2.10 *Solution set of a quadratic inequality.* Let $C \subseteq \mathbf{R}^n$ be the solution set of a quadratic inequality,

$$C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^T Ax + b^T x + c \le 0\},$$

with $A \in \mathbf{S}^n$, $b \in \mathbf{R}^n$, and $c \in \mathbf{R}$.

(a) Show that C is convex if $A \succeq 0$.

(b) Show that the intersection of C and the hyperplane defined by $g^T x + h = 0$ (where $g \neq 0$) is convex if $A + \lambda gg^T \succeq 0$ for some $\lambda \in \mathbf{R}$.

Are the converses of these statements true?

(a) 方法一：

设 x=y+v，且 y 和v 是对称矩阵

∴x'*A*x+b'*x+c=(y'+v')*A*(y+v)+b'(y+v)+c

=y'*A*y+(b'+2*v'*A)*y+v'*A*v+b'*v+c

设 v' =-1/2*b'*inv(A)，

k=-(v'*A*v+b'*v+c)

=-1/4*b'*(inv(A))'*b+1/2*b'*(inv(A))'*b-c

=1/4*b'*(inv(A))'*b-c

设 D={y∈R^n|y'*A*y≤k}

(1) k<0

D=空集

(2) k=0

D={y|y=0}

(3) k>0

D={y∈R^n|y'*(A/k)*y≤1}

∵A/k 半正定

∴设 A/k=B*B 且 B 半正定

∴设 S={z∈R^n|z'*z≤1}即 S={z∈R^n | norm(z)≤1}

∵任意 z1，z2∈S，norm(z1)≤1，norm(z2)≤1

任意θ∈[0,1]，norm(θ*z1+(1-θ)*z2)≤θ*norm(z1)+ (1-θ)*norm(z2)≤1

∴S 是凸集

∴D 是凸集

∴C 是凸集

方法二：

∵R^n 是凸集，diff((x'*A*x+b'*x),2)=2*A 半正定

∴x'*A*x+b'*x 是凸函数

∴设α=-c，x'*A*x+b'*x 的α次水平集C 是凸集

方法三：本质上用定义二证明 f(x)凸函数，然后凸函数的α次水平集

∵R^n 是凸集

设 f(x)=x'*A*x+b'*x+c

设 g(t)=f(x+t*v)=…

∴设 f(t)=对任意 x∈R^n，任意 v∈R^n，任意t∈R

Converse：

取 x 为 1x1 时，A=-1，b=0，c=-1

∴C=R 是凸集

∵A 不是半正定

∴不成立

(b) 方法一：

设 D={x∈R^n|x'*A*x+b'*x+c≤0 且 g'*x+h=0}

即 D={x∈R^n|x'*A*x+b'*x+c+(g'*x+h)'*(g'*x+h)≤0 且 g'*x+h=0}

∴任意 x1∈D，g'*x1+h=0

任意 x2∈D，g'*x2+h=0

∴任意 θ∈[0,1]，g'*(θ*x1+(1-θ)*x2)+h=θ*(g'*x1+h)+(1-θ)*(g'*x2+h)=0

∴F={x∈R|g'x+h=0}是凸集

∵x'*A*x+b'*x+c+λ*(g'*x+h)'*(g'*x+h)

= x'*(A+λ*g*g')*x+(b'+λ*h'*g')*x+λ*x'*g*h+c+λ*h'*h

∴diff(x'*(A+λ*g*g')*x+(b'+λ*h'*g')*x+λ*x'*g*h+c+λ*h'*h, 2)

=2*(A+λ*g*g')半正定

设 E={x∈R^n|x'*A*x+b'*x+c+(g'*x+h)'*(g'*x+h)≤0}

∴凸函数 x'*(A+λ*g*g')*x+(b'+λ*h'*g')*x+λ*x'*g*h+c+λ*h'*h 的 0 次水平集 E 是凸集

∴D=E∩F 是凸集

方法二：同（1）方法（3）

Converse:

取 x 为 1x1 时，A=-1，b=0，c=-1，g=0，h=0

∴D=R 是凸集

∵A 不是半正定

∴不成立

3.21 *Pointwise maximum and supremum.* Show that the following functions $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ are convex.

(a) $f(x) = \max_{i=1,\ldots,k} \|A^{(i)}x - b^{(i)}\|$, where $A^{(i)} \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $b^{(i)} \in \mathbf{R}^m$ and $\|\cdot\|$ is a norm on $\mathbf{R}^m$.

(b) $f(x) = \sum_{i=1}^r |x|_{[i]}$ on $\mathbf{R}^n$, where $|x|$ denotes the vector with $|x|_i = |x_i|$ (*i.e.*, $|x|$ is the absolute value of x, componentwise), and $|x|_{[i]}$ is the ith largest component of $|x|$. In other words, $|x|_{[1]}, |x|_{[2]}, \ldots, |x|_{[n]}$ are the absolute values of the components of x, sorted in nonincreasing order.

(a) ∵R^m 凸 集

∴||x||，x∈R^m 是凸函数

∵R^n 凸集

∴||A(i)*x-b(i)||，是凸函数

∴f(x)=max(||A(i)*x-b(i)||)，i=1,…,k 是凸函数

(b) ∵任意 x1，x2∈R^n，任意θ∈[0,1]

f(θ*x1+(1-θ)*x2)=Σ(|θ*x1+(1-θ)*x2|[i])

≤Σ((θ*|x1|+(1-θ)*|x2|)[i])

≤θ*Σ(|x1|[i])+(1-θ)*Σ(|x2|[i])

= θ*f(x1)+(1-θ)*f(x2)