# Séquence 11 : Fractions

Objectifs :
- 4C24 : Utiliser les nombres premiers pour simplifier des fractions
- 4C22-1 : Multiplier des nombres relatifs en écriture fractionnaire
- 4C22-2 : Diviser des nombres relatifs en écriture fractionnaire
- 4C23 : Effectuer un calcul avec des nombres relatifs et fractionnaires

## I Simplifier des fractions

Propriété :

Un quotient ne change pas si on multiplie ou divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul (non nul = différent de zéro).
a, b et k désignent trois nombres relatifs avec b ≠ 0 et k ≠ 0.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemples :

$$\frac{2,5}{3} = \frac{2,5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{-56}{64} = \frac{-56 \div 8}{64 \div 8} = \frac{-7}{8}$$

Définition :

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction qui lui est égale mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Exemple :

Simplifier $\frac{63}{75}$ .

63 et 75 sont divisibles par 3.

On peut donc écrire $\frac{63}{75} = \frac{63 \div 3}{75 \div 3} = \frac{21}{25}$ .

Définition :

*a* et *b* désignent deux entiers relatifs avec $b \neq 0$.
On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si le seul diviseur positif commun à *a* et *b* est égal à 1.

Exemple :

$\frac{5}{8}$ est une fraction irréductible car le seul diviseur positif commun à 5 et 8 est 1.

Méthode :

Pour rendre une fraction irréductible, on peut, au choix :
- simplifier la fraction en plusieurs étapes, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus la simplifier ;
- décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers puis simplifier.

Exemple :

Rendre irréductible la fraction $\frac{24}{36}$ .

Méthode 1 : $\frac{24}{36} = \frac{24 \div 2}{36 \div 2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$

Méthode 2 : $\frac{24}{36} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 3} = \frac{2}{3}$

# II Calculer avec des fractions

## 1. Additionner et soustraire des fractions (rappels)

Propriété :

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions qui ont le même dénominateur :
- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs ;
- on garde le dénominateur commun,

a, b et c désignent trois nombres relatifs avec c ≠ 0.

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Exemples :

$A = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}$

$A = \frac{2+4}{5}$

$A = \frac{6}{5}$

« 2 cinquièmes + 4 cinquièmes = 6 cinquièmes »

$B = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}$

$B = \frac{7-5}{3}$

$B = \frac{2}{3}$

« 7 tiers – 5 tiers = 2 tiers »

Méthode :

Pour additionner ou soustraire deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les écrire avec le même dénominateur. Il faut donc chercher un multiple commun aux deux dénominateurs.

Exemple 1 :

$C = \frac{5}{2} + \frac{2}{3}$

$C = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$

$C = \frac{15}{6} + \frac{4}{6}$

$C = \frac{19}{6}$

Exemple 2 :

Calculer D = $\frac{3}{4} - \frac{11}{6}$

On aurait pu les écrire avec le même dénominateur 4 × 6 = 24, mais on peut aussi être plus malin et remarquer que 12 est à la fois dans la table de 4 et de 6 (et ainsi avoir des calculs plus simples)

D = $\frac{3}{4} - \frac{11}{6}$

D = $\frac{3\times3}{4\times3} - \frac{11\times2}{6\times2}$

D = $\frac{9}{12} - \frac{22}{12}$

D = $\frac{-13}{12}$

## 2. Multiplier des fractions

Propriété :

Pour multiplier une fraction par un nombre (en écriture décimale), on ne multiplie que le numérateur par ce nombre et on converse le dénominateur.

a, b et k désignent trois nombres avec b ≠ 0.

$k \times \frac{a}{b} = \frac{k\times a}{b}$

Exemple :

$-3 \times \frac{2}{7} = \frac{-3\times2}{7} = \frac{-6}{7}$

Propriété :

Pour multiplier deux fractions entre elles, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

a, b, c et d désignent quatre nombres avec b ≠ 0 et d ≠ 0.

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$

Exemple :

Alice a mangé les $\frac{3}{7}$ des $\frac{2}{5}$ d'une tarte aux pommes.

Quelle fraction de la tarte a-t-elle mangée ?

$\frac{3}{7}\times\frac{2}{5} = \frac{3\times2}{7\times5} = \frac{6}{35}$

Elle a mangé les $\frac{6}{35}$ de la tarte aux pommes.

## 3. Inverse d'un nombre non nul

Définition :

Dire que deux nombres relatifs sont inverses signifie que leur produit est égal à 1.

Exemple :

5 et 0,2 sont inverses car 5 × 0,2 = 1

Remarque :

Le nombre 0 est le seul nombre qui n'a pas d'inverse car le produit d'un nombre par 0 ne peut pas être égal à 1.

Propriété :

$a$ désigne un nombre relatif différent de 0.
L'inverse de $a$ est le nombre $\dfrac{1}{a}$ .

Preuve :

$a \times \dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{a} = 1$

Exemples :

L'inverse de 7 est $\dfrac{1}{7}$

L'inverse de -3 est $-\dfrac{1}{3}$

Propriété :

a et b désignent des nombres relatifs non nuls.
L'inverse de $\dfrac{a}{b}$ est le nombre $\dfrac{b}{a}$

Exemples :

L'inverse de $\dfrac{4}{5}$ est $\dfrac{5}{4}$ .

L'inverse de $\dfrac{-3}{7}$ est $\dfrac{7}{-3}$

## 4. Diviser par une fraction

Propriété :

Diviser par un nombre relatif différent de 0 revient à multiplier par son inverse.

Exemple :

$7 \div a = \dfrac{7}{a} = 7 \times \dfrac{1}{a}$

→ Diviser par $a$ revient à multiplier par $\dfrac{1}{a}$ (son inverse)

Propriété :

Si a, b, c, d désignent des nombres relatifs avec b ≠ 0, c ≠ 0 et d ≠ 0, alors
$\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$ .

Exemples :

$C = \dfrac{3}{5} \div \dfrac{7}{8} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{8}{7} = \dfrac{3 \times 8}{5 \times 7} = \dfrac{24}{35}$

$D = \dfrac{6}{5} \div \dfrac{-8}{7} = \dfrac{6}{5} \times \dfrac{7}{-8} = \dfrac{6 \times 7}{5 \times (-8)} = \dfrac{42}{-40} = \dfrac{21}{-20}$