18308045_谷正阳_hw6

练习* 6.5 设集合$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，定义集合A上的关系R:

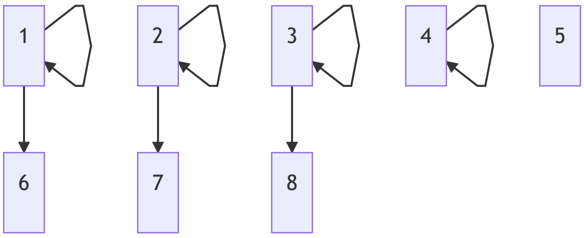
$$R = \{\langle a,b\rangle \in A\times A \mid a \equiv b (\bmod 5)\}$$

使用元素枚举法给出R，并给出它的关系图和关系矩阵。

(1)枚举法:

$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,7\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,8\rangle, \langle 4,4\rangle\}$

(2)关系图:



(3)关系矩阵:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

练习* 6.7 定义实数集$\mathbb{R}$上的关系:

$$R_1 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \le y\} \qquad R_2 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x < y\}$$
$$R_3 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x = y\} \qquad R_4 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \ne y\}$$

计算R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1\circ R_2$, $R_2\circ R_1$, $R_2\circ R_3$, $R_2\circ R_4$。

$\because$ 任意$\langle x,y\rangle \in R_1^{-1}$当且仅当$\langle y,x\rangle \in R_1$即$y \le x$
$\therefore R_1^{-1} = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} | y \le x\}$

$\because$ 任意$\langle x,y\rangle \in R_2^{-1}$当且仅当$\langle y,x\rangle \in R_2$即$y < x$
$\therefore R_2^{-1} = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} | y < x\}$

$\because$ 任意$\langle x,y\rangle \in R_1\circ R_2$当且仅当存在$z\in\mathbb{R}$，$\langle x,z\rangle \in R_2$且$\langle z,y\rangle \in R_1$即$x < z$且$z \le y$
$\because$ 若存在$z\in\mathbb{R}$，$x < z$且$z \le y$，则$x < y$
若$x < y$，则存在$z = \dfrac{x+y}{2}$使$x < z$且$z \le y$
$\therefore$ 任意$\langle x,y\rangle \in R_1\circ R_2$当且仅当$x < y$
$\therefore R_1\circ R_2 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} | x < y\}$

$\because$ 任意$\langle x,y\rangle \in R_2\circ R_1$当且仅当存在$z\in\mathbb{R}$，$\langle x,z\rangle \in R_1$且$\langle z,y\rangle \in R_2$即$x \le z$且$z < y$
$\because$ 若存在$z\in\mathbb{R}$，$x \le z$且$z < y$，则$x < y$
若$x < y$，则存在$z = \dfrac{x+y}{2}$使$x \le z$且$z < y$
$\therefore$ 任意$\langle x,y\rangle \in R_2\circ R_1$当且仅当$x < y$
$\therefore R_2\circ R_1 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} | x < y\}$

$\because$ 任意$\langle x,y\rangle \in R_2 \circ R_3$当且仅当存在$z \in \mathbb{R}$，$\langle x,z\rangle \in R_3$且$\langle z,y\rangle \in R_2$即$x = z$且$z < y$
$\because$ 若存在$z \in \mathbb{R}$，$x = z$且$z < y$，则$x < y$
若$x < y$，则存在$z = x$使$x = z$且$z < y$
$\therefore$ 任意$\langle x,y\rangle \in R_2 \circ R_3$当且仅当$x < y$
$\therefore R_2 \circ R_3 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x < y\}$

$\because$ 任意$\langle x,y\rangle \in R_2 \circ R_4$当且仅当存在$z \in \mathbb{R}$，$\langle x,z\rangle \in R_4$且$\langle z,y\rangle \in R_2$即$x \neq z$且$z < y$
$\because$ 若存在$z \in \mathbb{R}$，$x \neq z$且$z < y$，则$x \in \mathbb{R}$且$y \in \mathbb{R}$
若$x \in \mathbb{R}$且$y \in \mathbb{R}$，则存在$z = y - 1$或$z = y - 2$使$x \neq z$且$z < y$
$\therefore$ 任意$\langle x,y\rangle \in R_2 \circ R_4$当且仅当$x \in \mathbb{R}$且$y \in \mathbb{R}$
$\therefore R_2 \circ R_1 = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

练习* 6.8 设集合$A = \{1,2,3,4\}$，集合A上的关系$R = \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$，$S = \{\langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,4\rangle\}$。

(1) 基于关系的有序对集合表示计算$R \cup S$，$R \cap S$，$R - S$，R^{-1}，$R \circ S$和$S \circ R$；

(2) 基于关系的矩阵表示计算$R \cup S$，$R \cap S$，$R - S$，R^{-1}，$R \circ S$和$S \circ R$。

(1)

$\because$ 任意$\langle x,y\rangle \in R \cup S$当且仅当$\langle x,y\rangle \in R$或$\langle x,y\rangle \in S$
$\therefore R \cup S = \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}$

$\because$ 任意$\langle x,y\rangle \in R \cap S$当且仅当$\langle x,y\rangle \in R$且$\langle x,y\rangle \in S$
$\therefore R \cap S = \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle\}$

$\because$ 任意$\langle x,y\rangle \in R - S$当且仅当$\langle x,y\rangle \in R$且$\langle x,y\rangle \notin S$
$\therefore R - S = \{\langle 4,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$

$\because$ 任意$\langle x,y\rangle \in R^{-1}$当且仅当$\langle y,x\rangle \in R$
$\therefore R^{-1} = \{\langle 4,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

$\because$ 任意$\langle x,y\rangle \in R \circ S$当且仅当存在$z \in A$，$\langle x,z\rangle \in S$且$\langle z,y\rangle \in R$
$\therefore R \circ S = \{\langle 3,4\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$\because$ 任意$\langle x,y\rangle \in S \circ R$当且仅当存在$z \in A$，$\langle x,z\rangle \in R$且$\langle z,y\rangle \in S$
$\therefore S \circ R = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,2\rangle\}$

(2)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R \cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$\therefore R \cup S = \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}$

$$M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$\therefore R \cap S = \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle\}$

$$M_{R - S} = M_R \ominus M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$\therefore R - S = \{\langle 4,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$

$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore R^{-1} = \{\langle 4,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

$$M_{R\circ S} = M_S \odot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore R \circ S = \{\langle 3,4\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore S \circ R = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,2\rangle\}$

练习* 6.11 给出关系R, S, T的具体例子，说明$(T\circ R)\cap(T\circ S)$不一定是$T\circ(R\cap S)$的子集。

$R = \{\langle 0,2\rangle\}, S = \{\langle 0,3\rangle\}, T = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle\}$
$\therefore (T\circ R)\cap(T\circ S) = \{\langle 0,1\rangle\}$，$T\circ(R\cap S) = \varnothing$
$\therefore (T\circ R)\cap(T\circ S)$不是$T\circ(R\cap S)$的子集

练习* 6.17 设R和S是集合A上的关系。证明集合差运算保持关系的反自反性、对称性和反对称性，即：(1) 若R和S是反自反的，则$R-S$也是反自反的；(2) 若R和S是对称的，则$R-S$也是对称的；(3) 若R和S是反对称的，则$R-S$也是反对称的。

(1)

若R和S是反自反的
任意$x\in A$，$\langle x,x\rangle \in R-S$当且仅当$\langle x,x\rangle\in R$且$\langle x,x\rangle\notin S$
$\because R$反自反
$\therefore \langle x,x\rangle \notin R$
$\therefore \langle x,x\rangle \notin R-S$
$\therefore R-S$反自反

(2)

若R和S是对称的
任意$x,y\in A$，若$\langle x,y\rangle\in R-S$即$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle x,y\rangle\notin S$
$\because R$对称
$\therefore \langle y,x\rangle\in R$
若$\langle y,x\rangle\in S$
$\because S$对称
$\therefore \langle x,y\rangle \in R$(矛盾)
$\therefore \langle y,x\rangle\notin S$
$\therefore \langle y,x\rangle\in R-S$
$\therefore R-S$对称

(3)

若R和S是反对称的
任意$x,y\in A$，若$\langle x,y\rangle\in R-S$且$\langle y,x\rangle\in R-S$即$\langle x,y\rangle\in R$且$\langle x,y\rangle\notin S$且$\langle y,x\rangle\in R$且$\langle y,x\rangle\notin S$
$\because R$反对称
$\therefore x=y$
$\therefore R-S$反对称

练习* 6.18 设R和S是集合A上的关系。举例说明：(1) 若R和S是自反的，但$R-S$不一定是自反的；(2) 若R和S是传递的，但$R-S$不一定是传递的。

(1)

对于$A=R=S=\varnothing$易知必然有命题成立
$A=\{0\}$，$R=S=\{\langle 0,0\rangle\}$
$\therefore$ 任意$x\in A$即$x=0$，$\langle 0,0\rangle\in R$且$\langle 0,0\rangle\in S$
$\therefore R$和S对称
$\because R-S=\varnothing$
$\therefore \langle 0,0\rangle\notin R-S$
$\therefore R-S$不对称
综上，命题不一定成立

(2)

对于$A=R=S=\varnothing$易知必然有命题成立
$A=\{0,1,2\}$，$R=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,2\rangle\}$，$S=\{\langle 0,2\rangle\}$
$\therefore$ 对于命题任意$x,y,z\in A$，若$\langle x,z\rangle,\langle z,y\rangle\in R$，则$\langle x,y\rangle\in R$易得有唯一的$\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle\in R$满足前件且$\langle 0,2\rangle\in R$满足后件
$\therefore R$传递
$\therefore$ 对于命题任意$x,y,z\in A$，若$\langle x,z\rangle,\langle z,y\rangle\in S$，则$\langle x,y\rangle\in S$易得没有$x,y,z$使前件为真
$\therefore S$传递
$\because R-S=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$
$\therefore$ 对于命题任意$x,y,z\in A$，若$\langle x,z\rangle,\langle z,y\rangle\in R-S$，则$\langle x,y\rangle\in R-S$易得有唯一的$\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle\in R$满足前件且不存在$\langle 0,2\rangle\in I$
$\therefore R-S$不传递
综上，命题不一定成立

练习* 6.24 设R和S是集合A上的关系。证明：

(1) $r(R\cap S)=r(R)\cap r(S)$；

(2) $s(R\cap S)\subseteq s(R)\cap s(S)$，并举例说明不一定有$s(R)\cap s(S)\subseteq s(R\cap S)$（提示，注意有$s(\varnothing)=\varnothing$，即空关系的对称闭包仍是空关系，找到$R$和$S$的例子使得$s(R\cap S)=s(\varnothing)=\varnothing$，但$s(R)\cap s(S)\neq\varnothing$）

(3) $t(R\cap S)\subseteq t(R)\cap t(S)$，并举例说明不一定有$t(R)\cap t(S)\subseteq t(R\cap S)$（提示，同样有$t(\varnothing)=\varnothing$，找到$R$和$S$的例子使得$t(R\cap S)=t(\varnothing)=\varnothing$，但$t(R)\cap t(S)\neq\varnothing$）

(1)

$$\begin{aligned}r(R\cap S)&=(R\cap S)\cup\Delta_A\\&=(R\cup\Delta_A)\cap(S\cup\Delta_A)//\text{分配律}\\&=r(R)\cap r(S)\end{aligned}$$

(2)

$\because R\cap S\subseteq R\subseteq s(R)$且$s(R)$对称
$\therefore s(R\cap S)\subseteq s(R)$
同理$s(R\cap S)\subseteq s(S)$
$\therefore s(R\cap S)\subseteq s(R)\cap s(S)$
设$R=\{\langle 0,1\rangle\}$，$S=\{\langle 1,0\rangle\}$
$\therefore R\cap S=\varnothing$
$\therefore s(R\cap S)=s(\varnothing)=\varnothing$
$\because s(R)=R\cup R^{-1}=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle\}=S\cup S^{-1}=s(S)$
$\therefore s(R)\cap s(S)\neq\varnothing$
$\therefore s(R)\cap s(S)\nsubseteq s(R\cap S)$

(3)

$\because R\cap S\subseteq R\subseteq t(R)$且$t(R)$传递

$\therefore t(R\cap S)\subseteq t(R)$

同理$t(R\cap S)\subseteq t(S)$

$\therefore t(R\cap S)\subseteq t(R)\cap t(S)$

设$R=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$，$S=\{\langle 0,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

$\therefore R\cap S=\varnothing$

$\therefore t(R\cap S)=t(\varnothing)=\varnothing$

$\because t(R)=R^*=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,2\rangle\}$，$t(S)=S^*=\{\langle 0,3\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

$\therefore t(R)\cap t(S)\neq\varnothing$

$\therefore t(R)\cap t(S)\nsubseteq t(R\cap S)$

练习* 6.26 设集合$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 4,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,1\rangle\}$是集合$A$上的关系。

(1) 利用关系矩阵的逻辑积运算计算R的传递闭包；

(2) 利用Warshall算法计算R的传递闭包。

(1)

$$\because M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore M_R^{[2]}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},M_R^{[3]}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},M_R^{[4]}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore, M_{t(R)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore t(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

(2)

$$W_0=M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore W_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},W_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},W_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore, M_{t(R)}=W_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore t(R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle\}$

练习* 6.34 设$A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{\langle 0,0\rangle\}$，定义$A$上的关系$R$：$R=\{\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle\mid ad=bc\}$。证明$R$是等价关系，并分别给出$\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle$的等价类。

$\because$ 任意$x \in A$即任意$a, b \in \mathbb{Z}$且$x = \langle a, b\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$
$\because ab = ba$
$\therefore \langle x, x\rangle \in R$
$\therefore R$自反
$\because$ 任意$x, y \in A$即任意$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$且$x = \langle a, b\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$且$y = \langle c, d\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$，若$\langle x, y\rangle \in R$即$ad = bc$
$\therefore cb = da$即$\langle y, x\rangle \in R$
$\therefore R$对称
$\because$ 任意$x, y, z \in A$即任意$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$且$x = \langle a, b\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$且$y = \langle c, d\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$且$z = \langle e, f\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$，若$\langle x, y\rangle \in R$且$\langle y, z\rangle \in R$
$\therefore af = \dfrac{adcf}{cd} = \dfrac{bcde}{cd} = be$
$\therefore R$传递
$\therefore [\langle 1, 2\rangle]_R = \{x = \langle a, b\rangle \in A | \langle\langle 1, 2\rangle, \langle a, b\rangle\rangle \in R\} = \{x = \langle a, b\rangle \in A | b = 2a\}$
$\therefore [\langle 2, 1\rangle]_R = \{x = \langle a, b\rangle \in A | \langle\langle 2, 1\rangle, \langle a, b\rangle\rangle \in R\} = \{x = \langle a, b\rangle \in A | 2b = a\}$

练习* 6.40 设$A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，即实数对构成的集合。对于下面的每个由$A$的子集构成的集合族，判断它是否构成$A$ 的划分，如果是划分，给出这个划分所导出的等价关系。

(1) $\mathcal{F}_1$包括三个集合：x或y是正数的实数对$\langle x, y\rangle$集合；x是正数的实数对$\langle x, y\rangle$集合；和y是正数的实数对$\langle x, y\rangle$集合。

(2) $\mathcal{F}_2$包括三个集合：$x - y > 0$的实数对$\langle x, y\rangle$集合；$x - y < 0$的实数对$\langle x, y\rangle$集合；$x - y = 0$的实数对$\langle x, y\rangle$集合。

(3) $\mathcal{F}_3$包括三个集合：$xy > 0$的实数对$\langle x, y\rangle$集合；$xy < 0$的实数对$\langle x, y\rangle$集合；$xy = 0$的实数对$\langle x, y\rangle$集合。

(1)

$\because$ 存在$\langle 1, 0\rangle$属于第一个集合且属于第二个集合
$\therefore$ 不是划分

(2)

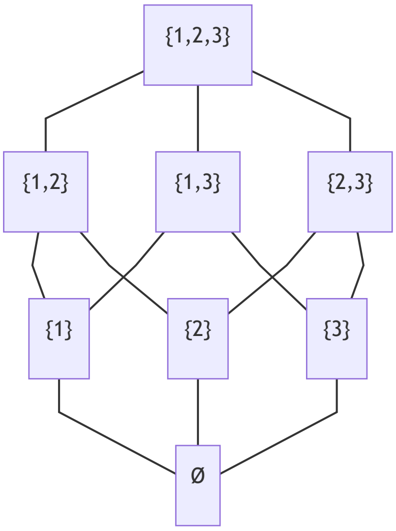
$\because x - y > 0$，$x - y < 0$，$x - y = 0$分别当且仅当$x > y$，$x < y$，$x = y$
$\because$ 任意$x, y \in \mathbb{R}$有且只有$x > y$，$x < y$，$x = y$三种情况
$\therefore$ 是划分
$\therefore$ 导出的关系R_F是$\langle x_1, y_1\rangle R_F \langle x_2, y_2\rangle$当且仅当
$(x1 < y1 \wedge x2 < y2)\vee$
$(x1 = y1 \wedge x2 = y2)\vee$
$(x1 > y1 \wedge x2 > y2)$

(3)

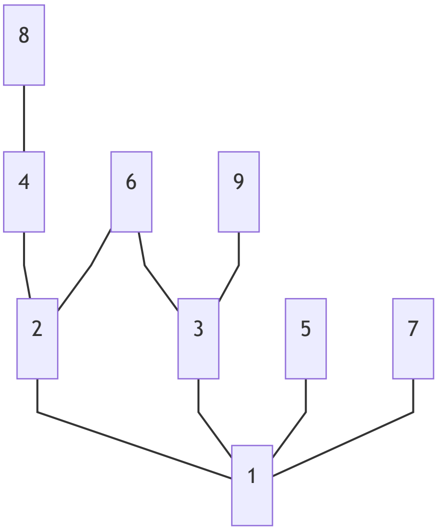
$\because xy > 0$，$xy < 0$，$xy = 0$分别当且仅当xy同号，xy异号，x, y至少一个0
$\because$ 任意$x, y \in \mathbb{R}$有且只有xy同号，xy异号，x, y至少一个0三种情况
$\therefore$ 是划分
$\therefore$ 导出的关系R_F是$\langle x_1, y_1\rangle R_F \langle x_2, y_2\rangle$当且仅当
$(x1 \cdot y1 > 0 \wedge x2 \cdot y2 > 0)\vee$
$(x1 \cdot y1 = 0 \wedge x2 \cdot y2 = 0)\vee$
$(x1 \cdot y1 < 0 \wedge x2 \cdot y2 < 0)$

练习* 6.42 画出下面偏序集的哈斯图：
(1) 偏序集$(A, \subseteq)$，这里$A = \wp(\{1, 2, 3\})$；
(2) 偏序集$(A, |)$，这里$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，而$|$是整除关系。

(1) $\because A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
$\therefore$ 哈斯图：



(2)



练习* 6.43 设A是54的所有正因子构成的集合，以整除关系构成偏序集$(A, |)$，给出$(A, |)$的所有极大元、极小元、最大元和最小元，以及子集$\{2,3,6\}$的上界、下界、上确界和下确界。

$\because A = \{1,2,3,6,9,18,27,54\}$

$\because$ 任意$x \in A$，$x|54$

$\therefore$ 极大元只有54且是最大元

$\because$ 任意$x \in A$，$1|x$

$\therefore$ 极小元只有1且是最小元

$\because$ 任意$x \in \{2,3,6\}$，有且仅有$x|6, x|18, x|54$

$\therefore$ 上界$6, 18, 54$

$\because$ 任意$x \in \{2,3,6\}$，有且仅有$1|x$

$\therefore$ 下界1

$\therefore$ 1是下确界

$\because 6|18$且$6|54$

$\therefore$ 6是上确界