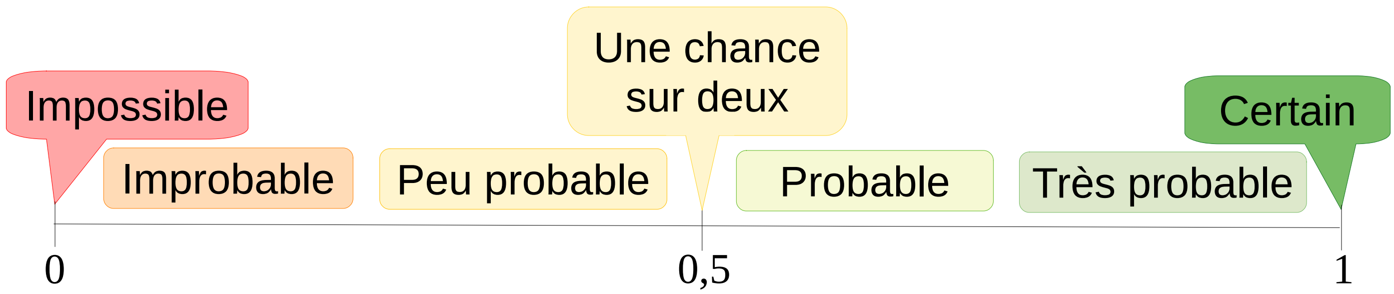
Séquence 1 : Probabilités

Objectifs :
3S20 : Calculer des probabilités pour des expériences aléatoires simples à une ou deux épreuves à partir de dénombrements

I Modéliser une expérience aléatoire

Définitions :

Une expérience aléatoire est une expérience dans laquelle intervient le hasard et dont les différentes possibilités sont appelées issues.
Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer une probabilité à chaque issue de sorte que :
- la probabilité d'une issue (la proportion de chance qu'elle se produise) soit un nombre compris entre 0 et 1 ;
- la somme des probabilités de toutes les issues soit égale à 1.



Définition :

Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit que les issues sont équiprobables.

Propriété :

Si une expérience aléatoire comporte n issues équiprobables, la probabilité de chacune d'entre elles vaut $\frac{1}{n}$.

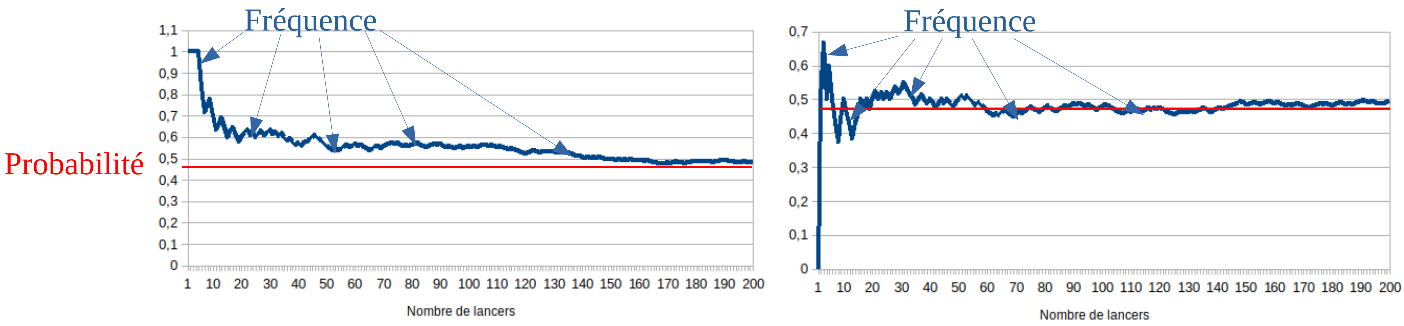
Exemple :
On fait tourner cette roue équilibrée et divisée en huit secteurs de même aire.
Les issues 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 sont équiprobables.

La probabilité de chacune d'entre elles vaut $\frac{1}{8}$ = 0,125 = 12,5 %

(On peut exprimer une probabilité sous forme de fraction, d'écriture décimale, ou de pourcentage)

Remarque :
Il y a des situations où la probabilité d'une issue ne peut pas être déduite de façon intuitive.
Dans ce cas, en reproduisant un grand nombre de fois une expérience aléatoire, on remarque que la fréquence d'une issue a tendance à se stabiliser autour d'un nombre p qui est la probabilité de cette issue.

Exemple 1 :
On peut l'observer en simulant de nombreux lancers de pièces.



Exemple 2 :
On pourrait procéder de cette façon pour déterminer la probabilité qu'a un volant de badminton de retomber « debout » ou sur le côté.

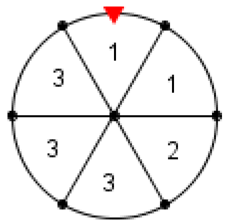
II Déterminer la probabilité d’un événement

Définitions :

Un événement est constitué d’une ou de plusieurs issues d’une expérience aléatoire.
On dit qu’une de ces issues réalise l’événement.
La probabilité d’un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Exemple :

On tourne la roue bien équilibrée ci-contre et on relève le numéro du secteur qui s'arrête en face du repère.



On note S l'événement « Sortie d'un nombre supérieur ou égal à 2 ».
Il est réalisé par les issues « Sortie du 2 » et « Sortie du 3 ».

La probabilité de sortie du 2 est $\frac{1}{6}$

La probabilité de sortie du 3 est $\frac{3}{6}$

On a simplifié la fraction

La probabilité de l’événement S est donc $P(S) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Propriété :

La probabilité d’un événement est (toujours) un nombre compris entre 0 et 1.

Définition :

L’événement contraire d’un événement A est l’événement qui se réalise chaque fois que A n’est pas réalisé : il est réalisé par toutes les issues qui ne réalisent pas l’événement A.
Cet évènement est noté $\bar{A}$.

Propriété :

La somme des probabilités d’un événement et de son contraire vaut 1 : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Remarque :

On peut en déduire que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemple :

Dans l’exemple précédent, l’événement contraire de l’évènement S « Sortie d’un nombre supérieur ou égal à 2 » est l’événement $\bar{S}$ « Sortie d’un nombre strictement inférieur à 2 ».
Le seul nombre strictement inférieur à 2 ici est le nombre 1.

La probabilité de sortie du 1 est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

donc $P(\bar{S}) = \frac{1}{3}$

On aurait pu le trouver aussi grâce à l’égalité :

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

III Expériences aléatoires à deux épreuves

Définition :

Une expérience aléatoire à deux épreuves est constituée de deux expériences aléatoires qui se suivent.

Exemples :

On peut par exemple faire tourner une roue deux fois.
On peut aussi tirer à pile ou face, puis piocher une boule.
Ou encore choisir au hasard un short, puis choisir au hasard un tee shirt.

Définition :

Lorsque le résultat de la deuxième épreuve ne dépend pas du résultat de la première, on dit que les deux épreuves sont indépendantes.

Exemples :

Les épreuves des trois exemples précédents sont indépendantes.
Si on tire deux fois à la suite une boule dans une urne les deux épreuves ne sont pas indépendantes (si par exemple je tire une boule noire à la première épreuve, il y aura une boule noire de moins de disponible à la deuxième épreuve)

Méthode :

Pour étudier une expérience aléatoire à deux épreuves, on peut utiliser un tableau à double entrée.

Exemple :

Dans son armoire, Tom a 3 shorts bleus, 1 short rouge et 2 shorts verts.
Il a aussi 2 tee-shirts bleus et 3 tee-shirts rouges.
Il prend au hasard un short et un tee-shirt dans son armoire.
1. Quelle est la probabilité qu'il soit habillé tout en rouge ?
2. Quelle est la probabilité qu'il soit habillé entièrement de la même couleur ?

Tee-shirt / Short	Bleu (B)	Bleu (B)	Rouge (R)	Rouge (R)	Rouge (R)
Bleu (B)	(B ; B)	(B ; B)	(B ; R)	(B ; R)	(B ; R)
Bleu (B)	(B ; B)	(B ; B)	(B ; R)	(B ; R)	(B ; R)
Bleu (B)	(B ; B)	(B ; B)	(B ; R)	(B ; R)	(B ; R)
Rouge (R)	(R ; B)	(R ; B)	(R ; R)	(R ; R)	(R ; R)
Vert (V)	(V ; B)	(V ; B)	(V ; R)	(V ; R)	(V ; R)
Vert (V)	(V ; B)	(V ; B)	(V ; R)	(V ; R)	(V ; R)

1. On peut lire sur le tableau qu'il y a 3 possibilités pour qu'il soit tout en rouge sur un total de 30 possibilités. La probabilité qu'il soit habillé tout en rouge est donc $\frac{3}{36} = \frac{1}{10}$.

2. On peut lire sur le tableau qu'il y a :
- 6 possibilités pour qu'il soit tout en bleu ;
- 3 possibilités pour qu'il soit tout en rouge ;
- 0 possibilités pour qu'il soit tout en vert ;

sur un total de 30 possibilités.

La probabilité qu'il soit habillé entièrement de la même couleur est donc $\frac{6+3+0}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$