(13) 证明: 形如 $4k+3$ 的素数有无穷多个.

$4k+3$ 即 $4(k+1)-1$

若有限多个，设分别为 $p_1, p_2, \ldots, p_n$

$\therefore x=4\prod_{i=1}^{n}p_i-1>p_n$ 不是形如 $4k-1$ 的素数.

$\therefore x$ 是合数

设 $x=\prod_{i=1}^{m}q_i$ (q_i 是质数)

$\because x\equiv 4\prod_{i=1}^{n}p_i-1\equiv(p_i-1)\bmod p_i$

且 $0<p_i-1<p_i$

$\therefore q_i\neq p_j$ ($i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$)

$\therefore q_i$ 不是形如 $4k-1$ 的素数

$\therefore q_i$ 是形如 $4k+1$ 的素数 (奇数有 $4k-1$, $4k+1$ 两种)

$\because (4a+1)(4b+1)=4(4ab+a+b)+1$

$\therefore$ 两个 $4k+1$ 的数乘积仍 $4k+1$

$\therefore x$ 是 $4k+1$ 的素数.

$\therefore x\equiv 1\bmod 4\neq -1\bmod 4$ (矛盾)

$\therefore$ 有无穷多个

(28) 求以下整数对的最大公因数:

① (55, 85). ② (202, 282).

① $85=1\cdot55+30$

$55=1\cdot30+25$

$30=1\cdot25+5$

$25=5\cdot25+0$

$\therefore 5$

② $282=1\cdot202+80$

$202=2\cdot80+42$

$80=1\cdot42+38$

$42=1\cdot38+4$

$38=9\cdot4+2$

$4=2\cdot2+0$

$\therefore 2$

(35) 设 a, b 是正整数. 证明: 若 $[a,b]=(a,b)$, 则 $a=b$.

$\because a \geqslant [a,b]=(a,b)\geqslant b$

$b \geqslant [a,b]=(a,b)\geqslant a$

$\therefore a=b$

(43) 证明: $g \mid c$ 的充要条件是对任意的 $p^\alpha \parallel g$ (p 为素数) 必有 $p^\alpha \mid c$, 这里 $p^\alpha \parallel g$ 表示 $p^\alpha \mid g$, $p^{\alpha+1} \nmid g$.

若 $g \mid c$

$\therefore \forall p^\alpha \mid g$ 有 $p^\alpha \mid c$

若 $\forall p^\alpha \parallel g$ 有 $p^\alpha \mid c$

设标准分解式 $g=\prod_{i=1} p_i^{\alpha_i}$

$\therefore p_i^{\alpha_i} \parallel g$

$\therefore p_i^{\alpha_i} \mid c$

$\therefore [\{p_i^{\alpha_i}\}] \mid c$

$\because (p_i^{\alpha_i}, p_j^{\alpha_j})=1 \quad (i\neq j)$

$\therefore g=[\{p_i^{\alpha_i}\}]$

综上, 得证.

(60) 求 $7x+4y=100$ 的整数解.

$\because \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=25 \end{cases}$ 是一组解

$\therefore$ 通解 $\begin{cases} x=0+\dfrac{4}{(7,4)}\cdot t = 4t \\ y=25-\dfrac{7}{(7,4)}\cdot t = 25-7t \end{cases} \quad (t\in Z)$