

Computação Gráfica 2D

1 Transformações 2D Afins

Uma transformação afim mantém o **paralelismo** de retas. São exemplos a translação, escala, rotação, reflexão e cisalhamento. A projeção em perspectiva não é uma transformação afim. O mesmo vale para transformações de *tapering*, *twist* e *bend* [4].

Transformações afins envolvendo rotações, translações e reflexões preservam ângulos e comprimentos, da mesma forma como linhas paralelas. Para estas três transformações, comprimentos e ângulos entre duas linhas permanecem o mesmo após a transformação [2].

Utiliza-se matrizes para representar transformações. Ver seção de Matrizes.

Translação

Definida pela soma de fatores de translação t_x e t_y as coordenadas x e y do ponto. É uma soma de matrizes

$$\begin{aligned}x' &= x + T_x \\ y' &= y + T_y\end{aligned}$$

$$P' = P + T$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + T_x \\ y + T_y \end{bmatrix}$$

Escala

Definida pela multiplicação de fatores de escala S_x e S_y as coordenadas do ponto. É representada por uma multiplicação de matrizes.

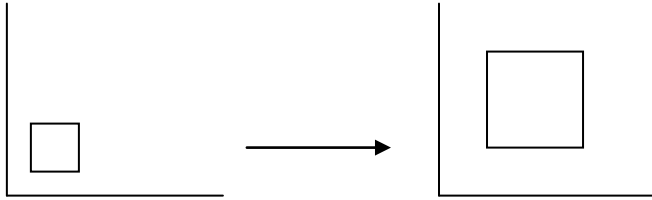
$$\begin{aligned}x' &= x * S_x \\ y' &= y * S_y\end{aligned}$$

$$P' = T \cdot P$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xS_x \\ yS_y \end{bmatrix}$$

Se $S_x > 1 \rightarrow$ aumenta o tamanho do objeto
 $S_x < 1 \rightarrow$ diminui o tamanho do objeto
 $S_x = 1 \rightarrow$ mantém o tamanho
 $S_x = S_y = n \rightarrow$ escala uniforme

OBS: a escala pode mudar a posição do objeto. Depende do referencial.

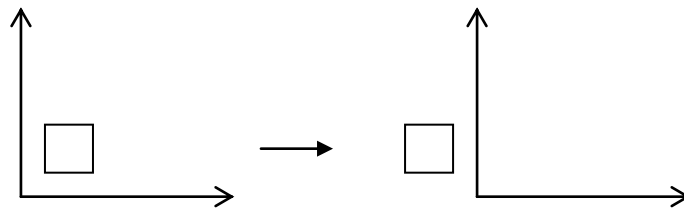


Reflexão

$$x' = -x$$

$$y' = y$$

$$P' = T \cdot P$$



$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Cisalhamento

Transformação que distorce o formato do objeto. Aplica-se um deslocamento aos valores das coordenadas x ou y do objeto proporcional ao valor das outras coordenadas de cada ponto transformado.

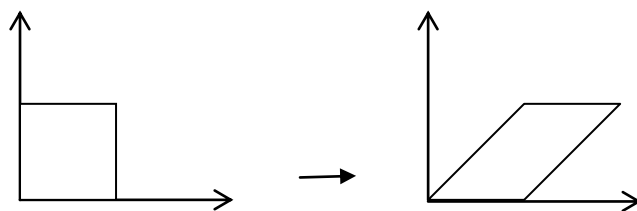
$$x' = x + S_y \cdot y$$

$$y' = y$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & S_y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

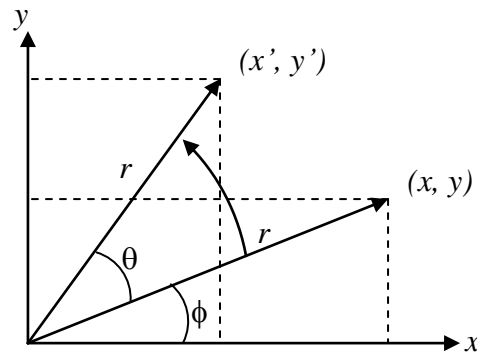
$$P' = T \cdot P$$

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & S_y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + S_y \cdot y \\ y \end{bmatrix}$$



Rotação

Rotacionar um vetor significa mudar sua direção segundo algum eixo de rotação. Para um vetor bidimensional, ou seja, paralelo ao plano xy, significa reposicioná-lo sobre um caminho circular, como ocorre com o movimento dos ponteiros de um relógio. O eixo de rotação é um vetor perpendicular ao plano xy e passa pelo centro de rotação. A rotação é especificada por um ângulo θ (**Coordenadas Polares**). Valores positivos de θ geram uma rotação no sentido anti-horário. Neste exemplo, considera-se que o centro de rotação é a origem do sistema de coordenadas.



Rotação de um vetor da posição (x,y) para a posição (x', y') segundo um ângulo θ relativo à origem do sistema de coordenadas.

Em uma rotação, a norma r do vetor permanece inalterada. Usando identidades trigonométricas, pode-se expressar as coordenadas transformadas em termo dos ângulos ϕ e θ .

$$\begin{aligned}x' &= r \cos(\phi + \theta) = r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta \\y' &= r \sin(\phi + \theta) = r \cos \phi \sin \theta + r \sin \phi \cos \theta\end{aligned}$$

As coordenadas iniciais do vetor em **coordenadas polares** são

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \\y &= r \sin \phi\end{aligned}$$

Substituindo na expressão anterior temos

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\y' &= x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

Observação importante: cuidado para não usar x' ao calcular y' .

Usando-se uma notação matricial, tem-se

$$\begin{aligned}P' &= RP \\P' &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Vetor Perpendicular

Dado um vetor P , para encontrar um vetor Q , perpendicular a P (que forma um ângulo de 90° em sentido anti-horário), usa-se a seguinte fórmula:

$$Q = \langle -P_y \quad P_x \rangle$$

Esta fórmula pode ser demonstrada utilizando-se a notação matricial genérica para rotações sobre um eixo:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(90) & -\sin(90) \\ \sin(90) & \cos(90) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0P_x - 1P_y & 1P_x + 0P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_y & P_x \end{bmatrix}$$

Deve-se observar que existem dois vetores perpendiculares em um espaço 2D. Para um vetor em três dimensões, a determinação de um vetor perpendicular é mais vaga. Podem existir **infinitos vetores perpendiculares** (qualquer vetor no plano perpendicular ao vetor P). Em um plano 3D existem 2 vetores perpendiculares.

Coordenadas Homogêneas

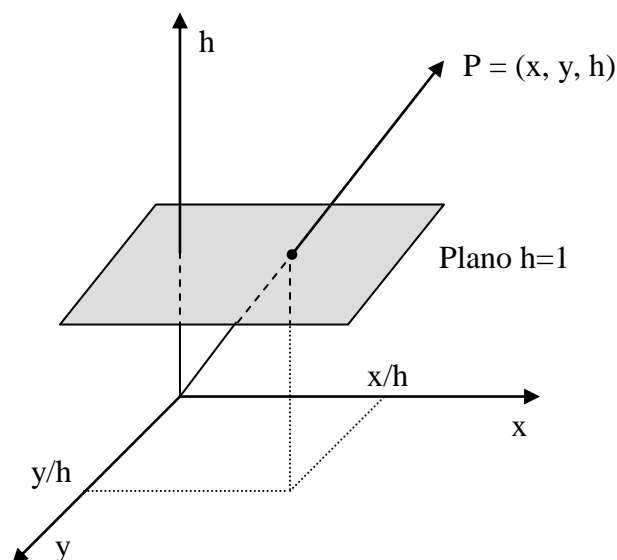
Todas as transformações apresentadas, exceto a translação são representadas como multiplicações de matrizes. Como será visto na sequência, é comum fazer a combinação de várias transformações em uma única matriz. Como a translação está presente em quase todas as transformações, é fundamental que ela possa ser representada por meio de multiplicação de matrizes. Para isso introduziu-se o conceito de coordenadas homogêneas.

Consiste em adicionar mais uma dimensão à matriz. Cada ponto 2D é representado por (x, y, h) . Caso o valor de h não seja 1, deve-se dividir cada componente do vetor por h . Assim, o ponto (2, 3, 6) e (4, 6, 12) representam a mesma informação

$$\begin{pmatrix} x & y & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{h} & \frac{y}{h} & 1 \end{pmatrix}$$

Este processo é chamado de homogeneização. Neste caso, x/h e y/h são as coordenadas cartesianas do ponto homogêneo.

A terceira coordenada do ponto pode ser interpretada geometricamente como um plano $h=1$ no R^3 , como mostrado na figura. O ponto $P'=(x/h, y/h)$ é a projeção do ponto $P(x, y, h)$ no plano $h=1$. Desta forma, qualquer múltiplo do ponto P homogêneo representa o mesmo ponto.



Fazendo uso de coordenadas homogêneas, a **translação** é definida como

$$P' = TP$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P' = TP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala:

$$P' = S \cdot P$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P' = SP = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xS_x \\ yS_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação:

$$P' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes em Transformações Geométricas

Matriz Ortogonal

Uma matriz quadrada A é **ortogonal** se $MM^T = I$. Portanto, se M é ortogonal então

$$M^{-1} = M^T$$

Uma outra consequência é que se M é ortogonal então $\det M$ é igual a 1 ou -1.

Propriedades:

- Se A e B são ortogonais então $C = AB$ também é ortogonal.
- Se A é ortogonal então A^{-1} também é ortogonal.

Uma matriz é dita **ortonormal** se o comprimento de cada linha ou coluna, tomados como vetores, tem comprimento 1 (normalizado). Esses vetores também são mutuamente **ortogonais** (formam um ângulo de 90° cada (perpendiculares) – ver definição de produto interno/escalar).

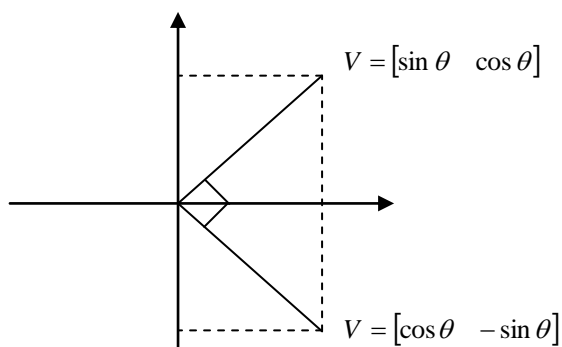
Teorema: Se M é uma **matriz ortogonal**, então M preserva comprimentos e ângulos. [1]

Uma vez que matrizes **ortonormais** preservam ângulos e comprimentos, elas preservam a estrutura geral do sistema de coordenadas. Deste modo, podem apenas representar combinações de **rotações** e **reflexões**. Matrizes de translação não são ortonormais.

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = [\cos \theta \quad -\sin \theta], \quad \theta = 45^\circ$$

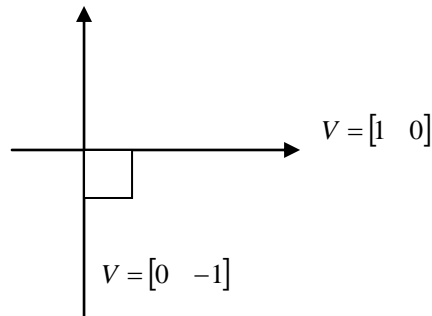
$$\|V\| = \sqrt{\cos^2 \theta + (-\sin \theta)^2}$$



$$\|V\| = \sqrt{0.707^2 + (-0.707)^2}$$

$$\|V\| = \sqrt{0.5 + 0.5} = \sqrt{1} = 1$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R^{-1} = R^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Combinações de Transformações

Quando se deseja aplicar várias transformações a vários pontos, ao invés aplicar várias transformações a cada ponto, pode-se combinar todas as transformações em uma única matriz e então aplicar esta matriz resultante aos pontos do objeto, reduzindo-se assim o custo computacional.

Este processo é chamado de concatenação de matrizes, e é executado multiplicando-se as matrizes que representam cada transformação.

OBS: a multiplicação de matrizes não é comutativa, porém é associativa.

$AB \neq BA$ (não comutativa)

$A(BC) = (AB)C$ (associativa)

$(FG)^T = G^T F^T$

OBS: Deve-se observar a terceira propriedade: $(FG)^T = G^T F^T$. Ou seja, a forma como a multiplicação é aplicada indica na ordem que os elementos devem estar dispostos.

A seguinte matriz representa a concatenação de uma **translação seguida de uma rotação**. A rotação deve vir antes na multiplicação.

$P' = RTP$ (**Concatenação Correta**)

$$P' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & T_x \cos \theta - T_y \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & T_x \sin \theta + T_y \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P' = TRP$ (**errado**)

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & T_x \\ \sin \theta & \cos \theta & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observa-se que a transformação $TRP \neq RTP$ e que $(FG)^T = G^T F^T$.

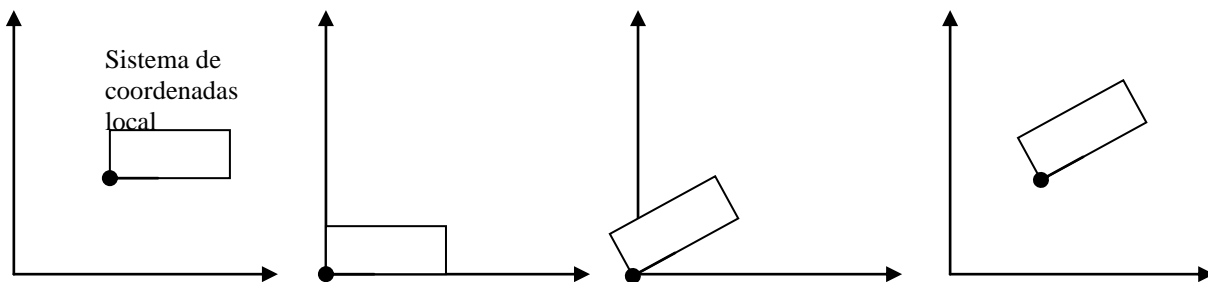
Considerando-se P como P^T , R como R^T e T como T^T , temos:

$$P' = P^T T^T R^T$$

$$P' = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ T_x \cos \theta - T_y \sin \theta & T_x \sin \theta + T_y \cos \theta & 1 \end{bmatrix}$$

No seguinte exemplo deseja-se aplicar uma rotação sobre o eixo do retângulo, ou seja, uma rotação no sistema de coordenadas local do objeto. Para isso, deve-se fazer uma mudança de sistema, ou seja, levar a origem (**pivô**) do sistema de coordenadas do objeto para a origem do sistema de coordenadas do mundo, aplicar a rotação, e transladar o objeto para seu sistema de coordenadas.



Neste tipo de aplicação, é necessário fazer transformações diretas e inversas, ou seja, deve-se aplicar uma matriz de transformação T e em seguida a sua inversa T^{-1} . O cálculo de matrizes inversas é complexo, porém é fácil determinar matrizes inversas de transformações geométricas.

No caso da rotação, por ser uma **matriz ortonormal**, sua inversa de $R(\theta)$ é a transposta (o mesmo vale para matrizes de reflexão), o que é equivalente a $R(-\theta)$.

No caso de uma matriz de translação $T = [T_x \ T_y \ 1]^T$, T^{-1} é dada por $T^{-1} = [-T_x \ -T_y \ 1]^T$.

Para uma matriz de escala $S = [S_x \ S_y \ 1]^T$, $S^{-1} = [1/S_x \ 1/S_y \ 1]^T$

Assim, para o exemplo anterior temos a seguinte matriz M que representa a concatenação de matrizes de transformação:

$$M = T^I R T$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -T_x \\ 0 & 1 & -T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde T_x e T_y representam as coordenadas do sistema de coordenadas do objeto em relação ao sistema de coordenadas do mundo.

No caso de rotações sucessivas em um mesmo eixo

$$P' = R(\theta_1)R(\theta_2)P$$

Por serem aditivas, a composição das duas rotações pode ser dada por

$$P' = R(\theta_1 + \theta_2)P$$

Outros exemplos:

- Escala sem alterar a posição do objeto
- Rotação em um eixo arbitrário
- Rotações consecutivas no mesmo eixo
- Rotações consecutivas em diferentes eixos

POSCOMP 2014

58 Considere as matrizes de transformações geométricas A e B e as coordenadas homogêneas a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & 0 & T_x \\ 0 & E_y & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considere que E_x e E_y são, respectivamente, fatores de escala em x e y , que T_x e T_y são, respectivamente, fatores de translação em x e y e que θ representa um ângulo de rotação.

Em relação a essas matrizes, considere as afirmativas a seguir.

- I. A matriz de rotação A rotaciona um objeto ao redor do seu centro de massa.
- II. A matriz B primeiro translada e depois escala o ponto.
- III. A matriz B primeiro escala e depois translada o ponto.
- IV. A matriz mudança de base de coordenada em 2D pode ser construída a partir da composição das matrizes homogêneas de translação, rotação e escala.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente as afirmativas I e II são corretas.
- b) Somente as afirmativas I e IV são corretas.
- c) Somente as afirmativas III e IV são corretas.
- d) Somente as afirmativas I, II e III são corretas.
- e) Somente as afirmativas II, III e IV são corretas.

Implementação de Transformações

Como ilustrado no exemplo anterior, em muitas situações é necessário aplicar (concatenar) várias transformações, incluindo rotação, escala e translações. Neste caso, para criar a matriz de rotação final M deve-se multiplicar várias matrizes.

Antes de partir para uma implementação direta, deve-se observar como a API OpenGL faz para trabalhar com matrizes de transformação. Ele define uma única matriz “global”, que é atualizada a cada chamada de comandos `glRotate()`, `glTranslate()`, `glScale()`. A matriz corrente é então multiplicada pela nova matriz correspondente a transformação chamada. O seguinte código em C++ ilustra como criar uma classe para gerenciar a matriz de transformação.

```
Class Matrix
{
    float m[3][3]; //em coordenadas homogêneas
public:
    Matrix();
    void operator *(Matrix m); //multiplica por outra matriz
    void loadIdentity(); //carrega matriz identidade
    void rotate(float ang); //concatena matriz de rotação
    void translate(float dx, float dy); //concatena matriz de translação
    void scale(float sx, float sy); //concatena matriz de escala
    Vector operator*(Vector v); //multiplica um ponto v pela matriz
    void push(); //empilha matriz (duplica o valor do topo)
    void pop(); //desempilha matriz (remove o topo da pilha)
}
```

Na prática, ao invés de ter uma única matriz, o OpenGL define uma pilha de matrizes de transformação, cuja posição topo pode ser modificada pelas funções `glPushMatrix()` e `glPopMatrix()`. Esse recurso é extremamente útil quando se tem em uma mesma cena um objeto que sofre movimentação relativa a outro objeto. Como exemplo, pode-se ter um carro que está em cima de um navio. Quando o navio se move, o veículo sofre a mesma transformação, porém nada impede que o veículo ande sobre o navio já em movimento.

Outros usos das transformações de Escala e Translação

Muitas vezes é necessário fazer a transformação de dados para um correto processamento ou exibição em um dispositivo.

Exemplo 1:

Considere por exemplo que seja necessário armazenar vetores de dados sinalizados em vetores não sinalizados. Considerando um tipo `char`, em um intervalo sinalizado temos valores entre $[-128, 127]$. Aplicando-se uma translação nos valores de 128, temos os valores no intervalo $[0, 255]$. Adicionalmente pode-se aplicar uma escala nos valores, por exemplo, de 0.5, para transformar os valores no intervalo $[0, 128]$. O processo inverso pode ser usado para levar os valores ao intervalo original.

Exemplo 2:

Suponha que se deseje desenhar na tela um círculo paramétrico (em coordenadas polares). As funções seno e cosseno geram valores entre $[-1, 1]$. Na tela, tem-se, por exemplo, valores entre $[0, 1024]$. Para se desenhar um círculo em tela cheia, deve-se fazer as seguintes transformações:

- translação em 1 para levar o intervalo entre $[0, 2]$
- escala em 512 para levar o intervalo entre $[0, 1024]$

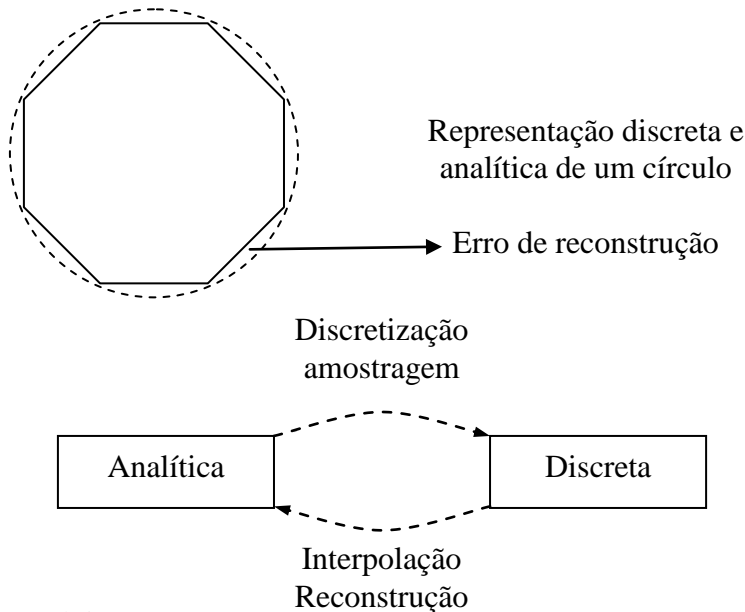
Exemplo 3:

Conversão de temperatura entre Fahrenheit e Celsius. A fórmula de conversão é $C = (F - 32) * 5/9$. Ou seja, o -32 é uma translação e o 5/9 é uma escala.

2 Primitivas Gráficas 2D

Formas de Representação de primitivas:

- Analítica (função):
 - Gasta menos espaço
 - Maior precisão (resolução)
 - Facilidade para calculo de pontos intermediários
 - Representação de Figuras vetoriais.
 - Ex: MS Word.
- Discreta (pontos/pixels - **Amostragem**)
 - Usado para fazer a representação gráfica em dispositivos, como monitores ou impressoras.
 - Representações poligonais.
 - Ex: Modelos de personagens em jogos 3D, imagens BMP, arquivo de impressão, figuras na tela do computador



Representação analítica:

1. **Paramétrica**: cada coordenada de um ponto é representado como uma função de um único parâmetro.
2. **Não Paramétrica**
 - a. Explícita $\rightarrow y = mx + b$
para cada x, obtém-se apenas 1 valor de y. Ex: retas, senoides, etc.
 - b. Implícita $\rightarrow x^2 + y^2 = r^2$
para cada x, obtém-se 2 valores para y. Pode ser usado para representar círculos.

Linha

- Usos
- Geralmente disponibilizado em APIs (Java, OpenGL, DirectX, etc)
- Representação paramétrica ou por função

Representação por função Explícita

$$y = mx + b$$

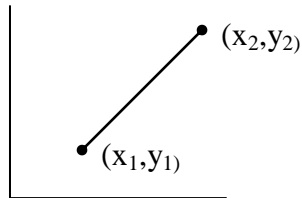
m = inclinação da reta

b = interseção com o eixo y.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = y_1 - mx_1$$

$$\Delta y = m\Delta x, \quad \Delta x = \frac{\Delta y}{m}$$



Algoritmo DDA (*Digital Differential Analyser*)

$$y_{k+1} = y_k + m, \quad 0 < m < 1$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{m}, \quad m > 1$$

Algoritmo DDA

```

dx = x2 - x1
dy = y2 - y1
if (|dx| > |dy|)
    steps = |dx|
else
    steps = |dy|
incx = dx/steps
incy = dy/steps

pixel(x1, y1)
for(k=0; k< steps; k++)
{
    x += incx;
    y += incy
    pixel(x, y)
}

```

Representação Paramétrica

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$P(t) = (x(t), y(t))$$

Vetor direção

$$P(t) = P_1 + t(P_2 - P_1), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{Uma multiplicação})$$

$$P(t) = P_1 + tP_2 - tP_1$$

$$P(t) = (1-t)P_1 + tP_2 \quad (\text{Duas multiplicações})$$

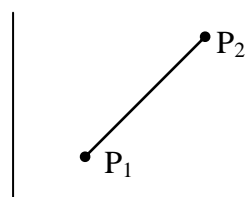
ou

$$P(t) = P_0 + tV, \quad t \geq 0 \quad (\text{representação de um raio})$$

$$\text{se } t=0, P(t) = P_1$$

$$\text{se } t=1, P(t) = P_2$$

$$\text{se } t=0.5, P(t) = 0.5P_1 + 0.5P_2$$

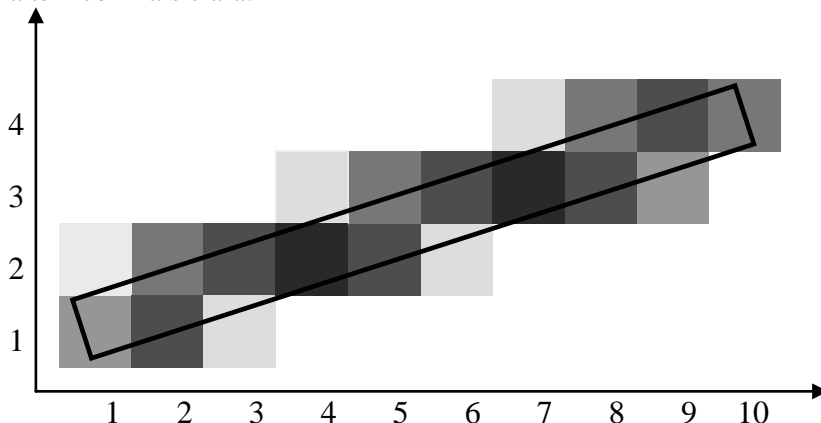


Independente da representação, deve-se observar que quando a linha é representada graficamente por um conjunto de pontos amostrados.

- Dependendo da resolução do dispositivo, pode ser visível a formação de bordas dentadas (*Alias*).
- Uma solução para evitar este problema, especialmente em monitores onde a resolução é menor que 100 DPI, deve-se utilizar algum algoritmo de *anti-aliasing*.

Na seguinte figura é ilustrado como um algoritmo de **anti-aliasing** pode ser usado para gerar linhas que se pareçam mais suaves.

- Faz uso de pixels com intensidades diferentes, dependendo de sua área de projeção sobre a linha.
- Pixels que são cobertos pela linha tem cor mais escura e pixels que são parcialmente cobertos pela linha tem cor mais clara.



Círculo

Função implícita do círculo

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

Não centrado na origem

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2, \quad (x_c - r) \leq x \leq (x_c + r)$$

$$(y - y_c)^2 = r^2 - (x - x_c)^2$$

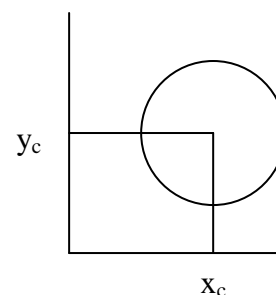
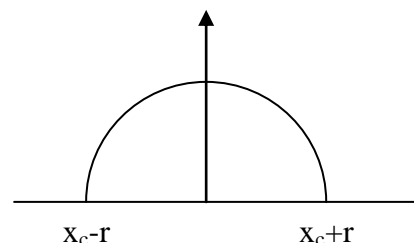
$$(y - y_c) = \sqrt{r^2 - (x - x_c)^2}$$

$$y = y_c \pm \sqrt{r^2 - (x - x_c)^2}$$

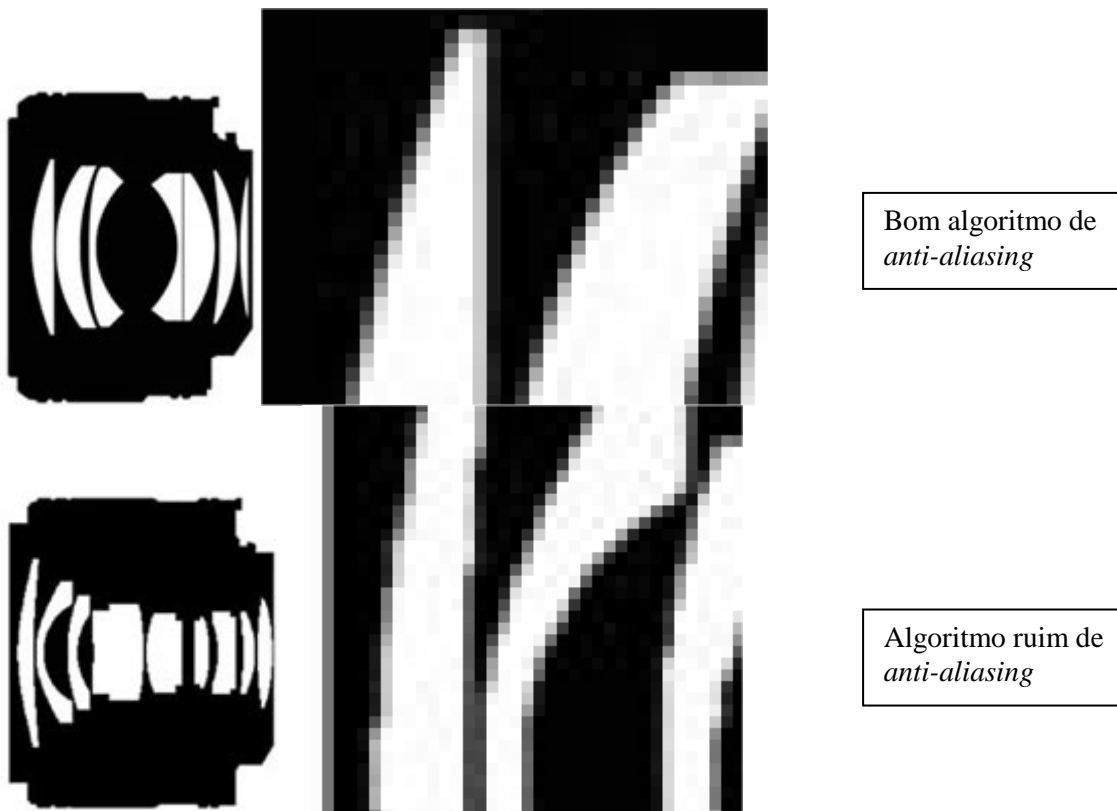
Equação paramétrica do círculo

$$x = x_c + r \cos \theta \quad (\text{variação constante entre pontos na curva})$$

$$y = y_c + r \sin \theta$$



Anti-aliasing para círculos: O processo é o mesmo utilizado para retas. As seguintes figuras ilustram curvas geradas com dois tipos de algoritmos de *anti-aliasing* (imagens de lentes de câmeras - <http://nikonimaging.com/global/products/lens/af/dx/index.htm>). As figuras da direita são ampliações das figuras da esquerda. Pode-se claramente notar a diferença de qualidade das imagens. Deve-se observar que se estas imagens fossem geradas sem algoritmos de *anti-aliasing*, o resultado seria bem pior.

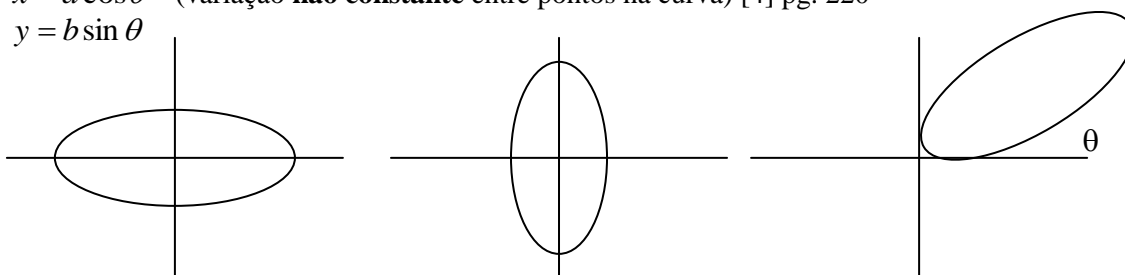


Assim como primitivas, algoritmos de anti-aliasing também são muito utilizados para geração de caracteres. A seguinte figura ilustra a geração de caracteres gerados pelo editor Word. Pode-se observar a adição de pixels coloridos nas bordas dos caracteres.



Elipse

$x = a \cos \theta$ (variação **não constante** entre pontos na curva) [4] pg. 220
 $y = b \sin \theta$

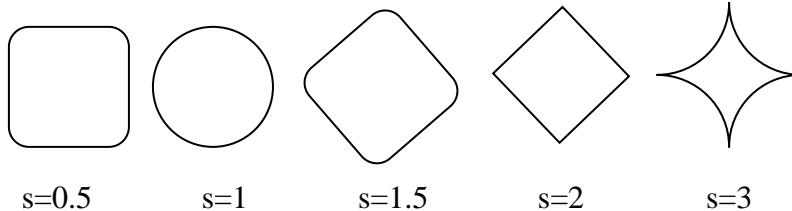


Superquádricas

Superelipse

$$\left(\frac{x}{r_x}\right)^{\frac{2}{s}} + \left(\frac{y}{r_y}\right)^{\frac{2}{s}} = 1$$

paramétrica



$$x = r_x \cos^s \theta$$

$$y = r_y \sin^s \theta$$

O seguinte algoritmo ilustra a geração paramétrica de superelipse

```
for(float ang = 0; ang < 2*PI; ang+=0.1)
{
    float x, y;
    x = rx * pow(fabs(cos(ang)), s) * (cos(ang) > 0 ? 1 : -1 );
    y = ry * pow(fabs(sin(ang)), s) * (sin(ang) > 0 ? 1 : -1 );
}
```

API para renderização 2D

A Skia é uma famosa API gráfica 2D para desenho, de código aberto, que suporta diversas plataformas de software e hardware. É usada no Google Chrome, Android, etc.

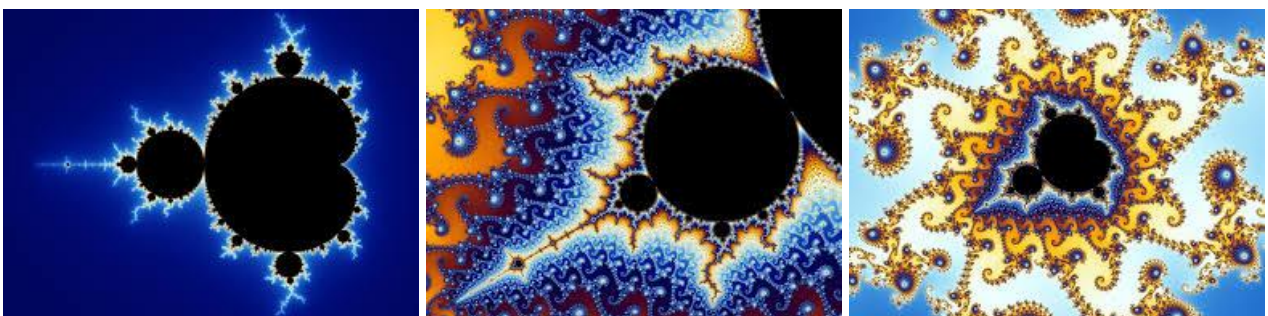


Fractal de Mandelbrot

Definido recursivamente como

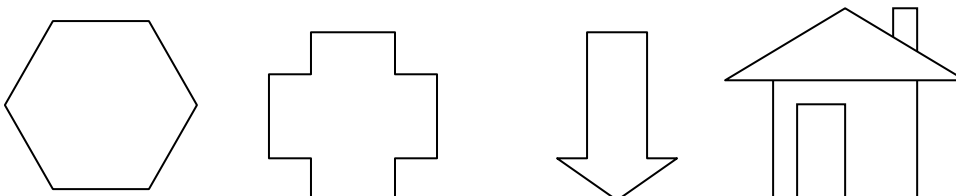
$$z_0 = 0$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$



Poligonal

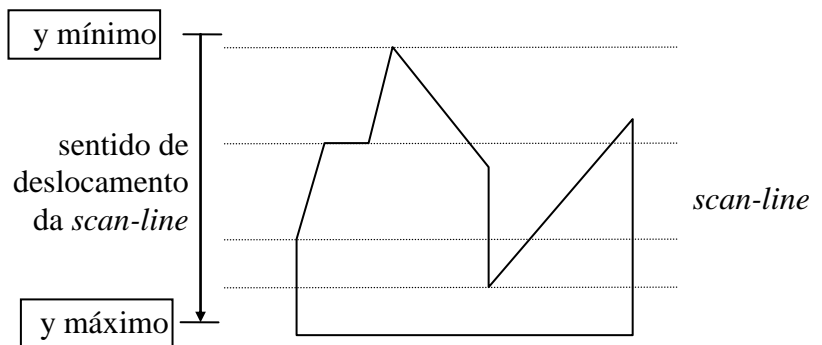
Vetor ordenado de coordenadas que definem a forma do objeto. Pode ser usado para representar qualquer figura. Apresenta limitações para desenho de curvas.



Preenchimento de Polígonos

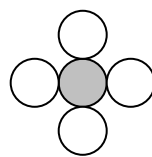
Scan-line

Faz o preenchimento da cena de linha em linha
Faz uso da inclinação de cada reta para otimizar o processo.

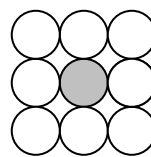


Flood/Boundary fill

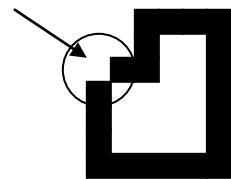
Contorno → boundary fill
Cor de fundo → flood fill



4-connected



8-connected



```
void boundaryFill4(int x, int y, int fillColor, int boundaryColor)
{
    if(getPixel(x, y) != boundaryColor && getPixel(x, y) != fillColor)
    {
        setPixel(x, y, fillColor)
        boundaryFill4(x+1, y, fillColor, boundaryColor)
        boundaryFill4(x-1, y, fillColor, boundaryColor)
        boundaryFill4(x, y+1, fillColor, boundaryColor)
        boundaryFill4(x, y-1, fillColor, boundaryColor)
    }
}

void floodFill4(int x, int y, int fillColor, int oldColor)
{
    if(getPixel(x, y) == oldColor)
    {
        setPixel(x, y, fillColor)
        floodFill4(x+1, y, fillColor, oldColor)
        floodFill4(x-1, y, fillColor, oldColor)
        floodFill4(x, y+1, fillColor, oldColor)
        floodFill4(x, y-1, fillColor, oldColor)
    }
}
```

3 Visualização Bidimensional

Window → área selecionada do sistema de coordenadas do mundo para ser exibida no display (área que será vista). Deve-se observar que nem toda área de um ambiente pode ser exibida em uma única *window*. Esta área é determinada pela configuração e posicionamento da câmera sintética.

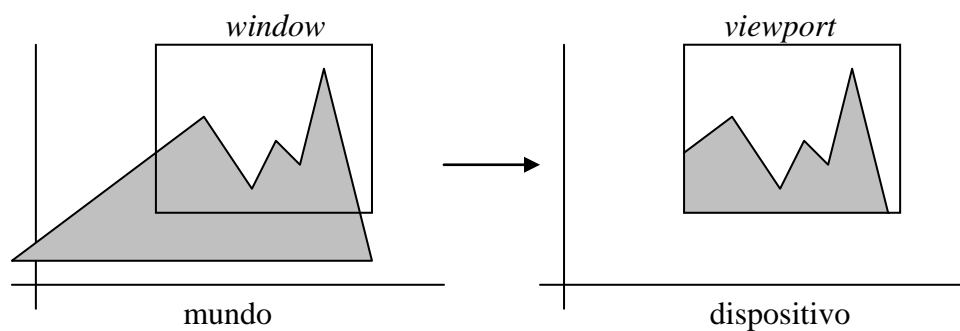
Viewport → área do display (monitor) na qual a *window* é mapeada. Corresponde a posição na tela onde mostrar. Ex: janela gráfica de uma aplicação gráfica.

Viewing transformation (ou *windowing transformation*) → mapeamento de uma parte da cena em coordenadas do mundo para coordenadas do dispositivo.

- Deve-se observar que as coordenadas do mundo podem estar no intervalo entre $[-1, 1]$ e que as coordenadas da *viewport* sempre estão em resolução de tela.
- A principal transformação é a escala, que pode não ser uniforme.

Passos:

- Definir a área da *window*
- Recortar o que está fora (*clipping*)
- Ajustar posição e escala dentro da *viewport* (mapeamento)

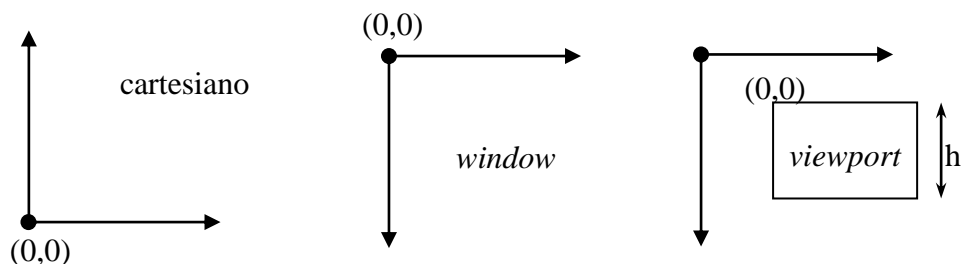


Algoritmos de Clipping

- Linhas (Cohen-Sutherland)
- Polígonos (Weiler-Atherton)
- curvas
- strings

Mapeamento na tela

- Sistema cartesiano define origem no canto inferior esquerdo
- Sistema de tela define a origem no canto superior esquerdo
 - Ex: OpenGL/Glut, Java, etc.



$$x_{tela} = x_{cartesiano}$$

$$y_{tela} = h - y_{cartesiano}$$

QUESTÃO 57 – Considerando as transformações entre sistemas de coordenadas 2D e o processo de recorte, analise as assertivas abaixo:

- I. Denomina-se *window* a área do universo que será mapeada para a tela, e *viewport* a área de tela que será utilizada nesse processo.
- II. Se as razões entre a largura e altura da *window* e a largura e a altura da *viewport* não forem as mesmas, ocorrerá uma mudança não uniforme de escala.
- III. O recorte de linhas (*clipping*) pode ser feito tanto no sistema de coordenadas do universo como no da tela.

Quais estão corretas?

- A) Apenas I.
- B) Apenas II.
- C) Apenas III.
- D) Apenas I e III.
- E) I, II e III.

Exercícios:

1. Implemente um programa para aplicar matrizes de transformação sobre um quadrado para:
 - a. Fazer a rotação
 - b. Fazer a escala
 - c. Fazer a translação
2. Implemente um programa para desenho de linhas com o uso do mouse.
3. Implemente programa para desenho de círculos, elipses e superquádricas.
4. Implemente um editor de figuras com recursos para inserção, movimentação, remoção, rotação, agrupamento, salvamento em disco, etc.
5. Implemente um programa para preenchimento de polígonos com algoritmo flood fill. Faça a mesma solução com algoritmo de scan-line.

Referências:

- [1] Lengyel, E.. **Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics**. Charles River Media, 2002.
- [2] Hearn, D., Baker, M. P. **Computer Graphics, C Version** (2nd Edition), Prentice Hall, New Jersey, 1997
- [3] Foley, J.D., van Dam, A., Feiner, S.K. and Hughes, J.F. **Computer Graphics: Principles and Practice in C** (2nd Edition), Addison-Wesley Pub. Co., Reading, MA, 1995.
- [4] Watt, A. **3D Computer Graphics**, Addison Wesley; 3 edition, 1999.
- [5] Rogers, D., Adams, J. **Mathematical Elements for Computer Graphics**, 2nd Edition. Mc Graw Hill, 1990.