18308045 谷正阳 hw8

练习* 8.2 设$S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$，(1) 使用S中的数字能构成多少个三位数？(2) 其中有多少三位数字各不相同的数？(3) 有多少奇数？(4) 有多少三位数字各不相同的奇数？(5) 有多少三位数字各不相同的偶数？

(1)
$\because$ 第1个数字有除去0的6种可能，后2个数字都有7种可能，选3数字相互独立
$\therefore 6 \times 7 \times 7 = 294$
(2)
$\because$
第1个数字有除去0的6种可能，第2个数字有除去第一个数字的6种可能，第3个数字有除去前2个数字的5种可能，选3数字且相互独立
$\therefore 6 \times 6 \times 5 = 180$
(3)
$\because$ 第3个数字有奇数的3种可能，第1个数字有除去0的6种可能，第2个数字有7种可能，选3数字相互独立
$3 \times 6 \times 7 = 126$
(4)
$\because$
第3个数字有奇数的3种可能，第1个数字有除去0和第3个数字的5种可能，第2个数字有除去第1个数字和第3个数字的5种可能，选3数
$3 \times 5 \times 5 = 75$
(5)
$\because$ 若第3个数字为0，则第1个数字有除去0的6种选择，第2个数字有除去第1个数字和0的5种选择，选前2数字相互独立
$\therefore 6 \times 5 = 30$
$\because$
若第3个数字非0偶数，则第3个数字有3种可能，第1个数字有除去0和第3个数字的5种可能，第2个数字有除去第1个数字和第3个数字
$\therefore 3 \times 5 \times 5 = 75$
$\because$ 有且仅有以上两种情况
$\therefore 30 + 75 = 105$

练习* 8.5 某计算机学院有计算机系统专业20名学生，其中男女学生各10名，计算机软件专业30名学生，其中男女学生各15名，计算机应用专业40名学生，其中男女学生各20名。现在要推选一位学生任学生会主席，一位任副主席，要求主席和副主席必须来自不同专业，且性别也不同，试问有多少种推选方法？

$\because$ 若主席是计算机系统专业男生则副主席是其他专业女生
$\therefore 10 \times (15 + 20) = 350$
$\because$ 若主席是计算机系统专业女生则副主席是其他专业男生
$\therefore 10 \times (15 + 20) = 350$
$\because$ 若主席是计算机软件专业男生则副主席是其他专业女生
$\therefore 15 \times (10 + 20) = 450$
$\because$ 若主席是计算机软件专业女生则副主席是其他专业男生
$\therefore 15 \times (10 + 20) = 450$
$\because$ 若主席是计算机应用专业男生则副主席是其他专业女生
$\therefore 20 \times (10 + 15) = 500$
$\because$ 若主席是计算机应用专业女生则副主席是其他专业男生
$\therefore 20 \times (10 + 15) = 500$
$\because$ 有且仅有以上几种情况
$\therefore 350 + 350 + 450 + 450 + 500 + 500 = 2600$

练习* 8.14 对一个有50人的初中班对四大名著的喜欢情况进行了调查，发现每个人都至少喜欢一本名著，且其中32人喜欢西游记，28人喜欢水浒传，24人喜欢三国演义，6人喜欢红楼梦。20人同时喜欢西游记和水浒传，18人同时喜欢西游记和三国演义，8人同时喜欢西游记、水浒传以及三国演义。奇怪的是喜欢红楼梦的同学对西游记、水浒传和三国演义都不喜欢。问只喜欢西游记、只喜欢水浒传、只喜欢三国演义及只喜欢红楼梦的同学各有几人？

设喜欢西游记的人的集合为A，喜欢水浒传的人的集合为B，喜欢喜欢三国演义的人的集合为C，喜欢红楼梦的人的集合为D

$\therefore |A\cup B\cup C\cup D|=50$，$|A|=32$，$|B|=28$，$|C|=24$，$|D|=6$，$|A\cap B|=20$，$|A\cap C|=18$，$|A\cap B\cap C|=8$，$A\cap D=\varnothing$，$B\cap D=\varnothing$，$C\cap D=\varnothing$

$$\therefore \begin{aligned}|A\cup B\cup C\cup D|&=|A\cup B\cup C|+|D|-|(A\cup B\cup C)\cap D|\\&=|A\cup B\cup C|+|D|\\&=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|+|D|\end{aligned}$$

$\therefore 50=32+28+24-20-18-|B\cap C|+8+6$

$\therefore |B\cap C|=10$

$$\therefore \begin{aligned}|A-B-C-D|&=|A-B-C|-|(A-B-C)\cap D|\\&=|A-B-C|-|A\cap D-B-C|\\&=|A-B|-|(A-B)\cap C|-(|A\cap D-B|-|(A\cap D-B)\cap C|)\\&=|A-B|-|A\cap C-B|-|A\cap D-B|+|A\cap C\cap D-B|\\&=|A|-|A\cap B|-(|A\cap C|-|A\cap B\cap C|)-(|A\cap D|-|A\cap B\cap D|)+|A\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|\\&=|A|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|-|A\cap D|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|\\&=32-20-18-0+8+0+0-0\\&=2\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{aligned}|B-A-C-D|&=|B|-|B\cap A|-|B\cap C|+|B\cap A\cap C|-|B\cap D|+|B\cap A\cap D|+|B\cap C\cap D|-|B\cap A\cap C\cap D|\\&=28-20-10-0+8+0+0-0\\&=6\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{aligned}|C-A-B-D|&=|C|-|C\cap A|-|C\cap B|+|C\cap A\cap B|-|C\cap D|+|C\cap A\cap D|+|C\cap B\cap D|-|C\cap A\cap B\cap D|\\&=24-18-10-0+8+0+0-0\\&=4\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{aligned}|D-A-B-C|&=|D|-|D\cap A|-|D\cap B|+|D\cap A\cap B|-|D\cap C|+|D\cap A\cap C|+|D\cap B\cap C|-|D\cap A\cap B\cap C|\\&=6\end{aligned}$$

练习* 8.16 一位围棋职业棋手有11周时间准备围棋世界大赛，他决定每天至少下一盘棋，但为了不使自己过于疲劳还决定每周下棋最多12盘。证明存在连续若干天，期间他恰好下了21盘棋。

设第i天累计下了a_i盘棋。

$\therefore 1\le a_1<a_2<\cdots<a_{77}\le 132$

$\therefore 1\le a_1<a_2<\cdots<a_{77}\le 132$

$\therefore 1\le a_1,a_2,\cdots,a_{77},a_1+21,a_2+21,\cdots,a_{77}+21\le 153$

$\therefore \exists i,j\in\mathbb{N}^+$使$a_i=a_j+21$

$\therefore$ 得证

练习* 8.22 在长度为8的二进制串中，有多少恰好含有5个0？有多少至少含有5个0？又有多少至多含有5个0？编写计算机程序验证你的计数结果。

$\because$ 恰好i个0：C_8^i

$\therefore$ 恰好5个0：C_8^5

$\therefore$ 至少5个0：$\sum_{i=5}^{8}C_8^i$

$\therefore$ 至多5个0：$\sum_{i=0}^{5}C_8^i$

练习* 8.25 英文小写字母有5个元音字母和21个辅音字母，在长度为8的英文小写字母串中：(1) 有多少含有元音字母的串？(2) 有多少含有元音字母且没有重复字母的串？(3) 有多少含有至少两个元音字母的串？(4) 有多少含有至少两个元音字母且没有重复字母的串？

(1)
$\because$ 总共26^8种，没有元音即只有辅音21^8种
$\therefore 26^8-21^8$
(2)
$\because$ 总共P_{26}^8种，没有元音即只有辅音P_{21}^8种
$\therefore P_{26}^8-P_{21}^8$
(3)
$\because$ 只有一个元音$C_8^7\cdot 21^7\cdot 5$种
$\therefore 26^8-21^8-C_8^7\cdot 21^7\cdot 5$
(4)
$\because$ 只有一个元音$C_8^7\cdot P_{21}^7\cdot 5$种
$\therefore P_{26}^8-P_{21}^8-C_8^7\cdot P_{21}^7\cdot 5$

练习* 8.27 分别给出下面组合等式的代数证明和组合证明：设n,r是自然数，$1\le r<n$，

$$r\binom{n}{r}=n\binom{n-1}{r-1}$$

代数证明：
$\because rC_n^r=r\frac{n!}{(n-r)!r!}=n\frac{(n-1)!}{(n-1-(r-1))!(r-1)!}=nC_{n-1}^{r-1}$
组合证明：
从n个人中选$r-1$个副班长和1个班长。
一种选法是先从n个人选r个人，再从中选出1个作班长，剩下的是副班长，共rC_n^r种
一种选法是先从n个人选1个人作班长，再从剩下$n-1$个人选$r-1$个人副班长，共nC_{n-1}^{r-1}种

练习* 8.34 使用数学归纳法证明下面两个等式。

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m+k}{k}=\binom{m}{0}+\binom{m+1}{1}+\cdots+\binom{m+r}{m}=\binom{m+r+1}{r}$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{0}{m}+\binom{1}{m}+\cdots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

归纳基：
$r=0$时，$\forall m\in\mathbb{N}$，$\sum_{k=0}^{0}C_{m+k}^{k}=C_m^0=1=C_{m+0+1}^0$，归纳假设成立
归纳步：
$\forall i\in\mathbb{N}$，若$r=i$时归纳假设成立
$r=i+1$时，$\forall m\in\mathbb{N}$，$\sum_{k=0}^{i+1}C_{m+k}^{k}=\sum_{k=0}^{i}C_{m+k}^{k}+C_{m+i+1}^{i+1}=C_{m+i+1}^{i}+C_{m+i+1}^{i+1}=C_{m+i+1+1}^{i+1}$，归纳假设成立
综上：
得证

归纳基：
$n=0$时，$\forall m\in\mathbb{N}$，$\sum_{k=0}^{0}C_k^m=C_0^m=\begin{cases}0, & m>0\\ 1, & m=0\end{cases}=C_1^{m+1}$，归纳假设成立
归纳步：
$\forall i\in\mathbb{N}$，若$n=i$时归纳假设成立
$n=i+1$时，$\forall m\in\mathbb{N}$，$\sum_{k=0}^{i+1}C_k^m=C_{i+1}^{m+1}+C_{i+1}^{m}=\begin{cases}0, & i+1<m\\ C_{i+1+1}^{m+1}, & i+1\ge m\end{cases}=C_{i+1+1}^{m+1}$，归纳假设成立
综上：
得证

练习* 8.35 单词$MISSISSIPPI$包含的字母能构成多少个不同的大写字母串？

$\because$ 有且仅有1个M，4个I，4个S，2个P
$\therefore \frac{11!}{1!\cdot4!\cdot4!\cdot2!}$

练习* 8.39 水果店中有很多苹果、梨子、橙子和桃子，请问：(1) 从中选10个水果的方法有多少种？(2) 从中选10个水果且每种水果至少有一个的方法有多少种？(3) 从中选10个水果且至少有4个苹果的方法有多少种？(4) 从中选10个水果且至多有1个苹果的方法有多少种？

设苹果x_1个，梨x_2个，橙子x_3个，桃子x_4个，$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$
(1)
$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$的自然数解个数
$\therefore C_{13}^3$
(2)
$\therefore (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 6$的自然数解个数
$\therefore C_9^3$
(3)
$\therefore (x_1 - 4) + x_2 + x_3 + x_4 = 6$的自然数解个数
$\therefore C_9^3$
(4)
设全集U为全部情况，集合A为至少有2个苹果的全部情况
$\therefore |U| = C_{13}^3$，$|A| = C_{11}^3$
$\therefore |\overline{A}| = |U| - |A| = C_{13}^3 - C_{11}^3$

练习* 8.42 不定方程$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$的非负整数解中，(1) 有多少解满足$x_1 \geq 3$? (2) 有多少解满足$x_1 \leq 5$? (3) 有多少解满足$2 \leq x_1 \leq 6, 1 \leq x_2 \leq 4$且$x_3 \geq 5$?

(1)
$\therefore (x_1 - 3) + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$的自然数解个数
$\therefore C_{21}^4$
(2)
设全集U为全部情况，A为$x_1 \geq 6$的全部情况
$\therefore |U| = C_{24}^4$，$|A| = C_{18}^4$
$\therefore |\overline{A}| = |U| - |A| = C_{24}^4 - C_{18}^4$
(3)
设全集U为$x_1 \geq 2$且$x_2 \geq 1$且$x_3 \geq 5$的全部情况
设A为$x_1 \geq 7$且$x_2 \geq 1$且$x_3 \geq 5$的全部情况
设B为$x_2 \geq 5$且$x_1 \geq 2$且$x_3 \geq 5$的全部情况
$\therefore |U| = C_{16}^4$，$|A| = C_{11}^4$，$|B| = C_{12}^4$，$|A \cap B| = C_7^4$
$\therefore |\overline{A} \cap \overline{B}| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B| = C_{16}^4 - C_{11}^4 - C_{12}^4 + C_7^4$

练习* 8.46 对于下面的每个数字串，假设集合S是包含数字串中所有数字的集合，给出算法8.1分别以该数字串为输入时的输出结果，也即在生成S的全排列时，下面数字串的下一个串。

(1) 31425　　(2) 152643　　(3) 34287651　　(4) 459138672

(1)
31425是以3142为前缀的最大串，它的覆盖是以3145为前缀后缀递增，即31452
(2)
152643是以152为前缀的最大串，它的覆盖是以153为前缀后缀递增，即153246
(3)
34287651是以342为前缀的最大串，它的覆盖是以345为前缀后缀递增，即34512678
(4)
459138672是以4591386为前缀的最大串，它的覆盖是以4591387为前缀后缀递增，即459138726

练习* 8.49 给出长度为n且不含有连续两个0的二进制串个数的递推关系式。

设其个数a_n
$\therefore$ 若结尾是1则有a_{n-1}种，若结尾是0则倒数第二个一定是1则有a_{n-2}种
$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

练习* 8.55 给出长度为n且不含有连续两个相同数字的三进制串个数的递推关系式。

设其个数a_n
$\therefore$ 若倒数第二个是0则结尾是1或2，若倒数第二个是1则结尾是0或2，若倒数第二个是2则结尾是0或1
$\therefore a_n = 2a_{n-1}$

练习* 8.59 给定初始条件$a_0 = 3, a_1 = 6$且$a_2 = 0$，求解递推关系式$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$。

$\because$ 三阶线性齐次
$\therefore x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2) = (x-1)(x+1)(x-2) = 0$有1，$-1$，2重数均为1的根
$\therefore a_n = c_1 1^n + c_2(-1)^n + c_3 2^n$
$\because a_0 = c_1 + c_2 + c_3 = 3$，$a_1 = c_1 - c_2 + 2c_3 = 6$，$a_2 = c_1 + c_2 + 4c_3 = 0$
$\therefore c_1 = 6$，$c_2 = -2$，$c_3 = -1$
$\therefore a_n = 6 - 2(-1)^n - 2^n$

练习* 8.61 给定初始条件$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1$，求解问题8.44给出的递推关系式$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$。

$\because$ 二阶线性非齐次
$\therefore x^2 - x - 1 = 0$的解$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$和$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$重数均为1
$\therefore a_n^{(h)} = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$
$\therefore a_n^{(p)} = p_0 2^n$
$\therefore a_n^{(h)} = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + p_0 2^n$
$\therefore a_0 = c_1 + c_2 + p_0 = 0$，$a_1 = \frac{(1+\sqrt{5})c_1 + (1-\sqrt{5})c_2}{2} + 2p_0 = 0$，$a_2 = \frac{(3+\sqrt{5})c_1 + (3-\sqrt{5})c_2}{2} + 4p_0 = 1$
$\therefore c_1 = \frac{-3\sqrt{5}-5}{10}$，$c_2 = \frac{3\sqrt{5}-5}{10}$，$p_0 = 1$

练习* 8.66 使用分治策略设计计算x^n的算法，这里x是实数，n是非负整数。给出该算法效率分析的递推关系式，并给出它的一个大O估计。

（1）纯分治
python：

```
def power(x, n):
    if n == 0:
        return 0
    if n == 1:
        return x
    return power(x, int(n / 2)) * power(x, n - int(n / 2))
```

伪代码：

```
power(x, n)
如果n == 0，返回0
如果n == 1，返回x
否则，n1 = n / 2取整数部分，返回power(x, n1) * power(x, n - n1)
```

$f(n) = 2f(n/2) + C$
$\because 2 > 2^0$
$\therefore O(n)$

（2）分治+动态规划
python：

```python
def power(x, n, table=dict()):
    if n == 0:
        return 0
    if n == 1:
        return x
    if table.get(int(n / 2)) is None:
        table[int(n / 2)] = power(x, int(n / 2), table)
    if table.get(n - int(n / 2)) is None:
        table[n - int(n / 2)] = power(x, n - int(n / 2), table)
    return table[int(n / 2)] * table[n - int(n / 2)]
```

伪代码：

```
table初始化为全0数组
power(x, n, table):
    如果n == 0，返回0
    如果n == 1，返回x
    若则，n1 = n / 2取整数部分
        如果table[n1] == 0，table[n1] = power(x, n1, table)
        如果table[n - n1] == 0，table[n - n1] = power(x, n - n1), table)
        返回table[n1] * table[n - n1]
```

$f(n) = f(n/2) + C$
$\because 1 = 2^0$
$\therefore O(\log n)$