1. 논리와 증명

구미2반 김미진

$\wedge \Rightarrow$ and $\quad \vee \Rightarrow$ or

문제 3.

① $p \wedge (p \vee q)$ 와 p

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

$\Rightarrow$ 동등.

문제 4.

① $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \Rightarrow p$

② $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim q$.

문제 5.

① 거짓 반례) $x = 0.1$

② 참

③ 참

④ 거짓. 반례) $x = 0$.

문제 6. n이 짝수이면 $3n+5$는 홀수.

$\Rightarrow n = 2k$

$3n+5 = 6k+5 = 2(3k+2)+1$ 이므로 홀수.

문제 7.

$n = 2k+1$

$n^2+n = (4k^2+4k+1)+(2k+1) = 4k^2+6k+2 = 2(2k^2+3k+1)$ 이므로 짝수.

문제 8.

$m = 2k \quad n = 2i+1$

$2m+3n = 4k+3(2i+1) = 4k+6i+3 = 2(2k+3i+1)+1$. 이므로 홀수.

문제 10. n이 홀수면 n^2이 홀수다.

$n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$

대우가 참이므로 명제도 참.

문제 11.

1) n이 홀수 ($n = 2k+1$)

$$n^2 + 5n + 3 = (2k+1)^2 + 5(2k+1) + 3$$
$$= 4k^2 + 4k + 1 + 10k + 5 + 3 = 4k^2 + 14k + 9$$
$$= 2(2k^2 + 7k + 4) + 1.$$

2) n이 짝수 ($n = 2k$)

$$n^2 + 5n + 3 = 4k^2 + 10k + 3 = 2(2k^2 + 5k + 1) + 1$$

$\Rightarrow$ $n^2 + 5n + 3$은 홀수

문제 12. n^2이 3의 배수이면 n은 3의 배수.

→ 대우 : n이 3의 배수가 아니면 n^2은 3의 배수가 아니다.

$n = 3k+1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$

$\Rightarrow$ 3의 배수 아님.

$n = 3k+2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

문제 13.

$n = 4k+1 \rightarrow n^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1$

$n = 4k+3 \rightarrow n^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1.$

↳ 8로 나누기 위해 4로 줌.

문제 14.

$n = 3k \rightarrow n^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$

$n = 3k+1 \rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k + 1)$

$n = 3k+2 \rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

$\Rightarrow$ 나머지 2가 없음.

1. $\sqrt{2}$는 무리수임을 증명하라.

가정) $\sqrt{2} \Rightarrow$ 유리수.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (p & q ⇒ 서로소). $\nearrow$ $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$

$p^2 = 2q^2$ 으로 p^2이 짝수이므로 p도 짝수. ($p=2k$)

$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q^2$이 짝수이므로 q도 짝수.

⇒ p와 q가 모두 짝수이므로 서로소가 아님.

⇒ 명제가 틀렸으므로 $\sqrt{2}$는 무리수.

문제 17. $\log_2 5$는 무리수임을 증명하라.

가정) $\log_2 5 \Rightarrow$ 유리수.

$$\log_2 5 = \frac{a}{b} = \frac{\log 5}{\log 2} \Rightarrow \log 2^a = \log 5^b$$

$\Rightarrow 2^a = 5^b$. $\left\langle \begin{array}{l} 2^a = \text{짝수} \\ 5^b = \text{홀수} \end{array} \right.$ ⇒ 가정이 거짓

⇒ $\log_2 5$는 무리수.

문제 19. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$$f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$f(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

$$f(n) + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

$\Rightarrow f(n+1) = f(n) + (n+1)^2$ 이므로 $f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

문제 20. $r \neq 1$일 때,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$ 임을 증명하라.

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \rightarrow f(n) \cdot r^{n+1} = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \times (r^{n+1})$$

$$f(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} r^i = \frac{r^{n+2}-1}{r-1} \qquad = \frac{r^{n+2}-1}{r-1}$$

$\Rightarrow f(n) \cdot r^{n+1} = f(n+1)$ 이므로 증명.

문제 21. 2이상의 모든 자연수 n에 대해 $n^3 - n$은 6으로 나눠 떨어짐.

$$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n+1)(n-1)$$

연속된 3자리 수에는 2의 배수와 3의 배수가 존재하므로

항상 6의 배수임.

문제 22. 모든 자연수 n에 대해 $\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ 임을 증명하라.

$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ 이 맞다고 가정.

$$\sqrt{n+1} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\rightarrow \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

이 식이 참이 되므로

귀납적 증명에 의해

위의 명제는 참이 됨.

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$

$$\sqrt{n(n+1)} + \cancel{1} \qquad n + \cancel{1}$$

$$\sqrt{n^2+n} > \sqrt{n^2}$$

$\Rightarrow$

와 표현

문제 1. 2진수 표현에서 $\log n$ 비트로 표현할 수 있는 숫자 범위?

$\Rightarrow 0 \sim 2^{\log n} - 1.$

문제 2. 스무고개

$\Rightarrow$ 1개.

문제 3.

① $2n \ (<) \ n^2 \Rightarrow 2 \ (<) \ n$

n이 충분히 큰 값이므로 n^2이 더 큼

② $2^{\frac{n}{2}} \ (<) \ \sqrt{3^n} \Rightarrow 2^n \ (<) \ 3^n$

제곱했을 때, $\sqrt{3^n}$이 더 큼

③ $2^{n\log_2 n} \ (>) \ n!$

$\Rightarrow n^n > n!$

$n^n = n \times n \times \cdots \times n$

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1.$

문제 4. $x = \log_a yz.$

$$= \frac{\log_2 yz}{\log_2 a} = \frac{\log_2 y + \log_2 z}{\log_2 a}$$

문제 5. 역함수를 구하라.

① $f(x) = \log(x-3)-5$

$\Rightarrow y = \log(x-3)-5$

$\Rightarrow y+5 = \log(x-3)$

$\Rightarrow x-3 = 10^{y+5}$

$\Rightarrow x = 10^{y+5}+3.$

$\therefore f(x)^{-1} = 10^{x+5}+3.$

② $f(x) = 3\log(x+3)+1$

$\Rightarrow y-1 = 3\log(x+3)$

$\Rightarrow \log(x+3) = \frac{y-1}{3}$

$\Rightarrow x+3 = 10^{\frac{y-1}{3}}$

$\Rightarrow x = 10^{\frac{y-1}{3}} - 3$

$\therefore f(x)^{-1} = 10^{\frac{x-1}{3}} - 3.$

문제 23. $n \times n$의 체스판.

감염되지 않은 칸 ⇒ 상하나 좌우로 인접한 4칸 中 2개 이상이 감염되면

초기에 n개 이상의 칸들이 감염되어 있어야 함을 증명하라.

⇒ 2개 이상이 감염된 경우, 감염이 되므로 대각선 모양으로 놓여야 한다.

이 때, n개가 되지 않을 경우, 감염이 되지 않는다.

↳ 이유 : 다음 번에 감염되는 칸은 항상 (현재 감염된 칸 - 1)개이다.

모두 확산이 되었을 때, 남아있기에 최소 n개 필요.

예) $n=4$.

바이러스 = 초기 (가)

⇒ $3+2\times(2)+1\times(2) = 3+4+2=9$.

But, 초기 판 $= 16-9=7$.

집합과 조합론

1.

$_nC_k + {}_nC_{k-1}$

$$= \frac{n! \times (n-k+1)}{k!\,(n-k)! \times (n-k+1)} + \frac{n! \times k}{(k-1)!\,(n-k+1)! \times k} = \frac{n!\,(n-k+1+k)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = {}_{n+1}C_k.$$

문제 2.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

문제 3.

문제 4. $(A-B)\cap(B-A)=\phi$ 를 증명하라.

귀류법). $(A-B)\cap(B-A)\neq\phi$.

$$(A\cap B^c)\cap(B\cap A^c) = (A\cap A^c)\cap(B\cap B^c) = \phi\cap\phi = \phi.$$

문제 5. $\exists x\,(x\in A \wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A) \Rightarrow$ 두 집합 (A와 B)는 다르다.

$\Rightarrow$ $(A-B)\cap(B-A)$.

① 집합 A와 B는 다르다.

→ $(A-B)\cap(B-A)$를 만족하는 원소 x가 존재한다는 의미.

$(A-B)$ 또는 $(B-A)$에 원소가 하나 이상 존재하므로 명제 참.

② 집합 A와 B는 같다. $(A-B)=(B-A)=\phi$ 이므로 명제 거짓.

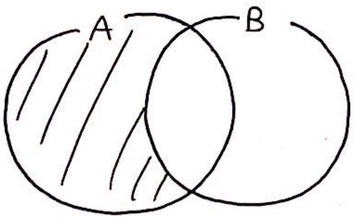
문제 6. $(A\cup B)\cap(A\cap B)^c=(A-B)\cup(B-A)$

$$(A-B)\cup(B-A) = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B) = (A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)$$

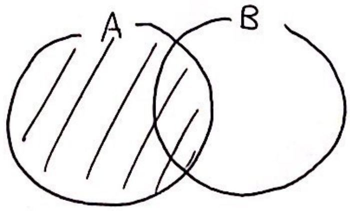
$$= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c$$

문제 7. $\oplus\Rightarrow$ 합집합에서 교집합을 뺀 것. →벤다이어그램 이용.

$(A\oplus B)\oplus B=A.$

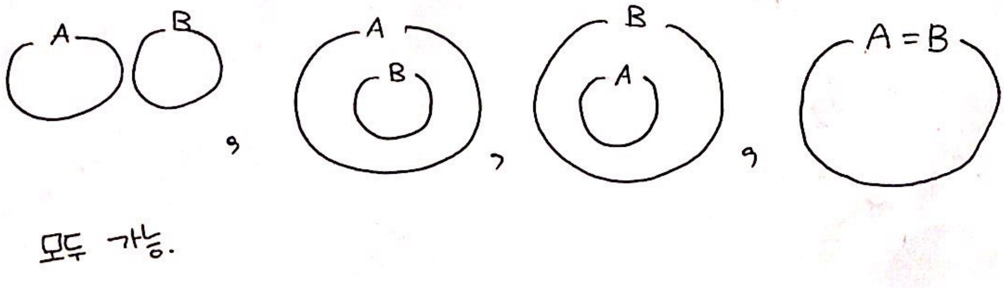


$A\oplus B$



$(A\oplus B)\oplus B.$

다른 경우,



모두 가능.

8×8 체스판에 2개의 말을 놓을 수 있는 가능한 방법?

↳ 똑같은 말이므로

$\Rightarrow {}_{64}C_2$

문제 9. 증명 ×.

부분집합 원소가 없는 경우 $\Rightarrow {}_nC_0$

" 1개 있는 경우 $\Rightarrow {}_nC_1$

" 2개 있는 경우 $\Rightarrow {}_nC_2$

⋮

" n개 있는 경우 $\Rightarrow {}_nC_n$.

$\Rightarrow {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$

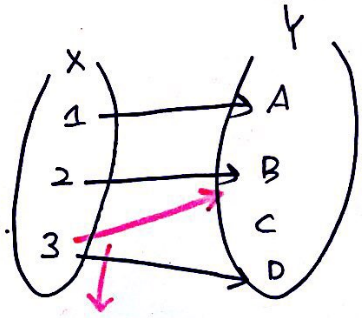
$= 2^n$. (이항정리에 의해).

문제 10. 비밀번호 0~9 숫자. 최대 1번 사용. 4개 ~ 6개 이하.

4개일 경우, ${}_{10}C_4 \times 4!$

5개일 경우, ${}_{10}C_5 \times 5!$

6개일 경우, ${}_{10}C_6 \times 6!$



문제 11.

원소 m개에서 원소 n개의 집합으로 가는 단사함수의 개수.

$\Rightarrow {}_nC_m \times m!$ (조건, $n \geq m$).

5개 카드의 조합은? 〉

문제 12. ${}_{52}C_5$ 〈 52개의 트럼프 카드를 이용해 만들 수 있는 ${}_4C_2\,{}_{13}C_1 \times {}_{13}C_1$

↳같은 ⇒문자가 정확히 3개인 경우

문제 13. ${}_4C_1 \times ({}_{13}C_3 \times {}_{39}C_2)$.

문제 14. ${}_3H_{97} = {}_{99}C_{97} = {}_{99}C_2 = \dfrac{99 \cdot 98}{2 \cdot 1} = 4851$. → $x+y+z=100$ ".

문제 15. 3^5

문제 16. ${}_{13}C_5 \times 4^5$ ⇒숫자가 같은 카드가 한 쌍도 없는 경우.

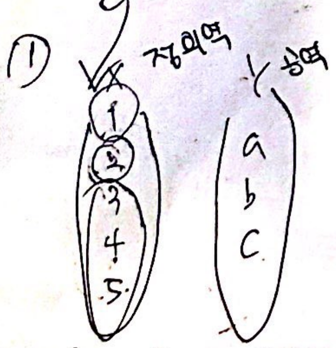
↳ $99 \cdot 49$

$= (100-1)(50-1)$

$= 5000 - 150 + 1$

$= 4851$

문제 17. $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ⇒ $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$



전사함수 ⇒ 공역과 치역이 같은 함수.

${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 3!$ + ${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3!$