Séquence 20 : Réciproques et contraposées

Objectifs :
- 4G21 : Démontrer qu'un triangle est rectangle ou non à l'aide du théorème de Pythagore
- 4G31 : Démontrer que des droites sont parallèles avec le théorème de Thalès

Définition :

On considère une propriété de la forme « Si A est vrai, alors B est vrai ».
Si on inverse les données et la conclusion, on obtient « Si B est vrai, alors A est vrai ».
Cette deuxième propriété est appelée la réciproque de la première propriété.

Exemple :
Le théorème de Pythagore dit que « Si un triangle est rectangle, alors le carré de son plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés »
On peut donc en déduire la :

Réciproque du théorème de Pythagore :

Si le carré du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Exemple 1 :
MNP est un triangle tel que : MN = 6 cm, MP = 8 cm et NP = 10 cm.
Est-ce que MNP est un triangle rectangle ?
Le côté le plus long est [NP].
$NP^2 = 10^2 = 100$
$MN^2 + MP^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
On obtient le même résultat donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle MNP est rectangle en M.

Définition :

On considère une propriété de la forme « Si A est vrai, alors B est vrai ».
Dans ce cas, le fait que B soit vrai est la conséquence du fait que A soit vrai.
Il est donc impossible d'avoir à la fois B qui est faux et A qui est vrai (puisque si A est vrai, alors par conséquent B est vrai lui aussi).
On peut donc en déduire la propriété suivante « Si B est faux, alors A est faux ».
Cette dernière propriété est appelée la contraposée de la première propriété.

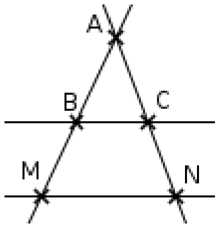
Contraposée du théorème de Pythagore :

Si le carré du plus grand côté d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Exemple :
EFH est un triangle tel que : EF = 5 cm, FH = 7 cm et HE = 9 cm.
Est-ce que EFH est un triangle rectangle ?
Le côté le plus long est [HE].
$HE^2 = 9^2 = 81$
$EF^2 + FH^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$
On n'obtient pas le même résultat donc, d'après la contraposée du théorème de Pythagore le triangle EFH n'est pas rectangle.

Réciproque du théorème de Thalès:

Dans le cas où les points (BM) et (CN) sont sécantes en A, si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



Remarque :

Pour utiliser la réciproque du théorème de Thalès, on n'a pas besoin d'avoir l'égalité entre les trois rapports, une égalité entre deux rapports suffit.

Exemple 3 :

AB = 5,4 cm AD = 7,2 cm AC = 6,6 cm AE = 8,8 cm

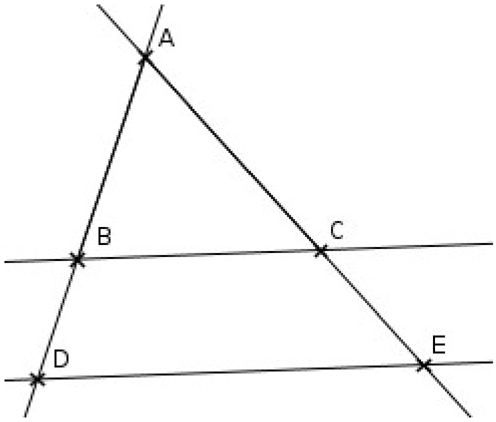
Les droites (BC) et (DE) sont-elles parallèles ?

Les droites (BD) et (CE) sont sécantes en A.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{5,4}{7,2} = 0,75$$

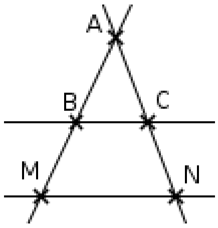
$$\frac{AC}{AE} = \frac{6,6}{8,8} = 0,75$$

On obtient le même résultat, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (DE) et (BC) sont parallèles.



Contraposée du théorème de Thalès :

Dans le cas où les points (BM) et (CN) sont sécantes en A, si $\frac{AB}{AM} \neq \frac{AC}{AN} \neq \frac{BC}{MN}$, alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.



Remarque :

Pour utiliser la contraposée du théorème de Thalès, on a juste besoin de montrer que deux rapports ne sont pas égaux.

Exemple 4 :

Les droites (BC) et (DE) sont-elles parallèles ?

Les droites (BE) et (CD) sont sécantes en A.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{1,8}{4,8} = 0,375$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{2,4}{5} = 0,48$$

On n'obtient pas le même résultat, donc d'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.