}y=C.$

№2. Проверить, что функция $\mu=x^{-2}$ является интегрирующим множителем для уравнения

$$\left(\frac{3y}{x}+3x\ln x\right)dx-dy=0$$

и решить уравнение в полных дифференциалах.

Ответ. $\dfrac{y}{x^2}-\dfrac{3\ln^2 x}{2}=C.$

№3. Проверить, что функция $\mu=e^{-x^2}$ является интегрирующим множителем для уравнения

$$\left(3x^2e^{x^2}+2xy\right)dx-dy=0$$

и решить уравнение в полных дифференциалах.

Ответ. $x^3-ye^{-x^2}=C.$

№4. Проверить, что функция $\mu=\cos^2 x$ является интегрирующим множителем для уравнения

$$\left(2tgx\cdot y+\frac{x^2}{\cos^2 x}\right)dx-dy=0$$

и решить уравнение в полных дифференциалах.

Ответ. $\dfrac{x^3}{3}-y\cos^2 x=C.$

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Введение

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, y', y'' – ее производные, называется дифференциальным уравнением второго порядка.

Функция $F(x, y, y', y'')$ может не зависеть от некоторых из величин x, y, y', но обязательно должна зависеть от y''.

Решением называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Наиболее простым уравнением второго порядка является уравнение вида

$$y'' = f(x),$$

где $f(x)$– заданная функция. Решение такого уравнения находится двукратным последовательным интегрированием. Последовательно интегрируя, находим сначала первый интеграл:

$$y' = \int f(x)dx + C_1,$$

а затем и общее решение

$$y=\int\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx+C_2\ ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Из этого примера видно, что при интегрировании дифференциальных уравнений второго порядка получается семейство решений, заданных функцией, зависящей от двух произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$y=y(x,C_1,C_2).$$

Следовательно, задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка должна содержать два начальных условия. Задача Коши формулируется так: найти решение $y=y(x)$ уравнения $y''=f(x,y,y')$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'_{x=x_0}=y'_0\,,$$

где x_0,y_0,y'_0 – заданные числа.

Функция $y=y(x,C_1,C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1 и C_2, называется общим решением дифференциального уравнения второго порядка, если оно является решением уравнения при любых значениях постоянных C_1 и C_2 и, если при любых начальных условиях существуют единственные значения постоянных $C_1=C_1^0$ и $C_2=C_2^0$, такие, что функция $y=y\left(x,C_1^0,C_2^0\right)$ является решением и удовлетворяет начальным условиям. Иными словами, функция $y = y(x, C_1, C_2)$ называется общим решением, если она содержит в себе все частные решения уравнения.

Любое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных C_1 и C_2, называется частным решением дифференциального уравнения.

Если существует общее решение, то по известным начальным значениям x_0, y_0, y'_0 всегда можно найти решение задачи Коши, удовлетворяющее начальным условиям. Это решение является частным.

Уравнение вида

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0,$$

которое определяет неявно общее решение дифференциального уравнения, называется общим интегралом уравнения.

2.1 Что называется решением дифференциального уравнения

Решением называется функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Пример 2.1.1. Проверить, что функция

$$y=-2\sin 3x+C_1x+C_2$$

является решением дифференциального уравнения

$$y''=18\sin 3x.$$

Решение. Найдем первую производную данной функции

$$y'=-6\cos 3x+C_1,$$

и найдем вторую производную

$$y''=18\sin 3x.$$

Найденная производная равна правой части дифференциального уравнения. Следовательно, данная функция является решением дифференциального уравнения.

Пример 2.1.2. Проверить, что функция

$$y=2e^{x-1}-3(x-1)^2$$

является решением дифференциального уравнения

$$y''+y'\frac{2x-x^2+1}{(x-1)(x-3)}+y\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}=0.$$

Решение. Найдем первую производную функции *y(x)*

$$y' = 2e^{x-1} - 6(x-1),$$

найдем вторую производную

$$y'' = 2e^{x-1} - 6\,.$$

Подставим выражения для первой и второй производных и функции в заданное дифференциальное уравнение

$$2e^{x-1} - 6 + \left(2e^{x-1} - 6(x-1)\right)\frac{2x - x^2 + 1}{(x-1)(x-3)} +$$

$$+\left(2e^{x-1} - 3(x-1)^2\right)\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)} = 0$$

Раскроем скобки и сгруппируем члены

$$2e^{x-1}\left(1 + \frac{2x - x^2 + 1}{(x-1)(x-3)} + \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}\right) -$$

$$-6\left(1 + \frac{2x - x^2 + 1}{x-3} + \frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\right) = 0$$

Внутри скобок приведем дроби к общему знаменателю

$$e^{x-1}\left(\frac{x^2 - 4x + 3 + 2x - x^2 + 1 + 2x - 4}{(x-1)(x-3)}\right) -$$

$$-3\left(\frac{x-3+2x-x^2+1+x^2-3x+2}{x-3}\right)=0,$$

$$e^{x-1}\left(\frac{0}{(x-1)(x-3)}\right)--3\left(\frac{0}{x-3}\right)=0\Rightarrow 0=0.$$

Левая часть равна правой, значит, функция является решением дифференциального уравнения.

Пример 2.1.3. Проверить, что функция $e^{2y}=3x+4$ является решением дифференциального уравнения $y''+2y'^2=0$.

Решение. В данном примере в качестве решения дана неявная функция, найдем ее первую и вторую производные. Для этого продифференцируем соотношение $e^{2y}=3x+4$, считая, что $y=y(x)$:

$$2e^{2y}\cdot y'=3\Rightarrow y'=\frac{3}{2e^{2y}}.$$

Полученное соотношение $2e^{2y}\cdot y'=3$ продифференцируем еще раз:

$$4e^{2y}\cdot(y')^2+2e^{2y}\cdot y''=0\Rightarrow y''=-2(y')^2\Rightarrow -2\left(\frac{3}{2e^{2y}}\right)^2.$$

Подставим выражения для первой и второй производных в заданное дифференциальное уравнение:

$$-2\left(\frac{3}{2e^{2y}}\right)^2+2\left(\frac{3}{2e^{2y}}\right)^2=0\Rightarrow 0=0.$$

Левая часть равна правой, значит, функция является решением дифференциального уравнения.

Примеры для самостоятельного решения

№1. Проверить, что функция

$$y=-\frac{2}{9}\ln\left|\cos 3x\right|+C_1x+C_2$$

является решением дифференциального уравнения

$$y''=\frac{2}{\cos^2 3x}.$$

№2. Проверить, что функция

$$y=\frac{8}{3}\sqrt{(x+3)^3}+C_1x+C_2$$

является решением дифференциального уравнения

$$y''=\frac{2}{\sqrt{x+3}}.$$

№3. Проверить, что функция

$$y=(2x+3)^2$$

является решением дифференциального уравнения

$$2y''y=y'^2.$$

№4. Проверить, что функция

$$y^2 - 5 = (3x+4)^2$$

является решением дифференциального уравнения

$$y''y = \frac{5y'^2}{y^2 - 5}.$$

№5. Проверить, что функция

$$\sin y = 3 + 2x$$

является решением дифференциального уравнения

$$y'' = tgy \cdot y'^2.$$

2.2 Общее решение уравнения второго порядка и вычисление значений произвольных постоянных в решении задачи Коши

В следующих примерах необходимо дважды проинтегрировать правую часть и используя начальные условия определить значения произвольных постоянных.

Пример 2.2.1. Найти общее решение уравнения второго порядка и вычислить значения произвольных постоянных в решении задачи Коши

$$y'' = 2x^2 + 3x + 1, \; y'\big|_{x=1} = 2, \; y\big|_{x=1} = 1.$$

Решение. Проинтегрируем дважды правую часть

$$y' = \int \left(2x^2 + 3x + 1\right) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x + C_1\right) dx = \frac{2x^4}{12} + \frac{3x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Общее решение уравнения $y = \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$.

Для нахождения значений произвольных постоянных используем начальные условия

$$y'\big|_{x=1} = 2 : 2 = \frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 1 + C_1,$$

$$y\big|_{x=1} = 1:1 = \frac{1^4}{6} + \frac{1^3}{2} + \frac{1^2}{2} + C_1 \cdot 1 + C_2.$$

Из первого уравнения находим $C_1 = -\frac{7}{6}$, из второго уравнения находим $C_2 = 1$.

Ответ. $y = \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$, $C_1 = -\frac{7}{6}$, $C_2 = 1$.

Пример 2.2.2. Найти общее решение уравнения второго порядка и вычислить значения произвольных постоянных в решении задачи Коши:

$$y'' = 2\sin 3x + 3\cos 2x,\ y'\big|_{x=0} = 1,\ y\big|_{x=0} = 2.$$

Решение. Проинтегрируем дважды правую часть:

$$y' = \int (2\sin 3x + 3\cos 2x)dx = -\frac{2}{3}\cos 3x + \frac{3}{2}\sin 2x + C_1,$$

$$y = \int \left(-\frac{2}{3}\cos 3x + \frac{3}{2}\sin 2x + C_1\right)dx =$$

$$= -\frac{2}{3^2}\sin 3x - \frac{3}{2^2}\cos 2x + C_1 x + C_2.$$

Общее решение уравнения

$$y = -\frac{2}{9}\sin 3x - \frac{3}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2.$$

Для нахождения значений произвольных постоянных используем начальные условия

$$1 = -\frac{2}{3}\cos 3\cdot 0 + \frac{3}{2}\sin 2\cdot 0 + C_1,$$

$$2 = -\frac{2}{9}\sin 3\cdot 0 - \frac{3}{4}\cos 2\cdot 0 + C_1\cdot 0 + C_2.$$

После упрощения получаем

$$1 = -\frac{2}{3} + C_1,\ 2 = -\frac{3}{4} + C_2.$$

Отсюда находим значения произвольных постоянных $C_1 = \frac{5}{3}$, $C_2 = \frac{11}{4}$.

Ответ. $y = -\frac{2}{9}\sin 3x - \frac{3}{4}\cos 2x + C_1x + C_2$, $C_1 = \frac{5}{3}$, $C_2 = \frac{11}{4}$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти общее решение уравнений второго порядка и вычислить значения произвольных постоянных в решении задачи Коши.

№1. $y'' = 2e^{3x} + 3e^{2x}$, $y'\big|_{x=0} = 2$, $y\big|_{x=0} = 1$.

Ответ. $C_1 = -\frac{1}{6}$, $C_2 = \frac{1}{36}$.

№2. $y'' = \dfrac{2}{\sqrt{x+9}}$, $y'\big|_{x=0} = 1$, $y\big|_{x=0} = 2$.

Ответ. $C_1 = -11$, $C_2 = -70$.

№3. $y'' = \sin^2 x \cos x$, $y'\big|_{x=0} = 1$, $y\big|_{x=0} = -1$.

Ответ. $C_1 = 1$, $C_2 = -\dfrac{1}{3}$.

2.3 Подстановки для уравнений второго порядка

Иногда уравнение второго порядка с помощью замены переменной удается свести к уравнению первого порядка. Такое преобразование уравнения называется понижением порядка. Рассмотрим два основных случая.

1.Уравнения вида $y'' = f(x, y')$. Уравнение не содержит *y*. В этом случае применяется следующая подстановка: $p(x) = y'$. Тогда $y'' = p'$. После подстановки в уравнение $y'' = p'$ и $y' = p$, получим уравнение первого порядка относительно функции *p(x)*: $p' = f(x, p)$. Решая его, найдем $p(x) = \varphi(x, C_1)$. Поскольку $p(x) = y'$, то $y' = \varphi(x, C_1)$. Отсюда, интегрируя еще раз, получаем искомое решение

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

2.Уравнения вида $y'' = f(y, y')$. Уравнение не содержит *x*. В этом случае применяется следующая подстановка $p(y) = y'$. Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Подставляя в заданное уравнение выражения для y' и y'', получаем уравнение первого порядка относительно *p* как функции от *y*:

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Решая его, найдем $p = \varphi(y, C_1)$. Поскольку $p = y'$, то $y' = \varphi(y, C_1)$. Отсюда

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx.$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными, из которого находим общее решение данного уравнения:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Пример 2.3.1. Указать подстановку и найти общее решение уравнения

$$y'' = 2y'^2 tg\, 2y.$$

Решение. Уравнение не содержит x. В этом случае применяется следующая подстановка: $p(y) = y'$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Подставляя в заданное уравнение выражения для y' и y'', получаем уравнение

$$p\frac{dp}{dy} = 2p^2 tg\, 2y.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим уравнение на p^2 и решим его:

$$\frac{dp}{p} = 2tg\, 2y dy \Rightarrow \frac{dp}{p} = 2\frac{\sin 2y}{\cos 2y} dy \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{d\cos 2y}{\cos 2y}.$$

Переменные разделены, можно интегрировать левую и правую части:

$$\ln|p| = -\ln|\cos 2y| + \ln C_1 \Rightarrow p = \frac{C_1}{\cos 2y}.$$

Заменяя p на y' получаем снова уравнение первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\cos 2y} \Rightarrow \cos 2y dy = C_1 dx,$$

$$\frac{1}{2}\sin 2y = C_1 x + C_2.$$

При делении на p было потеряно решение $p = y' = 0$, т.е. $y = C$. В данном случае оно содержится в общем решении, так как получается из него при $C_1 = 0$.

Ответ. $\frac{1}{2}\sin 2y = C_1 x + C_2.$

Пример 2.3.2. Указать подстановку и найти общее решение уравнения

$$y'' + 6y' tg 3x = 0.$$

Решение. Уравнение не содержит y. В этом случае применяется следующая подстановка $p(x) = y'$, $y'' = p'$. Подставляя в заданное уравнение выражения для y' и y'', получаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$p' + 6p \cdot tg3x = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -6tg3xdx \Rightarrow \frac{dp}{p} = -6\frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = 2\frac{d\cos 3x}{\cos 3x} \Rightarrow \ln|p| = 2\ln|\cos 3x| + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1\cos^2 3x.$$

Заменяя p на y' получаем уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = C_1\cos^2 3x \Rightarrow dy = C_1\cos^2 3xdx \Rightarrow dy = C_1\frac{1+\cos 6x}{2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{12}\sin 6x\right) + C_2.$$

Ответ. $\Rightarrow y = C_1\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{12}\sin 6x\right) + C_2.$

Примеры для самостоятельного решения

Указать подстановку и найти общее решение:

№1. $y'' = \frac{y'^2}{y+1}.$

Ответ. $\ln|y+1| = C_1x + C_2.$

№2. $y'' = \frac{2yy'^2}{y^2+4}.$

Ответ. $\frac{1}{2}arctg\frac{v}{2} = C_1x + C_2.$

№3. $(2y+3)y'' = y'^2.$

Ответ. $\ln|2y+3| = C_1 x + C_2$.

№4. $(3x+2)y'' = 3y'$.

Ответ. $y = C_1\left(3\dfrac{x^2}{2} + 2x\right) + C_2$..

№5. $(e^x+2)y'' - e^x y' = 0$.

Ответ. $y = C_1(e^x + 2x) + C_2$.

№6. $y'' = \dfrac{3y'}{x}$.

Ответ. $y = C_1\dfrac{x^4}{4} + C_2$.

№7. $(y^2+2)y'' + 2yy'^2 = 0$.

Ответ. $\dfrac{y^3}{3} + 2y = C_1 x + C_2$.

2.4 Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывные функции на некотором интервале, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Если $f(x) = 0$, то уравнение называется линейным однородным уравнением. Если же $f(x) \neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным уравнением.

Общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и любого его частного решения.

Важный частный случай линейных уравнений – случай, когда функции $p(x)$, $q(x)$ являются постоянными величинами.

Линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

где a,b,c - константы.

Для решения такого уравнения составляется характеристическое уравнение

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

При решении этого уравнения возможны три случая:

1)корни вещественные и различные k_1, k_2 при $b^2 - 4ac > 0$, тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

2)корни вещественные и равные $k_1 = k_2$ при $b^2 - 4ac = 0$, тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x};$$

3)корни комплексные $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ при $b^2 - 4ac < 0$, тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right).$$

Пример 2.4.1. Найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - 6y' + 5y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 6k + 5 = 0.$$

Корни квадратного уравнения $k_1 = 1$, $k_2 = 5$ вещественные и различные. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{5x}.$$

Ответ. $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$.

Пример 2.4.2. Найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 6k + 9 = 0.$$

Корни квадратного уравнения $k_1 = k_2 = 3$ вещественные и равные. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Ответ. $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

Пример 2.4.3. Найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 6k + 13 = 0.$$

Корни квадратного уравнения $k_1 = 3 + 2i$, $k_2 = 3 - 2i$ комплексные. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

Ответ. $y = e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$

Примеры для самостоятельного решения

Найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

№1. $y'' - 6y' = 0.$

Ответ. $y = C_1 + C_2 e^{6x}.$

№2. $y'' + 16y = 0.$

Ответ. $y = \left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right).$

№3. $y'' - 8y' + 16y = 0.$

Ответ. $y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$

№4. $y'' - 6y' + 5y = 0.$

Ответ. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{5x}.$

№5. $y'' - 2y' + 17y = 0.$

Ответ. $y = e^{x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right).$

№6. $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0.$

Ответ. $y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 x e^{\sqrt{2}x}.$

№7. $9y'' - 9y' + 2y = 0.$

Ответ. $y = C_1 e^{\frac{1}{3}x} + C_2 e^{\frac{2}{3}x}.$

№8. $y'' + 4y' + 13y = 0.$

Ответ. $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$

№9. $y'' + 10y' + 25y = 0.$

Ответ. $y = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}.$

2.5 Вычисление значений произвольных постоянных в решении задачи Коши

В следующих примерах необходимо составить характеристическое уравнение, записать общее решение дифференциального уравнения, и используя начальные условия, вычислить значения произвольных постоянных.

Пример 2.5.1. Найти общее решение и вычислить значения произвольных постоянных в решении задачи Коши:

$$y''-16y=0,\ y'\big|_{x=0}=1,\ y\big|_{x=0}=2.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2-16=0.$$

Корни квадратного уравнения $k_1=-4$, $k_2=4$ вещественные и различные. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{4x}.$$

Найдем производную $y'=-4C_1e^{-4x}+4C_2e^{4x}$. Для нахождения произвольных постоянных используем начальные условия:

$$y\big|_{x=0}=2:2=C_1e^{-4\cdot 0}+C_2e^{4\cdot 0},$$
$$y'\big|_{x=0}=1:1=-4C_1e^{-4\cdot 0}+4C_2e^{4\cdot 0},$$

или

$$2 = C_1 + C_2,$$
$$1 = -4C_1 + 4C_2.$$

Решая систему, находим $C_1 = \frac{7}{8}, C_2 = \frac{9}{8}$.

Ответ. $C_1 = \frac{7}{8}, C_2 = \frac{9}{8}$.

Пример 2.5.2. Найти общее решение и вычислить значения произвольных постоянных в решении задачи Коши

$$y'' + 16y = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1,\ y\big|_{x=0} = 1.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 + 16 = 0.$$

Корни квадратного уравнения $k_1 = -4i$, $k_2 = 4i$ комплексные. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Найдем производную $y' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x$. Используя начальные условия, составим систему

$$1 = C_1 \cos 4 \cdot 0 + C_2 \sin 4 \cdot 0,$$
$$1 = -4C_1 \sin 4 \cdot 0 + 4C_2 \cos 4 \cdot 0,$$

или

$$1 = C_1 + C_2 \cdot 0,$$

$$1 = -4C_1 \cdot 0 + 4C_2.$$

Решая систему, находим $C_1 = 1, C_2 = \frac{1}{4}$.

Ответ. $C_1 = 1, C_2 = \frac{1}{4}$.

Пример 2.5.3. Найти общее решение и вычислить значения произвольных постоянных в решении задачи Коши:

$$y'' - 2y' = 0,\ y'\big|_{x=0} = 2,\ y\big|_{x=0} = 3.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k = 0.$$

Корни квадратного уравнения $k_1 = 0$, $k_2 = 2$ вещественные и различные. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{2x},$$

или

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Найдем производную $y' = 2C_2 e^{2x}$. Используя начальные условия, составим систему:

$$2 = 2C_2 e^{2 \cdot 0},$$
$$3 = C_1 + C_2 e^{2 \cdot 0},$$

или

$$2 = 2C_2,$$

$$3 = C_1 + C_2.$$

Решая систему, находим $C_1 = 2$, $C_2 = 1$.

Ответ. $C_1 = 2$, $C_2 = 1$.

Примеры для самостоятельного решения

Найти общее решение и вычислить значения произвольных постоянных в решении задачи Коши.

№ 1. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1,\ y\big|_{x=0} = 3.$

Ответ. $C_1 = 3$, $C_2 = -5$.

№2. $y'' - 6y' + 8y = 0,\ y'\big|_{x=0} = 3,\ y\big|_{x=0} = 2.$

Ответ. $C_1 = \dfrac{5}{2}$, $C_2 = -\dfrac{1}{2}$.

№3. $y'' - 2y' + 5y = 0,\ y'\big|_{x=0} = 2,\ y\big|_{x=0} = -2.$

Ответ. $C_1 = -2$, $C_2 = 2$.

№4. $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y'\big|_{x=0} = 2,\ y\big|_{x=0} = 3.$

Ответ. $C_1 = 3$, $C_2 = -7$.

№5. $y'' - 6y' + 8y = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1,\ y\big|_{x=0} = -1.$

Ответ. $C_1 = -\dfrac{5}{2}$, $C_2 = \dfrac{3}{2}$.

2.6 Вид частного решения неоднородного уравнения

Общее решение линейного неоднородного уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. В общем случае для нахождения частного решения применяется метод вариации произвольных постоянных. Однако, если в правой части уравнения – многочлен или показательная функция, или их произведение, или тригонометрическая функция $\sin\beta x$ или $\cos\beta x$, или линейная комбинация перечисленных функций, то частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим различные виды правых частей.

1. Правая часть имеет вид $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$– многочлен степени n. Тогда частное решение ищется в виде $Q_n(x)x^r$, где $Q_n(x)$– многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а r– число корней характеристического уравнения, равных нулю.

Пример 2.6.1. Определить вид частного решения неоднородного уравнения

$$y'' - 2y' = 3x.$$

Решение. Правая часть $f(x) = 3x$ – неполный многочлен первой степени. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Один корень равен нулю. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид полного многочлена первой степени, умноженного на x:

$$y_{ч.н.} = (Ax + B)x.$$

Пример 2.6.2. Определить вид частного решения неоднородного уравнения

$$y'' - 2y = 3x + 4.$$

Решение. Правая часть $f(x) = 3x + 4$– многочлен первой степени. Характеристическое уравнение $k^2 - 2 = 0$, корни $k_1 = -\sqrt{2}$, $k_2 = \sqrt{2}$ вещественные и различные. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{ч.н.} = Ax + B.$$

Пример 2.6.3. Определить вид частного решения для неоднородного уравнения

$$y'' - 4y' = 2x^2.$$

Решение. Правая часть $f(x) = 2x^2$– неполный многочлен второй степени. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 4$. Корни вещественные и различные, один корень равен нулю. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид полного многочлена второй степени, умноженного на *x*:

$$y_{ч.н.} = (Ax^2 + Bx + C)x.$$

2. Правая часть имеет вид $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$– многочлен степени *n*. Тогда частное решение ищется в виде $e^{\alpha x} Q_n(x) x^r$, где $Q_n(x)$– многочлен той же степени, что и $P_n(x)$, а *r*– число корней характеристического уравнения, равных *α*.

Пример 2.6.4. Определить вид частного решения неоднородного уравнения

$$y'' - 2y' = 3e^{2x}.$$

Решение. Правая часть $f(x) = 3e^{2x}$ представляет собой произведение константы, которую можно рассматривать как многочлен нулевой степени, и показательной функции e^{2x}. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Один корень равен 2, т.е. совпадает с коэффициентом перед x у показательной функции, следовательно

$$y_{ч.н.} = Ae^{2x} \cdot x.$$

Пример 2.6.5. Определить вид частного решения неоднородного уравнения

$$y'' - 2y = (3x + 4)e^{2x}.$$

Решение. Правая часть $f(x) = (3x + 4)e^{2x}$ представляет собой произведение многочлена первой степени и показательной функции e^{2x}. Характеристическое уравнение $k^2 - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -\sqrt{2}$, $k_2 = \sqrt{2}$ и ни один из корней не совпадает с коэффициентом перед x у показательной функции, следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид полного многочлена первой степени, умноженного на показательную функцию e^{2x}

$$y_{ч.н.} = (Ax + B)e^{2x}.$$

3. Правая часть имеет вид $f(x)=P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$, где $P_n(x)$– многочлен степени *n*,а $Q_m(x)$– многочлен степени *m*. Тогда частное решение ищется в виде

$$\left(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x\right)x^r,$$

где $\widetilde{P}_k(x)$ и $\widetilde{Q}_k(x)$– многочлены степени *k*, $k=\max\{n,m\}$, а *r*– число корней характеристического уравнения, равных βi.

Пример 2.6.6. Определить вид частного решения неоднородного уравнения

$$y''-4y'=3\sin 2x.$$

Решение. В этом примере многочлен $P_n(x)=0$, а многочлен $Q_m(x)=3$– многочлен нулевой степени. Характеристическое уравнение $k^2-4k=0$ имеет корни $k_1=0$, $k_2=4$ вещественные и различные, т.е. $\beta i=2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $r=0$ и частное решение имеет вид

$$y_{ч.н.}=A\sin 2x+B\cos 2x.$$

Пример 2.6.7. Определить вид частного решения для неоднородного уравнения

$$y''+9y=2\sin 3x.$$

Решение. Многочлен $P_n(x)=0$, а многочлен $Q_m(x)=2$. Характеристическое уравнение $k^2+9=0$ имеет комплексные корни $k_1 = -3i$, $k_2 = 3i$. Поскольку $\beta i = 3i-$ корень характеристического уравнения, то $r = 1$ и частное решение надо искать в виде

$$y_{ч.н.} = (A\sin 3x + B\cos 3x)x.$$

Пример 2.6.8. Определить вид частного решения неоднородного уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = x\sin 2x.$$

Решение. Многочлен $P_n(x) = 0$, а многочлен $Q_m(x) = x-$ неполный многочлен первой степени. Характеристическое уравнение $k^2 + 3k + 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = -2$. Так как $\beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$ и частное решение надо искать в виде произведений полных многочленов первой степени, умноженных соответственно на $\sin 2x$ и $\cos 2x$:

$$y_{ч.н.} = (Ax + B)\sin 2x + (Cx + D)\cos 2x.$$

Примеры для самостоятельного решения

Определить вид частного решения для неоднородного уравнения.

№1. $y'' - 3y' = 2\cos 3x.$

Ответ. $y_{ч.н.} = A\sin 3x + B\cos 3x.$

№2. $y'' + 4y = 3\sin 2x.$

Ответ. $y_{ч.н.} = (A\sin 2x + B\cos 2x)x.$

№3. $y'' + 9y = 2\cos 3x.$

Ответ. $y_{ч.н.} = \left(A\sin 3x + B\cos 3x\right)x.$

№4. $y'' + 2y' - 3y = x^2 + 1.$

Ответ. $y_{ч.н.} = Ax^2 + Bx + C.$

№5. $y'' + 2y' = x^2 + 1.$

Ответ. $y_{ч.н.} = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x.$

№6. $y'' - 4y' = 3e^{4x}.$

Ответ. $y_{ч.н.} = Ae^{4x} \cdot x.$

№7. $y'' - 4y = e^{4x}.$

Ответ. $y_{ч.н.} = Ae^{4x}.$

№8. $y'' - 9y' + 18y = 5e^{3x}.$

Ответ. $y_{ч.н.} = Axe^{3x}.$

№9. $y'' - 6y' + 9y = 8e^{3x}.$

Ответ. $y_{ч.н.} = Ax^2e^{3x}.$

2.7 Частное решение неоднородного уравнения

Здесь рассматривается метод неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения неоднородного уравнения.

Пример 2.7.1. Найти частное решение неоднородного уравнения

$$y'' - 2y' = 3x + 1.$$

Решение. Правая часть $f(x) = 3x + 1$ – полный многочлен первой степени. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Один корень равен нулю. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид полного многочлена первой степени, умноженного на x:

$$y_{ч.н.} = (Ax + B)x.$$

Найдем первую и вторую производные от этого выражения:

$$y'_{ч.н.} = Ax + (Ax + B) \Rightarrow y'_{ч.н.} = 2Ax + B,$$

$$y''_{ч.н.} = 2A.$$

Подставим $y'_{ч.н.}$, $y''_{ч.н.}$ в заданное уравнение:

$$2A - 2(2Ax + B) = 3x + 1,$$

и упростим полученное выражение

$$-4Ax + 2A - 2B = 3x + 1.$$

Коэффициенты A и B находятся методом неопределенных коэффициентов:

$$-4A = 3 \Rightarrow A = -\frac{3}{4},$$

$$2A - 2B = 1 \Rightarrow -2 \cdot \frac{3}{4} - 2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{5}{4}.$$

Ответ. $y_{ч.н.} = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x.$

Пример 2.7.2. Найти частное решение неоднородного уравнения

$$y'' - 16y = 2e^{5x}.$$

Решение. Правая часть $f(x) = 2e^{5x}$. представляет собой произведение константы, которую можно рассматривать как многочлен нулевой степени, и показательной функции e^{5x}. Характеристическое уравнение $k^2 - 16 = 0$ имеет корни $k_1 = -4$, $k_2 = 4$. Поскольку ни один из корней не совпадает с коэффициентом перед x у показательной функции e^{5x}, то частное решение надо искать в виде

$$y_{ч.н.} = Ae^{5x}.$$

Найдем первую и вторую производные: $y'_{ч.н.} = 5Ae^{5x}$, $y''_{ч.н.} = 25Ae^{5x}$. Подставим $y'_{ч.н.}$, $y''_{ч.н.}$ в заданное уравнение

$$25Ae^{5x} - 16Ae^{5x} = 2e^{5x} \Rightarrow 9Ae^{5x} = 2e^{5x} \Rightarrow A = \frac{2}{9}.$$

Таким образом, частное решение $y_{ч.н.}=\frac{2}{9}e^{5x}$.

Ответ. $y_{ч.н.}=\frac{2}{9}e^{5x}$.

Пример 2.7.3. Найти частное решение неоднородного уравнения

$$y''-4y=-\cos 3x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-4=0$ имеет корни $k_1=-2$, $k_2=2$, так как $\beta i=3i-$ не является корнем характеристического уравнения, то $r=0$. Частное решение ищем в виде

$$y_{ч.н.}=A\sin 3x+B\cos 3x.$$

Найдем первую и вторую производные:

$$y'_{ч.н.}=3A\cos 3x-3B\sin 3x,$$
$$y''_{ч.н.}=-9A\sin 3x-9B\cos 3x.$$

Подставим $y'_{ч.н.}$, $y''_{ч.н.}$ в заданное уравнение:

$$-9A\sin 3x-9B\cos 3x-4(A\sin 3x+B\cos 3x)=-\cos 3x.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены

$$-13A\sin 3x-13B\cos 3x=-\cos 3x.$$

Приравняем коэффициенты при синусе и косинусе справа и слева:

$$-13A = 0,$$
$$-13B = -1,$$

Отсюда находим $A = 0$, $B = \frac{1}{13}$. Следовательно, частное решение равно:

$$y_{ч.н.} = \frac{1}{13}\cos 3x.$$

Ответ. $y_{ч.н.} = \frac{1}{13}\cos 3x.$

Пример 2.7.4. Найти частное решение неоднородного уравнения

$$y'' + 4y = \sin 2x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_1 = -2i$, $k_2 = 2i$, так как $\beta i = 2i -$ является корнем характеристического уравнения, то $r = 1$. Частное решение ищем в виде

$$y_{ч.н.} = (A\sin 2x + B\cos 2x)x.$$

Найдем первую и вторую производные:

$$y'_{ч.н.} = (2A\cos 2x - 2B\sin 2x)x + A\sin 2x + B\cos 2x,$$
$$y''_{ч.н.} = (-4A\sin 2x - 4B\cos 2x)x + 2A\cos 2x - 2B\sin 2x.$$

Подставим $y'_{ч.н.}$, $y''_{ч.н.}$ в заданное уравнение:

$$(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x)x + 2A\cos 2x - 2B\sin 2x +$$
$$+ 4x(A\sin 2x + B\cos 2x) = \sin 2x.$$

После упрощения получим

$$2A\cos 2x - 2B\sin 2x = \sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при синусе и косинусе справа и слева, получим систему

$$\begin{cases} 2A = 0, \\ -2B = 1, \end{cases}$$

из которой находим $A = 0,\ B = -\frac{1}{2}$. Следовательно, частное решение равно:

$$y_{ч.н.} = -\frac{1}{2} x\cos 3x.$$

Ответ. $y_{ч.н.} = -\frac{1}{2} x\cos 3x.$

Примеры для самостоятельного решения

Найти частное решение неоднородного уравнения.

№1. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.

Ответ. $y_{ч.н.} = \frac{3}{2} x^2 e^{2x}$.

№2. $y'' - 9y = 5\sin 2x.$

Ответ. $y_{ч.н.} = -\frac{5}{13}\sin 2x.$

№3. $y'' + y = 3\sin x.$

Ответ. $y_{ч.н.} = -\frac{3}{2} x\cos x.$

№4. $y'' - 3y' = 2\sin 3x.$

Ответ. $y_{ч.н.} = -\dfrac{1}{9}\sin 3x + \dfrac{1}{9}\cos 3x.$

№5. $y'' - 4y = 3xe^{2x}.$

Ответ. $y_{ч.н.} = \left(\dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{3}{16}\right)e^{2x}.$

№6. $y'' - 3y = 4x + 5.$

Ответ. $y_{ч.н.} = -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{5}{3}.$

№7. $y'' - 3y' = 4x + 5.$

Ответ. $y_{ч.н.} = -\dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{19}{9}x.$

№8. $y'' - 5y' = 2e^{5x}.$

Ответ. $y_{ч.н.} = \dfrac{2}{5}xe^{5x}.$

№9. $y'' + 9y = 2\cos 3x.$

Ответ. $y_{ч.н.} = \dfrac{1}{3}x\sin 3x.$