

Séquence 17 : Proportionnalité en Géométrie

Objectifs :

- 3G11 : Transformer une figure par homothétie et comprendre l'effet d'une homothétie
- 3G10 : Transformer une figure par rotation et comprendre l'effet d'une rotation
- 3G12 : Identifier des rotations et des homothéties dans des frises, des pavages et des rosaces
- 3G13 : Mobiliser les connaissances des figures, des configurations, de la rotation et de l'homothétie pour déterminer des grandeurs géométriques

I Homothétie

Définition :

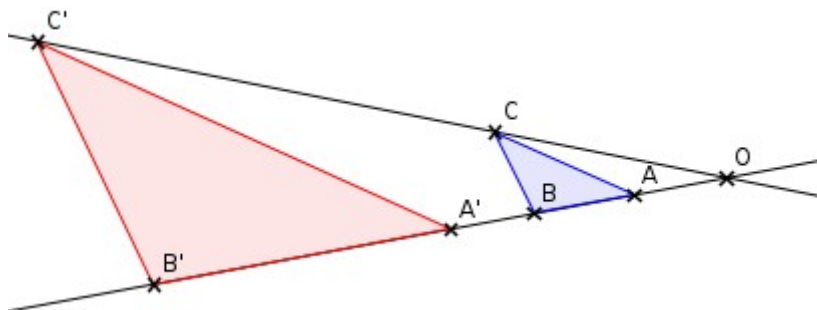
Transformer une figure par **homothétie** de centre O et de rapport k , c'est l'agrandir ou la réduire en faisant glisser ses points le long de droites passant par O .

Une homothétie est définie par :

- un centre
- un rapport k non nul.

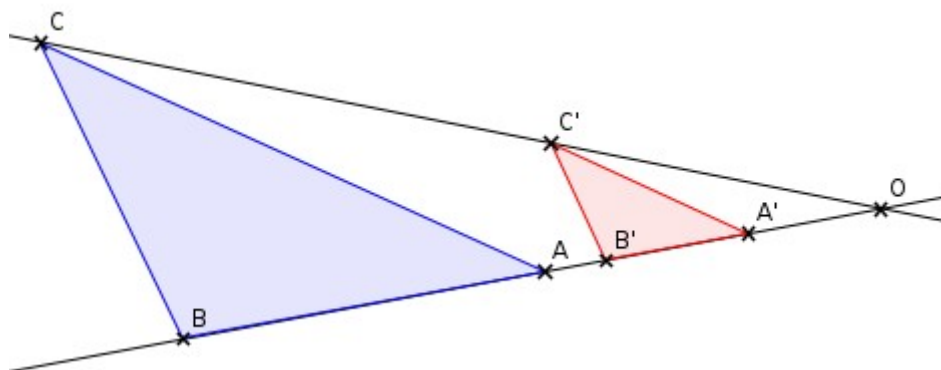
Exemple 1 :

On a transformé le triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 3.



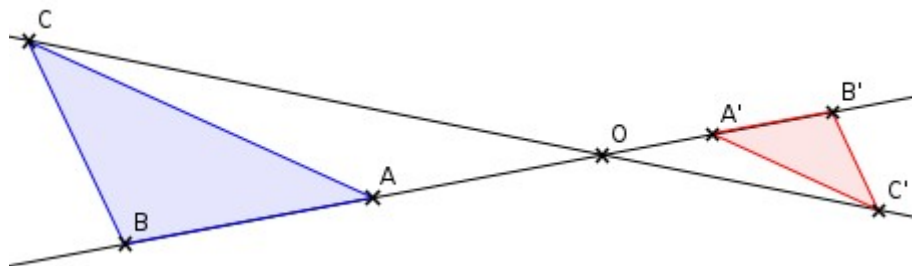
Exemple 2 :

On a transformé le triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 0,4.



Exemple 3 :

On a transformé le triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport -0,5.



Remarques :

Lorsque $k > 1$, l'homothétie effectue un agrandissement de rapport k .

Lorsque $0 < k < 1$, l'homothétie effectue une réduction de rapport k .

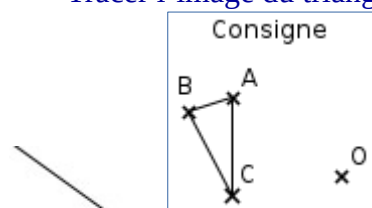
Lorsque $-1 < k < 0$, l'homothétie effectue une réduction de rapport k et la figure est « retournée ».

Lorsque $k < -1$, l'homothétie effectue un agrandissement de rapport k et la figure est « retournée ».

L'homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie de centre O.

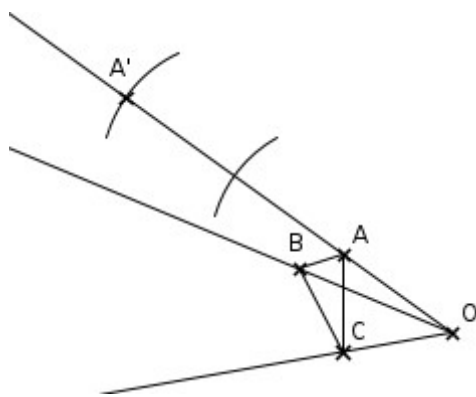
Méthode :

Tracer l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 3.



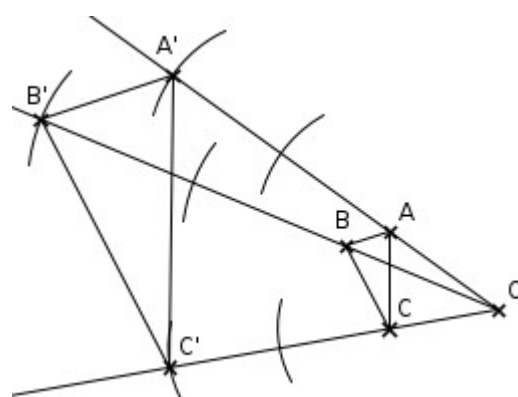
Étape 1 :

on trace les demi-droites [OA), [OB) et [OC)



Étape 2 :

on mesure la distance OA, on la multiplie par 3 et on place le point A'



Étape 3 :

on fait de même pour les points B' et C' et on les relie pour tracer le triangle A'B'C'

Propriétés :

Une figure et son image par l'homothétie sont proportionnelles :

- elles ont la même forme : les alignements et les angles sont conservés ;
- le coefficient de proportionnalité est k : les longueurs sont multipliées par k et les aires par k^2 .

II Rotation

Définition :

Transformer une figure par **rotation**, c'est la faire tourner autour d'un point.

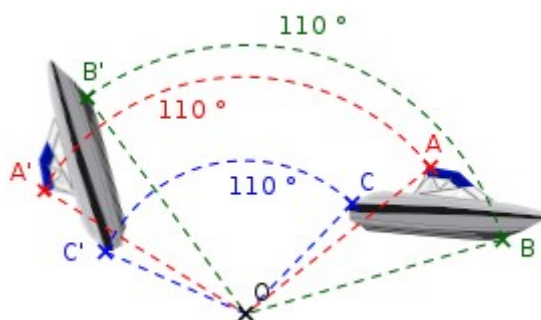
Une rotation est définie par

- un centre,
- un angle de rotation,
- un sens de rotation (horaire ou anti-horaire). (horaire = sens des aiguilles d'une montre)

Exemple :

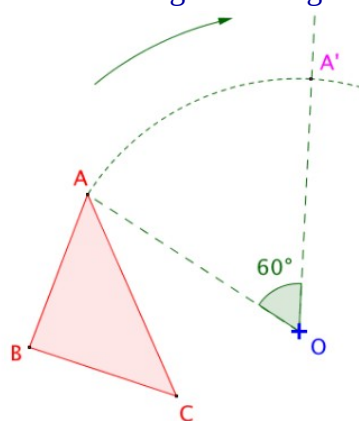
Rotation

- de centre O
- d'un angle de 110°
- dans le sens anti-horaire

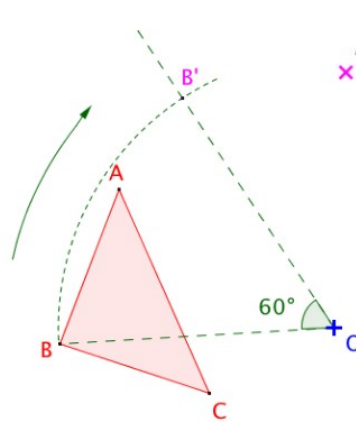


Méthode :

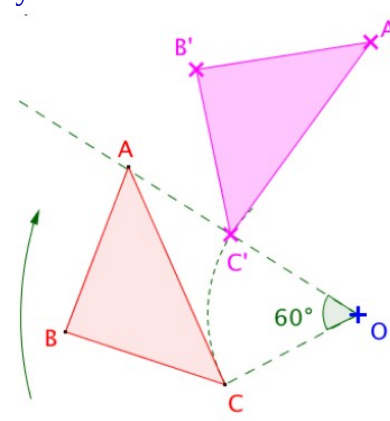
Construire l'image du triangle ABC par la rotation de centre O et de rayon 60° dans le sens horaire



Part de $[OA]$, trace un angle de 60° en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre.
Le point A' est tel que $OA = OA'$.



Fais de même pour tracer les points B' et C'



Relie les pour obtenir le triangle $A'B'C'$

Propriétés :

Une figure et son image par une symétrie, une translation ou une rotation sont presque identiques : elles ont les mêmes points alignés (et donc les mêmes parallèles), les mêmes longueurs et les mêmes angles (et donc les mêmes périmètres et les mêmes aires). On dit qu'elles sont superposables.

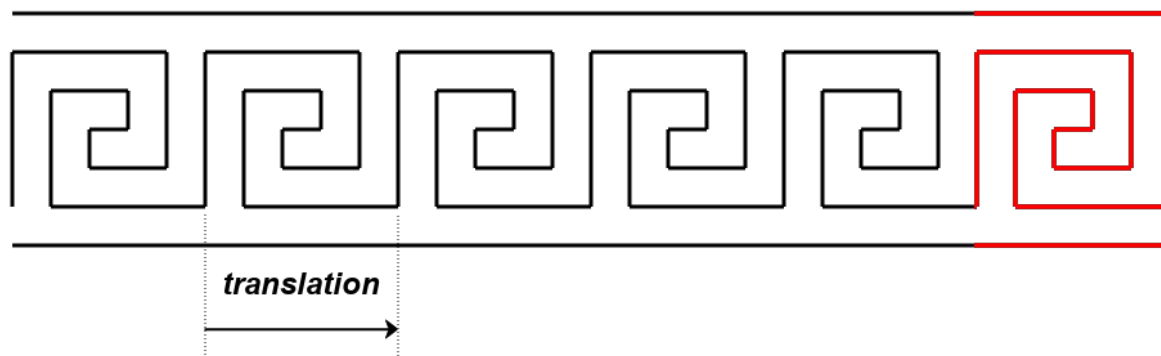
III Frises, pavages, rosaces

Définitions :

Une **frise** est constituée d'un **motif de base** qui est reproduit plusieurs fois dans une seule direction par translation.

Exemple :

Motif de base



© [Theon](#), [CC BY-SA 4.0](#), via Wikimedia Commons

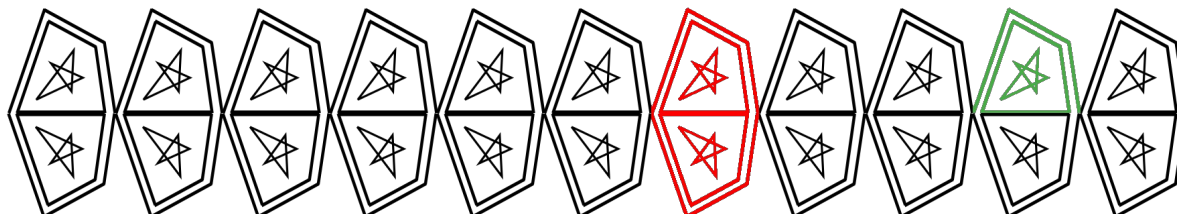
Vocabulaire :

Parfois, on peut obtenir le **motif de base** à partir d'un **motif élémentaire** qu'on transforme une ou plusieurs fois.

Exemple :

Motif de base

Motif élémentaire



© [Theon](#), [CC BY-SA 4.0](#), via Wikimedia Commons

On peut obtenir le **motif de base** en transformant le **motif élémentaire** par symétrie axiale

Remarque :

Les motifs de base et motifs élémentaires ne sont pas forcément uniques.

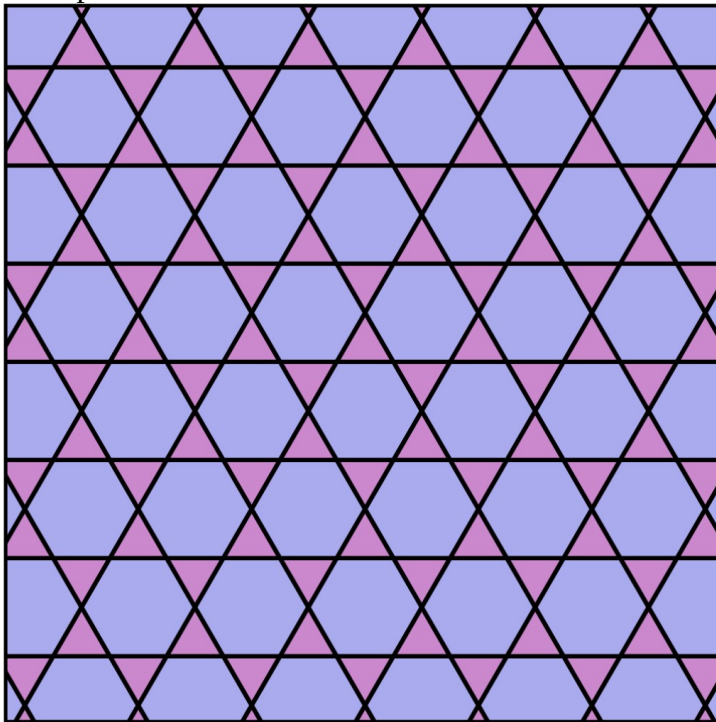
Souvent, on peut construire toute la frise, le pavage ou la rosace à partir de motifs différents.

Pour construire la frise précédente, comme motif élémentaire, au lieu de choisir « la moitié du haut », on aurait pu choisir « la moitié du bas » par exemple.

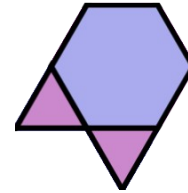
Définition :

Un **pavage** est constitué d'un motif qui est reproduit dans deux directions par des translations et qui recouvre le plan sans trou ni recouvrement.

Exemple :



Motif de base



Motif élémentaire

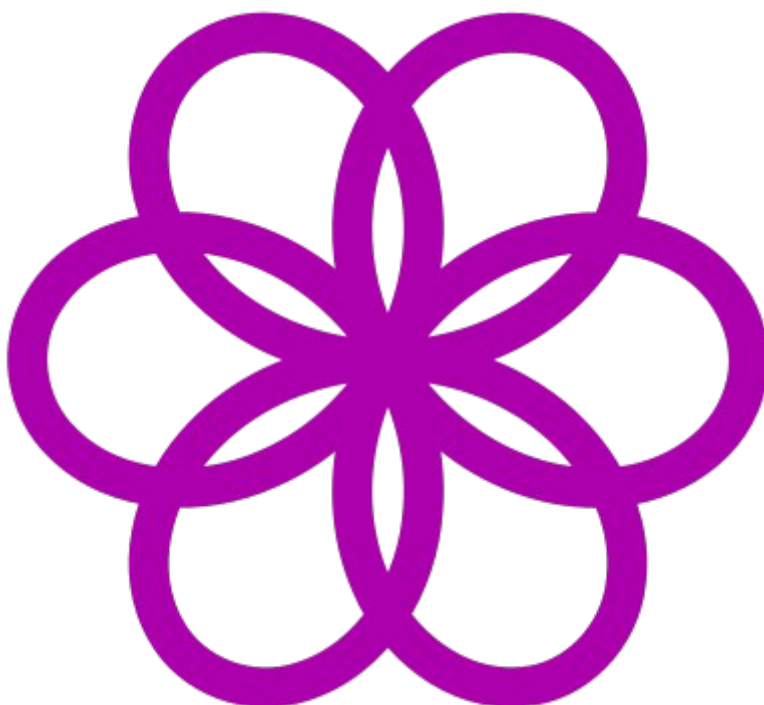


© R. A. Nonenmacher, [CC BY-SA 4.0](#), via Wikimedia Commons

Définition :

Une **rosace** est constituée d'un motif qui est reproduit plusieurs fois par rotation.

Exemple :



Motif de base



Motif élémentaire

