Séquence 13 : Fractions

Objectifs :
- 3N11 : Calculer avec les nombres rationnels, notamment dans le cadre de résolution de problèmes
- 3A11 : Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

I Rappels

1. Notion de fraction

Définition :

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'exprimer comme le quotient de deux nombres relatifs (positifs ou négatifs).

Exemple :

Le nombre – 0,6 peut s'écrire $\frac{-3}{5}$. C'est un nombre rationnel.

– 3 est le numérateur et 5 est le dénominateur.

Définition :

Une fraction est un nombre rationnel dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers.

Exemple :

– 3 est un nombre entier (négatif) et 5 est aussi un nombre entier (positif).

$\frac{-3}{5}$ est donc une fraction

2. Comparer des fractions

Propriété :

Un quotient ne change pas si on multiplie ou divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul (non nul = différent de zéro).

a, b et k désignent trois nombres relatifs avec b ≠ 0 et k ≠ 0.

$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$

Exemples :

$\frac{2{,}5}{3} = \frac{2{,}5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$

$\frac{-56}{64} = \frac{-56 \div 8}{64 \div 8} = \frac{-7}{8}$

Définition :

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction qui lui est égale mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Exemple :

On veut simplifier $\dfrac{63}{75}$.

63 et 75 sont divisibles par 3.

On peut donc écrire $\dfrac{63}{75} = \dfrac{63 \div 3}{75 \div 3} = \dfrac{21}{25}$.

Égalité des produits en croix :

a, b, c et d désignent des nombres relatifs (b ≠ 0 et d ≠ 0)

Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, alors ad = bc.

Si ad = bc, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Exemple :

On veut savoir si les fractions $\dfrac{20}{35}$ et $\dfrac{24}{42}$ sont égales.

On calcule les « produits en croix » : 20 × 42 = 840 et 24 × 35 = 840.

Les produits en croix sont égaux, donc les fractions sont égales : $\dfrac{20}{35} = \dfrac{24}{42}$

Méthode :

Si on veut juste vérifier si des fractions sont égales, on peut utiliser l'égalité des produits en croix.
Si on veut comparer des fractions d'une façon plus générale (savoir s'il y en a une qui est plus petite ou plus grande que l'autre ou si elles sont égales), il faut d'abord les mettre sur le même dénominateur.

Exemple :

Compare $\dfrac{17}{8}$ et $\dfrac{7}{3}$.

On cherche un nombre qui est à la fois dans la table de 8 et dans la table de 3. Le nombre 8 × 3 = 24 est forcément à la fois dans la table de 8 et dans la table de 3.

D'une part $\dfrac{17}{8} = \dfrac{17 \times 3}{8 \times 3} = \dfrac{51}{24}$

D'autre part $\dfrac{7}{3} = \dfrac{7 \times 8}{3 \times 8} = \dfrac{56}{24}$

51 < 56 donc $\dfrac{51}{24} < \dfrac{56}{24}$ donc $\dfrac{17}{8} < \dfrac{7}{3}$.

3. Addition et soustraction de fractions

Propriété :

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions qui ont le même dénominateur :
on additionne (ou on soustrait) les numérateurs ;
on garde le dénominateur commun
a, b et c désignent trois nombres relatifs avec c ≠ 0.

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ $\qquad$ $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Exemples :

$A = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}$

$A = \frac{2+4}{5}$

$A = \frac{6}{5}$

« 2 cinquièmes + 4 cinquièmes = 6 cinquièmes »

$B = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}$

$B = \frac{7-5}{3}$

$B = \frac{2}{3}$

« 7 tiers – 5 tiers = 2 tiers »

Méthode :

Pour additionner ou soustraire deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on doit d'abord les écrire avec le même dénominateur. Il faut donc chercher un multiple commun aux deux dénominateurs.

Exemple 1 :

On veut calculer $C = \frac{5}{2} + \frac{2}{3}$

$C = \frac{5}{2} + \frac{2}{3}$

$C = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$

$C = \frac{15}{6} + \frac{4}{6}$

$C = \frac{19}{6}$

Exemple 2 :

On veut calculer $D = \frac{3}{4} - \frac{11}{6}$

On aurait pu les écrire avec le même dénominateur 4 × 6 = 24, mais on peut aussi être plus malin et remarquer que 12 est à la fois dans la table de 4 et de 6 (et ainsi avoir des calculs plus simples)

$D = \frac{3}{4} - \frac{11}{6}$

$D = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{11 \times 2}{6 \times 2}$

$D = \frac{9}{12} - \frac{22}{12}$

$D = \frac{-13}{12}$

4. Multiplication de fractions

Propriété :

Pour multiplier une fraction par un nombre (en écriture décimale), on ne multiplie que le numérateur par ce nombre et on converse le dénominateur.
a, b et k désignent trois nombres avec b ≠ 0.

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{k \times a}{b}$$

Exemple :

$$-3 \times \frac{2}{7} = \frac{-3 \times 2}{7} = \frac{-6}{7}$$

Propriété :

Pour multiplier deux fractions entre elles, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
a, b, c et d désignent quatre nombres avec b ≠ 0 et d ≠ 0.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple :

Alice a mangé les $\frac{3}{7}$ des $\frac{2}{5}$ d'une tarte aux pommes.
Quelle fraction de la tarte a-t-elle mangée ?

$$\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$$

Elle a mangé les $\frac{6}{35}$ de la tarte aux pommes.

5. Division de fractions

1. Inverse d'un nombre non nul

Définition :

Dire que deux nombres relatifs sont inverses signifie que leur produit est égal à 1.

Exemple :

5 et 0,2 sont inverses car 5 × 0,2 = 1

Remarque :

Le nombre 0 est le seul nombre qui n'a pas d'inverse car le produit d'un nombre par 0 ne peut pas être égal à 1.

Propriété :

a désigne un nombre relatif différent de 0.
L'inverse de *a* est le nombre $\frac{1}{a}$.

Preuve :

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

Exemples :

L'inverse de 7 est $\frac{1}{7}$

L'inverse de -3 est $-\frac{1}{3}$

Propriété :

a et b désignent des nombres relatifs non nuls.

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est le nombre $\frac{b}{a}$

Exemples :

L'inverse de $\frac{4}{5}$ est $\frac{5}{4}$.

L'inverse de $\frac{-3}{7}$ est $\frac{7}{-3}$

2. Diviser par une fraction

Propriété :

Diviser par un nombre relatif différent de 0 revient à multiplier par son inverse.

Exemple :

$7 \div a = \frac{7}{a} = 7 \times \frac{1}{a}$

→ Diviser par a revient à multiplier par $\frac{1}{a}$ (son inverse)

Propriété :

Si a, b, c, d désignent des nombres relatifs avec $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$, alors

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Exemples :

$C = \frac{3}{5} \div \frac{7}{8} = \frac{3}{5} \times \frac{8}{7} = \frac{3 \times 8}{5 \times 7} = \frac{24}{35}$

$D = \frac{6}{5} \div \frac{-8}{7} = \frac{6}{5} \times \frac{7}{-8} = \frac{6 \times 7}{5 \times (-8)} = \frac{42}{-40} = \frac{21}{-20}$

II Déterminer la forme irréductible d'une fraction

Définition :

a et b désignent deux entiers relatifs avec $b \neq 0$.

On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si le seul diviseur positif commun à a et b est égal à 1.

Exemple :

$\frac{5}{8}$ est une fraction irréductible car le seul diviseur positif commun à 5 et 8 est 1.

Méthode :

Pour rendre une fraction irréductible, on peut, au choix :
- simplifier la fraction en plusieurs étapes, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus la simplifier ;
- décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers puis simplifier.

Exemple :

Rendre irréductible la fraction $\frac{24}{36}$.

Méthode 1 : $\frac{24}{36} = \frac{24 \div 2}{36 \div 2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$

Méthode 2 : $\frac{24}{36} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 3} = \frac{2}{3}$