18308045_谷正阳_hw7

练习* 7.5 设$f: A\to B$是函数，且S是B上关系，在A上定义关系R：

$$R=\{(x,y)\in A\times A \mid (f(x),f(y))\in S\}$$

证明：(1) 若S是自反关系，则R也是自反关系；(2) 若S是对称关系，则R也是对称关系；(3) 若S是传递关系，则R也是传递关系。

(1)

$$\begin{aligned}
&\because \forall x\in A，\ f(x)\in B\\
\text{又}&\because S\text{是}B\text{上自反关系}\\
&\therefore \langle f(x),f(x)\rangle\in S\\
&\therefore \langle x,x\rangle\in R\\
&\therefore R\text{是自反关系}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\forall x,y\in A，\text{若}\langle x,y\rangle\in R\\
&\therefore \langle f(x),f(y)\rangle\in S\\
&\because S\text{是}B\text{上对称关系}\\
&\therefore \langle f(y),f(x)\rangle\in B\\
&\therefore \langle y,x\rangle\in R\\
&\therefore R\text{是对称关系}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&\forall x,y,z\in A，\text{若}\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in R\\
&\therefore \langle f(x),f(y)\rangle,\langle f(y),f(z)\rangle\in S\\
&\because S\text{是}B\text{上传递关系}\\
&\therefore \langle f(x),f(z)\rangle\in S\\
&\therefore \langle x,z\rangle\in R\\
&\therefore R\text{是传递关系}
\end{aligned}$$

练习* 7.8 判断下面给出的实数集上的函数是否是单函数、满函数或双函数。

(1) $f_1(x)=2x^2+1$ (2) $f_2(x)=3x^3+2$

(3) $f_3(x)=\lfloor (x+1)/2\rfloor$ (4) $f_4(x)=(x^2+1)/(x^2+3)$

(1)

$$\begin{aligned}
&\text{不是单函数，不是满函数，不是双函数}\\
&\because f_1(-1)=3=f_1(1)\\
&\therefore -1\neq 1\to f_1(-1)\neq f_1(1)\text{为假}\\
&\therefore \text{不是单函数}\\
&\because \forall x\in\mathbb{R}，\ 2x^2+1\geq 1\\
&\therefore \exists 0\in R，\text{使}\exists x\in R(f_1(x)=0)\text{为假}\\
&\therefore \text{不是满函数}\\
&\therefore \text{不是双函数}
\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\text{是单函数，是满函数，是双函数}\\
&\because f_2'(x)=9x^2\geq 0\text{（当且仅当}x=0\text{时，}f_2'(x)=0\text{）}\\
&\therefore f_2(x)\text{严格单调递增，即}\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\text{，若}x_1<x_2\text{则}f_2(x_1)<f_2(x_2)\\
&\therefore\text{是单函数}\\
&\because\forall y\in\mathbb{R}\text{，}\exists x=\sqrt[3]{\frac{y-2}{3}}\in\mathbb{R}\text{，使}f_2(x)=y\\
&\therefore\text{是满函数}\\
&\therefore\text{是双函数}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\text{不是单函数，不是满函数，不是双函数}\\
&\because f_3(0)=0=f_3(-1)\\
&\therefore 0\neq -1\rightarrow f_3(0)\neq f_3(-1)\text{为假}\\
&\therefore\text{不是单函数}\\
&\because\forall x\in\mathbb{R}\text{，}\lfloor (x+1)/2\rfloor\in Z\\
&\therefore\exists 0.5\in R\text{，使}\exists x\in R(f_3(x)=0.5)\text{为假}\\
&\therefore\text{不是满函数}\\
&\therefore\text{不是双函数}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&\text{不是单函数，不是满函数，不是双函数}\\
&\because f_4(1)=\frac{1}{2}=f_4(-1)\\
&\therefore 1\neq -1\rightarrow f_4(1)\neq f_4(-1)\text{为假}\\
&\therefore\text{不是单函数}\\
&\because\forall x\in\mathbb{R}\text{，}\frac{x^2+1}{x^2+3}>0\\
&\therefore\exists -1\in R\text{，使}\exists x\in R(f_4(x)=-1)\text{为假}\\
&\therefore\text{不是满函数}\\
&\therefore\text{不是双函数}
\end{aligned}
$$

练习* 7.13 设$f:A\rightarrow B$和$g:B\rightarrow C$是函数，证明：
(1) 如果$g\circ f$是单函数，则f是单函数，但g不一定是单函数；
(2) 如果$g\circ f$是满函数，则g是满函数，但f不一定是满函数；
(3) 如果$g\circ f$是双函数，则f是单函数且g是满函数。

(1)

$$
\begin{aligned}
&\text{考虑}A=\varnothing\text{，}B=\{0,1\}\text{，}C=\{0\}\text{，}f=\varnothing\text{，}g=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\}\\
&\therefore f\text{是单函数，}g\circ f=\varnothing\text{是单函数，}0\neq 1\rightarrow g(0)\neq g(1)\text{为假即}g\text{不是单函数}\\
&\therefore\text{得证}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\text{考虑}A=\{0\}\text{，}B=\{0,1\}\text{，}C=\{0\}\text{，}f=\{\langle 0,0\rangle\}\text{，}g=\{\langle 0,0\rangle\}\\
&\therefore\forall z\in C\text{即}z=0\text{，}\exists y=0\text{使}g(y)=z\text{，且}\exists x=0\text{使}g(f(x))=0\\
&\therefore g\text{，}g\circ f\text{是满函数}\\
&\because\exists y=1\text{，使}\exists x\in A(f(x)=y)\text{为假}\\
&\therefore f\text{不是满函数}\\
&\therefore\text{得证}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\forall x, y \in A\text{，若}x \neq y \\
&\because g \circ f\text{是双函数} \\
&\therefore g(f(x)) \neq g(f(y)) \\
&\because g\text{是函数} \\
&\text{若}f(x) = f(y) \\
&\therefore g(f(x)) = g(f(y))\text{（矛盾）} \\
&\therefore f(x) \neq f(y) \\
&\therefore f\text{是单函数} \\
&\forall z \in C \\
&\because g \circ f\text{是双函数} \\
&\therefore \exists x \in A\text{，使}g(f(x)) = z \\
&\therefore \exists f(x) \in B\text{，使}g(f(x)) = z \\
&\therefore g\text{是满函数}
\end{aligned}
$$

练习* 7.20 设A, B, C, D都是集合，证明：若A与C等势，B与D等势，且$A \cap B = C \cap D = \varnothing$，则$A \cup B$与$C \cup D$等势。

$\because A$与C等势，B与D等势

$\therefore \exists f: A \to C, g: B \to D$是双函数

设$h: A \cup B \to C \cup D$

$\because A \cap B = C \cap D = \varnothing$

$\therefore A \cup B - B$

$=(A \cup B) \cap \overline{B}$//集合差等式

$=(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})$//分配律

$=(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{A})$//矛盾律，同一律

$=A \cap \overline{(A \cap B)}$//分配律，交换律，德摩尔根律

$=A // A \cap B = \varnothing$，同一律

$$h(x) = \begin{cases} f(x), x \in A \\ g(x), x \in B \end{cases}$$

$\forall x, y \in A \cup B$

若$x, y \in A$

$\because f$是双函数

$\therefore f(x) \neq f(y)$

若$x, y \in B$

$\because g$是双函数

$\therefore g(x) \neq g(y)$

若x，y一个属于A，一个属于B，不妨设$x \in A$，$y \in B$

$\because C \cap D = \varnothing$

$\therefore f(x) \in C \neq g(y) \in D$

综上，$h(x) \neq h(y)$

$\therefore h$是单函数

$\forall y \in C \cup D$

$\therefore y \in C$或$y \in D$

若$y \in C$

$\because f$是双函数

$\therefore \exists x \in A$，使$f(x) = y$

若$y \in D$

$\because g$是双函数

$\therefore \exists x \in B$，使$g(x) = y$

综上，$\exists x \in A \cup B$，使$h(x) = y$

$\therefore h$是满函数

$\therefore h$是双函数

$\therefore A \cup B$与$C \cup D$等势

练习* 7.29 证明函数$f(x) = (x^3 + 2x + 1)/(x + 1)$是$O(x^2)$，但不是$O(x)$。

$\because x+1>x$

$\therefore x>0$时，$\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{a}$

$\therefore x>0$时，$\left|\dfrac{x^3+2x+1}{x+1}\right|=\dfrac{x^3+2x+1}{x+1}<\dfrac{x^3+2x+1}{x}=x^2+2+\dfrac{1}{x}$

$\because x>1+\sqrt{2}$时，$2x+1<x^2$且$x<x^2$

$\therefore 2+\dfrac{1}{x}<x<x^2$

$\therefore x^2+2+\dfrac{1}{x}<2x^2=2|x^2|$

$\therefore$是$O(x^2)$

若是$O(x)$，即$\exists C>0$，$k\in R$，使$x>k$时，$\left|\dfrac{x^3+2x+1}{x+1}\right|<C|x|$

$\therefore x>k$且$x>0$时，$x^3+2x+1<C(x^2+x)$

$\because x>k$且$x>0$且$x>2C$且$x>1$时，$x^3+2x+1>C(2x^2+4+\dfrac{1}{C})=C(x^2+x^2+4+\dfrac{1}{C})$

$>C(x^2+x+4+\dfrac{1}{C})>C(x^2+x)$（矛盾）

$\therefore$不是$O(x)$

练习* 7.33 使用最小的n给出下面实数集上函数的$O(x^n)$的估计。

(1) $f(x)=2x^3+x^2\log x$ (2) $3x^3+(\log x)^4$

(3) $(x^4+x^2+1)/(x^3+1)$ (4) $(x^5+5(\log x)^2)/(x^3+x\log x)$

(1)

$\because 2x^3=O(x^3)$，$x^2\log x=O(x^3)$

$\therefore O(f(x))=O(x^3)$

$\because \forall C>0,k\in R$，$x>k$且$x>C$且$x>1$时，$f(x)>2Cx^2>C|x^2|$

$\therefore n=3$

(2)

法一：没用洛必达法则：

设$m>0$

$\therefore (\log x-mx^{3/4})'$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{3m}{4}x^{1/4}$

$\therefore$当$x>1$且$x>(\dfrac{4}{3m})^4$时，$\dfrac{1}{x}<1<\dfrac{3m}{4}x^{1/4}$

$\therefore (\log x-mx^{3/4})'<0$

$\because x=e^m$时，$\log x-mx^{3/4}=m-me^{3m/4}<0$

$\therefore x>e^m$时，$\log x<mx^{3/4}$

$\therefore \exists C=m^4+3>0,k=e^m$，使$x>k$时，$|3x^3+(\log x)^4|<C|x^3|$

$\therefore 3x^3+(\log x)^4=O(x^3)$

$\because \forall C>0,k\in\mathbb{R}$，有$x>k$且$x>1$且$x>C$时，$3x^3+(\log x)^4>3Cx^2>C|x^2|$

$\therefore n=3$

法二：用了洛必达法则：

$\because \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\log x)^4}{x^3}$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4(\log x)^3}{3x^3} // \dfrac{\infty}{\infty}$型，洛必达法则
$= \dfrac{4}{3}\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{x}\right)^3$
$=0$
$\therefore$由极限定义，$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$，使$x > M$时，$\left|\dfrac{(\log x)^4}{x^3}\right| < \epsilon$
$\therefore \exists C > 0, k \in R$，使当$x > k$时$|(\log x)^4| < C|x^3|$
$\therefore (\log x)^4 = O(x^3)$
$\because 3x^3 = O(x^3)$
$\therefore 3x^3 + (\log x)^4 = O(x^3)$
$\because \forall C > 0, k \in \mathbb{R}$，有$x > k$且$x > 1$且$x > C$时，$3x^3 + (\log x)^4 > 3Cx^2 > C|x^2|$
$\therefore n = 3$

(3)

$\because x^4 + x^2 + 1 = O(x^4)$，$x^3 + 1 = O(x^3)$
$\therefore \dfrac{(x^4 + x^2 + 1)}{x^3 + 1} = O(x)$
$\because \forall C > 0, k \in \mathbb{R}$，都有$x > k$且$x > 1$且$x > C$时，$x^4 + x^2 + 1 > x^4 + 1 > Cx^3 + 1$
$\therefore \dfrac{(x^4 + x^2 + 1)}{x^3 + 1} \neq O(1)$
$\therefore n = 1$

(4)

$\because x^5 = O(x^5)$，$5(\log x)^2 = O(x^5)$
$\therefore x^5 + 5(\log x)^2 = O(x^5)$
$\because x^3 = O(x^3)$，$x \log x = O(x^3)$
$\therefore x^3 + x \log x = O(x^3)$
$\therefore \dfrac{x^5 + 5(\log x)^2}{x^3 + x \log x} = O(x^2)$
$\because \forall C > 0, k \in \mathbb{R}$，都有$x > k$且$x > 1$且$x > 2C$时，$x^5 + 5(\log x)^2 > x^5 > 2Cx^4 > C|x^4 + x^2 \log x|$
$\therefore n = 2$

练习* 7.39 设计一个算法从一组整数$a_1, a_2, \cdots, a_n, n \geq 2$中找出第二大的整数，即$a_1, a_2, \cdots, a_n$中有且只有一个整数大于等于它，确定算法的输入规模、基本操作，执行次数最多的基本操作，分析该基本操作与输入规模的函数关系，最后给出最坏情况下的算法复杂度的大O估计。

输入：一组整数a[1],a[2],...,a[n],n<=2
输出：这组整数中第二大的整数

```
max_1st_i = 1
i = 2
while i <= n:
    if a[i] > a[max_1st_i]:
        max_1st_i = i
    i += 1
max_2nd_i = 1
if max_1st_i == 1:
    max_2nd_i = 2
i = max_2nd_i + 1
while i <= n:
    if max_2nd_i == max_1st_i:
        continue
    if a[i] > a[max_2nd_i]:
        max_2nd_i = i
    i += 1
return a[max_2nd_i]
```

输入规模：n
基本操作：两个 `while` 内的判断和赋值操作以及while外部的判断、赋值、运算和返回操作。
执行次数最多的操作：第一个 `while` 中 `i += 1`
与输入规模的函数关系：n-1
最坏情况下的算法复杂度：O(n)