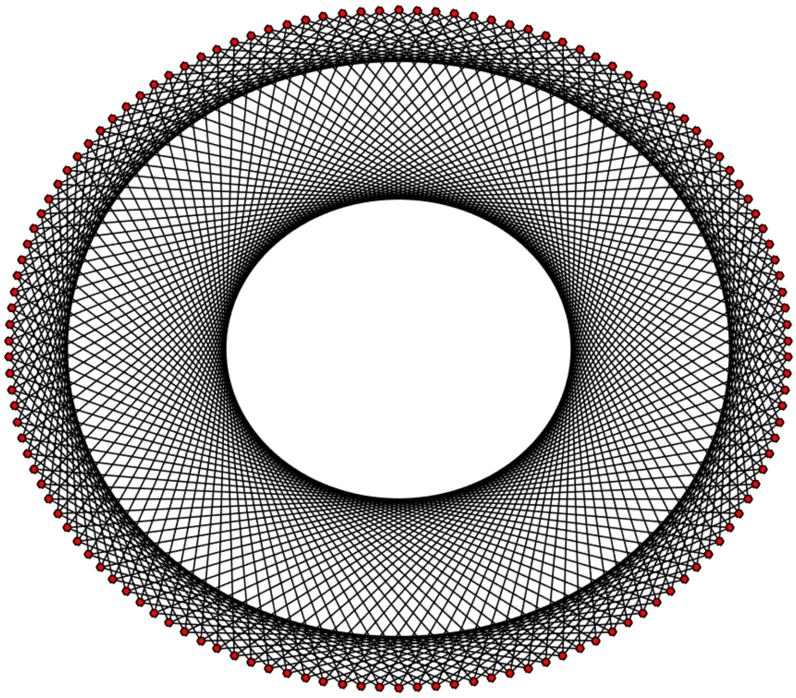
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

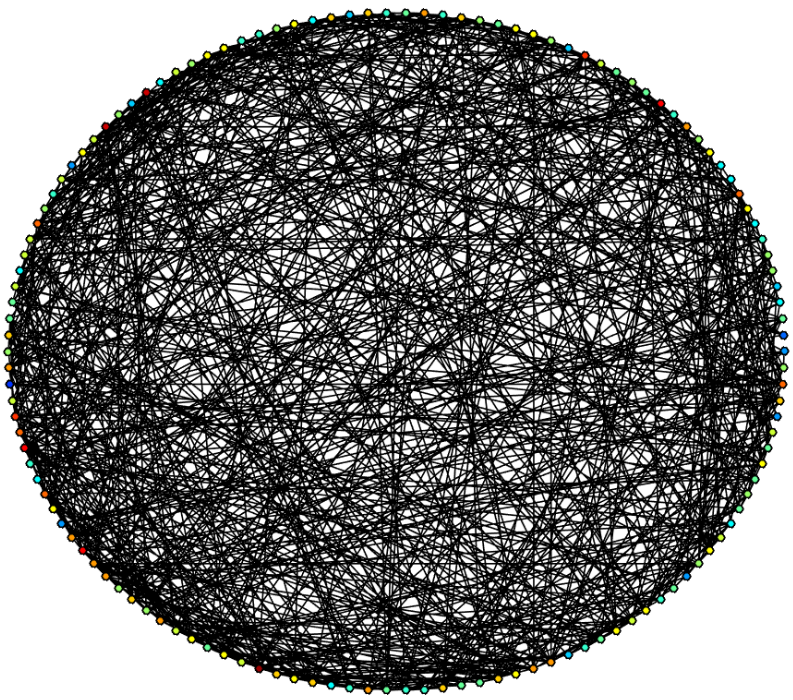
Αναφορά 1ης Εργαστηριακής Άσκησης

Ονοματεπώνυμο: Πλάτων-Λέανδρος Παπαδόπουλος
Α.Μ. : 03111023
Εξάμηνο: 9ο

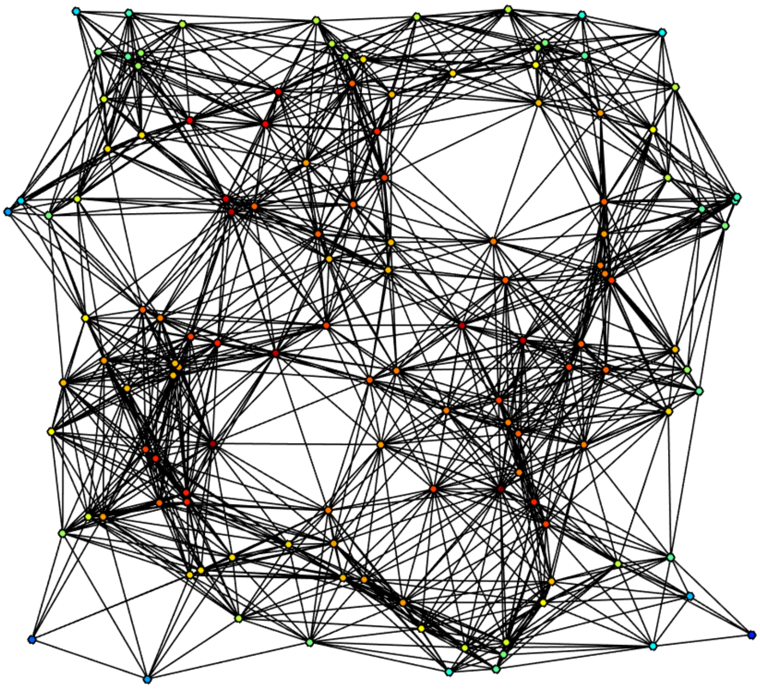
A) **Πεπερασμένο Πλέγμα (REG)** $N = 130, d = 4$



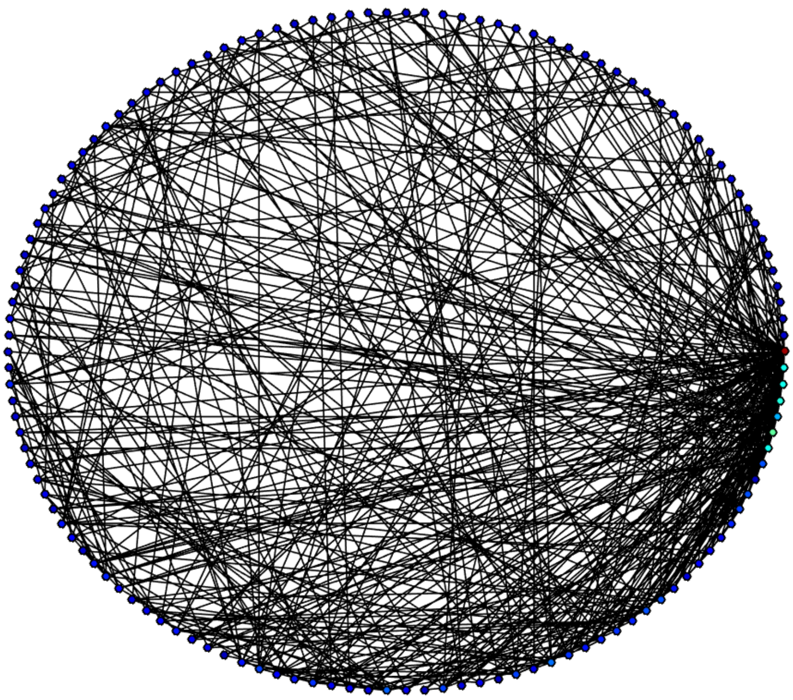
Τυχαίος γράφος Erdos-Renyi (RG (ER)) $N = 130, M = 750$



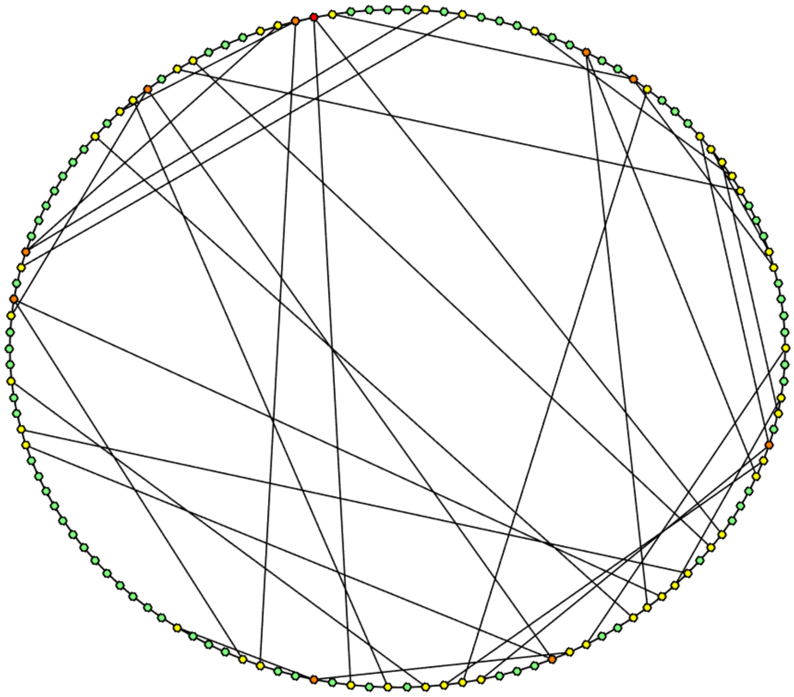
Τυχαίος γεωμετρικός γράφος επίπεδος (RGG) $N = 130, L \times L = 1000^2, R = 250$



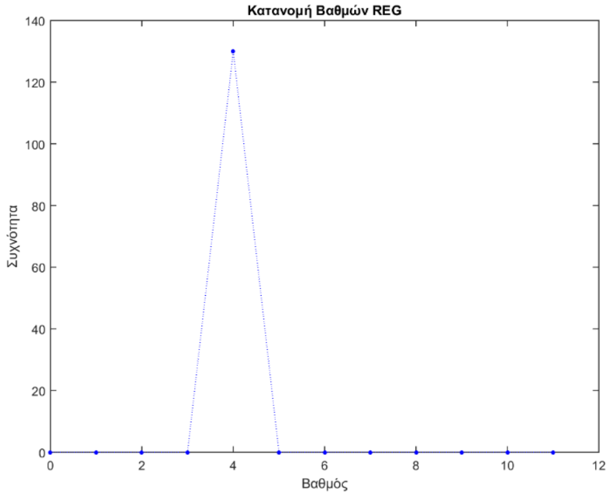
Scale-Free Barabasi-Albert (SF (BA)) N**=130,** $d_{start} = 4$

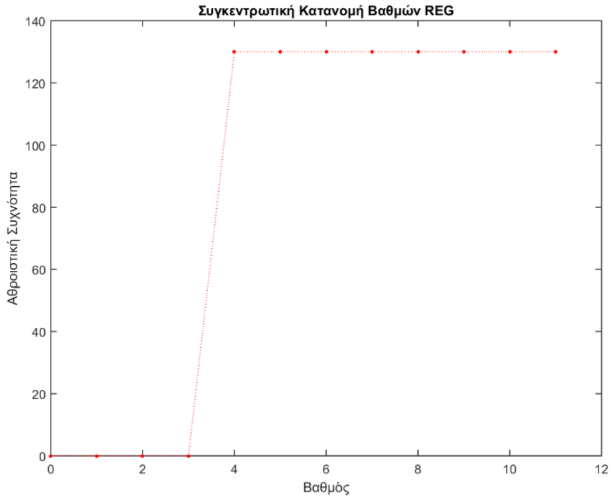


Small World Watts-Strogatz (SW (WS)) $N = 130, d_{start} = 4, g_p = 0.3$



B) **Πεπερασμένο Πλέγμα (REG)** $N = 130, d = 4$

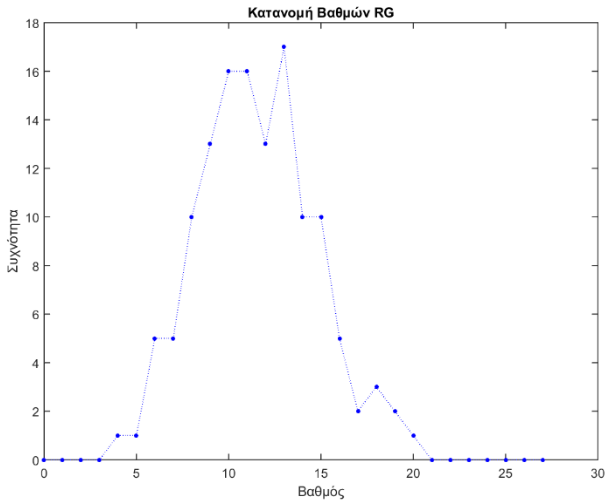


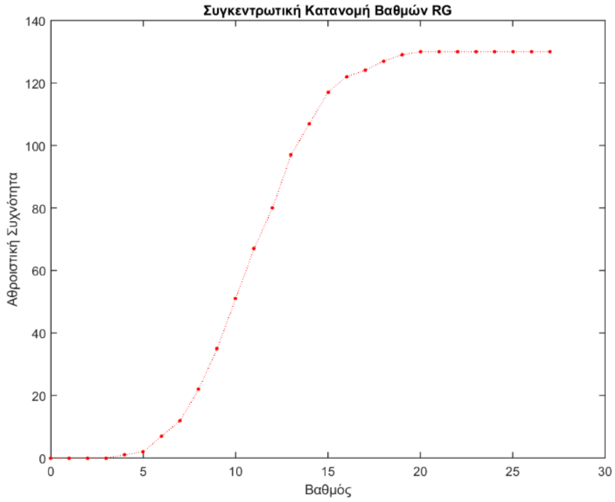


Μέση Τιμή: 4 Διασπορά: 0

Όπως σε κάθε πεπερασμένο πλέγμα, όλοι οι κόμβοι είναι ισόβαθμοι…

Τυχαίος γράφος Erdos-Renyi (RG (ER)) $N = 130, M = 750$



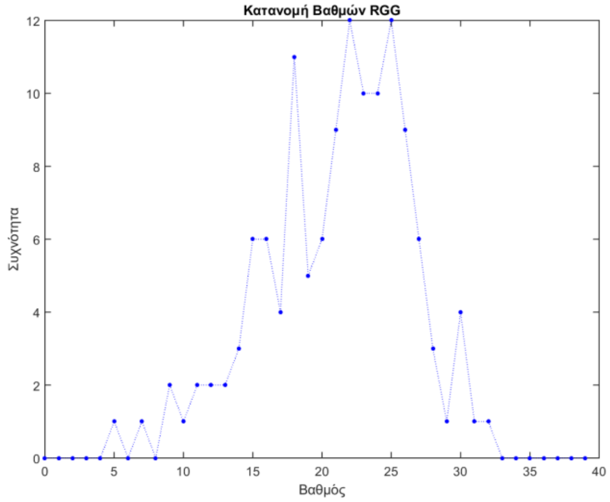


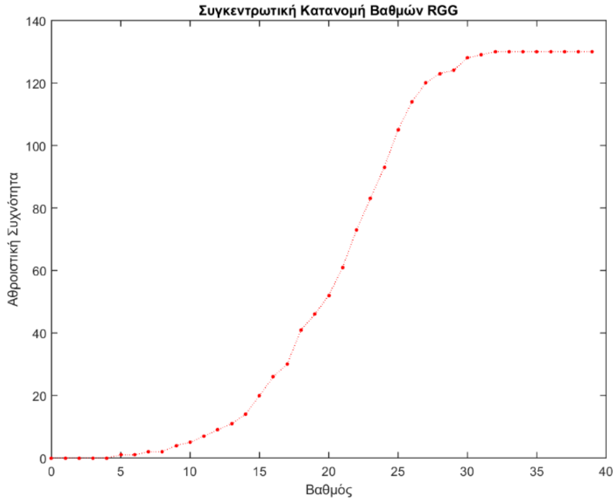
Μέση Τιμή: 11.54 Διασπορά: 9.96

Με τις δοσμένες παραμέτρους η θεωρητική πιθανότητα ύπαρξης μιας ακμής είναι $p = \frac{M}{\binom{N}{2}} \simeq 0.089$.

Επομένως ο αναμενόμενος βαθμός είναι $0.089 * (130 - 1) = 11.48$ κάτι που όπως βλέπουμε αντικατοπτρίζεται στις υπολογισθείσες τιμές όσο και στο γράφημα, η οποία προσεγγίζει μια ομαλή «καμπάνα» γύρω από την κεντρική τιμή.

Τυχαίος γεωμετρικός γράφος επίπεδος (RGG) $N = 130, L \times L = 1000^2, R = 250$

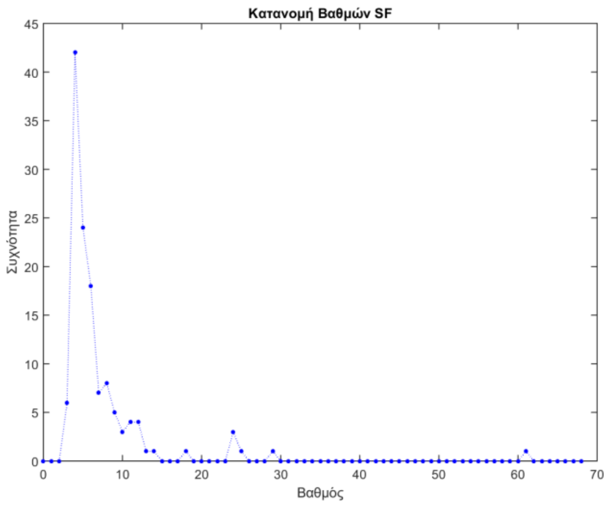


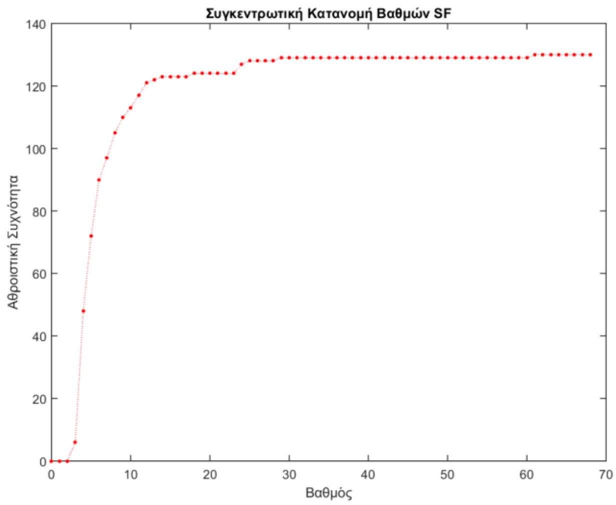


Μέση Τιμή: 21.05 Διασπορά: 27.57

Ο αναμενόμενος αριθμός γειτόνων είναι κατά προσέγγιση $\frac{\pi R^2}{L^2} N = 25.53$. Η απόκλιση της υπολογισθείσας τιμής από την πραγματική οφείλεται στο γεγονός ότι το R είναι της τάξης του L συνεπώς ο μέσος αριθμός γειτόνων για τους κόμβους που βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από R από τα τοιχώματα του χώρου, έχουν στη πραγματικότητα μικρότερο αναμενόμενο βαθμό (και δεδομένου ότι $R = \frac{L}{4}$ η εν λόγω περιοχή είναι παραπάνω από μη αμελητέα ώστε να δικαιολογείται επαρκώς η απόκλιση). Αυτή η μη αμελητέα σχέση μεταξύ L και R συμβάλλει και στη σχετικά μεγάλη διασπορά βαθμών κόμβων (σε σχέση με τον προηγούμενο τυχαίο γράφο).

Scale-Free Barabasi-Albert (SF (BA)) $N = 130, d_{start} = 4$

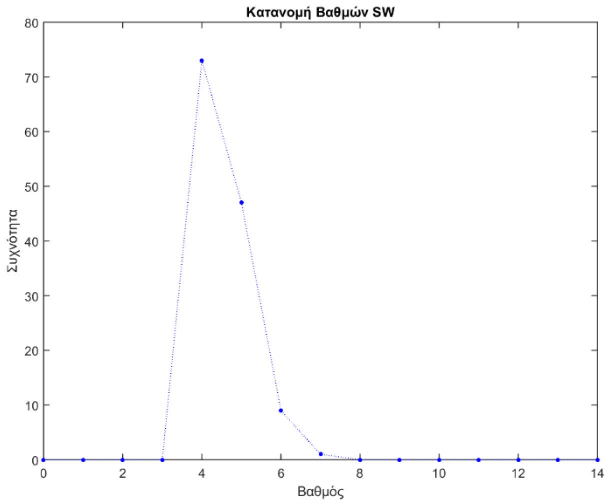


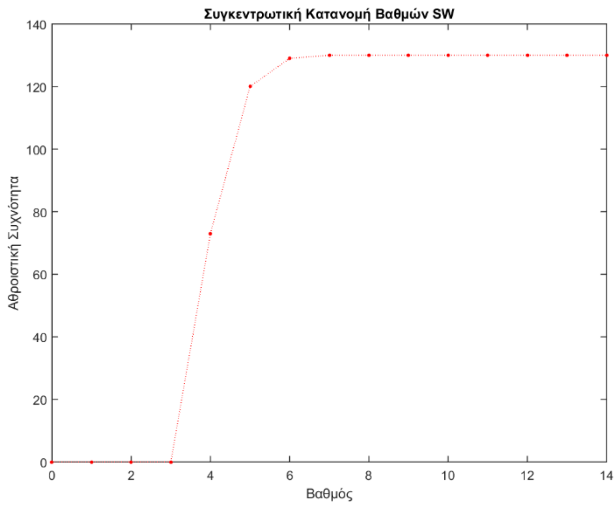


Μέση Τιμή: 7.12 Διασπορά: 43.09

Παρατηρούμε μια χαρακτηριστική εικόνα των Scale-Free γράφων, όπου η μεγάλη πλειοψηφία των κόμβων έχει βαθμούς γύρω από μια μικρή κεντρική τιμή (εν προκειμένω 5), δηλαδή λίγους γείτονες και υπάρχουν ελάχιστοι κόμβοι με πολύ μεγάλο βαθμό, δηλαδή έχουν γείτονες ένα πολύ μεγάλο μέρος του γράφου (εν προκειμένω φαίνονται τέσσερις με βαθμό 25-30 κι ένας με βαθμό 61). Η μέση τιμή, λόγω της μεγάλης συσπείρωσης γύρω από την κεντρική τιμή έχει διατηρηθεί σε χαμηλά επίπεδα, η διασπορά ωστόσο εκτινάσσεται λόγω των λίγων ακραίων τιμών των κόμβων μεγάλου βαθμού (και της επίδρασης του τετραγώνου στον υπολογισμό της).

Small World Watts-Strogatz (SW (WS)) $N = 130, d_{start} = 4, g_p = 0.3$



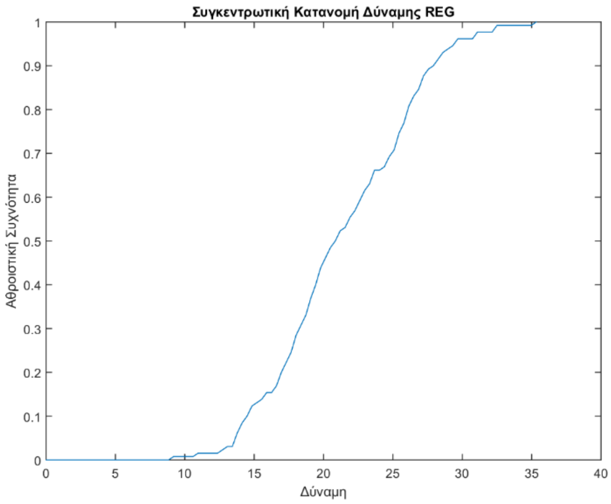


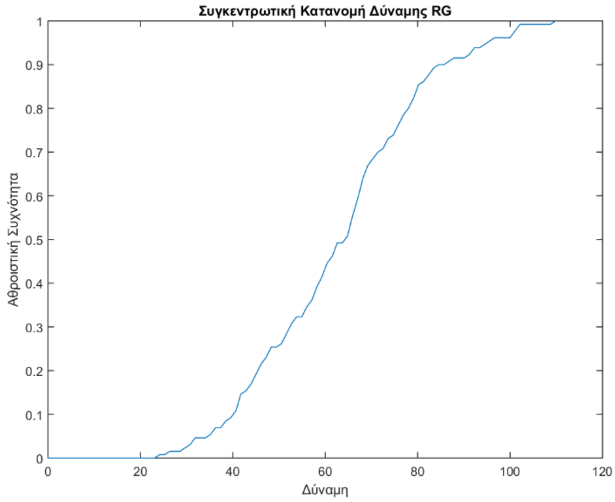
Μέση Τιμή: 4.52 Διασπορά: 0.43

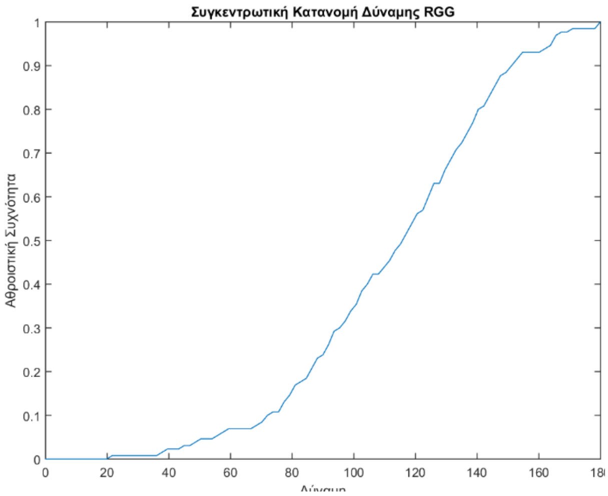
Εκ κατασκευής του παραπάνω γράφου, αρχίζοντας από πλέγμα βαθμού 4 και αναδιατάσσοντας ή προσθέτοντας τυχαίες ακμές με πιθανότητα 0.3, το αναμενόμενο αποτέλεσμα ως προς το βαθμό των κόμβων ήταν αυτό που φαίνεται και στα γραφήματα, δηλαδή κόμβοι βαθμού όσο του αρχικού ή λίγο παραπάνω από τόσο (οδηγώντας και σε σχετικά μικρή διασπορά).

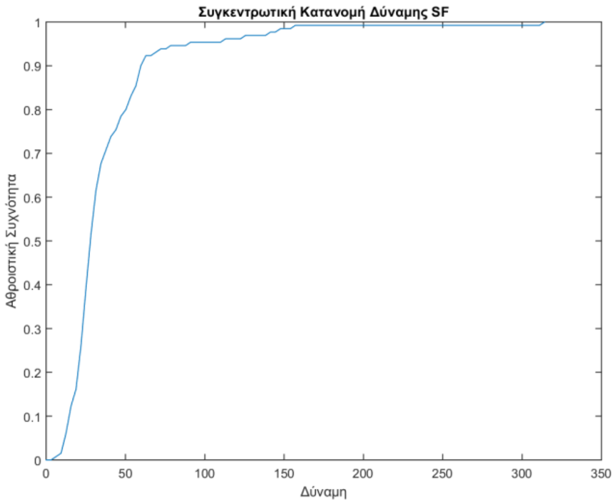
Γ) Όπως είναι αναμενόμενο, εφόσον κάθε βάρος διαλέγεται ομοιόμορφα, η μέση τιμή δύναμης σε κάθε τοπολογία θα είναι (περίπου) ίδια με τη μέση τιμή βαθμού (της αντίστοιχης τοπολογίας από το Β ερώτημα) επί το μέσο βάρος (εν προκειμένω 5.5):

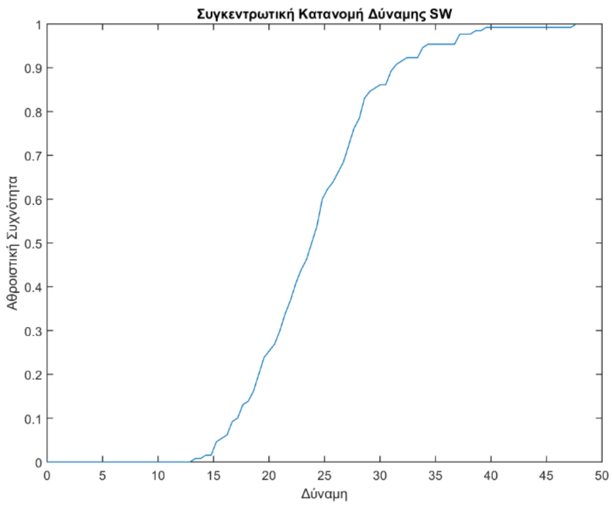
Τοπολογία	**REG**	**RG (ER)**	**RGG**	**SF**	**SW**
Μέση Τιμή δύναμης	**21.36**	**62.77**	**112.81**	**37.61**	**24.20**
Μέση Τιμή βαθμού επί 5.5	22.00	63.47	115.78	39.16	24.86











Ο πολλαπλασιασμός της αξίας κάθε ακμής με μια ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή στο [1,10] αντικατοπτρίζεται και στα αντίστοιχα διαγράμματα συγκεντρωτικής κατανομής και συγκεκριμένα από το εύρος στο οποίο η αθροιστική κατανομή αυξάνεται του οριζόντιου άξονα.

Δ) Συγκεντρωτικά τα ζητούμενα μεγέθη έχουν ως εξής:

Τοπολογία	REG	RG (ER)	RGG	SF	SW
Μέσο Μήκος Μονοπατιού	16.63	2.23	2.76	2.46	4.75
Διασπορά Μήκους Μονοπατιού	88.83	0.40	1.39	0.45	3.29

Στον κανονικό γράφο (REG) τα μικρότερα μονοπάτια είναι μήκους 1 και τα μεγαλύτερα μήκους κοντά στο $\frac{\frac{N}{2}}{\frac{d}{2}} \simeq 32.5$. Εκ φύσεως του κανονικού γράφου, κάθε ενδιάμεσο ελάχιστο μονοπάτι συναντάται με περίπου την ίδια συχνότητα, άρα η αναμενόμενη μέση τιμή είναι της τάξης του $\frac{32.5+1}{2} = 16.75$ το οποίο βλέπουμε να ικανοποιείται από τον αντίστοιχο υπολογισμό (η απόκλιση οφείλεται στις διαφορές των ακέραιων μηκών λόγω μη ακριβούς διαίρεσης των εκάστοτε μηκών). Λόγω της ομοιόμορφης κατανομής μεταξύ των μηκών, υπάρχει και η πολύ μεγάλη διασπορά που βλέπουμε.

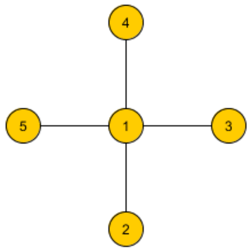
Στον τυχαίο γράφο (RG (ER)), λόγω τυχαίας τοποθέτησης των ακμών, η πιθανότητα δύο κόμβοι να μην έχουν κανέναν κοινό γείτονα είναι της τάξεως της πιθανότητας από N κόμβους όπου δύο δράστες επιλέγουν με πιθανότητα p κάθε κόμβο, κανείς κόμβος να μην έχει επιλεγεί και από τους δύο, δηλαδή $(1-p^2)^N$, όπου παρότι το p είναι πολύ μικρό (όπως είδαμε στο ερώτημα Β), το N είναι πολύ μεγάλο έτσι ώστε η παραπάνω πιθανότητα να γίνεται πολύ μικρή. Ασφαλώς αυτό το αποτέλεσμα αφορά δύο συγκεκριμένα επιλεγμένους κόμβους και όχι κάθε δυνατό ζεύγος (έτσι ώστε το μονοπάτι μεταξύ δύο κόμβων να παίρνει μεγαλύτερα μήκη με μη αμελητέα πιθανότητα), διαφαίνεται ωστόσο ο κυρίαρχος λόγος που γενικά το μέσο μήκος μονοπατιού είναι κοντά στο 2. Η μικρή διασπορά δικαιολογείται επίσης λόγω της συμμετρίας του γράφου που προκύπτει από την ομοιόμορφη κατανομή στην επιλογή των ακμών.

Στον τυχαίο γεωμετρικό γράφο (RGG), δύο κόμβοι έχουν με παρόμοιο σκεπτικό κατά μέσο όρο απόσταση περίπου ίση με $\frac{0+\sqrt{2}L}{2} = 707$, επομένως χρειάζονται προσεγγιστικά $\frac{707}{R} =$ 2.83 πηδήματα, από τον ένα στον άλλον κόμβο (τιμή που συμβαδίζει με την εξαγόμενη). Η συγκριτικά αυξημένη διασπορά από τον προηγούμενο τυχαίο γράφο οφείλεται στις ανωμαλίες που ανακύπτουν στα άκρα.

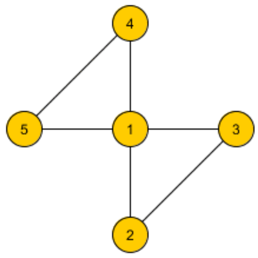
Στο Scale-Free γράφο (SF), επειδή η μεγάλη πλειοψηφία των κόμβων είναι συνδεδεμένη με κάποιον από τους λίγους κόμβους μεγάλου βαθμού, προκύπτει ότι το μέσο μήκος μονοπατιού είναι μεταξύ 2 (έχουν κοινό γείτονα κάποιον κόμβο μεγάλου βαθμού) και 3 (έχουν διαφορετικούς γείτονες μεγάλου βαθμού που επικοινωνούν μεταξύ τους). Η μικρή διασπορά οφείλεται στο γεγονός ότι σχεδόν όλοι οι κόμβοι έχουν τις παραπάνω ιδιότητες κι άρα το μήκος ελάχιστου μονοπατιού κυμαίνεται κυρίως μεταξύ αυτών των τιμών.

Στο Small-World γράφο (SW), είναι χαρακτηριστικό ότι λόγω των τυχαίων ανασυνδέσεων και προσθηκών μονοπατιών, η απόσταση μεταξύ δύο κόμβων μειώνεται δραματικά, έτσι ώστε με λίγα σχετικά πηδήματα (εδώ κοντά στα 5) κάθε κόμβος να μπορεί να φτάσει σε κάθε άλλο. Η σχετικά αυξημένη διασπορά (σε σχέση με τον τυχαίο γράφο) αντικατοπτρίζει και την ενδιάμεση θέση του Small-World γράφου μεταξύ του κανονικού γράφου μεγάλης ομοιομορφίας (και άρα μεγάλης διασποράς ελάχιστης απόστασης) και του εντελώς τυχαίου γράφου μικρής ομοιομορφίας (κι άρα μικρής διασποράς ελάχιστης απόστασης).

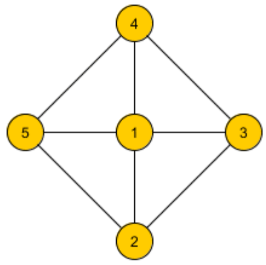
E) E.1



Ο γράφος είναι δέντρο κι άρα δεν περιέχει κανένα τρίγωνο, οπότε ο συντελεστής ομαδοποίησης όλων των κόμβων είναι 0 (όπως και ο μέσος όρος φυσικά).

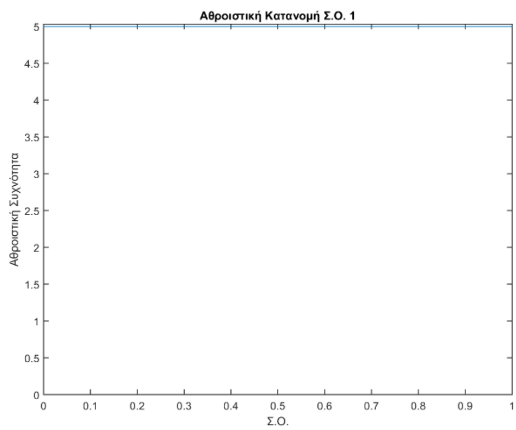


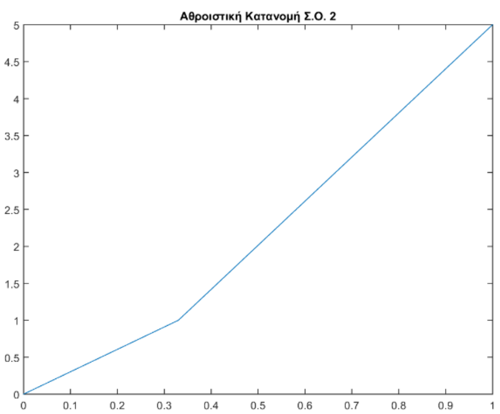
Ο κόμβος 2 έχει συντελεστή ομαδοποίησης 1, αφού οι δύο μοναδικοί του γείτονες συνδέονται μεταξύ τους και λόγω συμμετρίας το ίδιο ισχύει για τους 3,4,5. Για τον κόμβο 1, από τις $\binom{4}{2} = 6$ δυνατές συνδέσεις μεταξύ των 4 γειτόνων του, μόνο οι 2 υπάρχουν κι άρα έχει συντελεστή ομαδοποίησης $\frac{1}{3}$. Ο μέσος όρος είναι ίσος με $\frac{4*1+1*\frac{1}{3}}{5} = \frac{13}{15} \simeq 0.87$.

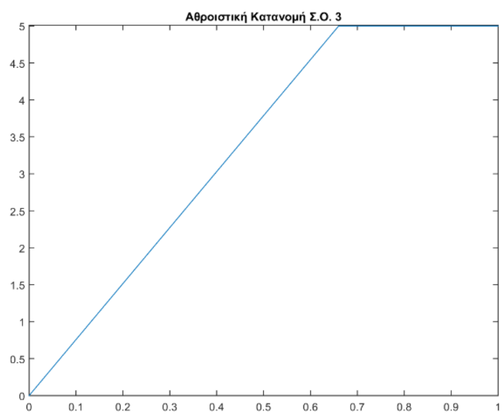


Τώρα ο κόμβος 2 έχει συντελεστή ομαδοποίησης ίσο με $\frac{2}{3}$ αφού λείπει η ακμή μεταξύ των κόμβων 5 και 3 κι άρα τον ίδιο συντελεστή έχουν και οι κόμβοι 3,4,5 λόγω συμμετρίας. Επειδή δε συνδέονται μεταξύ τους οι 2,4 και οι 3,5 ο κόμβος 1 έχει τώρα συντελεστή ίσο με $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Ο μέσος όρος είναι $\frac{4*\frac{2}{3}+1*\frac{4}{6}}{5} = \frac{10}{15} = 0.67$.

Ο πρώτος και ο τρίτος γράφος έχουν σταθερό συντελεστή λοιπόν, ενώ ο δεύτερος απαρτίζεται από έναν κεντρικό (ως προς το betweenness) κόμβο που συνδέει μεταξύ τους πολλές μικρές κλίκες, οι οποίες αυξάνουν το μέσο όρο. Εν αντιθέσει η προσθήκη περισσότερων ακμών μεταξύ των κλικών, αυξάνει μεν το συντελεστή του κεντρικού κόμβου, αλλά μειώνει το συντελεστή των πολλών μελών των κλικών με αποτέλεσμα ο μέσος όρος να μειώνεται εν τέλει.



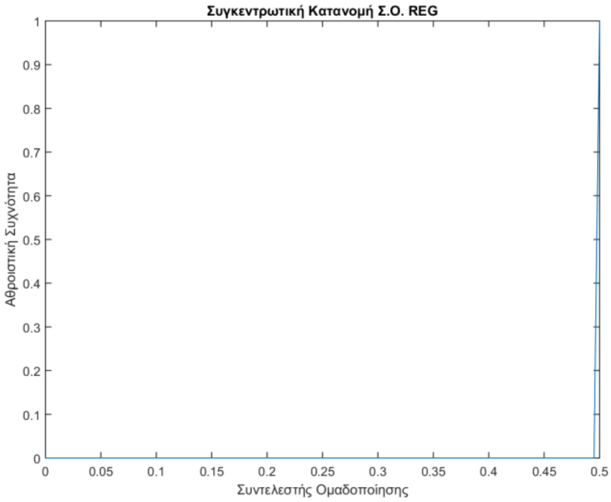




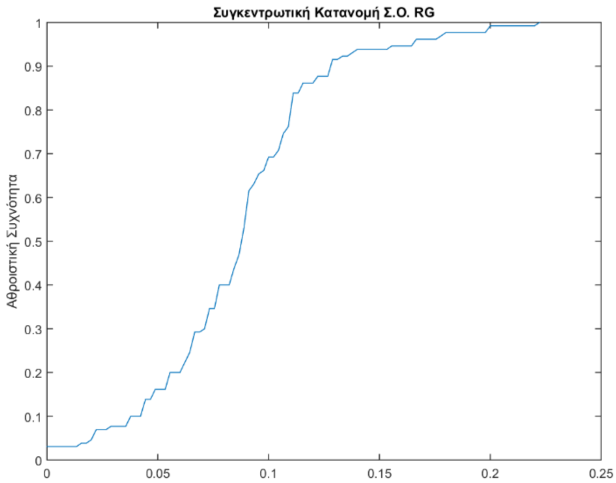
Ε.2 Οι μέσοι όροι κάθε τοπολογίας έχουν ως εξής:

Τοπολογία	REG	RG (ER)	RGG	SF	SW
Συντελεστής Ομαδοποίησης	0.500	0.087	0.667	0.171	0.408

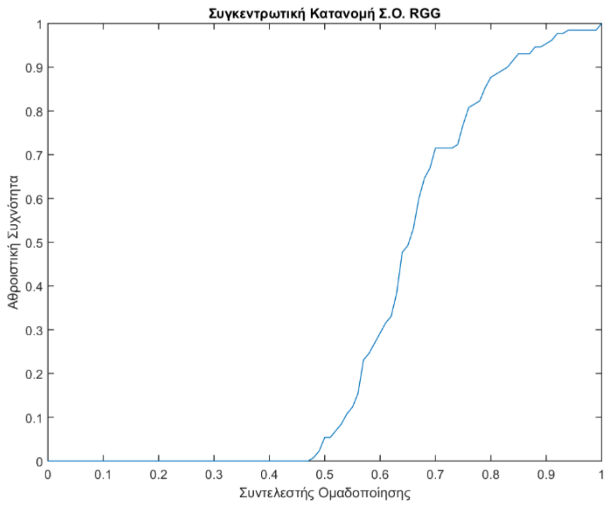
Ο κανονικός γράφος έχει σταθερό συντελεστή ομαδοποίησης 0.5 (λόγω συμμετρίας) που προκύπτει από τις παραμέτρους του γράφου.



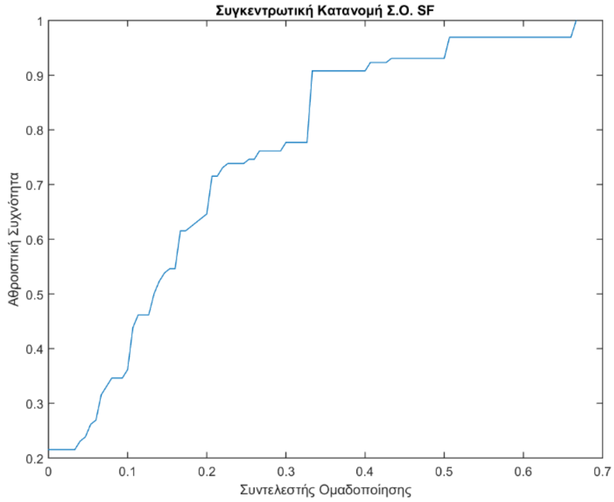
Ο τυχαίος γράφος έχει το μικρότερο μέσο συντελεστή ομαδοποίησης, διότι με μια σχετικά «αραιή» πιθανότητα επιλογής ακμής (750 από τις 8385) η πιθανότητα δημιουργίας πολλών τριγώνων μεταξύ των κατά μέσο όρο 11 γειτόνων κάθε κόμβου είναι σχετικά μικρή (όπως φαίνεται και στο διάγραμμα κανείς κόμβος δεν έχει συντελεστή πάνω από 0.25).

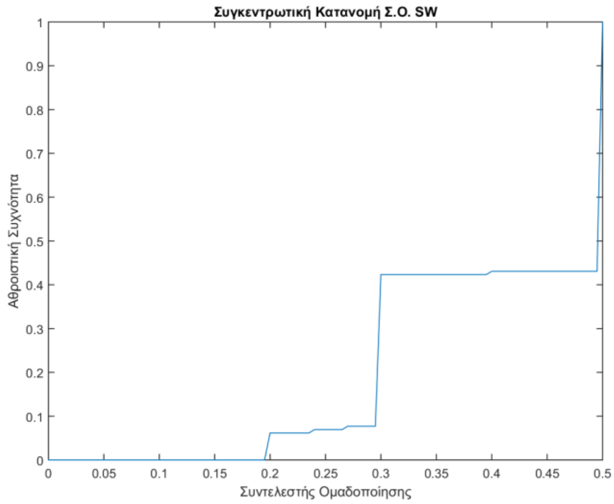


Ο τυχαίος γεωμετρικός γράφος, εν αντιθέσει, έχει υψηλό μέσο συντελεστή ομαδοποίησης, διότι π.χ. όσοι κόμβοι βρίσκονται εντός ενός τετραγώνου πλευράς $\frac{R}{\sqrt{2}}$ συνδέονται μεταξύ τους, σχηματίζοντας μια μεγάλη κλίκα (και δεδομένου ότι αφού $R = \frac{L}{4}$ η πυκνότητα ενός τέτοιου τετραγώνου είναι σημαντική, όπως φαίνεται και από το γράφημα όπου οι περισσότεροι κόμβοι βρίσκονται στην περιοχή 0.5-0.9).

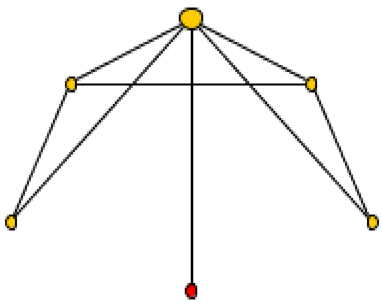


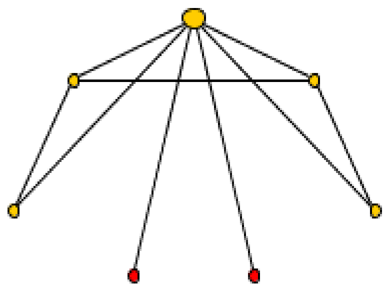
Στον Scale-Free παρατηρούμε ότι το γράφημα αρχίζει από τη συχνότητα 0.2 που αφορά τους λίγους κόμβους μεγάλου βαθμού και πολύ μικρού συντελεστή, λόγω του ότι αυτοί ενώνονται με πολλές ασύνδετες γειτονιές κόμβων. Απ' την άλλη έχουμε απότομες αναβάσεις στις μεγάλες συχνότητες, που οφείλεται στη δημιουργία πολλών κλικών μικρής κλίμακας όπου λίγοι μικροί γείτονες τυχαίνει να ενώνονται με τον ίδιο μεγάλο κόμβο (κατ' αντιστοιχία με το δεύτερο γράφο του Ε.1).



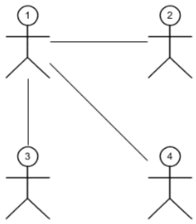


Στον Small-World μεγάλο μέρος των κόμβων εξακολουθεί να έχει συντελεστή ίσο με 0.5, αλλά σε αρκετούς έχει μειωθεί λόγω της προσθήκης τυχαίων ακμών, αυξάνοντας τους ασύνδετους γείτονες. Πράγματι αν προσθέσουμε μια τυχαία ακμή προκύπτει η τοπολογία του πρώτου σχήματος, οπότε ο συντελεστής ομαδοποίησης γίνεται $\frac{3}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10} = 0.3$ που εξηγεί τη μεγάλη αύξηση το 0.3. Η προσθήκη μιας ακόμη ακμής οδηγεί (συνήθως) στη τοπολογία του δεύτερου σχήματος, οπότε ο συντελεστής γίνεται $\frac{3}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{10} = 0.2$ που εξηγεί την επίσης απότομη αύξηση στο 0.2, που όμως γίνεται σε μικρότερο ύψος, αφού είναι λιγότερο πιθανό ένας κόμβος να έχει υποστεί δύο προσθήκες τυχαίων ακμών από ό,τι μία.





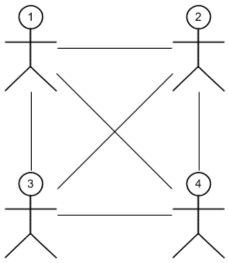
Z) Z.1



Ο 2 έχει degree centrality $\frac{1}{3}$ (κανονικοποιημένο), οπότε το ίδιο έχουν και οι 3,4 λόγω συμμετρίας. Ο 1 συνδέεται με όλους τους άλλους κόμβους οπότε έχει degree centrality 1. Η μέση κεντρικότητα ως προς αυτή τη μετρική είναι λοιπόν $\frac{3*\frac{1}{3}+1}{4} = 0.5$.

Ο 2 έχει closeness centrality $\frac{3}{2*2+1*1} = \frac{3}{5}$ (κανονικοποιημένο), (αφού απέχει απόσταση 2 από τους 3,4 και απόσταση 1 από τον 1) κι όμοια οι 3,4. Ο 1 έχει closeness centrality $\frac{3}{3*1} = 1$, αφού απέχει απόσταση 1 από όλους τους άλλους κόμβους. Η μέση κεντρικότητα είναι $\frac{3*\frac{3}{5}+1}{4} = 0.7$.

Οι 2,3,4 έχουν betweenness centrality 0, αφού κανένας άλλος κόμβος δεν διέρχεται από αυτούς σε κάποιο ελάχιστο μονοπάτι του. 0 1 έχει betweenness centrality ίσο με 1 (κανονικοποιημένο), αφού κάθε μονοπάτι μεταξύ δυο άλλων κόμβων περνάει από τον 1. Η μέση κεντρικότητα είναι $\frac{3*0+1}{4} = 0.25$.



Όλοι οι κόμβοι είναι συμμετρικοί, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε τις τιμές για τον 1 και θα ισχύουν τα ίδια για όλους τους άλλους. Επίσης η μέση τιμή θα προκύπτει προφανώς ίδια με την τιμή των μεμονωμένων κόμβων.

Ο 1 έχει λοιπόν degree centrality ίσο με 1 (κανονικοποιημένο) αφού συνδέεται με όλους τους άλλους κόμβους.

Επίσης έχει closeness centrality ίσο με $\frac{3}{3*1} = 1$ (κανονικοποιημένο) αφού έχει ελάχιστη απόσταση 1 από όλους τους άλλους κόμβους.

Εν τούτοις το betweenness centrality είναι ίσο με 0, αφού κανένα ελάχιστο μονοπάτι δεν διέρχεται μέσω κάποιου ενδιάμεσου κόμβου.

Συγκεντρωτικά τα παραπάνω έχουν ως εξής:

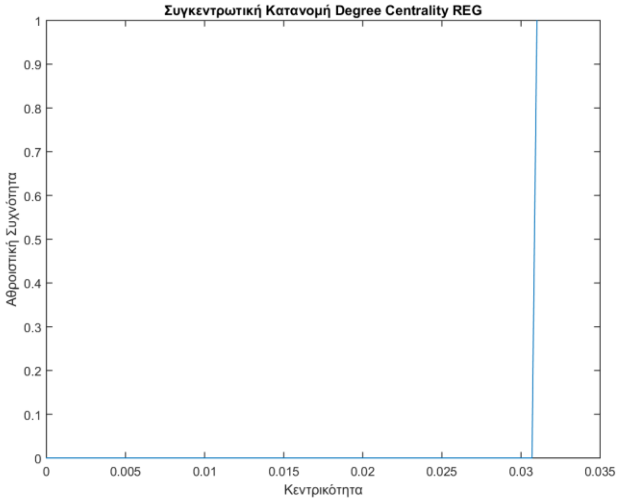
Centrality	Degree	Closeness	Betweenness
$1^{ος}$ Γράφος	0.50	0.70	0.25
$2^{ος}$ Γράφος	1.00	1.00	0.00

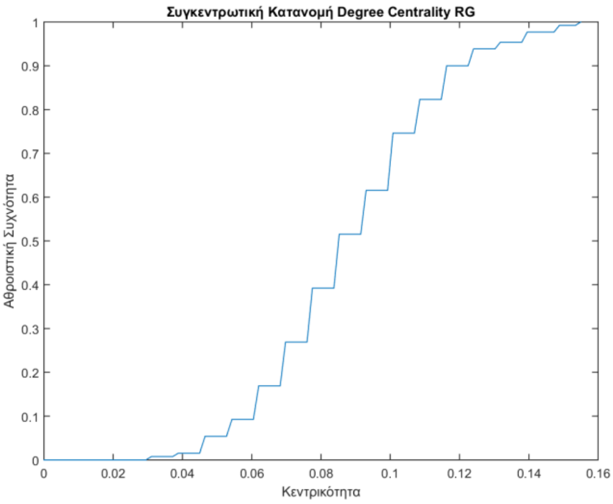
Παρατηρούμε ότι ένας δεντρικός γράφος δεν έχει ιδιαίτερα μεγάλη κεντρικότητα ως προς τις μετρικές degree και closeness καθώς τα φύλλα μειώνουν τον μέσο όρο και στα δύο. Εν τούτοις υπάρχει αισθητή betweenness centrality καθώς κάθε κόμβος που δεν είναι φύλλο εμπεριέχεται μέσα σε ένα ή περισσότερα μοναδικά ελάχιστα μονοπάτια. Στο άλλο άκρο, ένας γράφος κλίκα έχει μέγιστη κεντρικότητα ως προς τις μετρικές degree και closeness αφού τόσο ως προς το βαθμό όσο και στην απόσταση οι πολλές ακμές βελτιώνουν τον μέσο όρο. Αντιθέτως η προσθήκη πολλών ακμών δημιουργεί περισσότερες εναλλακτικές ελάχιστες διαδρομές μειώνοντας τη συνολική betweenness centrality (με την κλίκα να αποτελεί την πιο ακραία περίπτωση όπου ισούται με 0, αφού όλοι οι κόμβοι συνδέονται απ' ευθείας).

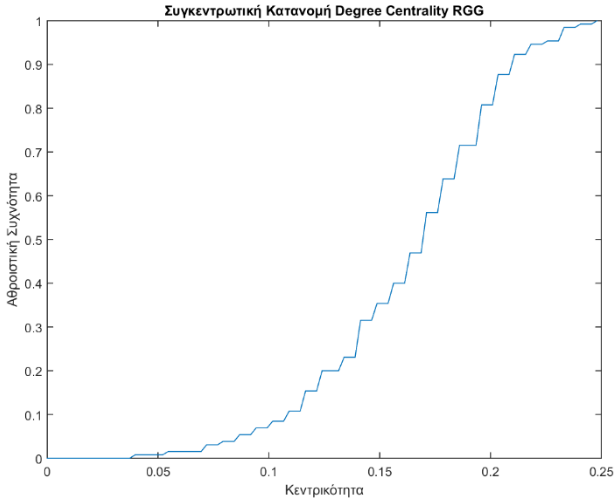
Z.2

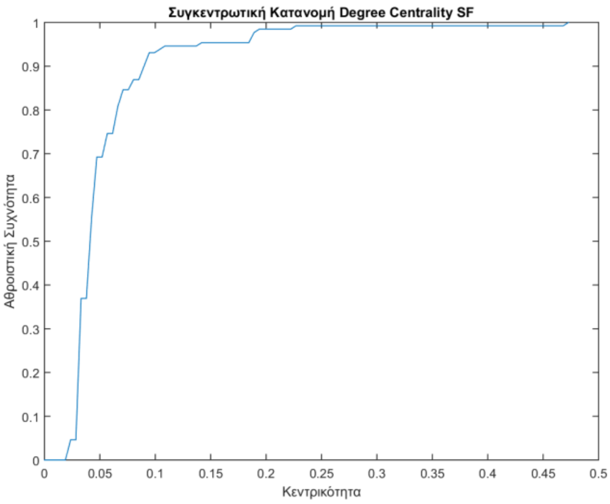
	Degree
REG	0.031
RG	0.089
RGG	0.163
SF	0.055
SW	0.035

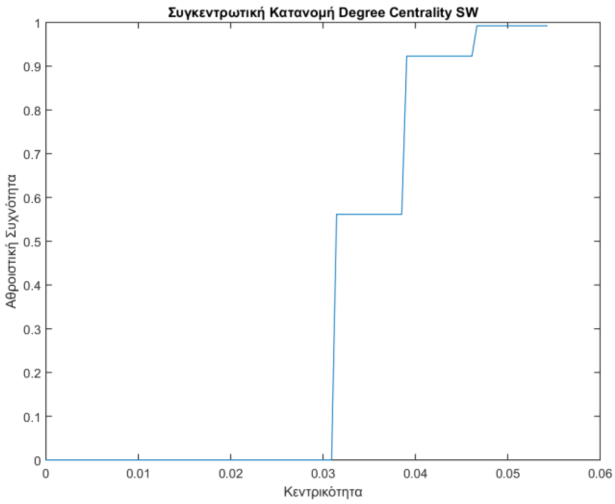
Ως προς το degree centrality, «νικητής» είναι ο RGG το οποίο είναι αναμενόμενο, διότι όπως είδαμε παραπάνω είναι ο πλέον επιρρεπής στη δημιουργία κλικών κι άρα πολλών κόμβων μεγάλου βαθμού. Στο άλλο άκρο ο REG και ο SW έχουν το μικρότερο καθώς έχουν σταθερό μικρό βαθμό με εξαίρεση ορισμένους κόμβους στον SW που έχουν 1 ή 2 παραπάνω (εξ ου και οι απότομες μεταβάσεις του αντίστοιχου διαγράμματος). Στον RG έχουμε λογικές μεταβάσεις και ένα συμμετρικό ανέβασμα που επιβεβαιώνει τη συμμετρία της τυχαιότητας, ενώ στον SF βλέπουμε ότι σχεδόν όλοι οι κόμβοι έχουν χαμηλό βαθμό (εξ ου και η απότομη αρχική ανάβαση του αντίστοιχου διαγράμματος).







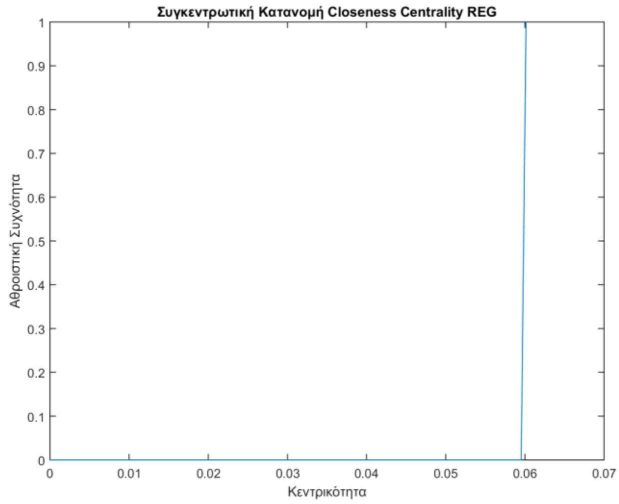


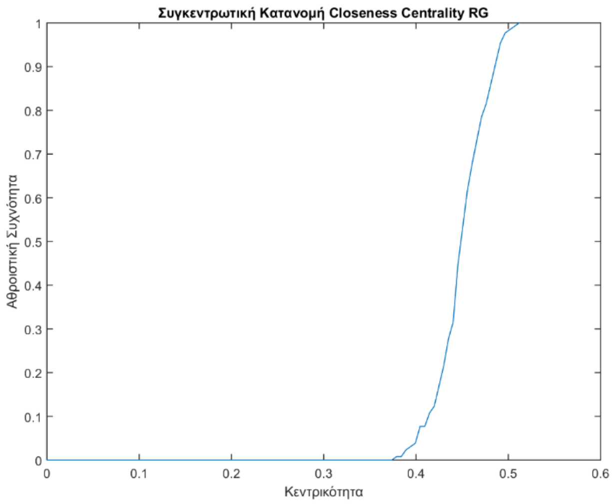


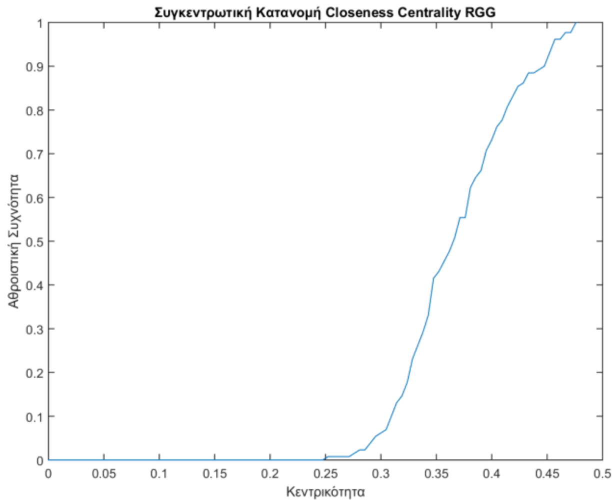
	Closeness
REG	0.060
RG	0.449
RGG	0.369
SF	0.412
SW	0.214

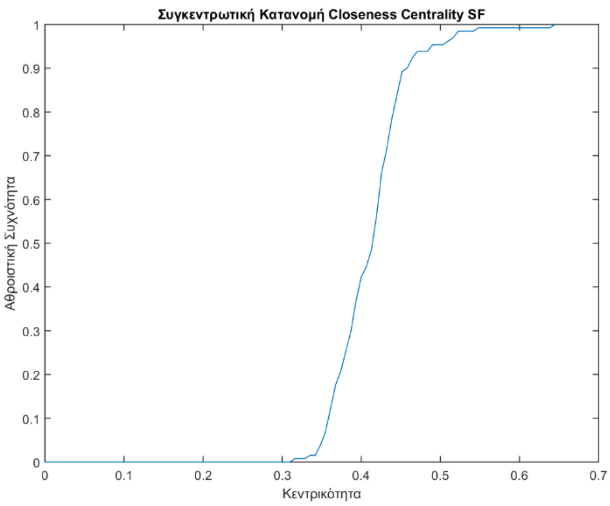
Όλες οι εξαγόμενες μέσες τιμές είναι αναμενόμενες, αν σκεφτούμε ότι παίρνουν τιμές αντιστρόφως ανάλογες του μέσου μήκους μονοπατιού, τις τάσεις του οποίου δικαιολογήσαμε στο ερώτημα Δ για τις διάφορες τοπολογίες.

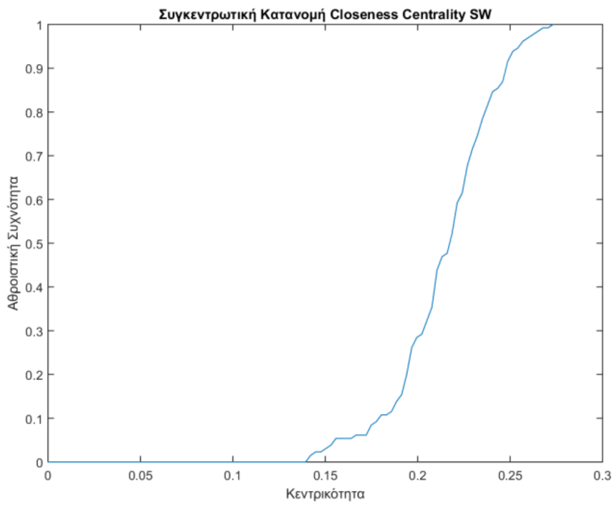
Ως προς τα διαγράμματα, παρατηρούμε γενικά απότομες αν και ομαλές κατανομές (δηλαδή σχετική συσπείρωση γύρω από τις κεντρικές τιμές) με ακραία περίπτωση τον REG λόγω ντετερμινισμού της κατασκευής του.









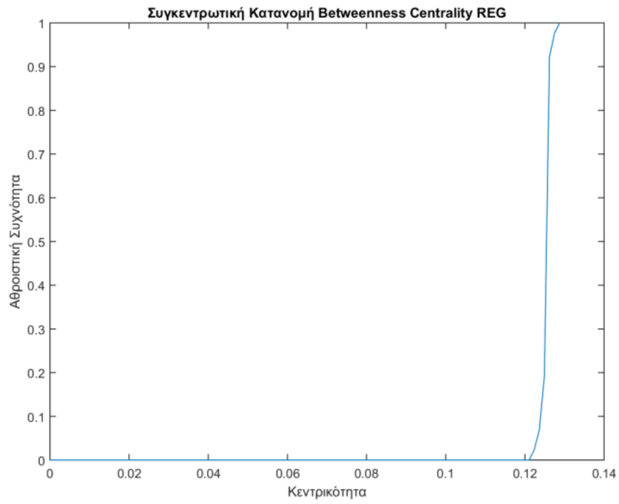


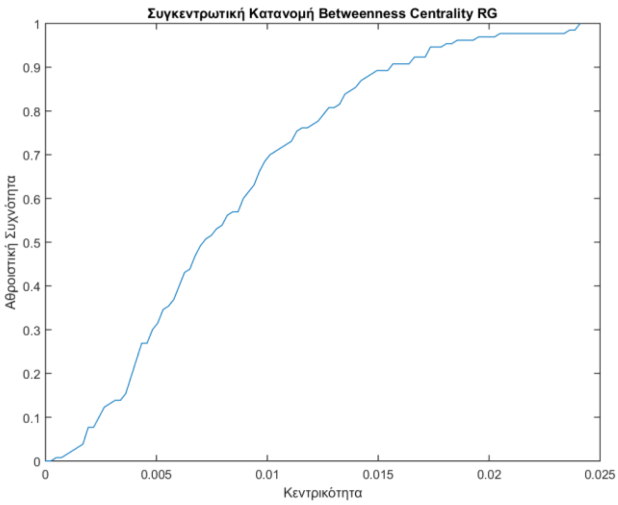
	Betweenness
REG	0.125
RG	0.008
RGG	0.005
SF	0.011
SW	0.033

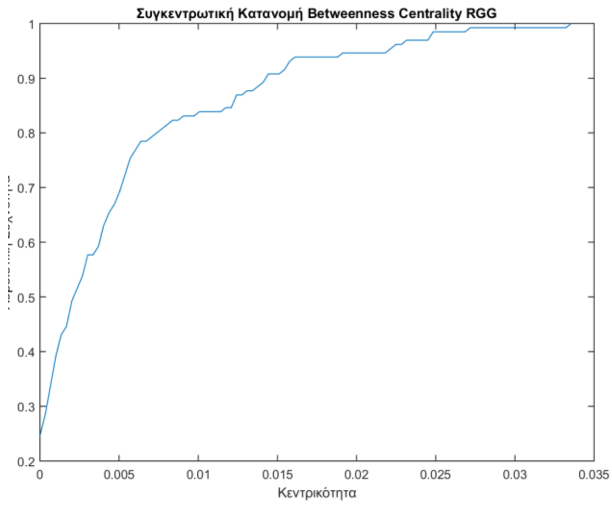
Ο κανονικός γράφος έχει το μεγαλύτερο σταθερό betweenness centrality 0.125 καθώς 1 από τις 8 δυνατές επιλογές (μεταξύ απομακρυσμένων κόμβων) διέρχεται από κάποιον συγκεκριμένο ενδιάμεσο.

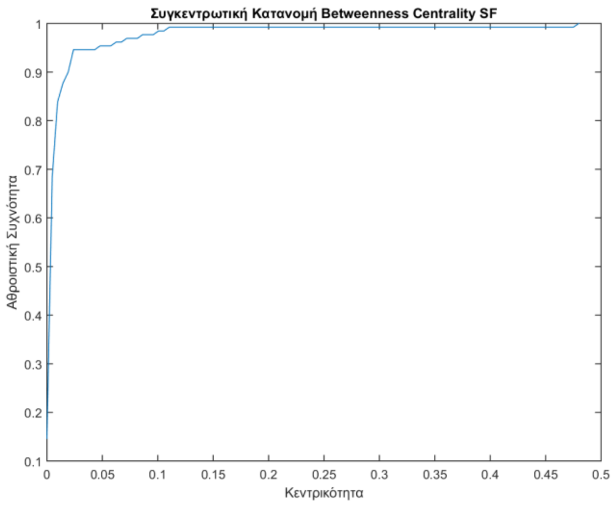
Αντιθέτως στους τυχαίους γράφους παρατηρούμε ότι έχουν δημιουργηθεί πολλά εναλλακτικά μονοπάτια που καταποντίζουν το μέσο όρο έτσι ώστε οι τοπικές τιμές να είναι παντού μικρές. Στον SF βλέπουμε ότι υπάρχουν ελάχιστοι κόμβοι που έχουν πολύ μεγάλο betweenness και όπως είναι αναμενόμενο πρόκειται για τους κόμβους μεγάλου βαθμού για τους προφανείς λόγους.

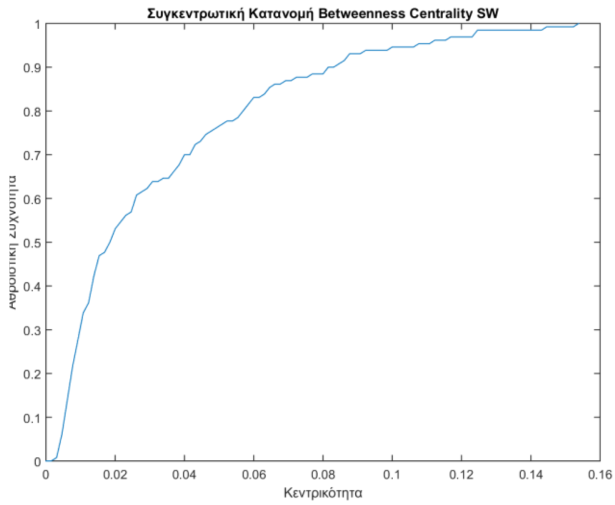
Στον SW παρατηρούμε για ακόμη μια φορά μια ενδιάμεση κατάσταση ανάμεσα στον REG και τον RG.









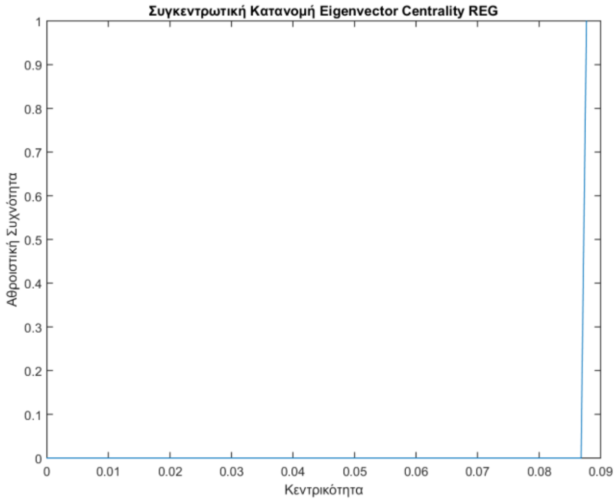


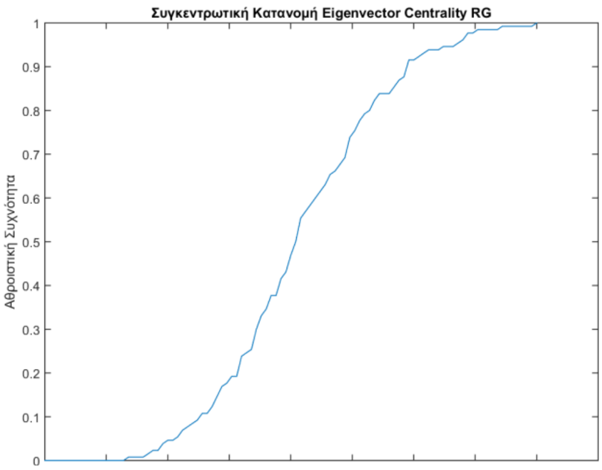
	Eigenvector
REG	0.088
RG	0.084
RGG	0.079
SF	0.070
SW	0.079

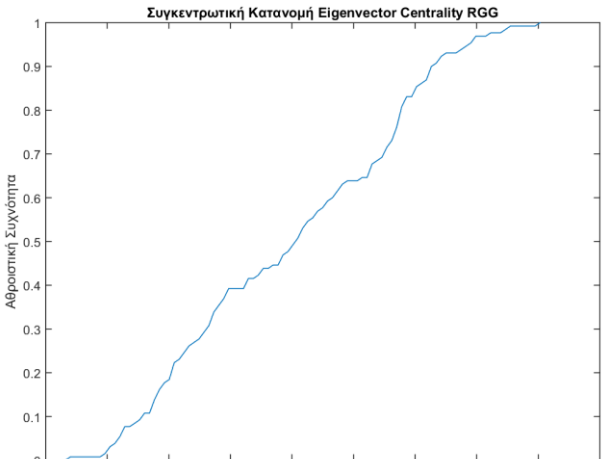
Για ακόμη μια φορά, παρατηρούμε ότι τα γραφήματα συμβαδίζουν με τις θεωρητικώς αναμενόμενες τιμές. Στον κανονικό γράφο, λόγω συμμετρίας όλοι οι κόμβοι έχουν ίδιο eigenvector centrality και επειδή όλοι οι κόμβοι έχουν έτσι την ίδια αξία, προκύπτει η ελαφρά αυξημένη μέση τιμή.

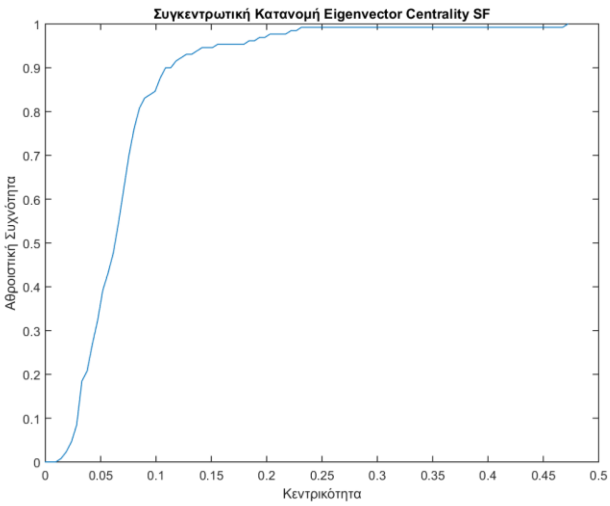
Στον SF αντίθετα υπάρχουν λίγοι σημαντικοί κόμβοι (με πολλές ακμές) και πάρα πολλοί ασήμαντοι με λίγες μόνο ακμές. Μπορούμε να παρατηρήσουμε την αντιστοιχία με σελίδες του Internet όπου υπάρχουν λίγες σελίδες πολύ μεγάλης επισκεψιμότητας με συνδέσεις από πολλές σελίδες μικρότερης επισκεψιμότητας.

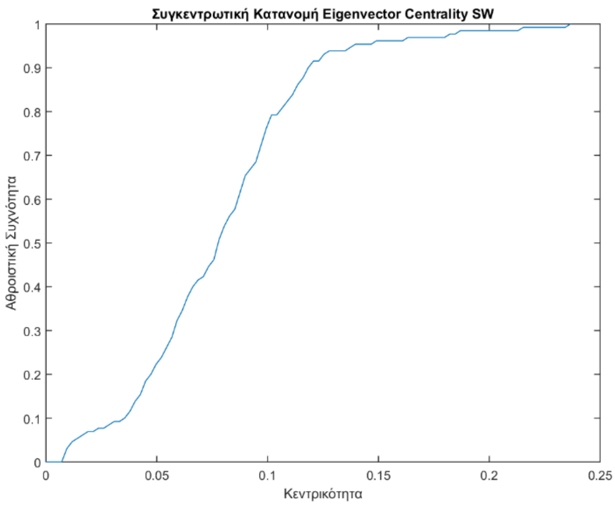
Οι τυχαίοι γράφοι βρίσκονται κάπου στη μέση με ομοιόμορφη κατανομή, όπως επίσης και ο SW βρίσκεται κατά τα γνωστά ανάμεσα στον REG και τον RG.





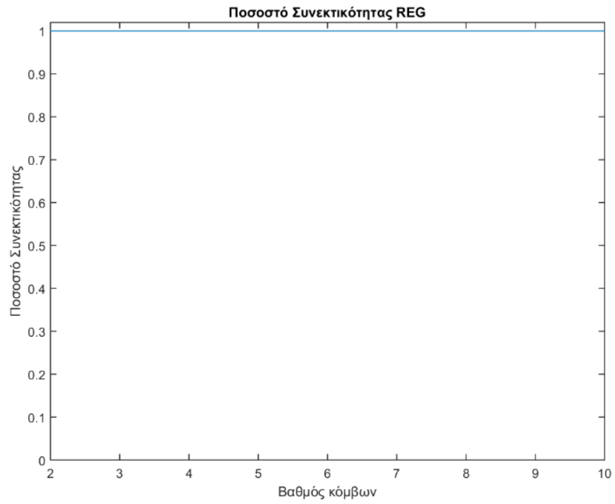




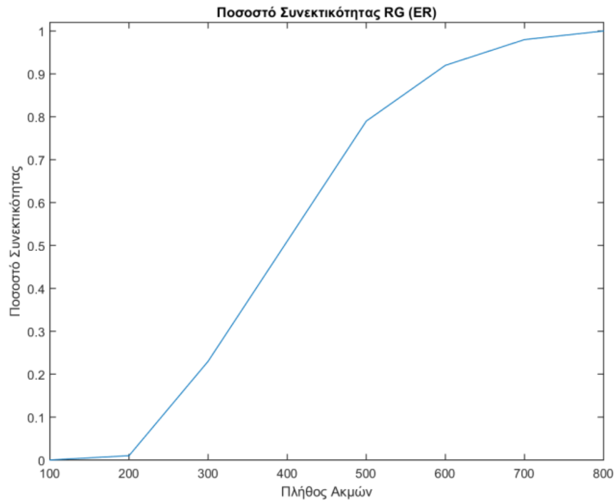


H)

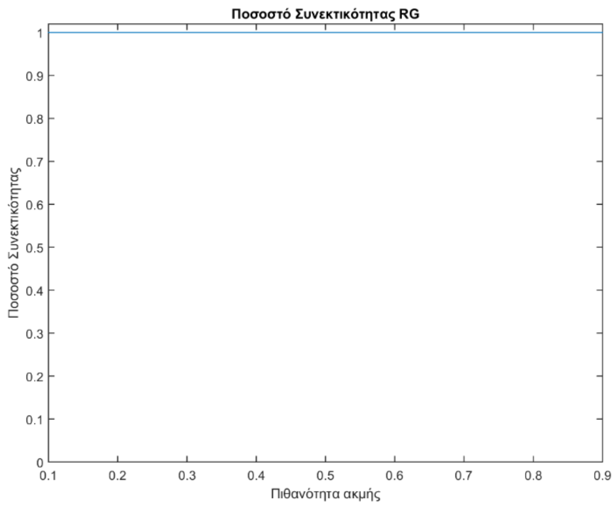
Ο κανονικός γράφος εκ κατασκευής είναι πάντοτε συνδεδεμένος για κάθε d, το οποίο φαίνεται και στο διπλανό διάγραμμα (όπου ασφαλώς δεν υπάρχουν φαινόμενα κατωφλίου).



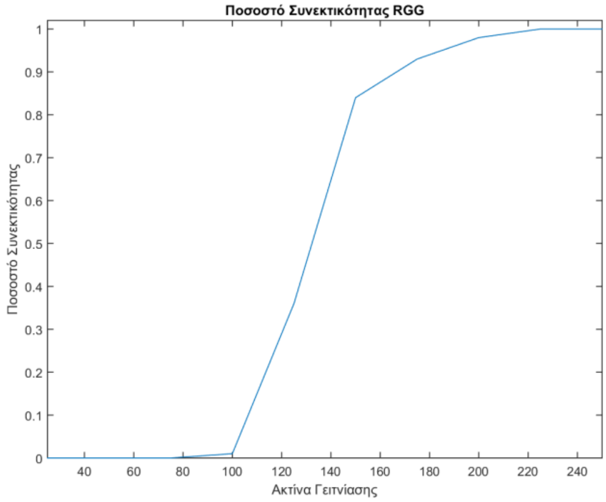
Από ό,τι φαίνεται στο γράφημα, ο τυχαίος γράφος Erdos-Renyi για τις δοθείσες παραμέτρους παρουσιάζει φαινόμενο κατωφλίου με σχετικά ομαλή μετάβαση φάσης. Η θεωρητική αναμενόμενη τιμή του κρίσιμου σημείου είναι κοντά στο $p = \frac{logn}{n} = 0.054$ κι άρα για $M = \binom{130}{2} * 0.054 \simeq 453$. Όπως βλέπουμε στο γράφημα, εκεί περίπου είναι και το σημείο που η αντίστοιχη πιθανότητα είναι μεγαλύτερη του $\frac{1}{2}$.



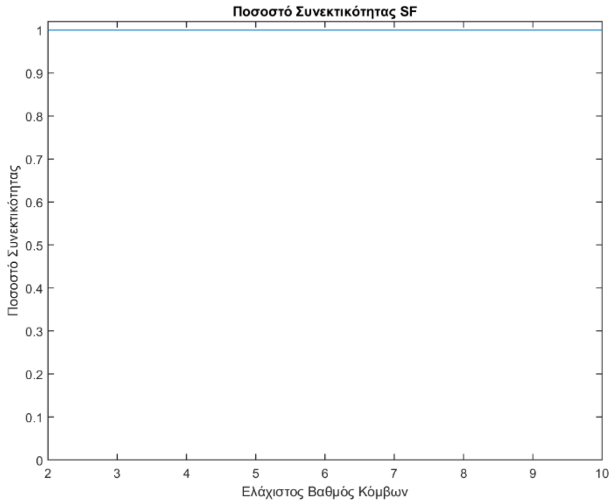
Ο τυχαίος γράφος Gilbert είναι επίσης μόνιμα συνεκτικός για $p > 0.1$ το οποίο δικαιολογείται αν αναλογιστούμε ότι στον τυχαίο γράφο Erdos-Renyi, ο γράφος είναι συνεκτικός με πιθανότητα 1, για $M = 800$, όπου έχουμε ότι η αντιστοιχία στο εν λόγω μοντέλο είναι (ακόμη και για το μικρότερο δυνατό n) ίση με $p = \frac{800}{\binom{100}{2}} = 0.16$. Δηλαδή αυτό το γράφημα αποτελεί κατά κάποιο τρόπο, συνέχεια του προηγούμενου το οποίο είχε ήδη προσεγγίσει τη μέγιστη τιμή και για αυτό δεν παρουσιάζεται κάποιο φαινόμενο κατωφλίου.



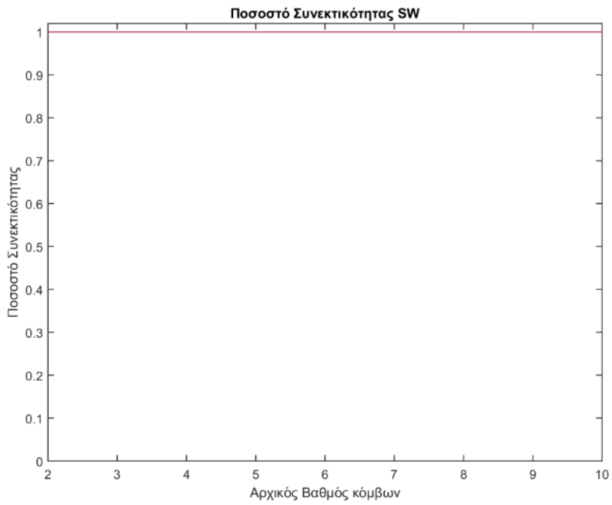
Παρατηρούμε ότι και ο τυχαίος γεωμετρικός γράφος παρουσιάζει φαινόμενο κατωφλίου με μάλλον απότομη φάση μετάβασης. Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, το κρίσιμο σημείο πέρα από το οποίο είναι συνδεδεμένο είναι το $\sqrt{\frac{2*1000^2*\ln(1000)}{200}} \simeq 263$ και το κρίσιμο σημείο κάτω από το οποίο είναι ασύνδετο είναι το $\frac{\sqrt{1000^2*\ln(1000)}}{2*200} \simeq 131$. Τα αντίστοιχα σημεία στο διάγραμμα είναι τα 100 και 200, οπότε δεδομένου και της ασυμπτωτικής ισχύος των παραπάνω τύπων, υπάρχει αρκετά καλή συμφωνία.



Στον Scale Free παρατηρούμε ότι πάντοτε έχουμε συνδεδεμένο γράφο το οποίο είναι αναμενόμενο, αφού κατά πάσα πιθανότητα ένας κόμβος θα είναι συνδεδεμένος σε κάποιον από τους κόμβους μεγάλου βαθμού (και αυτοί μεταξύ τους), οπότε προκύπτει συνδεδεμένος γράφος.



Στο Small World παρατηρούμε ότι επίσης για όλες τις δοθείσες παραμέτρους η αντίστοιχη κατανομή βρίσκεται σταθερά στο 1, που σημαίνει ότι ο small world είναι μόνιμα συνδεδεμένος για όλο αυτό το μεγάλο εύρος χαρακτηριστικών, (κάτι που συμβαδίζει τόσο με το χαρακτηριστικό του, ότι δύο οποιοιδήποτε κόμβοι συνδέονται μετά από κατά μέσο όρο 5-6 βήματα, όσο και με το τρόπο που κατασκευάζεται).

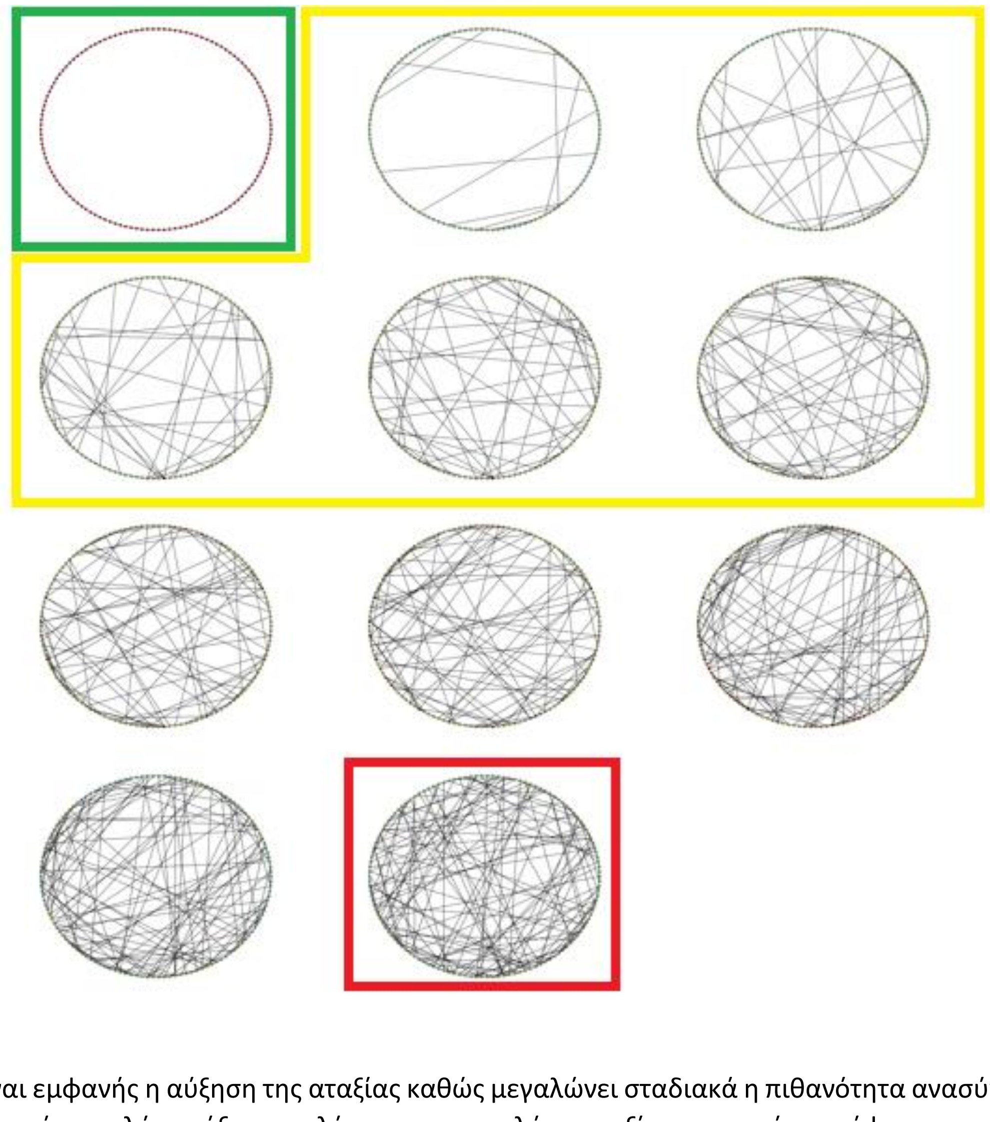


Θ) Χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική αντιστοιχία μεταξύ των δύο μοντέλων $p * \binom{N}{2} = M$, υπολογίζουμε:

Τοπολογία	N	100	1000	10^4	10^5	10^6
RG (G)	p	0.1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
RG (ER)	M	495	4995	49995	499995	4999995

Παρατηρούμε ότι για σταθερό $Np = 10$, υπάρχουν πολλές πιθανές τιμές του M, οι οποίες αυξάνουν σχεδόν γραμμικά ως προς N. Φαίνεται δηλαδή, γιατί πρέπει $Np * N = pN^2 \to \infty$ για να αρχίσει να γίνεται πιο έντονη η ισοδυναμία των δύο μοντέλων.

Ι) Οπτικά η πορεία του γράφου έχει ως φαίνεται στα σχήματα που ακολουθούν.

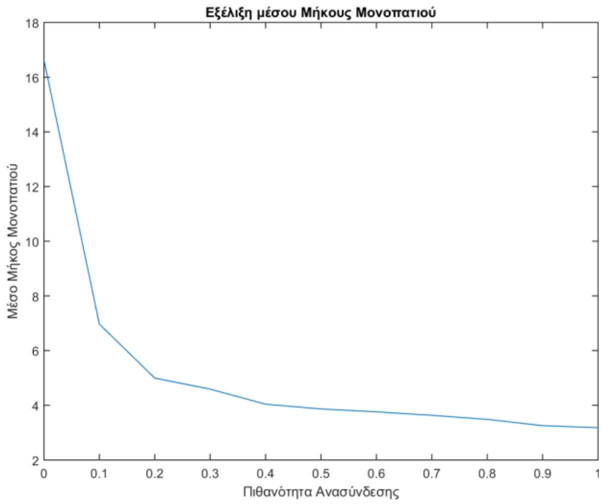


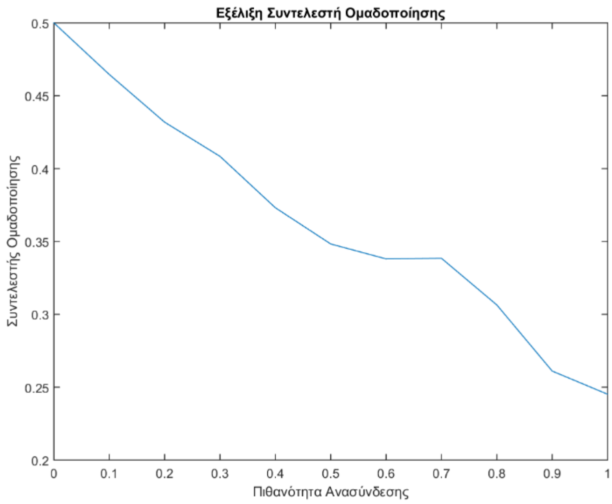
Είναι εμφανής η αύξηση της αταξίας καθώς μεγαλώνει σταδιακά η πιθανότητα ανασύνδεσης g_p από την πλήρη τάξη του πλέγματος στην πλήρη αταξία του τυχαίου γράφου.

Η πορεία του μέσου μήκους μονοπατιού και του μέσου συντελεστή ομαδοποίησης κατά τη διάρκεια της εξέλιξης:

Πιθανότητα Ανασύνδεσης	Μέσο Μήκος Μονοπατιού	Μέσος Συντελεστής Ομαδοποίησης
0.0	16.63	0.50
0.1	6.97	0.46
0.2	4.99	0.43
0.3	4.59	0.41
0.4	4.04	0.37
0.5	3.87	0.35
0.6	3.76	0.34
0.7	3.63	0.34
0.8	3.49	0.31
0.9	3.26	0.26
1.0	3.18	0.25

και διαγραμματικά:





Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια ομαλή μείωση του συντελεστή ομαδοποίησης καθώς αυξάνει η πιθανότητα ανασύνδεσης, το οποίο είναι φυσιολογικό, καθώς όπως προστίθενται ή ανασυνδέονται τυχαίες ακμές, το ποσοστό των γειτονικών κόμβων που συνδέονται μεταξύ τους μειώνεται.

Από την άλλη, το μέσο μήκος μονοπατιού έχει μια απότομη μείωση ήδη από $g_p = 0.1$ και έχει μία πιο ομαλή μείωση έως $g_p = 0.5$. Στη συνέχεια συνεχίζει να μειώνεται, αλλά με πολύ μικρότερο ρυθμό. Η απότομη αυτή μείωση δικαιολογείται αν αναλογιστούμε ότι έστω και λίγες τυχαίες ακμές δημιουργούν αισθητά συντομότερα μονοπάτια μεταξύ απομακρυσμένων (στον κανονικό γράφο) κόμβων.

Εν τούτοις, ανακύπτει λοιπόν ένας πιθανός ορισμός των Small-World δικτύων μέσω της συμπεριφοράς του μέσου μήκους μονοπατιού στην περιοχή g_p από 0.1 ως 0.5. Μπορούμε να πούμε ότι Small-World δίκτυο είναι, λοιπόν, ένας τυχαίος γράφος που έχει την ιδιότητα το μέσο μήκος μονοπατιού του να κυμαίνεται στην περιοχή $4 - 7$.