Cursos de Tecnologia: Banco de Dados

Redes de Computadores

1º Semestre

MATEMÁTICA DISCRETA

(MMD001)

FATEC - FACULDADE DE TECNOLOGIA DE BAURU (www.fatecbauru.edu.br)

Rua Manoel Bento Cruz, 3-30 – Centro - Bauru, SP – CEP 17015-171 – Fone: (14) 3223-2083

Sumário

.

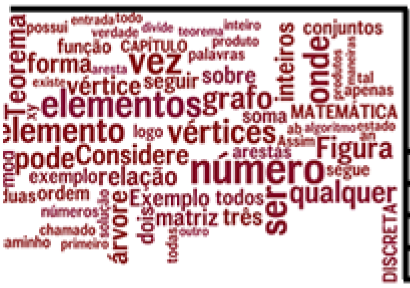
Apresentação

O ensino da Matemática Discreta para os cursos da área de computação e informática é recomendado por todas as versões do Currículo de Referência da Sociedade Brasileira de Computação e fortemente sugerido pelas Diretrizes Curriculares para os Cursos da Área de Computação e Informática, da Comissão de Especialistas de Ensino de Computação e Informática – CCEInf.

Segundo estas Diretrizes: "... a Matemática, para a área de computação e informática, deve ser vista como uma ferramenta a ser usada na definição formal de conceitos computacionais (linguagens, autômatos, métodos etc.). Considerando que a maioria dos conceitos computacionais pertence ao domínio do discreto, a Matemática Discreta (ou também chamada Álgebra Abstrata) é fortemente empregada". A Matemática Discreta, também chamada matemática finita, é o estudo das estruturas matemáticas que são discretas, no sentido de não suportarem ou requererem a noção de continuidade. Grande parte (não todos), dos objetos estudados na Matemática Discreta são conjuntos contáveis, como exemplo o conjunto dos números inteiros.

Os conceitos e notações da Matemática Discreta são úteis para o estudo ou a expressão de objetos ou problemas em algoritmos de computador e linguagens de programação. Hoje, em dia, um tópico quente recente de aplicação da Matemática Discreta é a criptografia matemática, que é baseada na teoria dos números (o estudo dos inteiros positivos 1, 2, 3,...), e é largamente aplicada entre outras, em segurança de computadores e transação bancária eletrônica.

Vamos, então, a esses conteúdos. Bom estudo a todos e aproveitem.



Lógica Proposicional

Introdução

A lógica é utilizada na resolução de muitos problemas computacionais como a criação de algoritmos e de programas de baixa ou alta complexidade. Além disso, também serve para elaborar circuitos lógicos capazes de melhorar o desempenho do hardware dos computadores, como o ganho de velocidade de processamento ou armazenamento de dados e a diminuição dos dispositivos ou melhorias no gerenciamento de energia dos computadores. De fato, para desenvolver qualquer algoritmo e, consequentemente, qualquer *software* computacional, são necessários conhecimentos básicos de Lógica. A lógica possui um conceito universal, pois, a partir do momento em que se estabelece uma rotina qualquer para a execução de determinado objetivo, é necessária a utilização da lógica. Então existe mais de uma forma de alcançar um objetivo? Claro que sim. A obtenção do sucesso depende das várias possibilidades existentes em torno do objetivo pretendido. Duas pessoas podem executar tarefas de maneiras distintas e chegar ambas ao mesmo resultado. Qual delas deverá ser entendida como "logicamente" a melhor solução? Isso é simples: basta analisar em ambas o tempo gasto para a execução, o trajeto mais curto, o menor custo, a menor quantidade de cálculos ou etapas que precisaram ser realizadas. Sendo, assim, podemos definir **lógica** como um conjunto de leis, princípios ou métodos que determinam um raciocínio coerente, induzindo a uma solução prática e eficaz de um determinado problema.

Conceito de Proposição

O ponto inicial da Lógica é o termo "**proposição**". Por uma proposição entendemos como sendo todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo. As proposições transmitem pensamentos, isto é, afirmam fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinados entes. Toda proposição (ou declaração) é uma representação lógica do juízo que afirma (valor lógico verdadeiro) ou nega (valor lógico falso) a identidade representativa de dois conceitos. Consideremos as seguintes sentenças:

(a) Rio de Janeiro é a capital do Brasil

(b) Que horas são?

(c) Existe vida em outros planetas do Universo

(d) Ela é muito talentosa

(e) Hoje é terça-feira

A sentença **(a)** é uma proposição, já que é falsa. A sentença **(b)** não pode ser considerada falsa ou verdadeira, pois é uma pergunta. Ela não tem valor verdadeiro nem falso e, portanto, não é uma proposição. A sentença **(c)** é uma proposição, já que é falsa ou verdadeira (mesmo sem sermos capazes de decidir qual das alternativas é válida). A sentença (d) não é falsa nem verdadeira, pois "ela" não está especificada; por isso, **(d)** não é uma proposição. A sentença **(e)** não é uma proposição, é apenas uma sentença aberta que depende da variável "hoje".

A Lógica Matemática adota como regras fundamentais do pensamento os dois seguintes **princípios** (ou axiomas):

(1) PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo;

(2) PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO: toda a proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca uma terceira opção;

Por virtude deste princípio diz-se que a Lógica Matemática é uma lógica bivalente.

Valores Lógicos das Proposições

Chama-se valor lógico de uma proposição a VERDADE (V) se a proposição é verdadeira e a FALSIDADE (F) se a proposição é falsa. Os valores lógicos VERDADE e FALSIDADE de uma proposição designam-se abreviadamente pelas letras V e F, respectivamente.

Assim, o que os princípios da não contradição e do terceiro excluído afirmam é que:

TODA PROPOSIÇÃO TEM UM, E UM SÓ, DOS VALORES: (V) ou (F)

Consideremos, por exemplo, as proposições:

(a) A Lua é satélite natural de Júpiter	(Falsa)
(b) Dois é um número inteiro	(Verdadeira)
(c) O número 5 é par	(Falsa)
(d) No Brasil fala-se português	(Verdadeira)

Proposições simples e proposições compostas

As proposições podem ser classificas em <u>simples ou atômicas</u> e <u>compostas ou moleculares</u>.

➔ Proposições simples ou atômicas: são aquelas que não contêm nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. Por exemplo:

p: João Pedro é esbelto

q: O número 16 é quadrado perfeito

r: Vinícius estuda na FATEC Bauru

t: A impressora é um periférico

➔ Proposições compostas ou moleculares: aquelas que são formadas pela combinação de duas ou mais proposições. Por exemplo:

P(p, r): João Pedro é esbelto e Vinícius estuda na FATEC Bauru.

Q(q, p): O número 16 é quadrado perfeito ou João Pedro é esbelto.

R(p,t): Se João Pedro é esbelto, então a impressora é um periférico.

NOTA (1): as proposições simples são geralmente designadas por letras latinas minúsculas e as proposições compostas são habitualmente designadas por letras latinas maiúsculas;

NOTA (2): Quando interessa destacar ou explicitar que uma proposição composta **P** é formada pela combinação das proposições simples **p**, **q**, **r**, ... , escrevemos **P(p, q, r, ...)**.

Conectivos lógicos

Conectivo é tudo aquilo que estabelece uma conexão, isto é, que une uma coisa a outra. Na lógica, o conectivo é um termo ou símbolo dele, que relaciona proposições de modo tal que a verdade ou falsidade da afirmação resultante é determinada pela verdade ou falsidade dos seus componentes. De maneira geral, chamam-se conectivos lógicos as palavras que usamos para formar novas proposições a partir de outras. São conectivos usuais em Lógica Matemática as palavras:

"e", "ou", "não", "se ... então", "... se e somente se ..."

Exemplos:

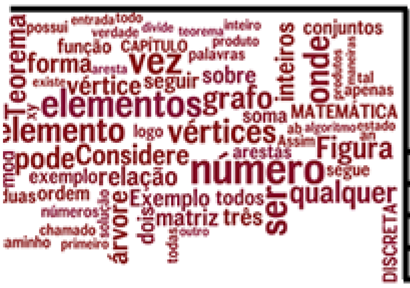
P: Windows é um sistema operacional **e** Java é uma linguagem de programação

Q: Linux é um software livre **ou** Excel é uma planilha eletrônica

R: **Não** está nevando hoje

S: **Se** João Pedro fez Análise de Sistemas, **então** ele sabe programar

T: O triângulo ABC é retângulo **se e somente se** tiver um ângulo reto



Operações Lógicas

Quando pensamos, efetuamos muitas vezes certas operações sobre proposições, chamadas de operações lógicas. Estas operações obedecem a certas regras de um cálculo, denominado de **cálculo proposicional,** semelhante ao da aritmética sobre números. Vejamos quais são estas operações lógicas.

Negação

Chama-se negação de uma proposição **p** a proposição representada por "**não p**" (**~p**), cujo valor lógico é a VERDADE (V) quando **p** é falsa e a FALSIDADE (F) quando **p** é verdadeira. Assim, "**não p**" tem o valor lógico oposto daquele de **p**:

p	**~p**
V	F
F	V

Exemplos:

p: 2 + 3 = 5 **(V)** ~p: 2 + 3 ≠ 5 **(F)**

q: 7 < 3 **(F)** ~q: 7 > 3 **(V)**

r: Roma é capital da França **(F)** ~r: Roma não é capital da França **(V)**

s: Algum homem é vaidoso **(V)** ~s: Nenhum homem é vaidoso **(F)**

Conjunção

Chama-se conjunção de duas proposições **p** e **q** a proposição representada por "**p e q**" (**p** ∧ **q**), cujo valor lógico é a VERDADE (V) quando as proposições **p** e **q** são ambas verdadeiras e a FALSIDADE (F) nos demais casos. Através de uma tabela, temos:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplos: r: O enxofre é verde **(F)**

s: 7 é um número primo **(V)**

$r \wedge s$: O enxofre é verde e 7 é um número primo **(F)**

Disjunção

Chama-se disjunção de duas proposições **p** e **q** a proposição representada por "**p ou q**" (**p** $\vee$ **q**), cujo valor lógico é a VERDADE (V) quando ao menos uma das proposições **p** e **q** são verdadeiras e a FALSIDADE (F) quando as proposições **p** e **q** são ambas falsas. Através de uma tabela temos:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplos: p: Paris é a capital da França **(V)**

q: 10 – 3 = 8 **(F)**

$p \vee q$: Paris é a capital da França ou 10 – 3 = 8 **(V)**

Disjunção exclusiva

Na linguagem comum a palavra **"ou"** tem dois sentidos. Assim, por exemplo, consideremos as seguintes proposições:

p: Carlos é engenheiro ou dentista

q: Marisa é alagoana ou gaúcha

As subproposições de **p** podem ser ambas verdadeiras, portanto, podemos afirmar que este **"ou"** é INCLUSIVO. Assim sendo, a proposição **p** é uma disjunção inclusiva ou apenas disjunção das proposições originais. Já a proposição **q** pode ter somente uma das duas subproposições verdadeira, portanto, podemos afirmar que este **"ou"** é EXCLUSIVO. Assim sendo, a proposição **q** é uma disjunção exclusiva.

A disjunção exclusiva entre **p** e **q** é representada por "p $\underline{\vee}$ q" ("ou p ou q").

p	**q**	**p $\underline{\vee}$ q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional/implicação

Chama-se proposição condicional uma proposição representada por "se **p** então **q**" (**p** $\rightarrow$ **q**), cujo valor lógico é a FALSIDADE (F) no caso em que **p** é verdadeira e **q** é falsa e a VERDADE (V) nos demais casos. Através de uma tabela temos:

p	**q**	**p $\rightarrow$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplos:

p: O mês de maio tem 31 dias **(V)**

q: A Terra é quadrada **(F)**

$p \to q$: Se o mês de maio tem 31 dias então a Terra é quadrada **(F)**

OBS (1): na condicional "**p → q**" diz-se que **p** é o antecedente e **q** o consequente. Também se lê de uma das seguintes maneiras:

- **p** é condição suficiente para **q**
- **q** é condição necessária para **p**

OBS (2): a declaração "O fogo é uma condição necessária para a fumaça" pode ser dita de outra forma: "Se houver fumaça, então haverá fogo". O antecedente é "há fumaça" e o consequente é "há fogo".

Bicondicional

Chama-se proposição bicondicional uma proposição representada por "**p** se e somente se **q**" (**p↔q**), cujo valor lógico é a VERDADE (V) quando **p** e **q** são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a FALSIDADE (F) nos demais casos. Através de uma tabela temos:

p	**q**	**p ↔ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplos:

p: Roma fica na Europa **(V)**

q: A neve é branca **(V)**

$p \leftrightarrow q$: Roma fica na Europa se e somente se a neve é branca **(V)**

NOTA: Tabela com expressões (em português) associadas aos conectivos lógicos:

Expressão em Português	Operação	Simbologia
não **p** é falso que **p** não é verdade que **p**	Negação	$\sim p$
e; mas; também; além disso	Conjunção	$p \wedge q$
ou	Disjunção	$p \vee q$
Se **p** então **q** **p** implica **q** **p**, logo **q** **p** só se **q**; **p** somente se **q** **q** segue de **p** **p** é uma condição suficiente para **q**; basta **p** para **q** **q** é uma condição necessária para **p**	Condicional	$p \rightarrow q$
p se e somente se **q** **p** é condição necessária e suficiente para **q**	Bicondicional	$p \leftrightarrow q$

Valor Lógico de uma proposição composta

Dada uma proposição composta P(p, q, r, s, ...), pode-se sempre determinar o valor lógico (V ou F) quando são dados ou conhecidos os valores lógicos respectivos das proposições componentes p, q, r, r, s,... Vejamos alguns exemplos:

Exemplo (1): sabendo que os valores lógicos de p e q são respectivamente (V) ou (F), determinar o valor lógico da proposição: P(p,q): $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Resolução: *V(P)* = $\sim (V \vee F) \leftrightarrow \sim V \wedge \sim F$ *:*

V(P) = $\sim V \leftrightarrow F$

V(P) = $F \leftrightarrow F$

V(P) = V

Exemplo (2): sendo V(p) = F e V(q) = F, determine o valor lógico (V ou F) da proposição P(p, q): $(p \to q) \to (p \to p \wedge q)$

Resolução: *V(P)* = $(F \to F) \to (F \to F \wedge F)$*:*

V(P) = $V \to (F \to F)$

V(P) = $V \to V$

V(P) = V

OBS: é obvia a necessidade de usar parêntesis na simbolização das proposições, que devem ser colocados para evitar ambiguidade.

Assim, por exemplo, a expressão $p \wedge q \vee r$ dá lugar, colocando parêntesis, às duas proposições:

$(p \wedge q) \vee r$ e $p \wedge (q \vee r)$ que são diferentes.

Por outro lado, parêntesis podem ser suprimidos a fim de simplificar as proposições, desde que não haja ambiguidade.

Para a supressão de parêntesis, a ordem de precedência é:

(1°) ~	**Negação**
(2°) $\wedge$ e $\vee$	**Conjunção, Disjunções**
(3°) $\to$	**Condicional**
(4°) $\leftrightarrow$	**Bicondicional**

Portanto, o conectivo mais fraco é o ~ e o mais forte é o $\leftrightarrow$.

Assim, por exemplo, a proposição $p \to q \leftrightarrow s \wedge r$ é uma <u>bicondicional</u> e nunca uma <u>condicional</u> ou uma <u>conjunção</u>.

Se quisermos convertê-la para uma condicional devemos usar parêntesis: $p \to (q \leftrightarrow s \wedge r)$, ou para convertê-la para uma conjunção: $(p \to q \leftrightarrow s) \wedge r$.

Exercícios

em classe

[1] Se p, q e r são proposições VERDADEIRAS (V) e w, x e y são proposições FALSAS (F), determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $(p \wedge w) \leftrightarrow (y \vee \sim x) \rightarrow (p \rightarrow q)$

b) $(\sim w \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim r))$

c) $\sim ((\sim r \vee y \wedge (\sim y \rightarrow r)) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)))$

d) $(w \leftrightarrow (p \rightarrow y)) \rightarrow ((\sim x \vee y) \rightarrow y)$

e) $((p \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow p)) \leftrightarrow ((p \wedge y) \vee (\sim p \vee \sim r))$

f) $((w \rightarrow (x \rightarrow y)) \vee ((w \leftrightarrow x) \rightarrow y)) \rightarrow ((w \wedge p) \rightarrow (q \vee x))$

[2] Sejam as proposições simples:

p: O processador do meu PC é lento

q: Minha impressora é rápida

Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:

a) $\sim(p \wedge \sim q)$ b) $\sim\sim p$ c) $\sim(\sim p \vee \sim q)$

d) $p \rightarrow \sim q$ e) $\sim p \leftrightarrow \sim q$ f) $\sim(\sim q \rightarrow p)$

[3] Sejam dadas as proposições abaixo:

p: Carla está com gripe q: Carla perdeu a prova r: Carla foi reprovada

Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Carla está com gripe ou perdeu a prova, mas não foi reprovada.

b) Carla está com gripe e perdeu a prova, ou não perdeu a prova e foi reprovada.

c) É falso que Carla perdeu a prova se e somente se não foi reprovada.

d) Se não é verdade que Carla está com gripe ou foi reprovada, então ela não perdeu a prova.

[4] As proposições **x = 0** e **x = y** são Verdadeiras (V) e as proposições **y = w** e **y = t** são Falsas (F), determine então o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $x = 0 \ \wedge \ x = y \ \rightarrow y \neq w$

b) $x \neq 0 \ \vee \ y = t \ \rightarrow \ y = w$

c) $x \neq 0 \ \vee \ y \neq w \ \rightarrow \ y = t$

d) $x = 0 \ \rightarrow \ (x \neq y \wedge \ y \neq t)$

e) $y \neq t \ \rightarrow \sim(x = y \leftrightarrow y = w)$

[5] Sabendo que as proposições **p** e **q** são Verdadeiras (V) e que as proposições **r** e **s** são Falsas (F), determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

(a) P(p, q, r, s): $q \rightarrow \sim (r \wedge s) \leftrightarrow (s \vee \sim p)$

(b) Q(p, q, r, s): $(q \vee r) \wedge (p \vee s)$

(c) S(p, q, r, s): $(s \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

(d) T(p, q, r, s): $\sim ((r \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow q))$

[6] Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) $2+5=8$ se e somente se $4^3 = 81$

b) Se $1+3^0 = 2$ então $5-3=1$

c) Se 8 for ímpar, então 6 é par

d) $3^2 + 4^2 = 5^2 \leftrightarrow \ \pi$ é racional

e) $1 \neq -1 \ \vee \ (3^2 + 4^2) = 5^2$

f) $\sqrt{1024} < 20 \ \wedge \ \sqrt{5}$ é racional

g) Não é verdade que 15 é um número primo

h) $3^4 = 81 \rightarrow \sim(2+1=3 \ \wedge \ 5.0=0)$

i) $\sim(1+1=5 \ \leftrightarrow \ 3+3=1)$

[7] Determinar o valor lógico de **p**, isto é, V(**p**), e o valor lógico de **q**, isto é, V(**q**), em cada um dos itens a seguir:

(a) $V(p \rightarrow q) = V$ e $V(p \vee q) = F$

(b) $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = V$

(c) $V(\sim p \vee q) = F$ e $V(q \rightarrow \sim p) = V$

(d) $V(p \rightarrow \sim q) = V$ e $V(\sim p \wedge q) = V$

[8] Escreva cada uma das proposições compostas a seguir em notação simbólica usando letras de proposição para denotar as componentes:

a) Se os preços subirem, então haverá muitas casas para vender e elas serão caras; mas se as casas não forem caras, então, ainda assim, haverá muitas casas para vender.

b) Tanto ir dormir como ir nadar é uma condição suficiente para a troca de roupa; no entanto, mudar a roupa não significa que se vai nadar.

c) Vai chover ou nevar mas não ambos.

d) Se Antonio vencer ou perder, vai ficar cansado.

e) Os impostos serão reduzidos se e somente se Anita ganhar as eleições e a economia permanecer forte.

Tabelas-Verdade

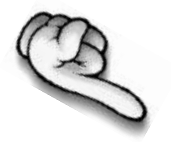
Dadas várias proposições simples **p**, **q**, **r**, **s,...** podemos combiná-las pelos conectivos lógicos: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ e construir proposições compostas, tais como:

$P(p, q)$: $\sim(p \wedge \sim q)$

$Q(p, q, r)$: $(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \vee p \leftrightarrow r)$

Então, com o emprego das operações lógicas fundamentais vistas anteriormente, é possível construir a Tabela-Verdade correspondente a qualquer proposição composta dada, Tabela-Verdade esta que mostrará exatamente os casos em que a proposição composta será VERDADEIRA (V) ou FALSA (F).

O número de linhas da tabela-verdade de uma proposição composta depende do número de proposições simples que a integram, sendo dado o seguinte teorema:



"A tabela-verdade de uma proposição composta com **n** proposições simples componentes contém 2^n linhas"

Construção da Tabela-Verdade de uma proposição composta

Construindo a Tabela-Verdade para a proposição P(p,q): ~(p ∧ ~q), teremos:

p	**q**	**~q**	**p ∧ ~q**	**~(p ∧ ~q)**
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Simbolicamente temos: P(VV) = V

P(VF) = F

P(FV) = V

P(FF) = V

Os valores lógicos da proposição composta dada correspondente a todas as possíveis atribuições dos valores lógicos (V) e (F) às proposições simples componentes **p** e **q** são V, F, V, V, isto é:

P(VV, VF, FV, FF) = VFVV

Tautologias, Contradições e Contingências

Definição 1: chama-se tautologia toda a proposição composta que for verdadeira, ou seja, se for verdadeira para todas as combinações possíveis de valores de sentenças variáveis. As tautologias também são denominadas proposições tautológicas ou proposições logicamente verdadeiras. É imediato que as proposições $p \rightarrow p$ e $p \leftrightarrow p$ são tautologias (Princípio de Identidade para as proposições).

Exemplo (1): a proposição $p \vee \sim(p \wedge q)$ é tautológica.

Veja sua Tabela Verdade:

p	**q**	**p ∧ q**	**~(p ∧ q)**	**p v ~(p ∧ q)**
V	V	V	F	**V**
V	F	F	V	**V**
F	V	F	V	**V**
F	F	F	V	**V**

Definição 2: chama-se contradição toda proposição composta que for falsa, ou seja, se for falsa para todas as combinações possíveis de valores de sentenças variáveis.

Como uma tautologia é sempre (V), a negação de uma tautologia resulta em uma contradição e, vice-versa. As contradições também são chamadas de proposições contraválidas ou proposições logicamente falsas.

Exemplo (1): a proposição $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ é uma contradição, veja sua Tabela Verdade:

p	**q**	**p ∧ q**	**(p v q)**	**~(p v q)**	**(p ∧q) ∧ ~(p v q)**
V	V	V	V	F	**F**
V	F	F	V	F	**F**
F	V	F	V	F	**F**
F	F	F	F	V	**F**

Definição 3: chama-se contingência toda proposição composta em cuja última coluna da sua Tabela Verdade figuram os valores (V) e (F) cada um pelo menos uma vez. Em outros termos, contingência é toda proposição composta que não é tautologia nem contradição. As contingências são também denominadas proposições contingentes ou proposições indeterminadas.

Exemplo (1): a proposição $p \vee q \rightarrow p$ é uma contingência conforme sua Tabela Verdade:

p	q	p v q	p v q → p
V	V	V	**V**
V	F	V	**V**
F	V	V	**F**
F	F	F	**V**

Exercícios em classe

[1] Construa a Tabela-Verdade para cada uma das proposições compostas abaixo e em seguida classifique em tautologia, contradição ou contingência:

(a) P(p, q): $\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$

(b) Q(p, q, r): $p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$

(c) R(p, q, r): $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(d) S(p, q, r): $(p \rightarrow (\sim q \vee r)) \wedge \sim(q \vee (p \leftrightarrow \sim r))$

(e) T(p, q): $\sim(p \wedge q \rightarrow p \vee q)$

(f) P(p, q, r): $(r \vee (\sim p \rightarrow r)) \leftrightarrow \sim(r \wedge (q \vee \sim r))$

(g) Q(p, q, r): $(p \wedge q \rightarrow r) \vee (\sim p \leftrightarrow q \vee \sim r)$

(h) R(p, q, r): $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(i) S(p, q, r): $(r \rightarrow (q \rightarrow \sim p)) \rightarrow (p \wedge r \leftrightarrow \sim q)$

[2] Determinar P(VFV) em cada um dos seguintes casos:

(a) P(p, q, r): $(p \vee (q \rightarrow \sim r)) \wedge (\sim p \vee r \leftrightarrow \sim q)$

(b) P(p, q, r): $(p \vee r) \wedge \sim p \leftrightarrow (\sim r \rightarrow q)$

[3] Três alunos cursam aulas de Inglês na Escola "SPEAK ALL" e eles são suspeitos de não pagarem suas matrículas. A professora responsável pelo curso entrevistou os três alunos, para cobrar a matrícula, e obteve os seguintes depoimentos:

JOSÉ: "Marcelo não pagou e Viviane pagou"

MARCELO: "Se José não pagou, Viviane também não pagou"

VIVIANE: "Eu paguei, mas pelo menos um dos outros não pagou"

Exprimir simbolicamente os depoimentos e identificar os pagantes e os não pagantes e os mentirosos, supondo que todos pagaram as matrículas

[4] Considere a afirmação P: "A ou B", onde A e B, por sua vez, são as seguintes afirmações: A: Carlos é dentista

B: Se Enio é economista, então Juca é arquiteto

Ora, sabe-se que a afirmação P é falsa. Logo, a única afirmação correta abaixo é?

(a) Carlos não é dentista; Enio não é economista; Juca não é arquiteto

(b) Carlos não é dentista; Enio é economista; Juca não é arquiteto

(c) Carlos não é dentista; Enio é economista; Juca é arquiteto

(d) Carlos é dentista; Enio não é economista; Juca não é arquiteto

(e) Carlos é dentista; Enio é economista; Juca não é arquiteto

Equivalência Lógica

Diz-se que uma proposição P(p, q, r, s,...) é logicamente equivalente ou apenas equivalente a uma proposição Q(p, q, r, s,...) se as Tabelas Verdade destas duas proposições são idênticas.

A notação utilizada é: P(p, q, r, s,...) $\Leftrightarrow$ Q(p, q, r, s,...)

OBS: em particular, se as proposições P(p, q, r, s,...) e Q(p, q, r, s, ...) são ambas tautologias ou são ambas contradições, então são equivalentes.

Exemplo (1): Veja as Tabelas Verdades das proposições: $p \to p \wedge q$ e $p \to q$

p	q	$p \wedge q$	$p \to p \wedge q$	$p \to q$
V	V	V	**V**	**V**
V	F	F	**F**	**F**
F	V	F	**V**	**V**
F	F	F	**V**	**V**

são iguais

Podemos afirmar que:

$p \to p \wedge q$ e $p \to q$ são equivalentes, ou seja: $p \to p \wedge q \Leftrightarrow p \to q$

Propriedades da Equivalência Lógica:

1. Reflexiva:

   P(p, q, r, s,...) $\Leftrightarrow$ P(p, q, r, s,...)

2. Simétrica:

   Se P(p, q, r, s,...) $\Leftrightarrow$ Q(p, q, r, s,...) então Q(p, q, r, s,...) $\Leftrightarrow$ P(p, q, r, s,...)

3. Transitiva:

   Se P(p, q, r, s,...) $\Leftrightarrow$ Q(p, q, r, s,...) e

   Q(p, q, r, s,...) $\Leftrightarrow$ S(p, q, r, s,...) então

   P(p, q, r, s,...) $\Leftrightarrow$ S(p, q, r, s,...)

Exercícios

em classe

[1] Demonstre por tabelas-verdade se as seguintes proposições são equivalentes:

(a) $(p \to q) \to r$ e $p \wedge \sim r \to \sim q$

(b) $(p \to q) \vee (p \to r)$ e $p \to q \vee r$

(c) $(p \to q) \wedge (\sim q \vee p)$ e $p \leftrightarrow q$

(d) $p \leftrightarrow q$ e $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

(e) $(p \to r) \to \sim q$ e $q \to (p \to \sim r)$

[2] Verifique se as proposições abaixo são logicamente equivalentes:

(a) $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \wedge \sim q$

(b) $\sim (p \vee q)$ e $\sim p \vee \sim q$

Álgebra das Matrizes

Introdução

Muitas vezes, para designar com clareza certas situações, é necessário formar um grupo ordenado de números que se apresentam dispostos em linhas e colunas numa tabela. Essas tabelas são chamadas na Matemática de Matrizes. Com o advento da computação e a crescente necessidade de se guardar muita informação, as matrizes adquiriram uma grande importância. Em geral, definimos uma matriz como um arranjo retangular de números.

Definição

Dados dois números **m** e **n** naturais e não nulos, chama-se matriz **m** por **n** (indica-se **m** x **n**) toda tabela **A** formada por números reais distribuídos em **m** linhas e **n** colunas.

Assim: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \end{bmatrix}$ é uma matriz com duas linhas e três colunas.

As linhas são numeradas de cima para baixo e as colunas são numeradas da esquerda para a direita. As matrizes são classificadas em termos dos números de linhas e de colunas que elas possuem. Estes números juntos, formam o que chamamos de dimensões de uma matriz.

A matriz **A** possui duas linhas e três colunas e, portanto, dizemos que ela é uma matriz 2 x 3 (que se lê “matriz dois por três”).

OBS (1): os números em uma matriz são chamados de entradas ou elementos;

OBS (2): os elementos de uma matriz podem estar dispostos entre parêntesis, colchetes ou duas barras;

OBS (3): para dar nomes às matrizes usamos letras maiúsculas do nosso alfabeto: A, B, C, D, etc.; e os elementos são representados por letras minúsculas acompanhadas de um duplo índice (indicando a posição ocupada pelo elemento na matriz).

Representação de uma matriz

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz **A** possui **m** linhas e **n** colunas e, portanto, ela é uma matriz **m**x**n**. Quando dizemos que **A** é uma matriz **m**x**n**, estamos indicando o tamanho ou a dimensão desta matriz.

Igualdade de Matrizes

Duas matrizes **A** e **B** são iguais se tiverem a mesma dimensão e se os seus elementos correspondentes são iguais, ou seja, se cada entrada de uma delas for igual à entrada correspondente na outra matriz. Logo, a igualdade de duas matrizes **m**x**n** é equivalente a um sistema de **m.n** igualdades, uma para cada par de elementos correspondentes.

Matrizes Especiais

- **Matriz-linha** (ou vetor linha): é toda matriz do tipo 1 x n, ou seja, possui apenas uma linha. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$

- **Matriz-coluna** (ou vetor coluna): é toda matriz do tipo m x 1, ou seja, possui apenas uma coluna. $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -4 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$

- **Matriz Nula** (ou matriz zero): é toda matriz na qual os seus elementos sejam iguais a zero ($O_{m \times n}$).

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

- **Matriz Quadrada**: matriz cujo número de linhas é exatamente igual ao número de colunas (m = n).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\,x\,3}$$

Diagonal principal (i = j)

- **Matriz Identidade** (I_n): matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a um (1) e os demais elementos são iguais a zero (0).

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\,x2} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\,x\,3}$$

- **Matriz Transposta**: Dada uma matriz A do tipo **m**x**n**, denominamos matriz transposta de A e representamos por A^t , a matriz do tipo **n**x**m** cujas colunas coincidem ordenadamente com as linhas de A, ou seja, as linhas e colunas são intercambiadas.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 5 & \pi \\ \sqrt{3} & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\,x\,4} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{bmatrix} -4 & \sqrt{3} \\ 8 & -1 \\ 5 & 2 \\ \pi & 0 \end{bmatrix}_{4\,x\,2}$$

- **Matriz Simétrica**: matriz quadrada onde a parte triangular superior à diagonal principal é uma reflexão da parte triangular inferior, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$. De maneira genérica se $A = A^t$ então ela é simétrica. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{3\,x\,3}$$

Exercícios

em classe

[1] Represente na forma tabular as seguintes matrizes:

$A = (a_{ij})_{2x3}$ tal que $a_{ij} = 2i^2 + 3j^2$

$B = (b_{ij})$ com $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$, tal que $b_{ij} = 3i + 2j - 5$

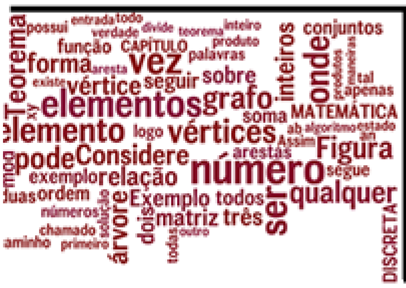
$C = (c_{ij})_{2\,x\,4}$, tal que $c_{ij} = \begin{cases} (-2)^{i+j}, \text{ se } i < j \\ 2i + 3 - j, \text{ se } i = j \\ -\dfrac{4i}{j}, \text{ se } i > j \end{cases}$

[2] Dada a Matriz $A = (a_{ij})_{2x2}$ em que $a_{i\,j} = (i + j)^2 - 1$, calcule o valor da seguinte expressão $2.\left(\dfrac{a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}}{3}\right)$

[3] Encontre o valor de x, y, z e w, nos casos abaixo:

(a) $\begin{bmatrix} x + y & 2x - 3y \\ z - w & z + 2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} x & y & (x + 3) \\ z & 4 & 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x - 1) & -1 & w \\ x & (5 + y) & -4 \end{bmatrix}$



Operações Matriciais

Adição de Matrizes

Dadas duas matrizes de mesma dimensão, isto é, $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$. A soma de A e B (escreve-se A + B) é a matriz obtida pela adição dos elementos correspondentes de A e B.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\,x\,n}$$

<u>Exemplo</u>: $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 13 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

OBS(1): na adição de matrizes valem as seguintes propriedades:

- A + B = B + A — Comutativa
- A + (B + C) = (A + B) + C — Associativa
- A + O = O + A = A — Elemento Neutro

OBS(2): a matriz –B é chamada de oposta da matriz B, logo, cada elemento de –B é o oposto do elemento correspondente de B. Por exemplo, se:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ então teremos } -B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Usando a oposta, podemos definir a diferença A – B (quanto A e B tiverem mesma ordem).

Diferença de Matrizes

Dadas duas matrizes de mesma dimensão, isto é, $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{ij})_{m\,x\,n}$, denomina-se matriz diferença entre A e B (escreve-se A - B) é a matriz obtida subtraindo-se os elementos correspondentes de A e B.

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\,x\,n}$$

Exemplo: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

OBS: na subtração de matrizes notamos que $A - B \neq B - A$

Multiplicação de Matriz por escalar (número)

Dadas uma matriz $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e um número real k, multiplicar uma matriz por um número real k (denominado escalar) resulta em uma matriz na qual cada entrada (elemento) da matriz original é multiplicada por este número real.

$$k.\,A = (k.a_{ij})_{m\,x\,n}$$

Exemplo: $\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -4 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

Multiplicação de Matrizes

O produto das matrizes A e B (escreve-se A.B) não é determinado por meio do produto dos seus respectivos elementos.

Para calcular A.B, o número de colunas de A tem que ser igual ao número de linhas de B.

Assim, se $A = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ e $B = (b_{ij})_{n\,xp}$, então o produto de A.B será uma matriz do tipo **m**x**p** e será obtido da seguinte maneira: tomando-se os elementos da linha **i** da matriz A e multiplicando-se cada um deles pelo seu correspondente da coluna **j** na matriz B e somando-se os resultados.

Exemplo: dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

A matriz A é do tipo 2 x 3 e B é do tipo 3 x 2, logo o produto A.B é possível e é uma matriz 2 x 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 + 4.2 + 3.6 & 2.3 + 4.2 + 3.5 \\ 4.5 + (-1).2 + 2.6 & 4.3 + (-1).2 + 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 29 \\ 30 & 20 \end{bmatrix}$$

OBS (1): no produto de duas matrizes A e B, a ordem em que os fatores aparecem é importante, pois a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, A.B nem sempre é igual a B.A

Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, dizemos que A é **inversível** se existir uma matriz quadrada B, tal que: $A.B = B.A = I_n$. Neste caso, dizemos que B é a inversa de A, e denotamos por A^{-1}.

Exemplo: verificar se existe a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriz Booleana

Os dígitos binários (ou bits) são os símbolos 0 e 1.

Entendendo esses dígitos como valores lógicos (0 representando FALSO e 1 representando VERDADEIRO).

Consideremos as operações seguintes com estes dígitos:

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	1

x	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

As operações acima correspondem, respectivamente, às operações lógicas OU ($\vee$) e E ($\wedge$), isto é:

$\vee$	**F**	**V**
F	F	V
V	V	V

$\wedge$	**F**	**V**
F	F	F
V	F	V

As operações acima em 0 e 1 são chamadas de ***operações booleanas***, uma vez que também correspondem às operações da Álgebra Booleana (desenvolvida pelo matemático inglês George Boole).

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz cujos elementos são os bits 0 e 1 sujeitos às operações booleanas definidas acima. Então A é chamada de Matriz Booleana. Podemos definir uma operação booleana de multiplicação A.B para matrizes booleanas usando multiplicação e a soma booleana, ao invés de multiplicação e adição usuais.

- **Multiplicação Booleana**: $x \wedge y = \min(x, y)$
- **Adição Booleana**: $x \vee y = \max(x, y)$

<u>Exemplo</u>: Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ então:

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e o produto booleano A . B será dado por: $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercícios

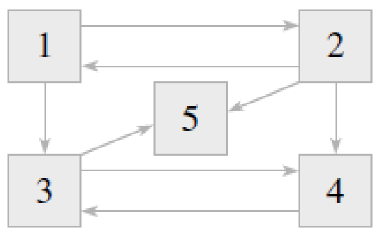
em classe

[1] Se a matriz A for de dimensão 3x5 e a matriz B for de dimensão 5x2, então a matriz A.B será de dimensão ___________________.

Seja B uma matriz de dimensão 2x3 e $B.A^2$ está definida, então A é uma matriz de dimensão ___________________.

[2] Em uma pesquisa com 1000 estudantes de uma Instituição de Ensino Superior, foram obtidas as seguintes informações: metade dos alunos eram estudantes de Engenharia da Computação (EC), dos quais 60% eram homens; 300 alunos eram estudantes de Engenharia de Produção (EP), dos quais 75% eram homens; e os estudantes restantes eram de Biologia (BIO), dos quais 60% eram mulheres. Expresse essas informações usando uma matriz 2x3, rotulando as linhas como homens e mulheres e as colunas como EC, EP e BIO.

[3] Suponha que um órgão governamental, a documentação esteja constantemente trafegando entre os diversos departamentos conforme indicado no Diagrama abaixo:



(a) construa a matriz A com elementos

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{caso a documentação trafegue diretamente de } i \text{ para } j \\ 0, \text{caso a documentação não trafegue diretamente de } i \text{ para } j \end{cases}$$

(b) construa a matriz B com elementos

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{caso a documentação possa trafegar de } i \text{ para } j \text{ através de} \\ \quad \text{no máximo um departamento intermediário, com } i \neq j \\ 0, \text{caso isto não seja verdadeiro} \end{cases}$$

(c) o responsável pelo departamento **i** tem o maior poder de influência sobre os demais caso a soma dos elementos da linha **i** na matriz A + B seja a maior de todas. Qual é o número do Departamento dessa pessoa?

[4] Dadas as seguintes matrizes: A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $2A - 3B + C$

(b) $3B - I_2$

(c) $-4A - C + 2.(A + B - C)$

(d) $A^t + B$

(e) $-(A^t + B^t)$

[5] Sejam as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, determine:

(a) A.B

(b) B.A

(c) A.D

(d) D^2

(e) D.B

(f) B.C

(g) E.F

(h) $F.E^t$

[6] Para a fabricação de caminhões, uma indústria montadora precisa de eixos e rodas para seus três modelos de veículos, com a seguinte especificação:

Componentes	**Modelo**		
	A	**B**	**C**
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

Para os dois primeiros meses do ano, a produção da fábrica deverá seguir a tabela abaixo:

Modelos	**Meses**	
	Janeiro	**Fevereiro**
A	30	20
B	25	18
C	20	15

Usando a multiplicação de matrizes, a quantidade de eixos e rodas, necessários no período, será, respectivamente, de:

(a) 215 e 154 (b) 154 e 308 (c) 369 e 738

(d) 738 e 369 (e) n.d.a.

[7] Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 10 & 5 & 18 \end{pmatrix}$, determine X tal que:

$$3X + 2A = B$$

[8] Determine as matrizes X e Y nos seguintes casos:

(a) $2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $Y - X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ e $2X - 2Y = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$

[9] Determine, se existir, a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

[10] A Matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a Matriz Inversa da Matriz $B = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -28 \\ 1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

[11] Para as matrizes booleanas $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, encontre:

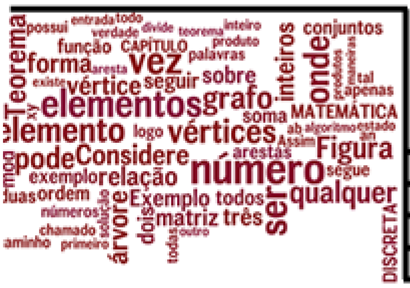
(a) $A \vee B$

(b) $A.B$

(c) $B \wedge A$

(d) $B.A$

(e) $B \vee A^t$



Teoria dos Conjuntos

Introdução

O conceito de conjunto é fundamental, pois praticamente todos os conceitos desenvolvidos em Computação e Informática, bem como os correspondentes resultados, são baseados em conjuntos ou construções sobre conjuntos.

Conjunto é uma estrutura que agrupa objetos e constitui uma base para construir estruturas mais complexas. Assim, entendemos um conjunto como sendo qualquer coleção de objetos, sem repetições, não ordenados, denominados elementos ou membros. O termo “elemento” é usado de maneira ampla, não é definido formalmente e pode determinar um objeto concreto ou abstrato. Por exemplo, podemos falar do conjunto de todos os alunos regularmente matriculados no Curso de Redes, do conjunto de todas as letras do nosso alfabeto, o conjunto de todos os números reais menores do que 4, o conjunto de todos os jogadores da seleção brasileira de futebol, etc.

Conjuntos são usualmente denotados por letras maiúsculas: A, B, C, S etc. Os elementos de um conjunto são normalmente denotados por minúsculas: a, b, x, y etc.

Na maior parte dos casos, os conjuntos serão definidos por meio de uma propriedade característica dos objetos a ele pertencentes. Em geral, um conjunto está completamente determinado quando os seus elementos estão todos especificados, e existem, essencialmente, duas formas para fazer isto. Uma forma é descrever, se possível, todos os elementos, ou seja, enumerar todos os seus elementos. O conjunto que é definido listando todos os seus elementos separados por vírgulas em qualquer ordem e dispostos habitualmente entre chaves, é denominado **denotação por extensão**. Por exemplo:

Conjunto das consoantes da palavra DISCRETA = {d, s, c, r, t}

Conjunto das cores da bandeira do Brasil = {verde, amarelo, azul, branco}

A segunda forma é definir o conjunto, mencionando as características ou propriedades em que os elementos desse conjunto a verificam, denominada **denotação por compreensão**. Por exemplo:

$$B = \{ x \mid x \text{ é um número inteiro, } x > 0\}$$

Neste caso, lê-se: "B é o conjunto de x tal que x é inteiro e x é maior que zero". Note que os elementos do conjunto B são todos os números inteiros positivos. Usualmente, x designa um qualquer elemento do conjunto; o símbolo | lê-se: "tal que" e a vírgula (**,**) lê-se "e".

Alguns conjuntos importantes

Dois conjuntos especiais são: o conjunto Universal e o conjunto Vazio.

Em qualquer aplicação da Teoria dos Conjuntos, os elementos de todos os conjuntos em estudo pertencem a algum conjunto maior chamado **conjunto Universal**, que representamos por ***U***.

Um conjunto sem elementos é chamado de **conjunto Vazio** e denota-se por { } ou ∅. Só existe um conjunto vazio. Se A e B são dois conjuntos vazios, então A = B, uma vez que tem exatamente os mesmos elementos, nomeadamente, nenhum.

Exemplos:

Conjunto de todos os brasileiros maiores que 300 anos

Conjunto de todos os números ímpares e divisíveis por 2

Na Teoria dos Conjuntos, os objetos de interesse são os conjuntos e não os elementos que os formam. Assim, as operações devem ser definidas sobre ou entre conjuntos, mas nunca sobre elementos isolados. Para tratar elementos, devemos considerar conjuntos unitários. Se **x** é um elemento de ***U*** então **{x}** denota o **conjunto unitário** que contém apenas um único elemento, ou seja, o elemento **x**.

Exemplos:

. Conjunto das seleções pentacampeãs mundiais de futebol	A = {Brasil}
. $B = \{x \mid x$ é número par e é primo$\}$	$B = \{ 2 \}$

Podemos destacar, também, os conjuntos finitos e conjuntos infinitos. Um conjunto é considerado **conjunto finito** quando possuir um número finito de elementos, ou seja, uma quantidade contável de elementos e todos os seus elementos puderem ser denotados por extensão.

Exemplos: Vogais = {a, e, i, o, u}

A = {x | x é número natural compreendido entre 3 e 10}

Já um **conjunto infinito** poderá ser representado através de denotação por compreensão e o número de elementos deste conjunto são infinitos, ou seja, incontáveis.

Exemplo: C = { x | x é número par positivo}

NOTA: os seguintes conjuntos são importantes na Matemática e na Computação e Informática, em particular e, possuem uma denotação universalmente aceita:

- Conjunto dos números Naturais → $\aleph$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,...}
- Conjunto dos números Inteiros → Z = {.., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...}
- Conjunto dos números Racionais → Q = $\{ x = \frac{a}{b} \mid$ a,b são n°s inteiros e b ≠ 0}
- Conjunto dos números Irracionais → números que não podem ser expressos na forma de fração $\left(\frac{a}{b}\right)$
- Conjunto dos números Reais → $\Re$ = { x | x é racional ou x é irracional}

Relação de pertinência: elemento x conjunto

Quando temos um determinado elemento **x** pertencente a um conjunto **A**, dizemos que este elemento pertence ao conjunto, e denotamos por **x** $\in$ **A**. Diremos, alternativamente, que **x** é um membro de **A**. Da mesma forma quando **x** não pertence ao conjunto **A**, escrevemos **x** $\notin$ **A**.

Exemplo (1): 6 $\in$ {x | x é um inteiro par}

1 $\notin$ {x | x é um inteiro par}

Exemplo (2): Seja A = {x | x é uma letra do alfabeto e x é uma vogal}

Observe que: b $\notin$ A i $\in$ A p $\notin$ A

Subconjuntos

Sejam dois conjuntos A e B, dizemos que A é um subconjunto de B se, e somente se, todos os elementos de A são também elementos de B, ou, se todos os elementos de A pertencem também ao conjunto B. A notação $A \subseteq B$ significa que A é um subconjunto de B. Algumas vezes, em lugar de dizermos que A é um subconjunto de B, dizemos que A está incluído em B, ou que A **está contido** em B.

Exemplo (1): $\{4, 8\} \subseteq \{2, 4, 5, 7, 8, 10\}$

$\{b, a\} \subseteq \{c, a, b\}$ $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

Exemplo (2): Sejam os seguintes conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $B = \{3, 4, 5\}$ $C = \{6, 7, 8\}$

As seguintes sentenças são todas verdadeiras:

$B \subseteq A$ $C \not\subset A$

$\{3, 7\} \subseteq A$ $7 \in C$ $8 \notin A$

NOTA (1): são propriedades evidentes da relação de inclusão:

Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$ (transitiva)

$A \subseteq A$ (reflexiva: todo conjunto é subconjunto dele mesmo)

$\varnothing \subseteq A$ (o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro conjunto)

$A \subseteq \boldsymbol{U}$

NOTA (2): se $B \subseteq A$ então $A \supseteq B$ (lê-se: "A contém B")

NOTA (3): Os símbolos utilizados na relação entre:

- Elemento / Conjunto: $\in$ (pertence) $\notin$ (não pertence)
- Conjunto / Conjunto: $\subseteq$ (está contido) $\supseteq$ (contém) $\not\subset$ (não está contido)

Igualdade de conjuntos

Dizemos que dois conjuntos **A** e **B** são iguais (ou idênticos) se, e somente se, todo elemento de **A** pertencer a **B** e todo elemento de **B** pertencer ao conjunto **A**. Neste caso, indicamos por **A** = **B**. Se um dos conjuntos contém algum elemento que não pertence ao outro, dizemos que os dois conjuntos são distintos e escrevemos $A \neq B$.

Exemplo: Sejam os conjuntos:

$$A = \{x \mid x \text{ é algarismo do número } 125.432\} = \{1, 2, 5, 4, 3\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ é algarismo do número } 324.514\} = \{3, 2, 4, 5, 1\}$$

Notamos que todo elemento de A pertence a B e também todo elemento de B pertence ao conjunto A; logo temos A = B. Este exemplo mostra que não precisamos repetir elemento de um mesmo conjunto; basta indicar cada elemento uma única vez.

NOTA (1): sabemos que A e B são iguais se contêm os mesmos elementos. Podemos reescrever esta igualdade em termos de subconjuntos:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq A$$

NOTA (2): importante salientarmos sobre a diferença entre $\in$ e $\subseteq$. A notação $x \in$ **A** significa que x é um elemento ou membro do conjunto **A**. Já a notação $A \subseteq B$ significa que todo elemento de A está contido em B, ou seja, todo elemento do conjunto A também pertence ao conjunto B;

NOTA (3): também precisamos saber a diferença entre x e $\{x\}$. O símbolo x se refere a um objeto (número, letra ou qualquer elemento de um conjunto), e a notação $\{x\}$ significa o conjunto cujo único elemento é x. É sempre correto escrever $x \in \{x\}$, mas não é correto escrever $x = \{x\}$ ou $x \subseteq \{x\}$.

Partes de um conjunto

Dado um conjunto A, podemos criar um novo conjunto cujos elementos sejam todos os subconjuntos de A. Este novo conjunto é chamado de conjunto das partes de A e denotamos por $\wp(A)$, ou seja: $\wp(A) = \{ X \mid X \subseteq A\}$.

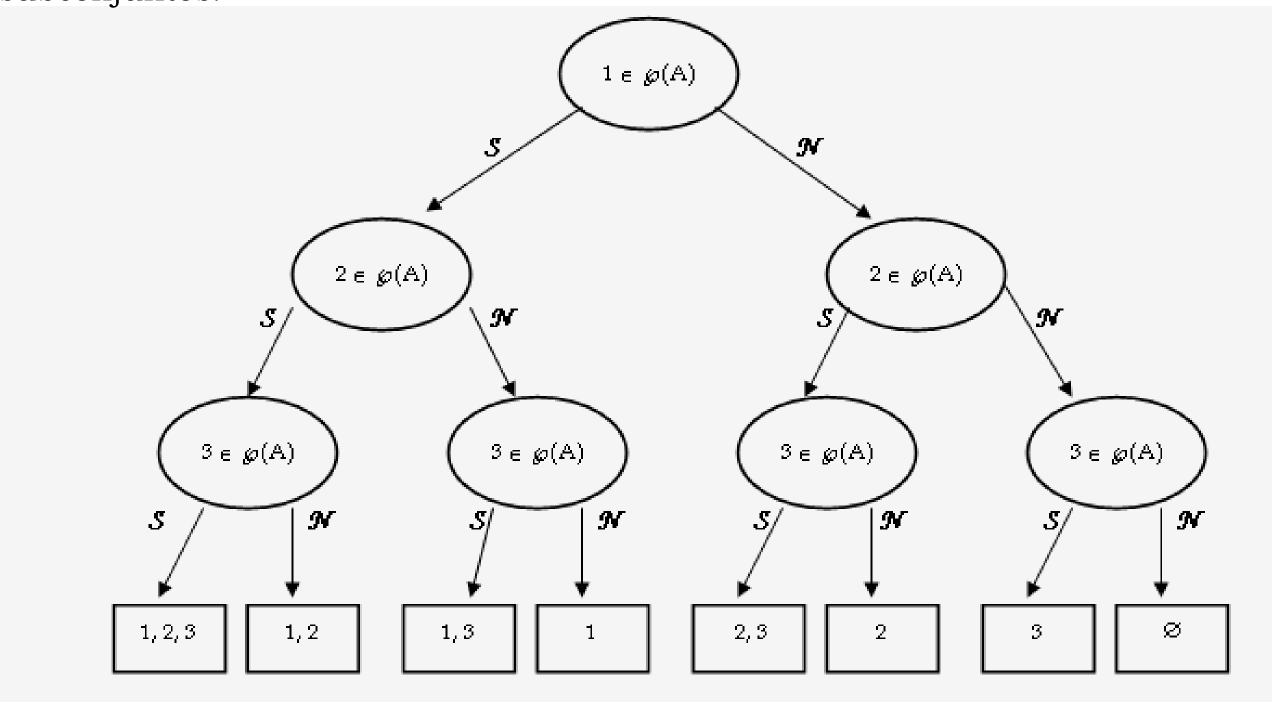
O conjunto $\wp(A)$ conterá, pelos menos o conjunto $\varnothing$ e o próprio conjunto A, uma vez que: $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq A$.

Quantos subconjuntos um conjunto tem? Vamos tentar responder esta pergunta analisando o seguinte exemplo. Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ vamos descobrir quantos subconjuntos este conjunto A possui. A maneira mais fácil para resolver esta questão seria listar todos os possíveis subconjuntos de A. Faremos isto de duas formas:

1°. Através de uma tabela de possibilidades:

n° de elementos	Subconjuntos	Qtde. subconjuntos
0	$\varnothing$	1
1	{1} , {2}, {3}	3
2	{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}	3
3	{1, 2, 3}	1
TOTAL...		**8**

2°. Através de um diagrama: começamos no círculo no topo (chamado de nó). O nó contém uma pergunta: 1 é um elemento de $\wp$(A)? As duas setas saindo desse nó são rotuladas com as duas possíveis respostas a essa pergunta (Sim ou Não). Tomamos uma decisão e seguimos a seta apropriada (também chamada de aresta) rumo ao nó na outra extremidade. Esse nó contém a próxima pergunta: 2 é um elemento de $\wp$(A)? Siga a seta correspondente à sua resposta rumo ao próximo nó, que contém a terceira (e nesse caso a última) pergunta que você deve responder para determinar o subconjunto: 3 é um elemento de $\wp$(A)? Dando uma resposta e seguindo a seta apropriada chegamos a um nó, que contém uma listagem dos elementos de $\wp$(A). Concluímos que o conjunto A = {1, 2, 3} possui 8 subconjuntos:



NOTA (1): no exemplo acima, o conjunto das partes de A, indicado por $\wp$(A) é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A. Assim, teremos:

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

NOTA (2): o conjunto das partes de A, ou seja, o conjunto que contem todos os subconjuntos de A, também é chamado de conjunto potência de A, e denotamos por 2^A

NOTA (3): de um modo geral, para um conjunto A com **n** elementos, o conjunto $\wp(A)$ terá 2^n elementos.

Exercícios em classe

[1] Escreva os seguintes conjuntos através da denotação por extensão:

(a) conjunto dos números inteiros ímpares positivos menores que 20

(b) conjunto dos dias da semana que começam pela letra s

(c) conjunto das vogais da palavra MATEMÁTICA

(d) conjunto dos meses do ano que começam com a letra C

(e) conjuntos dos números naturais pares maiores que 4 e menores que 7

[2] Sejam os conjuntos: $A = \{x \in \aleph \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ $\quad B = \{x \in \aleph \mid 1 \leq x < 6\}$

$C = \{3, 4, 5\}$ $\quad D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Classifique em Verdadeiro (V) ou Falso (F) as sentenças seguintes:

$A \subseteq B$	$-2 \in A$
$C \subseteq A$	$4 \in B$
$B \subseteq D$	$\{0, 1, 2\} \subseteq A$
$\varnothing \in B$	$D \subseteq B$
$n(B) = n(C)$	

[3] Sejam os conjuntos $A = \{x \in Z \mid x^2 - 7x + 6 < 0$ ou $2x + 3 = 9\}$ e $B = \{x \in Z \mid 0 < x < 6\}$. Prove que $A \subseteq B$.

[4] O programa QUAD encontra e imprime soluções de equações quadráticas da forma $ax^2 + bx + c = 0$. O programa PAR lista todos os inteiros de -2n a 2n. Seja **Q** o conjunto dos valores de saída de QUAD e **E** o conjunto dos valores de saída de PAR.

(a) mostre que para a = 1, b = 2, c = -24 e n = 50, $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{E}$

(b) mostre que para os mesmos valores de a, b e c, mas para n = 2, $\mathbf{Q} \not\subset \mathbf{E}$

[5] Quais das igualdades abaixo são verdadeiras?

(a) {a, m, o, r} = {r, o, m, a}

(b) {1, 2, 3} = {2, 3}

(c) $\{x \mid x^2 = 4\} = \{x \mid x^3 - 4x = 0\}$

(d) $\{x \mid 2x + 7 = 11\} = \{2\}$

(e) $\{x \mid x < 0 \text{ e } x \geq 0\} = \emptyset$

[6] Dado E = {1, 2, 4, 8} quantos são os subconjuntos de E?

[7] Forme o conjunto das partes dos seguintes conjuntos:

(a) A = {1,2}

(b) B = {a, r, t, e}

(c) C = {7}

(d) D = $\emptyset$

Diagrama de Venn-Euller

Introdução

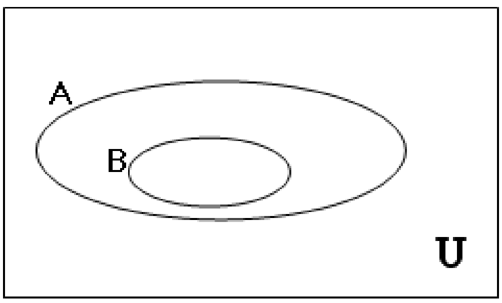
Como poderíamos fazer a representação da seguinte situação: "Conjunto B de todas as pessoas nascidas na cidade de Bauru e o conjunto A de todos os paulistas"?

Observe que, o tratamento dado aos conjuntos e conceitos correlatos até o presente momento usou uma linguagem textual. Entretanto, na medida em que outros conceitos são desenvolvidos, como as operações sobre conjuntos, uma linguagem diagramática auxilia o entendimento de definições, facilita o desenvolvimento de raciocínios e permite uma identificação e uma compreensão fácil e rápida dos componentes e dos relacionamentos em discussão.

Os ***Diagramas de Venn-Euller*** são universalmente conhecidos e são largamente usados nos estudos da Teoria dos Conjuntos. São úteis para reforçar a noção intuitiva sobre conjuntos, principalmente para analisar relações entre os conjuntos e também seus membros.

Diagrama de Venn-Euller

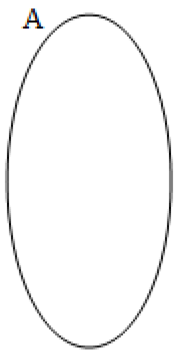
Num Diagrama de Venn-Euller faz-se um esboço dos conjuntos, os quais são representados por áreas fechadas no plano. As figuras usadas podem ser diversas. Em geral, o conjunto Universal (U) é representado pelo interior de um retângulo, mais precisamente, pelos pontos interiores ao retângulo. Qualquer conjunto é desenhado como sendo uma curva fechada, inteiramente contida no retângulo. Por exemplo, na situação referida na introdução (acima):



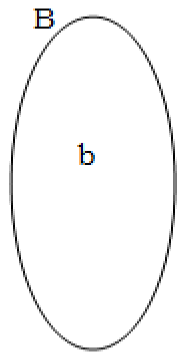
$B \subseteq A \subseteq U$

todo elemento de **B** pertence a **A**, ou seja, toda pessoa que nasceu em Bauru (**B**) é paulista (**A**), que por sua vez é brasileira (**U**)

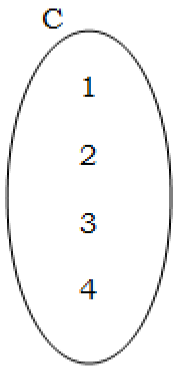
Vejamos outros exemplos:.



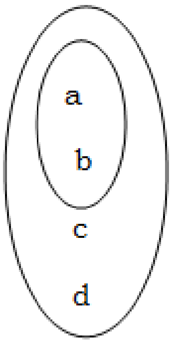
um dado conjunto A



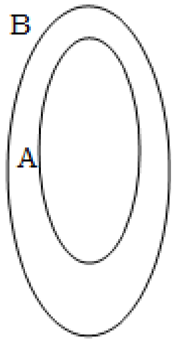
um determinado elemento $b \in B$



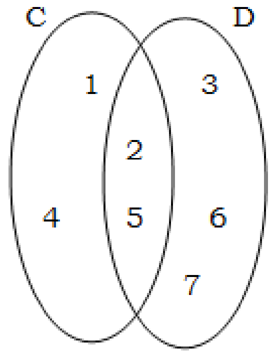
conjunto C = {1,2,3,4}



$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, d\}$



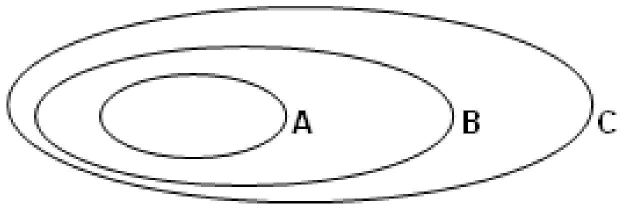
$A \subseteq B$



C = {1, 2, 4, 5} e D = {2, 3, 5, 6, 7}

NOTA: para ilustrar uma aplicação do Diagrama de Venn-Euller, podemos citar a propriedade da transitividade, ou seja, para quaisquer conjuntos A, B e C, vale:

$$A \subseteq B \quad \text{e} \quad B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad A \subseteq C$$



Exercícios

em classe

[1] Seja o conjunto A = {x | x é paulista} e B = {x | x é pessoa inteligente}. Admitindo que seja verdadeira a frase "todo paulista é inteligente", como se representam num Diagrama os conjuntos A e B?

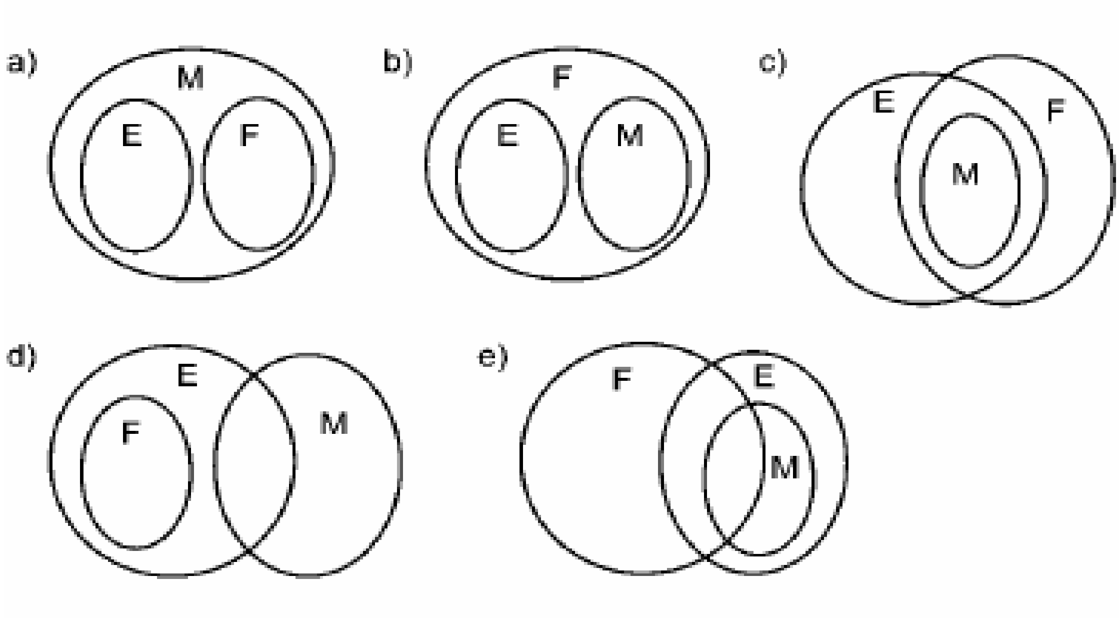
[2] Sejam os seguintes conjuntos:

M = {x | x é jovem que gosta de Matemática Discreta}

E = {x | x é jovem que gosta de Esportes}

F = {x | x é jovem que gosta de Festa}

Considerando a afirmação: "Todo jovem que gosta de Matemática Discreta gosta de Esportes e Festa" pode ser representada segundo o Diagrama:



[3] Considere o conjunto dos carros de uma certa concessionária. Um vendedor classificou esses carros em três subconjuntos, de acordo com os seus opcionais:

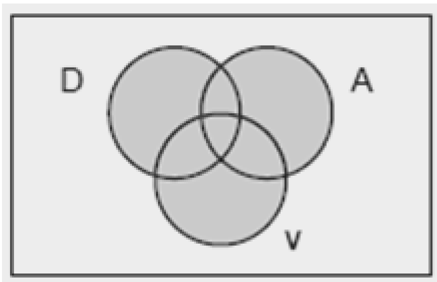
D = {x | x é carro com direção hidráulica}

A = {x | x é carro com ar condicionado}

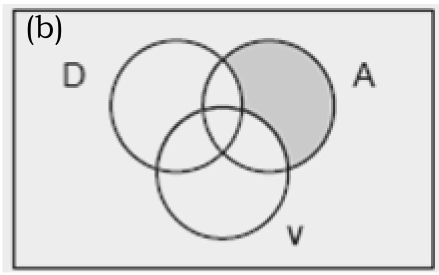
V = {x | x é carro com vidro elétrico}

Observe os seguintes Diagramas abaixo e complete o que eles representam:

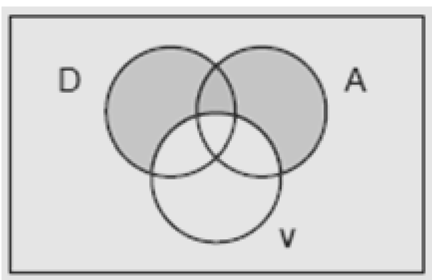
(a)



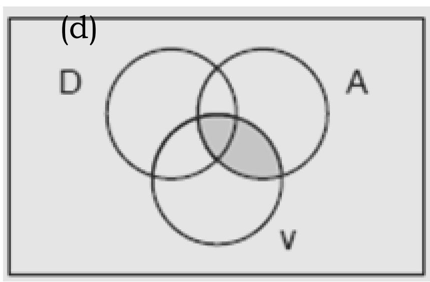
(b)



(c)



(d)



Exercícios Complementares

em casa

[1] Considere as proposições:

p: João programa em Java

q: João programa em Pascal

r: João programa em Delphi

Traduza para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

(a) Não é verdade que João programa em Delphi ou Pascal, mas que programa em Java.

(b) João programa em Pascal ou Java, mas não programa em Delphi e Java.

(c) Se João programa em Delphi então, ele não programa em Java ou Pascal.

(d) João programa em Java se e somente se, programa em Delphi.

(e) Se João programa em Pascal então, é falso que ele programa em Delphi e Java.

[2] As proposições p, q e r apresentam valor lógico a Verdade (V) e as proposições x, y e w apresentam valor lógico a FALSIDADE (F). Determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

(a) $(w \to (x \wedge \sim p) \leftrightarrow (r \vee y \to q)) \wedge r$

(b) $(p \to y) \wedge (y \to w) \leftrightarrow (r \vee \sim q) \vee (\sim x \wedge r)$

(c) $(y \wedge \sim (p \leftrightarrow r) \vee x \to q) \wedge ((w \wedge p) \to (q \vee x))$

[3] Construa a Tabela Verdade para as seguintes proposições abaixo:

(a) P(p, q, r): $(p \to (q \vee r \leftrightarrow \sim p)) \to \sim (r \wedge p)$

(b) Q(p, q, r): $(r \to q) \to (p \vee (r \wedge q) \to p \wedge (q \leftrightarrow r))$

(c) R(p, q): $(p \vee q) \wedge \sim (q \to p)$

[4] Considere três variáveis: A, B e C. Realize para estas variáveis os seguintes atributos:

A → 4 B → 16 C → 25

Em seguida, analise as proposições compostas abaixo e dê o valor lógico de cada uma delas:

(a) P: Se (A > B) então (A * A = B)

(b) Q: (B / A = A) se e somente se (A + B = C)

(c) R: $\sim$(A < C) $\wedge$ $\sim$(B > C)

(d) T: (A + C > B) $\vee$ (C – B < A)

[5] Sendo a = (-24) * (-12) ÷ (-2) e b = (-6 ÷ (-6)) * (-1), atribua os valores lógicos de:

(a) a*b > 0

(b) a / b = 0

(c) a / b = a*b

[6] Após ter aprendido a construir Tabelas Verdades de proposições compostas, durante as aulas de Matemática Discreta, um aluno construiu numa planilha Excel a Tabela Verdade para a proposição P(p, q, r): $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow (p \to r)$. Porém, devido a uma falha, foi esquecido de preencher alguns campos desta planilha. Analisando a Tabela Verdade construída, podemos afirmar que os valores lógicos que preenchem, respectivamente, as células em branco (E3, E9, F5, F8, G6) da planilha são:

	A	B	C	D	E	F	G
1					[1]	[2]	
2		p	q	r	$\sim p \wedge \sim q$	$p \to r$	$[1] \leftrightarrow [2]$
3		V	V	V		V	F
4		V	V	F	F	F	V
5		V	F	V	F		F
6		V	F	F	F	F	
7		F	V	V	F	V	F
8		F	V	F	F		F
9		F	F	V		V	V
10		F	F	F	V	V	V

(a) V, V, F, F, F

(b) F, V, V, V, V

(c) V, F, F, F, V

(d) F, V, F, V, F

(e) V, F, V, V, F

[7] Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$;

$E = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ determine as seguintes operações:

(a) $A.(B+C)$ (b) $B^t - 2C$ (c) $I_2 - (D+C)$

(d) $(A+3D).C^t$ (e) $-2.(C^t - A + B)$ (f) $(D+C)^t$

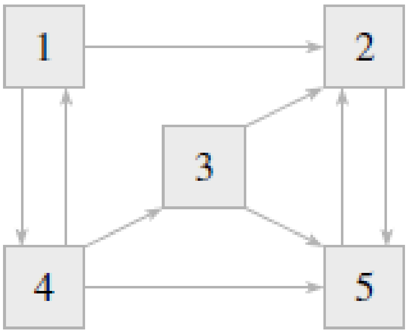
(g) $E\ .\ F$ (h) $E.E^t$

[8] Determine, se existir, a Inversa das seguintes matrizes:

(a) $M = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $N = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $Q = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

[9] De modo a classificar os cinco membros de sua equipe de enxadristas para competir com uma outra escola, o técnico desenha o seguinte diagrama. Uma seta indo de 1 para 2 significa que o jogador 1 já derrotou o jogador 2.



(a) construa uma matriz A com elementos:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{caso i tenha derrotado j} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

(b) construa uma matriz B com elementos:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{caso i tenha derrotado alguém que tenha derrotado j, com } i \neq j \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

(c) O jogador i é o jogador melhor classificado se a soma da linha i na matriz A + B for a maior. Qual é esse jogador?

[10] Represente na forma tabular a matriz abaixo:

$$B = (b_{ij}) \text{ com } 1 \leq i < 4 \text{ e } 1 \leq j \leq 3 \text{ tal que } b_{ij} = \begin{cases} 2i - j + 1, \text{ se } i < j \\ \dfrac{i+j}{2}, \text{se } i = j \\ 3j^2, \text{se } i > j \end{cases}$$

[11] Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & 3 \\ y & 2 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de **x** e **y**, de modo que tenhamos A.B = B.A

[12] A matriz D apresentada abaixo fornece, em reais, o custo de matéria-prima, mão de obra e frete (linha) dos produtos I, II e III (coluna) fabricados pela firma "Godeguez & Gimenez". A matriz P fornece a produção desses produtos (linha), durante os dois primeiros meses deste ano (coluna):

$$D = \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}40 & 0{,}25 \\ 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}15 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 40 & 45 \\ 20 & 25 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz que fornece as despesas com matéria-prima, mão de obra e frete, em reais, por bimestre, da produção total de I, II e II.

[13] Uma determinada empresa de microcomputadores é composta de quatro fábricas, onde são produzidos os mesmos três produtos. A matriz $A = (a_{ij})_{3x4}$ indicada abaixo, apresenta a produção mensal dessa indústria. Cada elemento a_{ij} representa o número de unidades do produto **i**, produzido na fábrica **j**, ou seja a_{11} representa o número de unidades do produto I, produzido na fábrica 1, e assim por diante:

$$A = \begin{bmatrix} 560 & 360 & 380 & 100 \\ 340 & 450 & 420 & 80 \\ 280 & 270 & 210 & 380 \end{bmatrix}$$

Analise e classifique em (V) ou (F) as sentenças apresentadas:

I. o n° de unidades do produto II, que as fábricas 1 e 4 produzem juntas é igual à quantidade desse produto, produzida pela fábrica 3, sozinha

II. a fábrica que mais produz o produto III, é a 1

III. com relação à fábrica 3, a quantidade fabricada do produto II é o dobro da fabricada do produto III

[14] Sendo A = {1, 2}, B = {2, 3}, C = {1, 3, 4} e D = {1, 2, 3, 4, 5}. Classifique em (V) ou (F) as seguintes sentenças:

$A \subseteq D$	$C = D$
$B \subseteq C$	$\varnothing \in D$
$3 \in D$	$4 \subseteq C$
$A \not\subset C$	$\{1, 2, 3\} \in D$
$\{\varnothing, \{1\}\} \subseteq \wp(A)$	$\{\{3, 4\}\} \in \wp(C)$
$\{1, 2, 3\} \in \wp(D)$	$\{x \mid x^2 + 10x + 8 = 0\} \subseteq D$

[15] Seja U = $\{-1, \frac{1}{2}, 2, 4, \frac{1}{3}, 5\}$. Verificar se são ou não iguais os seguintes pares A e B de conjuntos:

$A = \{x \in U \mid x + 1 = 3\}$ e $B = \{x \in U \mid 2x - 3 = 1\}$

$A = \{x \in U \mid 0 < x < 5\}$ e $B = \{x \in U \mid 0 \leq x \leq 5\}$

$A = \{x \in U \mid \frac{x+1}{x} \neq 0\}$ e $B = \{x \in U \mid x \geq 0\}$

[16] Dados A = $\{x \in \aleph \mid x < 5\}$ e B = $\{x \in \Re \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$, pede-se:

(a) Escrever com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças:

(a.1.) 3 é elemento de A

(a.2.) 1 não está em B

(a.3.) B é parte de A

(a.4.) B é igual a A

(a.5.) 4 pertence a B

(a.6.) conjunto vazio é subconjunto de A

(b) Classificar as sentenças anteriores em Falsa ou Verdadeira

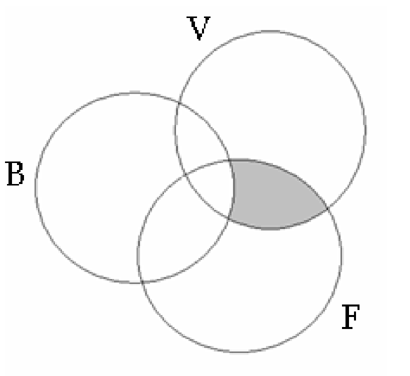
[17] Considerando o conjunto B = $\{x \mid x \text{ é número par e } 3 < x \leq 10\}$. Escreva o conjunto $\wp(B)$

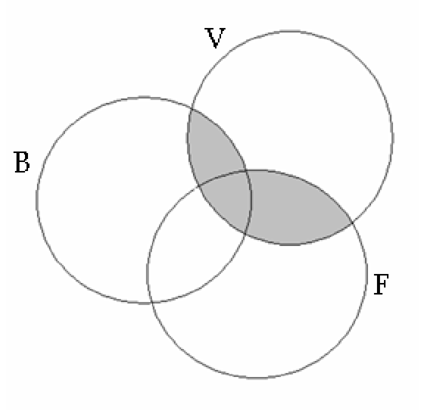
[18] Sejam os seguintes conjuntos: V = $\{x \mid x \text{ é jovem que pratica vôlei}\}$

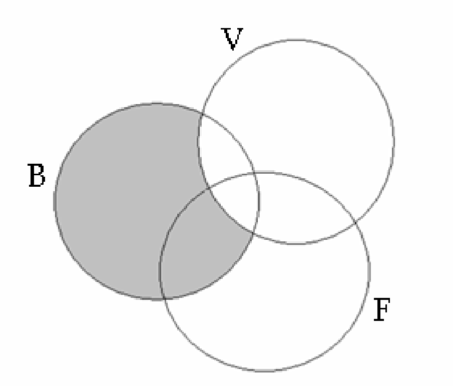
B = $\{x \mid x \text{ é jovem que pratica basquete}\}$

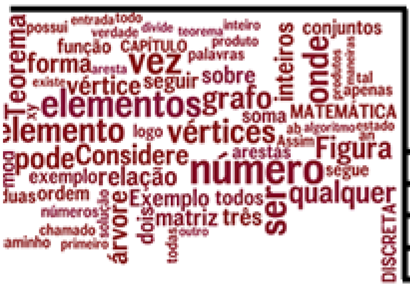
F = $\{x \mid x \text{ é jovem que pratica futebol}\}$

Traduza para linguagem textual a parte destacada nos seguintes Diagramas:









Operações entre Conjuntos

Introdução

Conjuntos podem ser combinados para gerar outros conjuntos. Para isso, podemos considerar algumas regras (ou operações) que definem formas pelas quais conjuntos podem ser combinados. Veremos agora quais são estas operações.

Diferença

Dados os conjuntos **A** = {x | x é vogal do nosso alfabeto} e **B** = {x | x é letra da palavra BAURU}, então temos: **A** = {a, e, i, o, u} e **B** = {b, a, u, r}.

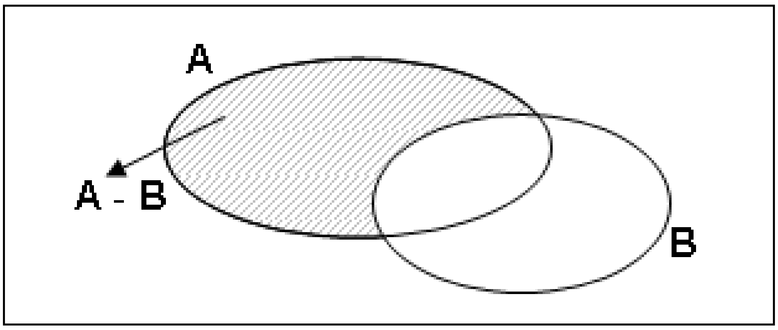
Podemos definir o conjunto **C** formado pelos elementos que pertencem ao conjunto **A** e que não pertencem a **B**, ou seja:

$$\mathbf{C} = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}, \text{ assim: } \mathbf{C} = \{e, i, o\}$$

NOTA (1): o conjunto **C** é chamado conjunto diferença entre **A** e **B** e é indicado por **A** – **B** (lê-se: **A** menos **B**).

NOTA (2): de modo geral, dados os conjuntos **A** e **B**, a diferença **A** – **B** é o conjunto formado pelos elementos de **A** menos os elementos de **B**.

NOTA (3): pelo Diagrama de Venn-Euller, a diferença **A** – **B** fica assim representada:



Interseção

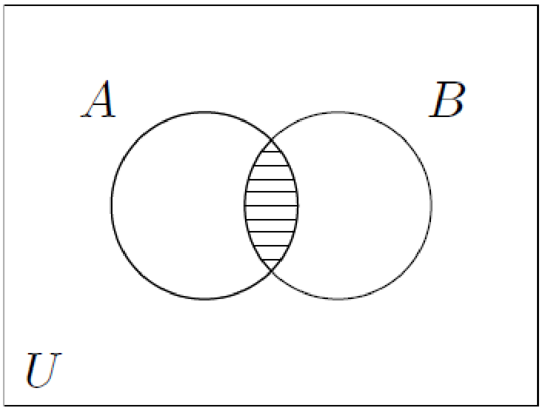
Dados os conjuntos **A** = {x | x é vogal do nosso alfabeto} e **B** = {x | x é letra da palavra BAURU}, então temos: **A** = {a, e, i, o, u} e **B** = {b, a, u, r}.

Podemos definir o conjunto **C** formado pelos elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos **A** e **B,** ou seja, pelos elementos comuns aos conjuntos **A** e **B**, assim: **C** = {a, u}.

NOTA (1): o conjunto **C** é chamado conjunto interseção de **A** e **B** e é indicado por **A** ⋂ **B** (lê-se: **A** interseção **B**, ou simplesmente, **A** inter **B**).

NOTA (2): de modo geral, dados os conjuntos **A** e **B**, a interseção **A** ⋂ **B** é o conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos **A** e **B**: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$

NOTA (3): pelo Diagrama de Venn-Euller, a interseção **A** ⋂ **B** fica assim representada:



NOTA (4): se **A** ⋂ **B** = ∅, então dizemos que os conjuntos **A** e **B** são disjuntos (ou mutuamente exclusivos).

NOTA (5): Temos as seguintes propriedades para a operação interseção:

- ➔ Elemento neutro: **A** ∩ **U** = **U** ∩ **A** = **A**
- ➔ Idempotência: **A** ∩ **A** = **A**
- ➔ Comutativa: **A** ∩ **B** = **B** ∩ **A**
- ➔ Associativa: **A** ∩ (**B** ∩ **C**) = (**A** ∩ **B**) ∩ **C**

União ou reunião

Dados os conjuntos **A** = {x | x é vogal do nosso alfabeto} e **B** = {x | x é letra da palavra BAURU}, então temos: **A** = {a, e, i, o, u} e **B** = {b, a, u, r}.

Podemos definir o conjunto **C** formado pelos elementos que pertencem ao conjunto **A** ou pertencem a **B,** ou a ambos, assim:

C = {a, e, i, o, u, b, r}

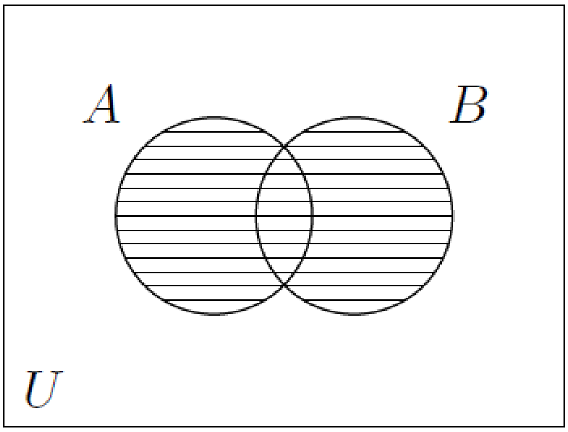
NOTA (1): o conjunto **C** é chamado conjunto reunião ou união de **A** e **B** e é indicado por **A** $\cup$ **B** (lê-se: **A** união **B**).

NOTA (2): de modo geral, dados os conjuntos **A** e **B**, a união **A** $\cup$ **B** é o conjunto formado pelos elementos de **A** mais os elementos de **B**:

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$$

NOTA (3): este "**ou**" da união não significa exclusão, significa que $x \in$ **A** ou $x \in$ **B** ou x pertence a ambos, isto é, quando pelo menos uma das afirmações é verdadeira.

NOTA (4): pelo Diagrama de Venn-Euller, a união fica assim representada:



NOTA (5): Propriedades da Operação União:

- ➔ Elemento neutro: $\mathbf{A} \cup \varnothing = \varnothing \cup \mathbf{A} = \mathbf{A}$
- ➔ Idempotência: $\mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \mathbf{A}$
- ➔ Comutativa: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A}$
- ➔ Associativa: $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}$

NOTA (6): Número de elementos do conjunto União.

$A = \{a, e, i, o, u\}$	→	$n(A) = 5$
$B = \{b, a, u, r\}$	→	$n(B) = 4$
$A \cup B = \{a, e, i, o, u, b, r\}$	→	$n(A \cup B) = 7$
$A \cap B = \{a, u\}$	→	$n(A \cap B) = 2$

Observe que $n(A \cup B) \neq n(A) + n(B)$, pois há dois elementos comuns a ambos os conjuntos.

Assim: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$7 = 5 + 4 - 2$$

Sendo, assim, é sempre verdadeiro que:

Princípio da Inclusão – Exclusão para dois conjuntos:

Se A e B são dois conjuntos finitos, então:

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

Raciocinando como na situação anterior, podemos provar o Princípio da Inclusão – Exclusão para três conjuntos:

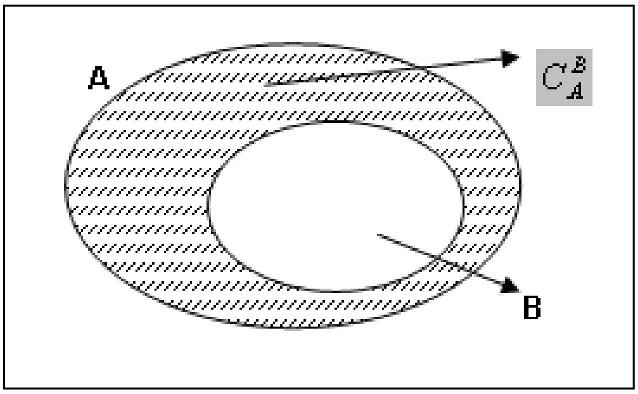
Princípio da Inclusão - Exclusão para três conjuntos:

Se A, B e C são três conjuntos finitos, então:

$$\mathbf{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

Conjunto Complementar

Sejam os conjuntos **A** e **B**, tal que $B \subseteq A$. Chama-se complementar de **B** em relação ao conjunto **A** o conjunto **A** – **B**, indicado por C_A^B. Pelo Diagrama de Venn-Euller, temos a representação:



NOTA (1): Se A = { -1, 0, 1, 2, 3} e B = {2, 3} note que $B \subseteq A$, logo temos que C_A^B = {-1, 0, 1} ou seja, os elementos de C_A^B são os elementos que faltam ao conjunto B para que ele fique igual ao conjunto A.

NOTA (2): quando nos referimos ao complementar de **A** em relação ao conjunto Universo **U**, indicamos por: C_U^A ou $\overline{A}$ ou A^C.

NOTA (3): Leis de Morgan: segundo este matemático inglês, dados os conjuntos **A** e **B** contidos em um conjunto Universo **U**, temos:

Leis de Morgan:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Exercícios

em classe

[1] Dados os conjuntos: $A = \{ x \in \aleph \mid 2 \leq x \leq 8\}$

$B = \{ x \mid x \text{ é impar positivo menor que } 10 \}$

$C = \{ x \in \aleph \mid 5 \leq x \leq 9 \}$

$D = \{2, 4, 6, 8\}$

Determine:

(a) $A \cup B$

(b) $B \cap D$

(c) $A \cap C$

(d) $B - C$

(e) C_A^D

(f) $(D - C) \cap (A - B)$

[2] Sejam A e B dois conjuntos tais que $n(A) = 12$, $n(B) = 10$ e $n(A \cup B) = 15$. Determinar:

(a) $n(A \cap B) =$

(b) $n(B - A) =$

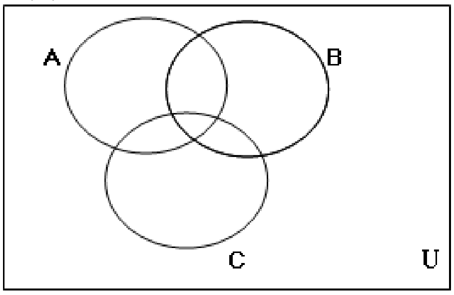
(c) $n(A - B) =$

[3] A Empresa Motors Inc., fabricou 325 carros com transmissão automática, 216 com direção hidráulica e 89 com ambas as opções. Quantos carros foram fabricados, se cada carro possui pelo menos um dos opcionais?

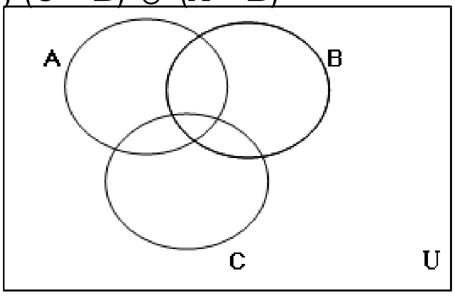
[4] Sejam A e B conjuntos não vazios, onde $A = \{x \mid x = 3n, \text{ com } n \in \aleph \text{ e } n \leq 10\}$ e $B = \{x \mid x \text{ é número natural impar}\}$. Determine o conjunto X, tal que sejam satisfeitas as seguintes condições: $X \subseteq (A \cap B)$ e $(A \cap B) - X = \{3, 15, 21\}$.

[5] Utilizando-se do Diagrama abaixo, para cada item represente hachurando as situações propostas:

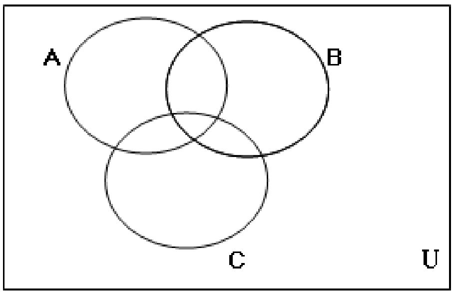
(a) $A \cap B$



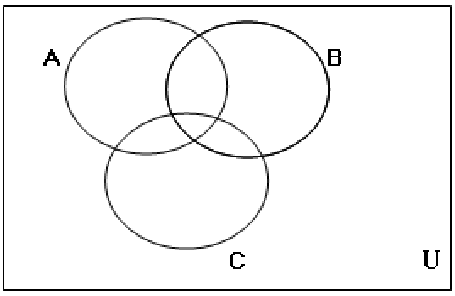
(b) $(C - B) \cup (A - B)$



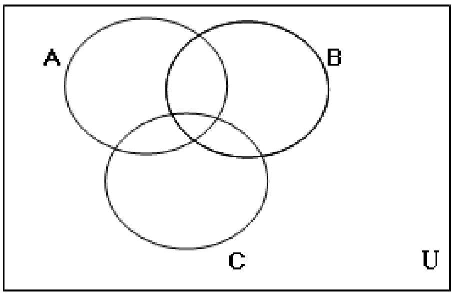
(c) $(A \cup B) \cap C$



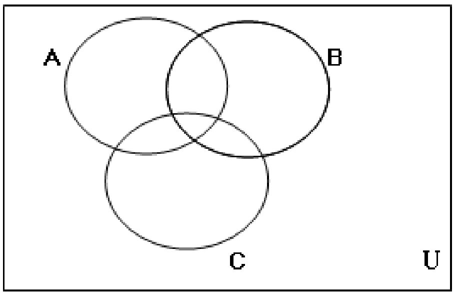
(d) $(B \cap C) \cup A$



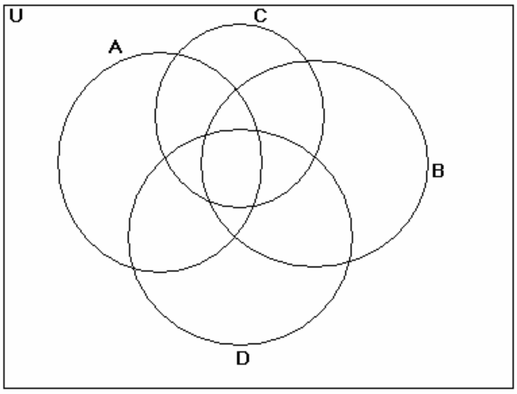
(e) $(B - A) \cap C$



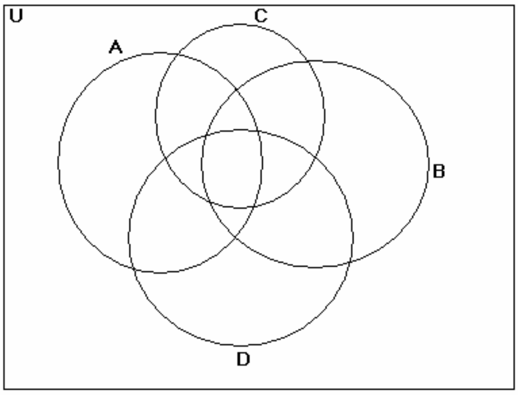
(f) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$



(g) $(B - D) \cap (C - A)$



(h) $(A \cap B) - (C \cap D)$



[6] Dados os conjuntos A = {4, 6, 8}, B = {4, 8, 11, 14}, C = {9, 11, 14, 21} e considerando o conjunto Universo U = {4, 6, 8, 9, 11, 14, 21, 30} determine:

(a) $A^C - (B \cap C)$ (b) $(A \cup C) - (B \cup C)^C$

(c) $(A \cup B) - (B \cup C)$ (d) $B^C - (A \cup B)$

[7] Determine os elementos dos conjuntos A e B, em cada caso, sabendo-se que:

(a) $A - B = \{1, 2, 3\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ $A \cap B = \{8\}$

(b) $A - B = \{8, 6, 5\}$ $B - A = \{7, 9\}$ $A \cap B = \{10\}$

(c) $A - B = \{3, 4\}$ $A \cup B = \{3, 4, 6, 8\}$ $B - A = \{6\}$

[8] Em uma pesquisa foi demonstrado que 33% dos entrevistados são assinantes do jornal A, 29% são assinantes do jornal B, 22% são assinantes do jornal C, 13% assinam os jornais A e B, 6% assinam os jornais B e C, 14% assinam os jornais A e C, 6% assinam os três jornais.

(a) quantos por cento não assinam nenhum dos três jornais?

(b) quantos por cento assinam os jornais A e B e não C?

(c) quantos por cento assinam pelo menos um dos jornais?

[9] Numa sala de aula com 60 alunos, 11 jogam xadrez, 31 são homens ou jogam xadrez e 3 mulheres jogam xadrez. Concluímos, portanto, que:

(a) 31 são mulheres (b) 29 são homens

(c) 29 mulheres não jogam xadrez (d) 23 homens não jogam xadrez

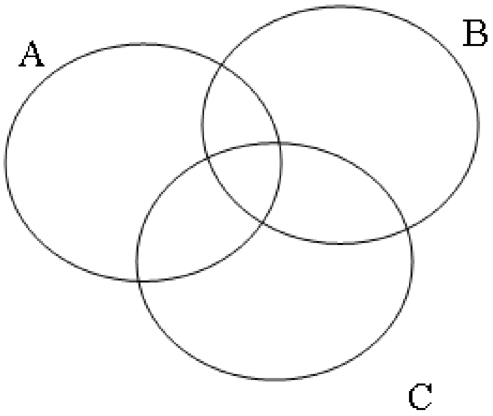
(e) 9 homens jogam xadrez

[10] Num homicídio ocorrido em plena luz do dia, os investigadores fizeram as seguintes anotações no Boletim de Ocorrência sobre as pessoas encontradas no local do crime: havia cinco mulheres; cinco pessoas usavam óculos; quatro homens não usavam óculos e duas mulheres usavam óculos. Considerando que todas as pessoas encontradas no local do crime no momento da investigação são suspeitas, então, qual o número de suspeitos desse crime?

[11] Os 36 alunos de uma classe fizeram uma prova de 3 questões. Sabendo que 4 erraram todas as questões, 5 só acertaram a primeira questão, 6 só acertaram a segunda, 7 só acertaram a terceira, 9 acertaram a primeira e a segunda, 10 acertaram a primeira e a terceira e 7 acertaram a segunda e a terceira, determine quantos acertaram as três questões.

[12] Sejam A, B e C conjuntos finitos, tais que, em relação ao número de elementos destes conjuntos podemos afirmar que:conjunto A tem 50, B tem 30, C tem 85, $A \cap B$ tem 22, $A \cap B \cap C$ tem 18, $B \cap C$ tem 20 e $A \cup C$ tem 100. Usando o diagrama de Venn determine:

(a) $n(A \cap C) =$



(b) $n(C - B) =$

(c) $n((B \cap C) - (A \cap B \cap C)) =$

(d) $n(B - A - C) =$

(e) $n(A \cup B) =$

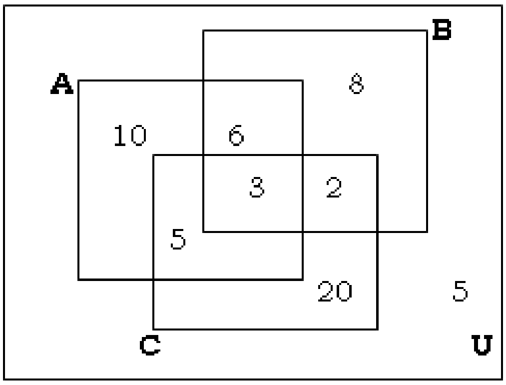
[13] Num lote de placas-mãe para notebooks comprados pela “Alfadig Ltdª” o controle de qualidade verificou que, entre as placas-mãe compradas, 40 apresentavam defeitos na embalagem, na parte elétrica ou no acabamento. Dentre estas peças, 28 tinham defeito de acabamento, 17 tinham a embalagem defeituosa, 13 tinham defeitos na parte elétrica, 6 tinham defeitos tanto no acabamento quanto na embalagem, 7 tinham defeitos de embalagem e na parte elétrica e 10 tinham defeito no acabamento e na parte elétrica. Alguma peça tinha todos os três tipos de defeito?

[14] A FATEC – Bauru pretende promover nas férias um curso de Programação direcionado aos alunos regularmente matriculados nos cursos de Banco de Dados e Redes de Computadores. Ela irá oferecer três opções de cursos: Programação em Cobol, Programação em Delphi e Programação em Java. Para verificação da disponibilidade de matrículas para estes cursos foi realizada uma pesquisa sobre a intenção de modalidades que os alunos pretendem cursar e foram obtidas as seguintes informações nesta pesquisa: 20 alunos pretendem cursar Cobol e Java; 60 alunos pretendem cursar Delphi; 65 alunos pretendem cursar Java; 21 alunos não pretendem cursar nem Delphi, nem Cobol; o número de alunos que pretender cursar somente Delphi é idêntico ao número de alunos que pretendem cursar somente Cobol; 17 alunos pretendem cursar Delphi e Cobol; 45 alunos pretendem cursar Delphi e Java, sendo que destes, 30 não pretendem cursar Cobol. Podemos afirmar, assim, que o número total de alunos que responderam à pesquisa foi de:

(a) 93 (b) 103 (c) 114

(d) 110 (e) 99

[15] Use os dados da figura abaixo para responder a cada pergunta:



(a) quantos elementos há no conjunto A?

(b) quantos elementos há no conjunto B?

(c) quantos elementos há no conjunto A ou B?

(d) quantos elementos há no conjunto B ou C?

(e) quantos elementos estão no conjunto A, mas não estão em B?

(f) quantos elementos estão no conjunto A ou B ou C?

(g) quantos elementos não estão nem no conjunto A nem em B nem em C?

(h) quantos elementos há no conjunto U?

[16] Numa grande empresa de desenvolvimento de softwares localizada na cidade de Hortolândia, 120 programadores trabalham no período matutino, 130 trabalham no período vespertino, 80 trabalham no período noturno, 60 trabalham nos períodos matutino e vespertino, 50 trabalham nos períodos matutino e noturno, 40 trabalham nos períodos vespertino e noturno e 20 trabalham nos três períodos. É correto afirmar que:

(a) nessa empresa trabalham 250 programadores

(b) nessa empresa 120 programadores trabalham somente em dois períodos

(c) nessa empresa 100 programadores trabalham somente em um período

(d) nessa empresa 10 programadores trabalham somente no período noturno

(e) nessa empresa 90 programadores trabalham somente no período vespertino

Produto Cartesiano

Introdução

A operação produto cartesiano é uma operação binária a qual, quando aplicada a dois conjuntos A e B, resulta em um conjunto constituído de sequências de duas componentes, sendo que a primeira componente de cada sequência é um elemento de A e, a segunda componente, um elemento de B.

Assim, para definir produto cartesiano, é necessário antes introduzir a noção de sequência finita e, em particular, de sequência de dois elementos. Uma sequência de **n** componentes, denominada de ***n**-upla ordenada* consiste de **n** objetos (não necessariamente distintos) em uma ordem fixa. Em particular, uma 2-upla ordenada é denominada de ***par ordenado***. Um par ordenado no qual a primeira componente é **x** e a segunda é **y,** denotamos da seguinte forma: $(x\,,y)$ ou $\langle x\,,y\rangle$. Analogamente, uma **n**-upla ordenada é denotada como segue: $(x_1\,,x_2,x_3,x_4,\ldots,x_n)$ ou $\langle x_1\,,x_2,x_3,x_4,\ldots,x_n\rangle$

NOTA (1): uma **n**-upla ordenada $\langle x_1\,,x_2,x_3,x_4,\ldots,x_n\rangle$ não deve ser confundida com o conjunto $\{x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots,x_n\}$; em uma **n**-upla ordenada, a ordem é importante, pois são distinguidas as componentes.

NOTA (2): Se tivermos **x** e **y** distintos, então: $(x,\,y)\neq(y,x)$

Definição de Produto Cartesiano

Sejam **A** e **B** dois conjuntos não vazios, denominamos *produto cartesiano* de **A** por **B** o conjunto cujos elementos são todos pares ordenados $(x\,,y)$ onde o primeiro elemento pertence ao conjunto **A** e o segundo elemento pertence a **B**, ou seja:

$$A \times B = \{(x\,,y)\;|\;x \in A \text{ e } y \in B\}$$

O símbolo A x B, lê-se: "A cartesiano B" ou "produto cartesiano de A por B".

Exemplo (1): se A = {1, 2, 3} e B = {4, 5} temos:

A x B = {(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)}

B x A = {(4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)}

Exemplo (2): se A = {2,3} então o conjunto A x A (também indicado por A^2 e lê-se: "A dois") é: A^2 = A x A = {(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)}

NOTA (1): Seja A um conjunto qualquer, definimos os seguintes produtos cartesianos:

$A \times \varnothing = \varnothing$ $\varnothing \times A = \varnothing$ $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$

NOTA (2): Se A ≠ B então A x B ≠ B x A, isto é, o produto cartesiano de dois conjuntos não goza da propriedade comutativa.

NOTA (3): analogamente, (A x B) x C ≠ A x (B x C), pois as componentes de cada par ordenado são distintas. Ou seja, a operação produto cartesiano não é associativa.

NOTA (4): se A e B são conjuntos finitos com **m** e **n** elementos respectivamente, então A x B é um conjunto finito com **m.n** elementos. Se A ou B for finito e nenhum deles for vazio, então A x B é um conjunto finito.

Exercícios em classe

[1] Sejam os conjuntos A = {-3, 5, 7} B = {-2, 8} e C = {1, 9}, determine:

A x B

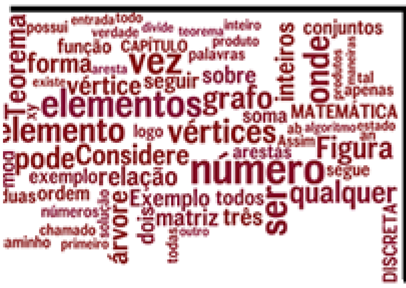
A x C

B x (A x C)

B^2

[2] Sabendo que {(1,2), (4,2)} $\subseteq A^2$ e $n(A^2) = 9$, explicite por extensão todos os elementos do conjunto A^2.

[3] Sejam os conjuntos A e B, tais que: A x B = {(-1, 0), (2, 0), (-1, 2), (2, 2), (-1, 3), (2, 3)}. Então, qual será o número de elementos do conjunto (A – B) U (B – A)?



Relações e suas propriedades

Definição de Relação

Consideremos os conjuntos A = {2, 3, 4} e B ={2, 3, 4, 5, 6}. O produto cartesiano de A por B é o conjunto A x B = {(x, y) | x ∈ A e y ∈ B} formado por 3.5=15 elementos.

Vamos formar agora o conjunto **R** dos pares ordenados (x, y) de A x B tais que x é **divisor**[1] de y, ou seja, R = { (x, y) ∈ A x B | x/y}. Teremos, então:

$$R = \{ (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$$

Este conjunto **R**, que é um subconjunto de A x B é exemplo de uma relação binária de A em B. De modo geral, denominamos relação de A em B a todo subconjunto de A x B.

R é uma relação binária de A em B $\Leftrightarrow$ $R \subseteq A \times B$

NOTA (1): uma relação $R \subseteq A \times B$ é constituída de três partes: a origem A, o destino B e o conjunto de pares R; qualquer alteração em uma destas três partes define uma outra relação.

NOTA (2): $\varnothing$ é uma relação de A em B, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

NOTA (3): uma relação $R \subseteq A \times B$ também é denotada por R: A→B e um elemento (x, y) ∈ R é frequentemente denotado de forma infixada, como x **R** y.

NOTA (4): se n(A) = m e n(B) = p, então o número de relações binárias possíveis é dado por $2^{m.p}$.

---

1 A definição de **divisor** está relacionada com a definição de múltiplo. Um número natural **x** é divisor do número natural **y**, ou seja, x/y , se **y** é múltiplo de **x**. Por exemplo: 3 é divisor de 6 $(3/6)$, pois 6 = 3 x 2, logo 6 é múltiplo de 3. O conjunto dos divisores de um número é um conjunto finito. Por exemplo: Divisores de 6 → D(6) = {1, 2, 3, 6} Divisores de 16 → D(16) = {1, 2, 4, 8, 16}

Domínio e Imagem de uma Relação

Seja R uma relação de A em B.

Definição (1): chama-se **Domínio** de R (ou conjunto de partida) o subconjunto de A constituído pelos elementos de x para cada um dos quais existe algum y em B tal que xRy.

Simbolicamente: $D(R) = \{x \in A \mid \exists\, y \in B : xRy\}$

Definição (2): chama-se **Imagem** de R o subconjunto de B constituído pelos elementos de y para cada um dos quais existe algum x em A tal que xRy.

Simbolicamente: $Im(R) = \{y \in B \mid \exists\, x \in A : xRy\}$

Exemplo: considere a relação R dada por R = {(1,5), (2,6), (3,7), (4,8)}, temos: D(R) = {1, 2, 3, 4} Im(R) = {5, 6, 7, 8}

Propriedades das Relações

Há relações sobre um mesmo conjunto, isto é, relações de **A** em **A**, ou sobre **A**. Tais relações admitem algumas propriedades que veremos em seguida. Consideremos uma Relação **R** num determinado conjunto **A**, então, temos as seguintes propriedades:

- **Reflexiva**: se todo elemento de **A** se corresponder (se relacionar) com ele mesmo, isto é, $\forall\, x \in \mathbf{A} \Rightarrow x\, \mathbf{R}\, x$

Exemplo: Se A = {a, b, c} a relação R = {(a, a), (b, b), (a, c), (c, c)} é reflexiva, já a relação R = {(a, a), (b, b), (b, a)} não é reflexiva.

- **Simétrica**: se sempre que um elemento x se corresponde com um y ocorrer que y se relaciona com x, isto é, $\forall\, x, y \in \mathbf{A}$, se $x\, \mathbf{R}\, y \Rightarrow y\, \mathbf{R}\, x$

Exemplo: Se A = {a, b, c} a relação R = {(a, a), (a, b), (b, a)} é simétrica, já a relação R = {(b, b), (c, a)} não é simétrica.

• **Antissimétrica**: se sempre que y se relacione com x então x se relacione com y acontecer apenas no caso: x = y, isto é, $\forall$ x, y $\in$ **A**, se x **R** y e y **R** x $\Rightarrow$ x = y

Exemplo: Se A = {a, b, c} a relação R = {(a, a), (b, b), (a, c), (a, b)} é antissimétrica, já a relação R = {(a, a), (a, b), (b, a)} não é antissimétrica.

• **Transitiva**: sempre que um elemento x se relaciona com y que por sua vez se relaciona com z e daí resulte que x se relaciona com z, isto é, $\forall$ x, y, z $\in$ **A**, se x **R** y e y **R** z $\Rightarrow$ x **R** z

Exemplo: Se A = {a, b, c} a relação R = {(a, a), (a, b), (b, c), (a, c)} é transitiva, já a relação R = {(b, b), (a, b), (b, c)} não é transitiva.

Outros exemplos: Consideremos o conjunto A = {2, 4, 6} e as relações:

R1 = {(2, 2), (4, 4), (6, 6), (2, 4)}

Esta relação é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Não é simétrica.

R2 = {(2, 2), (4, 4), (2, 4), (4, 2)}

Esta relação é simétrica e transitiva. Não é reflexiva e nem antissimétrica.

R3 = {(2, 2), (4, 4), (2, 4), (4, 2), (4, 6)}

Esta relação não é reflexiva, nem simétrica, nem antissimétrica e nem transitiva.

NOTA:

"Uma relação **R** pode ser simétrica e não ser antissimétrica, ser antissimétrica e também ser simétrica ou não ser nenhuma das duas."

Relações de equivalência

Uma relação **R** em um conjunto **A** não vazio é dita RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA sobre A, quando **R** é reflexiva, simétrica e transitiva.

As relações de equivalência agrupam elementos que têm características semelhantes ou compartilham da mesma propriedade.

Exemplos: A relação R = {(a, a), (b, b), (a, c), (c, a), (c, c) } é uma relação de equivalência sobre A = {a, b, c}

A relação I de igualdade sobre $\Re$ dada por I = $\{(x, y) \in \Re \times \Re \mid x = y\}$ é uma relação de equivalência sobre $\Re$.

Relações de ordem parcial

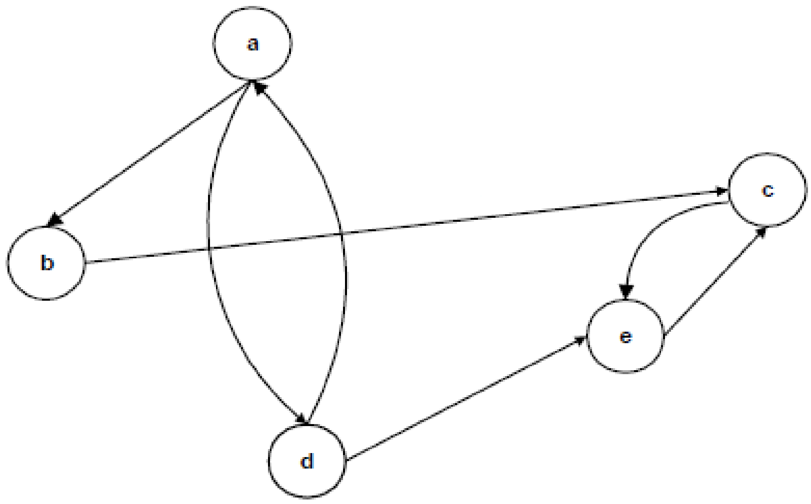
Uma relação **R** em um conjunto **A** não vazio é chamada de RELAÇÃO DE ORDEM PARCIAL ou simplesmente RELAÇÃO DE ORDEM quando **R** é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Exemplos: a relação R = {(a, a), (b, b), (c, c), (b, a), (a, c), (b, c)} é uma relação de ordem parcial sobre A = {a, b, c}

Representação de Relações usando Dígrafos

Além de representarmos uma relação listando todos seus pares ordenados, existe uma outra maneira importante de representar uma relação: cada elemento do conjunto é representado por um ponto e cada par ordenado é representado usando um arco com sua direção indicada por uma flecha. Essa representação é usada quando temos relações definidas num conjunto finito, são chamadas de **grafos orientados** ou **dígrafos**[2].

Exemplo: o grafo orientado da relação R ={ (a, b), (a, d), (b, c), (c, e), (d, a), (d, e), (e, c)} no conjunto A = {a, b, c, d, e} é mostrado na figura abaixo:



[2] O conceito de grafos orientados e dígrafos será explorado posteriormente.

A relação **R** no conjunto **A** é representada por um grafo orientado que tem os elementos de **A** como seus vértices e os pares ordenados (a, b), em que (a, b) ∈ **R**, como arestas.

Banco de Dados Relacional

O Banco de Dados relacional foi criado com base na teoria matemática de conjuntos, e, mais especificamente, no conceito de relações. Um banco de dados relacional é uma coleção de relações (tabelas) que estão associadas umas às outras através de atributos (campos) em comum que definem a associação. As entidades vão dar origem as tabelas do Banco de Dados. Essas entidades possuem uma ou mais propriedades capazes de descrevê-las (atributos). Os atributos vão dar origem aos campos das tabelas do Banco de Dados. Exemplo:

Cadastro do Aluno

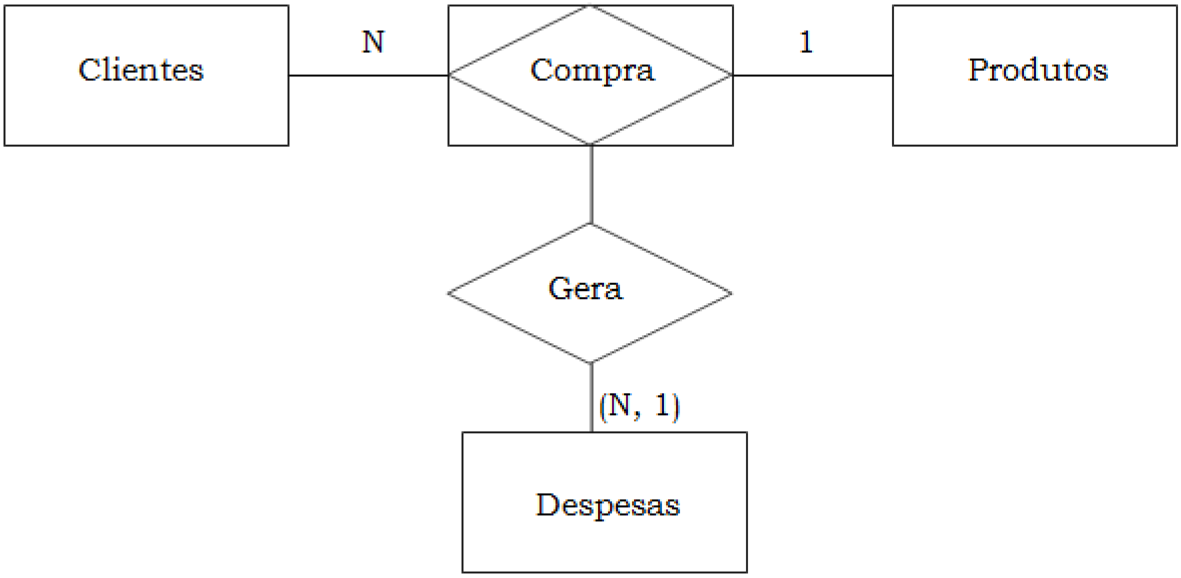
Entidade:
Aluno
Atributos:
Registro de Matrícula
Nome do aluno
Data de Nascimento
RG
CPF
Telefone
Endereço
Bairro
Cidade
CEP

As entidades não são isoladas; elas estão sempre associadas a outras entidades. Quando passamos a trabalhar com mais de uma entidade, precisamos identificar os relacionamentos entre elas. Um relacionamento é a associação entre duas ou mais entidades (tabelas). Para definir esse relacionamento é importante definir o número de ocorrências em um relacionamento, chamado de cardinalidade. Existem dois tipos de cardinalidade: cardinalidade mínima (a opcional representada pelo número 0 e a obrigatória representada pelo número 1) e a cardinalidade máxima (a cardinalidade máxima “1” e a cardinalidade “muitos” referida pela letra “n”).

De acordo com essas cardinalidade existem os seguintes tipos básicos de relacionamentos entre as entidades:

- Relacionamento um para muitos (1, N)
- Relacionamento um para um (1, 1)
- Relacionamento muitos para um (N, 1)
- Relacionamento muitos para muitos (N, M)

Por exemplo: uma relação entre os objetos "**clientes**-**produtos**-**compras**-**despesas**", no qual é possível observar a relação direta entre os objetos citados, uma vez que o "cliente" realiza a "compra" de um "produto", gerando uma "despesa". Veja na figura a seguir uma representação gráfica do exemplo citado:



Exercícios em classe

[1] Dados M = {3, 6, 9, 12} e N = {1, 3, 5, 7, 9} determine as seguintes relações:

$R_1 = \{ (x, y) \in M \times N \mid x < y\}$

$R_2 = \{ (x, y) \in M \times N \mid 2.x.y < 25\}$

$R_3 = \{ (x, y) \in M \times N \mid x^2 + y^2 < 50\}$

[2] Se $S = \{ (x, y) \in \aleph^2 \mid x + y = 10\}$ e $T = \{ (x, y) \in \aleph^2 \mid x - y = 2\}$, determine $S \cap T$.

[3] Se A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} quais são os elementos da relação binária R de A em B assim definida: $x R y \Leftrightarrow y = x + 2$?

[4] Se A = {-1, 0, 1, 2} quais são os elementos da relação $R = \{ (x, y) \in A^2 \mid x^2 = y^2\}$?

[5] Sejam os conjuntos A = {1, 2, 3, 4} e B = {3, 4, 5, 6, 7} e R ={ (x, y) ∈ A x B | x + y é um número par e menor que 10}. Descreva os elementos de R.

[6] Dados A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, B = {2, 4, 6, 8, 10} e C ={3, 6, 9, 12}, forme as seguintes relações:

(a) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 12\}$

(b) $S = \{(x, y) \in B \times A \mid x + y < 8\}$

(c) $T = \{(x, y) \in B \times C \mid x + y \geq 15\}$

(d) $V = \{(x, y) \in A \times C \mid y = 2x\}$

(e) $W = \{(x, y) \in C \times B \mid y - 1 = x\}$

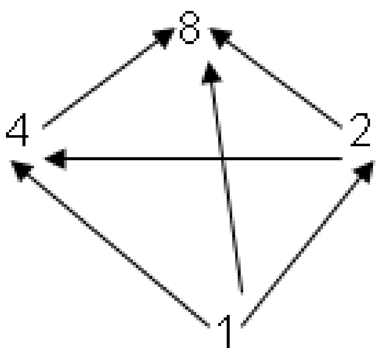
[7] Sejam A = {0, 2, 4, 6, 8} e B = {1, 3, 5, 9}. Enumerar os elementos das seguintes relações e dizer qual é o domínio e a imagem de cada uma das relações:

$R_1 = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$

$R_2 = \{ (x, y) \in B \times A \mid x \geq y\}$

[8] Seja R a relação definida em $\aleph^*$ pela sentença aberta "2x + y = 10", isto é, seja $R = \{ (x, y) \in \aleph^* \times \aleph^* \mid 2x + y = 10\}$. Determine o domínio e a imagem de R.

[9] Seja o conjunto A = {1, 2, 4, 8} e R uma relação de A, onde x R y, x ∈ A e y ∈ A, se identifica por x → y. Considerando o Diagrama abaixo, representativo de R, assinale a alternativa correta:



(a) R é reflexiva

(b) R é simétrica

(c) R é transitiva

(d) R é uma relação de equivalência

(e) R é uma relação de ordem parcial

[10] Considere o conjunto dos automóveis da cidade de Bauru. Dizemos que o automóvel x será relacionado com o automóvel y, isto é, x**R**y, se o último algarismo de suas respectivas placas forem iguais. Assinale a alternativa correta:

(a) R é uma relação de ordem parcial

(b) R é uma relação de equivalência

(c) R é uma relação simétrica, porém não transitiva

(d) R é uma relação reflexiva, porém não simétrica

(e) R é uma relação transitiva, porém não reflexiva

[11] Dado o conjunto A = {3, 5, 7} e a relação binária **R** definida por:

R = {(3, 3), (3, 5), (5, 5), (5, 3), (7, 7)}

Temos que:

(a) R é uma relação de ordem parcial

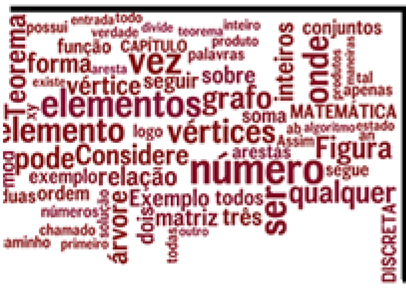
(b) R é uma relação antissimétrica

(c) R é uma relação não reflexiva

(d) R é uma relação não transitiva

(e) R é uma relação de equivalência

[12] Sejam os conjuntos A = {3, 5, 7} e B = {2, -2}. Determine o número de relações binárias diferentes que podem ser definidas de A em B.



Função

Introdução

O conceito de função é muito utilizado no cotidiano e também é amplamente utilizado em Informática e pode variar de acordo com sua aplicação. Algumas funções que podemos citar: funções de entrada e saída de informações em um algoritmo ou programa; funções de criptografia, utilizadas na segurança de informações; funções de armazenamento, organização e recuperação de dados (hashing); funções recursivas etc.

De forma geral, uma função pode ser definida como uma relação entre dois ou mais conjuntos, estabelecida por uma lei de formação ou de associação, isso é, uma regra geral. Os elementos de um grupo devem ser relacionados com os elementos do outro grupo, através dessa lei. As funções possuem diversas aplicações no cotidiano, sempre relacionando grandezas, valores, índices, variações entre outras situações. Por exemplo: o consumo de banda larga é função da oferta de pacotes das operadoras de telefonia do país.

É muito importante obter o conhecimento adequado sobre as propriedades e definições das funções matemáticas.

Definição

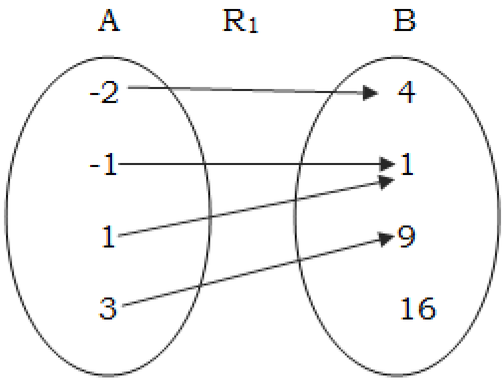
Dados dois conjuntos A e B não vazios e f uma relação binária de A em B. Dizemos que essa relação f é uma função (ou aplicação) definida de A em B se, e somente se, <u>para todo</u> elemento $x \in A$ existe <u>um único elemento</u> $y \in B$, de tal forma que, $(x, y) \in f$.

OBS (1): se **f** é uma função de A em B, escrevemos $y = f(x)$ (lê-se: y é imagem de x pela **f**) para indicar que $(x, y) \in f$.

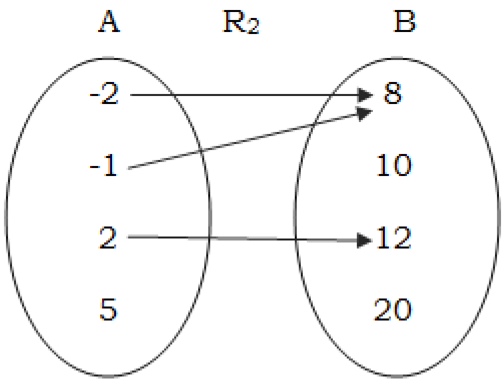
OBS (2): **f: A → B** será a maneira simbólica de dizermos que **f** é uma função de A em B.

Podemos representar uma função com um Diagrama de Venn. Devem ser satisfeitas algumas condições para que uma relação R seja uma função:

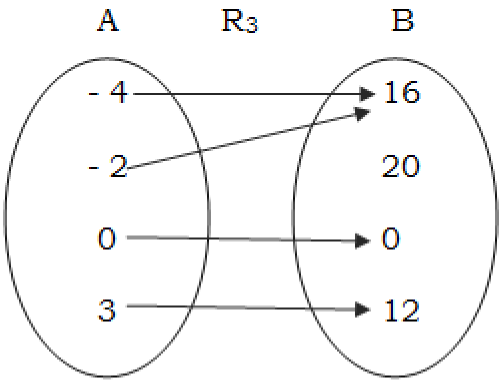
• R é uma função de A em B se todo elemento $x \in A$ participa de pelo menos um par (x, y). Ou seja, de todo elemento de A deve sair uma flecha:



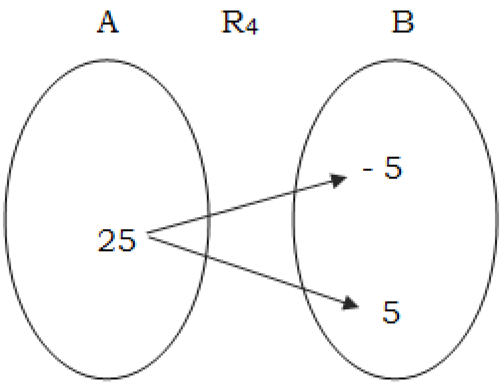
R₁ é função



R_2 não é função



R_3 é função



R_4 não é função

Exemplo/Contraexemplo: Sejam A = {0, 1, 2, 3} e B = {4, 5, 6, 7, 8} e consideremos as relações de A em B dadas por:

R_1 = {(0, 5), (1, 6), (2, 7)}

R_2 = {(0, 5), (1, 5), (2, 6), (3, 7)}

R_3 = {(0, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8)}

R_4 = {(0, 4), (1, 5), (2, 7), (3, 8)}

Quais das relações acima são funções? Justifique sua resposta.

Exercícios em classe

[1] Sendo E = {a, b, c, d} e F = {1, 2, 3}, decida quais das relações abaixo são funções definidas de E em F. Justifique:

(a) R_1 = {(a, 1), (b, 2), (c, 3)}

(b) R_2 = {(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 3)}

(c) R_3 = {(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 2), (d, 3)}

(d) R_4 = {(a, 2), (b, 2), (c, 2), (d, 2)}

[2] São dados os conjuntos E = $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, \frac{7}{3}\right\}$ e F = {-1, 1}. Escrever como conjunto de pares ordenados a função f: E → F tal que:

f(x) =1, se $x \in Q$

f(x) = -1, se $x \notin Q$

[3] Dados os conjuntos A = {-1, 0, 1, 2} e B = {0, 1, 2, 3, 4} qual, entre as relações seguintes, representa uma função de A em B?

(a) { (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4)}

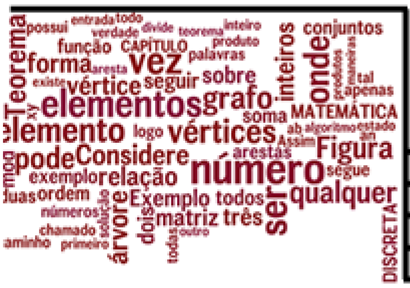
(b) { (-1, 1), (0, 1), (1, 0), (1, 2)}

(c) { (0, -1), (1, 0), (2, 1), (4, 2)}

(d) { (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)}

(e) { (-1, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 4), (2, 4)}

[4] A função $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ tem imagem igual à Im(f) = {-5, 9,}. Qual é o conjunto Domínio de f(x)?

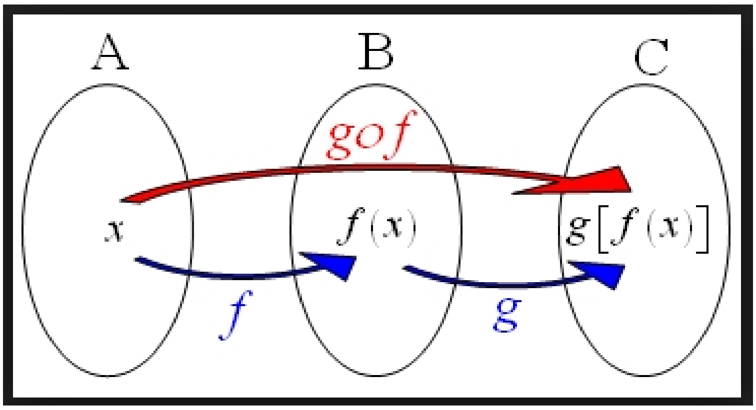


Composição de Funções

Definição

Dadas as funções f: A → B e g: B → C, chama-se função composta de g com f a função h: A → C definida pela lei h(x) = $g(f(x))$ = gof(x).

Vejamos a representação, num Diagrama:



Exemplo: Sejam A= {-1, 0, 1, 2}, B = {0, 1, 2, 3, 4} e C = {1, 3, 5, 7, 9}. Consideremos as funções:

f: A → B tal que f(x) = x^2 g: B → C tal que g(x) = 2x + 1

É imediato que: f = {(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)}

g = { (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)}

Neste caso, a função composta h = gOf é a função de A em C que tem o seguinte comportamento:

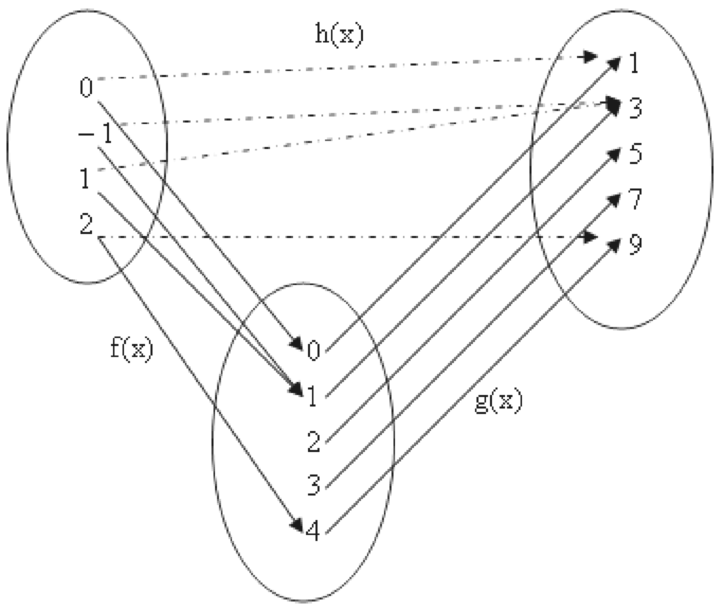
h(-1) = g(f(-1)) = g(1) = 3

h(0) = g(f(0)) = g(0) = 1

h(1) = g(f(1)) = g(1) = 3

h(2) = g(f(2)) = g(4) = 9

O Diagrama de fechas abaixo ilustra o que ocorreu:



h = gof = { (-1, 3), (0, 1), (1, 3), (2, 9)}

A função h(x) tem também uma lei de correspondência que pode ser encontrada da seguinte forma:

$$h(x) = gof(x) = g(f(x)) = 2.f(x) + 1 = 2.x^2 + 1$$

OBS: a função composta gof não é comutativa, isto é, gof $\neq$ fog

Exercícios em classe

[1] Sabendo que a função f: A→ B é dada pela lei f(x) = 2x + 3 e g: B → C é dada pela lei g(x) = $\frac{x+1}{2}$, e que A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 5, 7, 9, 11} e C = {2, 3, 4, 5, 6} determine os pares ordenados que constituem gof(x) e fog(x) e as suas leis de formação (correspondência).

[2] Seja A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e sejam f: A → A e g: A → A definidas por:

f = {(1,3), (2,1), (3,5), (4,6), (5,2), (6,4)}

g = {(1,5), (2,6), (3,3), (4,1), (5,4), (6,2)}

Determine, então: fog

gof

fof

gog

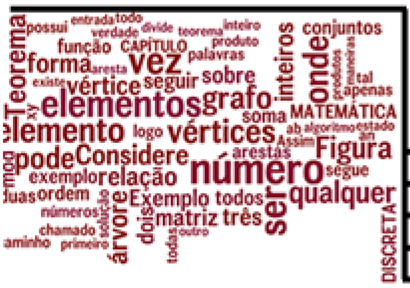
gofof

[3] Se **f**, **g** e **h** são funções dadas pelas seguintes leis de formação: f(x) = x^2+1 , g(x) = x - 2 e h(x) = $\frac{4x+2}{3}$, obtenha as leis que definem as compostas:

(a) gof (b) fog

(c) hof (d) goh

[4] Sabendo que f(x) = $\frac{2}{x+3}$, então, determine a função fof(x).



Função Inversa

Definições

Dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 4} e B = {1, 3, 5, 7} consideremos a função f de A em B definida por f(x) = 2x – 1. Notemos que a função f é **bijetora** formada pelos pares ordenados f = { (1,1), (2,3), (3,5), (4,7)} onde D(f) = A e Im(f) = B. Chamaremos de **relação inversa** de f, e que indicaremos por f^{-1}, a relação de B em A tal que $f^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in f\}$. Cada par ordenado pertencente a f^{-1} é obtido invertendo-se a ordem dos elementos do par ordenado (x, y) de f. Assim, temos: $f^{-1} = \{ (1,1), (3,2), (5,3), (7,4)\}$

Observe que a relação f^{-1}(inversa de f), é também uma função, pois, f é uma bijeção de A em B, isto é, para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$.

Definição (1): uma função bijetora de A em B é **inversível** se, e somente se, sua relação inversa f^{-1} de B em A também for uma função. As funções f e f^{-1} são chamadas de **funções inversas** entre si.

OBS (1): os pares ordenados que definem f^{-1}podem ser obtidos a partir dos pares ordenados de f, permutando-se os elementos de cada par, isto é: $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y,x) \in f^{-1}$

OBS (2): se considerarmos a função inversa de f^{-1} teremos: $(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \left(f^{-1}\right)^{-1}$, isto é, a inversa de f^{-1} é a própria função f, ou seja, $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Podemos assim afirmar que f e f^{-1}são inversas entre si, ou melhor, uma é inversa da outra.

OBS (3): Note que: $D\left(f^{-1}\right) = Im(f)$ e $Im\left(f^{-1}\right) = D(f)$

Regra prática para obtenção da Inversa de uma função:

Dada a função bijetora f de A em B, definida pela sentença y = f(x), para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, procedemos do seguinte modo:

(1°) na sentença y = f(x) fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo assim x = f(y).

(2°) transformamos algebricamente a expressão x = f(y), expressando y em função de x, para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Exemplo: Seja f: A → B definida por y = f(x) = 2x -1, como expressar $f^{-1}(x)$?

Resolução: $y = f(x) = 2x - 1$

$$x = 2y - 1 \Rightarrow x + 1 = 2y \Rightarrow \frac{x+1}{2} = y$$

$$\therefore\ f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

Exercícios

em classe

[1] Sendo os conjuntos A = {1, 3, 5, 7, 9} e B = {2, 3, 4, 5, 6}. Seja também a função f: A → B definida pela sentença $f(x) = \frac{x+3}{2}$. Determine:

(a) f^{-1}

(b) $(f^{-1})^{-1}$

(c) fof^{-1}

(d) $f^{-1}of$

[2] Nas funções abaixo, obter a lei de correspondência que define a função inversa:

(a) $f(x) = 2x + 3$

(b) $f(x) = \frac{4x-1}{3}$

(c) $f(x) = (x-1)^3 + 2$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

(e) $f(x) = 5x^2 + 4$

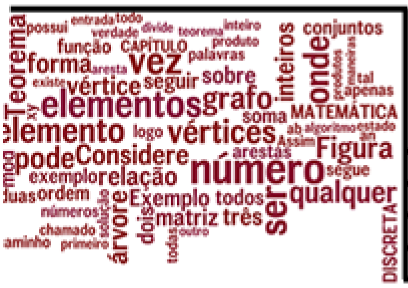
(f) $f(x) = \frac{2x+3}{3x-5}$

[3] As funções f e f^{-1} são inversas entre si. Se f é definida por $f(x) = \frac{1}{x-3}$, então qual será o valor de $f^{-1}(-1)$?

[4] Seja a função f(x) = 5x – 3. Determine:

(a) $fo f^{-1}$

(b) $f^{-1} o\ f$



Análise Combinatória

Introdução

A Análise Combinatória, que inclui o estudo de permutações, combinações e partições, trata da determinação do número de possibilidades lógicas de algum evento sem necessariamente identificar todos os casos, ou seja, a Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições. Vejamos alguns exemplos:

. O Conjunto A cujos elementos são todos os números de dois algarismos distintos formados a partir dos algarismos 1, 2 e 3:

$$A = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$$

. O Conjunto C formado pelos anagramas da palavra ADS

C = (ADS, ASD, DAS, DSA, SDA, SAD}

Existem dois princípios básicos de contagem usados no decorrer deste texto.

1.<u>Princípio da regra da soma</u>: suponha que algum evento **E** possa ocorrer de **m** maneiras e que um segundo evento **F** possa ocorrer de **n** maneiras. Suponha também que ambos os eventos não podem ocorrer simultaneamente. Então, **E** ou **F** podem ocorrer de **m + n** maneiras.

2.<u>Princípio da regra do produto</u> (aplicado quando o procedimento é feito a partir de tarefas separadas): suponha que existe um evento **E** que possa ocorrer de **m** maneiras e, independente deste, há um segundo evento **F** que pode ocorrer de **n** maneiras. Então, as combinações de **E** e **F** ocorrem de **m.n** maneiras.

Exemplo: suponha que uma Faculdade tenha três disciplinas diferentes de Computação, quatro disciplinas diferentes de Matemática e duas disciplinas diferentes de Administração.

(a) o número **m** de maneiras que um estudante pode escolher apenas uma disciplina é: m = 3 + 4 + 2 = 9

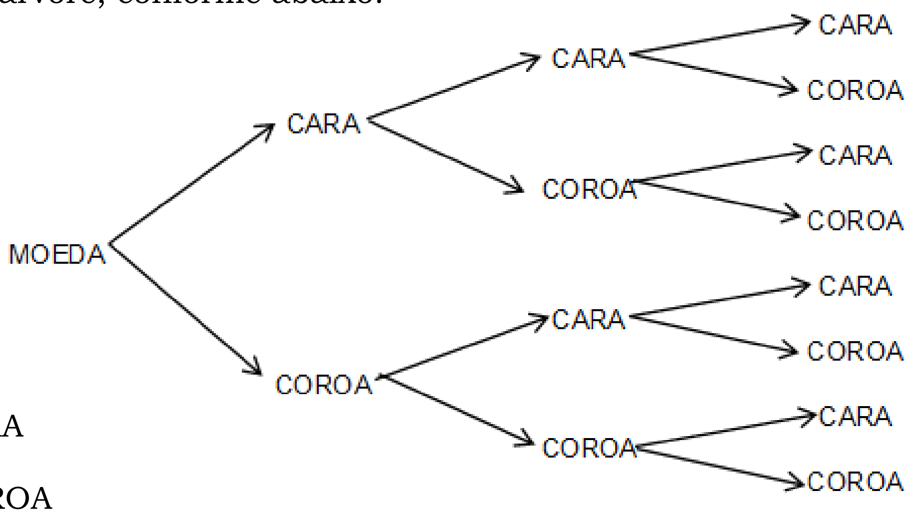
(b) o número **n** de maneiras que um estudante pode escolher uma de cada tipo de disciplina é: n = 3 . 4 . 2 = 24

Ou seja, suponha que A e B são conjuntos disjuntos, temos:

- **Princípio da Regra da Soma**: n(A U B) = n(A) + n(B)
- **Princípio da Regra do Produto**: n(A $\cap$ B) = n(A) . n(B)

OBS: um dos métodos para se utilizar o princípio da regra do produto (também chamado de princípio fundamental da contagem) é através do diagrama de árvore ou árvore de possibilidades. Um diagrama em árvore é um dispositivo usado para enumerar todos os possíveis resultados de uma sequência de eventos, onde cada evento pode ocorrer em uma quantia finita de maneiras.

Exemplo: No lançamento de uma moeda, três vezes consecutivas, os possíveis resultados para esse evento podem ser demonstrados através do diagrama de árvore, conforme abaixo:



C: CARA

K: COROA

Como observado, teremos oito (2 . 2 . 2 = 8) resultados possíveis

(C, C, C)	(C, C, K)	(C, K, C)	(C, K, K)
(K, C, C)	(K, C, K)	(K, K, C)	(K, K, K)

Exercícios

em classe

[1] Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 quantos números com três algarismos podem ser formados? E com três algarismos distintos?

[2] Um programa de computador foi desenvolvido para formar placas de automóveis. Utilizando este programa certa pessoa queria placas apenas com as letras M e R e com os algarismos ímpares, do tipo MRM3579. Quantas serão as possíveis combinações de placas, sabendo que as letras podem repetir e os algarismos não?

[3] Quantos números de dois algarismos podem ser formados sabendo que, o algarismo das dezenas corresponde a um múltiplo de 2 (diferente de zero) e o algarismo das unidades a um múltiplo de 3?

[4] Um homem tem oportunidade de jogar numa roleta, no máximo, cinco vezes. Em cada jogada ele ganha ou perde 10 reais. Ele começa com 10 reais e é obrigado a encerrar a série de jogadas se ocorrer uma destas hipóteses: ele perde todo o seu dinheiro; ele soma 40 reais. De quantas maneiras o jogo pode se desenrolar? Em quantas dessas maneiras ele sai ganhando e em quantas ele sai perdendo?

Revisão de Fatorial

Considerando **n** natural, chama-se **fatorial de n** ou **n fatorial** o número real **n!** tal que:

➔ se n = 0 então 0! = 1

➔ se n = 1, então 1! = 1

➔ se n ≥ 2, então n! = n.(n-1).(n-2)....2.1 (produtos de n fatores decrescentes, de n até 1).

Exemplos: 5! = 5 . 4. 3. 2. 1 = 120

0! + 3! = 1 + 3.2.1 = 1 + 6 = 7

$$\frac{20!}{18!} = \frac{20.19.18!}{18!} = 20.19 = 380$$

Arranjos

Consideremos o seguinte problema: com os elementos do conjunto A = {4, 6, 8, 9} vamos formar todos os números possíveis de 2 algarismos distintos:

46	48	49	64
68	69	84	86
89	94	96	98

A troca de posição dos algarismos em cada grupo de dois algarismos implica no aparecimento de números diferentes, ou seja, a ordem dos elementos é importante na composição dos números.

Os números formados são, assim, representados pelos diferentes conjuntos ordenados de dois algarismos, que é possível formar a partir dos 4 algarismos constantes no conjunto dado. A esses conjuntos ordenados dá-se o nome de arranjos de 4 algarismos 2 a 2.

De um modo geral: dados um conjunto com **n** elementos quaisquer, chamam-se arranjos de **n** elementos **p** a **p** todos os conjuntos ordenados que é possível obter com **p** elementos escolhidos arbitrariamente entre os **n** elementos dados.

Notação: $A_{n,p}$ (arranjo de **n** elementos agrupados **p** a **p**). Fórmula dada por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{onde } 0 \le p \le n$$

NOTA: dois casos especiais que podem aparecer ao se calcular $A_{n,p}$:

- $A_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ (isto pode ser interpretado dizendo-se que existe apenas um arranjo ordenado de zero objetos: o conjunto vazio).

- $A_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n.(n-1)!}{(n-1)!} = n$ (esta fórmula reflete o fato de que existem n arranjos ordenados de um objeto).

Permutações

No caso particular em que se tem **p = n** obtém $A_{n,n}$ que é o número de arranjos nos quais entram todos os elementos dados. Neste caso aos arranjos de **n** elementos tomados **p** a **p** dá-se o nome de permutação.

Notação: P_n (permutação de todos os **n** elementos). Fórmula dada por:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Combinações

Consideremos o exemplo: dado o conjunto A = {a, b, c, d} vamos formar todos os subconjuntos de A com três elementos:

{a, b, c} {a, b, d}

{a, c, d} {b, c, d}

Tais subconjuntos são chamados de combinações simples dos 4 elementos de A tomados 3 a 3. Ou seja, uma combinação simples de três elementos de A é qualquer subconjunto de A formado por três elementos.

Observe que duas combinações simples quaisquer se diferenciam apenas pela natureza dos elementos e não pela ordem de apresentação dos elementos. Note que, os subconjuntos {a, b, c} e {a, b, d} são distintos, pois a natureza dos elementos é diferente; já os subconjuntos {b, c, d} e {c, b, d} são iguais, pois a ordem dos elementos não altera o subconjunto.

De um modo geral: dados um conjunto com **n** elementos quaisquer, chamam-se combinações de **n** elementos **p** a **p** todos os conjuntos que é possível obter com **p** elementos escolhidos entre os **n** elementos (sem atender a qualquer ordem). Uma vez que se trata de simples conjuntos e não de sequências ordenadas, duas combinações serão distintas quando, e somente quando, existir pelo menos um elemento de uma que não seja elemento da outra.

Notação: $C_{n,p}$ (combinação **n** elementos agrupados **p** a **p**). Fórmula dada por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,.\,p!}$$

Exercícios

em classe

[1] De quantas maneiras uma família de 5 pessoas pode sentar-se num banco de 5 lugares para tirar uma foto? De quantas maneiras esta foto pode ser tirada, ficando duas delas (pai e mãe) sempre juntas, em qualquer ordem?

[2] Quantos números naturais, de algarismos distintos, entre 3000 e 7000 podem ser formados, utilizando-se dos algarismos 1, 3, 4, 6, 7 e 8?

[3] Uma equipe está sendo formada para a execução de um trabalho. Existem oito pessoas participando da seleção e dessas, cinco são analistas de sistemas. De quantas formas podemos formar uma equipe com quatro pessoas de modo que metade das pessoas dessa equipe sejam analistas?

[4] Num lote de placas de computadores 10 estão boas e 8 estão defeituosas. Extraindo-se 5 placas (sem reposição) não levando em conta a ordem das mesmas, de quantas formas podemos obter 3 peças boas e 2 peças defeituosas?

[5] Em um laboratório existem 30 equipamentos de informática identificados por números de 1 a 30. De quantas maneiras diferentes podemos escolher três equipamentos de tal forma que a soma dos seus números de identificação tenha como resultado um numero ímpar?

[6] Quantos múltiplos positivos de 5, compostos de três algarismos distintos, podemos formar com os elementos do conjunto B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}?

[7] Formados e dispostos em ordem crescente todos os números que se obtém, permutando-se os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6 em que posição estará o número 53426?

[8] Uma pessoa vai digitar sua senha para entrar num sistema, mas na hora de digitar a senha, esqueceu-se da mesma. Ela lembra que a senha tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. Qual será o número máximo de tentativas para esta pessoa acertar sua senha?

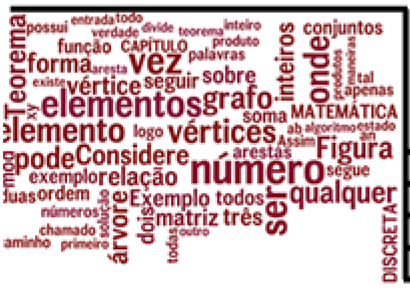
[9] Em uma reunião social, cada pessoa cumprimentou todas as outras uma única vez havendo ao todo 45 apertos de mão. Quantas pessoas estavam nesta reunião? Sabendo-se que metade dessas pessoas são programadores em Java e a outra metade programadores em COBOL, quantas comissões de quatro pessoas podem ser formadas, sendo que, nesta comissão duas pessoas, no mínimo, saibam programar em Java?

[10] Determine o valor de n, sabendo-se que:

(a) $A_{n,2} = 30$

(b) $A_{n,2} + A_{n+1,2} = 18$

[11] De quantas maneiras três casais heterossexuais podem ocupar seis cadeiras, dispostas em fila, de tal forma que as duas extremidades sejam ocupadas por homens?



Teoria dos Grafos

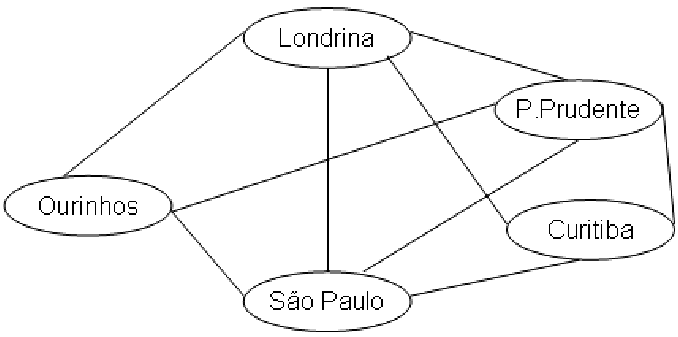
Introdução

A teoria dos grafos é um ramo da Matemática Discreta que estuda as relações entre objetos de um determinado conjunto. Os grafos são estruturas discretas que consistem em vértices e arestas que ligam estes vértices. Estruturas que podem ser representadas por grafos estão em toda parte e muitos problemas de interesse prático podem ser formulados como questões sobre certos grafos. Usando modelos de grafos, por exemplo, podemos determinar se é possível percorrer todas as ruas de uma cidade sem passar por uma rua duas vezes, podemos determinar se dois computadores estão ligados por um link de comunicação usando modelo de grafo de redes de computadores. Neste capítulo então, o objetivo é introduzir os conceitos básicos de teorias dos grafos e apresentar alguns modelos de grafos diferentes.

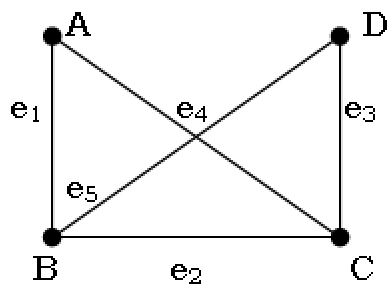
Definições

Definição 1: Um grafo **G = (V, E)** consiste em **V**, um conjunto não vazio de vértices (pontos ou nós) e **E**, um conjunto de vértices distintos, chamados de arestas. Cada vértice $\boldsymbol{v}$ em **V** é representado por um ponto (ou pequeno círculo), e cada aresta $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ é representada por uma curva que conecta seus extremos $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$.

Exemplo 1: o exemplo clássico de um grafo é o de algumas cidades ligadas por rodovias. Nesta representação as cidades seriam os vértices e as rodovias as arestas.



Exemplo 2: consideremos o grafo G = (V, E):



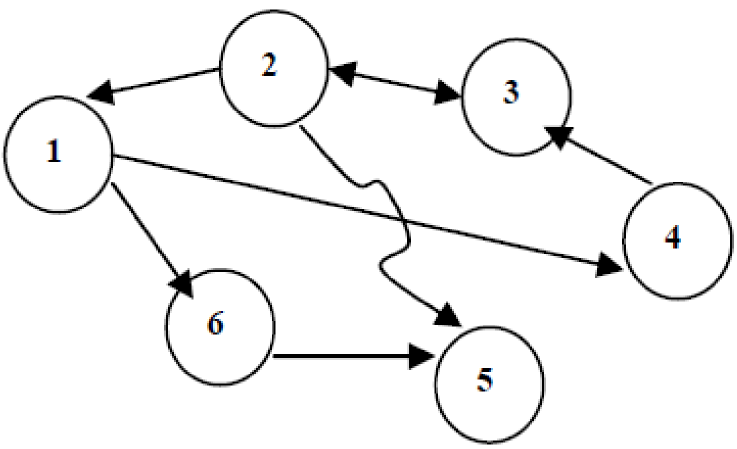
. **V** consiste nos vértices A, B, C, D

. **E** consiste nas arestas $e_1 = \{A, B\}$, $e_2 = \{B, C\}$, $e_3 = \{C, D\}$, $e_4 = \{A, C\}$, $e_5 = \{B, D\}$

Definição 2: Um grafo orientado (ou dígrafo) **(V, E)** consiste em um conjunto não vazio de vértices **V** e um conjunto de arestas orientadas (ou arcos). Cada aresta orientada está associada a um par ordenado de vértices. É dito que, a aresta orientada associada ao par ordenado ***(u, v)*** começa em ***u*** e termina em ***v***.

NOTA: os grafos são geralmente representados graficamente da seguinte maneira: é desenhado um círculo para cada vértice e, para cada aresta é desenhado um arco conectando suas extremidades. Se o grafo for orientado, seu sentido é indicado na aresta por uma seta.

Vejamos abaixo, um exemplo de um grafo orientado:

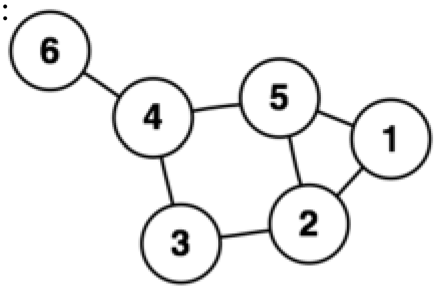


V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

E = {(1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (4, 3), (6, 5)}

Conceitos básicos da Teoria dos Grafos

Consideremos o grafo:



Trata-se de um grafo simples com o conjunto de vértices V = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e um conjunto de arestas E = { {1, 2}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 4}, {4, 5}, {4, 6}}.

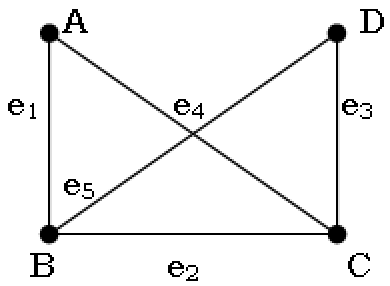
Conectando dois vértices, temos uma aresta: esses dois vértices são ditos como **incidentes** à aresta.

Dois vértices são considerados adjacentes se uma aresta existe entre eles. No grafo acima, os vértices **1** e **2** são adjacentes, mas os vértices **2** e **4** não são. O conjunto de vizinhos de um vértice consiste de todos os vértices adjacentes a ele. No grafo acima, o vértice **1** possui dois vizinhos: vértice **2** e vértice **5**.

O grau (ou valência) de um vértice ***v*** em um grafo **G** é igual ao número de arestas em **G** que contém ***v***, isto é, que são incidentes a ***v***. Como cada aresta é contada duas vezes na contagem dos graus dos vértices de **G**, temos o seguinte resultado simples, mais importante:

A soma dos graus dos vértices de um grafo **G** é igual a duas vezes o número de arestas em **G**

Por exemplo, no grafo:



Temos:

deg(A) = 2 deg(B) = 3 deg(C) = 3 deg(D) = 2

Perceba que a soma dos graus é igual a 10, que, como esperado, é igual a duas vezes o número de arestas.

Um **caminho** em um grafo **G** consiste em uma sequência alternada de vértices tal que cada um dos vértices existe uma aresta para o vértice seguinte.

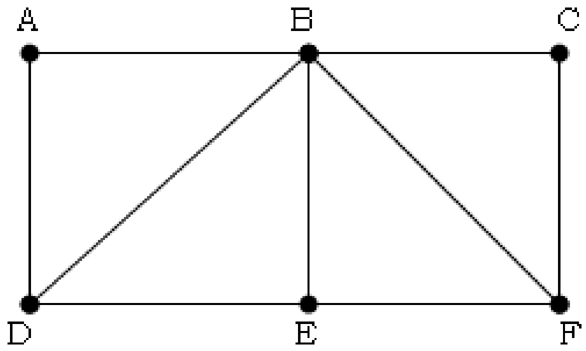
Um **caminho simples** é um caminho em que todos os vértices são distintos, ou seja, nenhum dos vértices no caminho se repete.

Um caminho em que todas as arestas são distintas é chamado **trilha**. O número de arestas é dito o **comprimento** do caminho.

Ciclo (ou circuito) é um caminho fechado de comprimento 3 ou mais onde todos os vértices são distintos.

Ciclos de comprimento 1 são **laços**.

Vejamos o grafo:



Consideremos as seguintes sequências:

α = (A, D, E, B, D, E, F, C)

β = (A, D, B, E, C)

θ = (A, D, B, E, F, B, C)

π = (A, D, B, F, C)

A sequência α é um caminho de A para C; porém, não é uma trilha, já que a aresta {D, E} é usada duas vezes.

A sequência β não é um caminho, já que não existe aresta {E, C}.

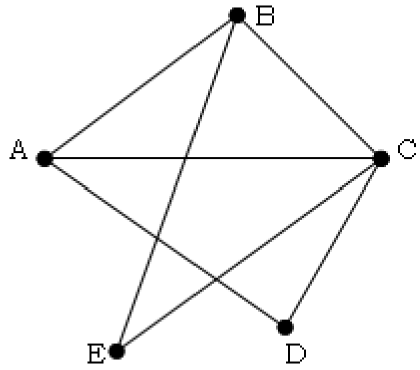
A sequência θ é uma trilha, uma vez que nenhuma aresta é usada duas vezes; mas não é um caminho simples, pois o vértice B é usado duas vezes.

A sequência π é um caminho simples de A para C, mas não é o menor caminho (no que diz respeito ao comprimento de A para C; note que o menor caminho de A para C é o caminhos simples (A, B, C) que tem comprimento 2).

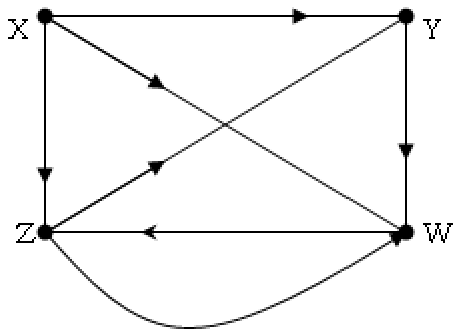
Exercícios

em classe

[1] Considere o grafo abaixo. Descreva formalmente o grafo G do diagrama, isto é, ache o conjunto V de vértices de G e o conjunto E das arestas de G. Ache o grau de cada vértice:



[2] Dado o grafo orientado G abaixo. Descreva formalmente G; ache todos os caminhos simples de X para Z; ache todos os caminhos simples de Y para Z; ache todos os ciclos de G.



[3] O grafo de intersecção de uma coleção de conjuntos A_1, A_2, ..., A_n é o grafo que tem um vértice para cada um desses conjuntos e tem uma aresta que liga os vértices que representam dois conjuntos se estes conjuntos tiverem uma intersecção não vazia. Construa o grafo de intersecção destas coleções de conjuntos:

(a) $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $A_4 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$

(b) $A_1 = \{..., -4, -3, -2, -1, 0\}$

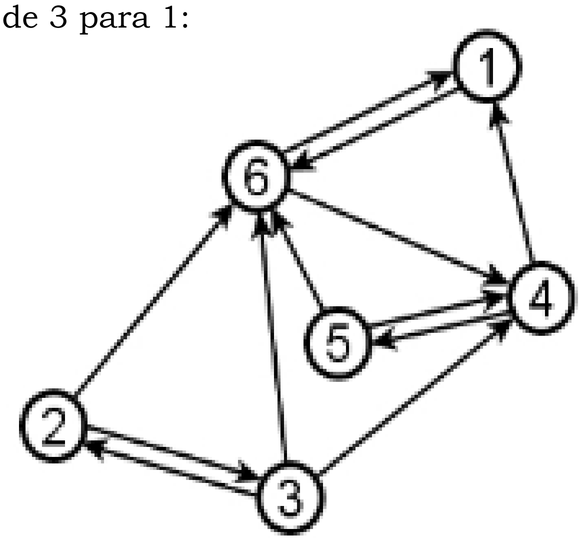
$A_2 = \{..., -2, -1, 0, 1, 2\}$

$A_3 = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$

$A_4 = \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$

$A_5 = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$

[4] Descreva formalmente o grafo G abaixo. Em seguida, determine o grau de cada vértice e se existir, todos os ciclos de G. Em seguida, determine todos os caminhos simples de 3 para 1:



[5] Dado o grafo orientado descrito formalmente por G = (V, E), tal que V = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e E = {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6), (6, 3)}.

(a) represente o grafo G;

(b) determine o grau de cada vértice do grafo G;

(c) determine, se existir, todos os ciclos do grafo G;

(d) quais nós são acessíveis a partir do nó 3?

(e) qual o comprimento do caminhos mais curto do nó 3 para o nó 6?

(f) qual o caminho de comprimento 8 do nó 1 para o nó 3?

Exercícios Complementares

em casa

[1] Sejam os conjuntos: $A = \{2, 4, 5, 6, 8\}$

$B = \{1, 4, 5, 9\}$

$C = \{x \mid x \in Z \text{ e } 2 \leq x < 5\}$

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, determine:

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap C$

(c) $A - B$

(d) $C - B$

(e) $(B - A) \cap (A - C)$

(f) $A^C \cap (B - C)$

(g) $(C - A) \cap (B - C)^C$

[2] Determine o conjunto N, sabendo que:

$M = \{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

$M \cap N = \{8, 12, 14\}$

$M \cup N = \{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$.

[3] Dados os conjuntos X e Y temos que, $n(X) = 8$, $n(Y) = 5$ e $n(X \cup Y) = 10$, portanto podemos afirmar que $n(X \cap Y)$ é igual a:

(a) 3 (b) 7 (c) 10 (d) 13 (e) 6

[4] Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, determine o número de elementos de cada um dos conjuntos:

(a) A

(b) B

(c) $A \cap B$

(d) $A \cup B$

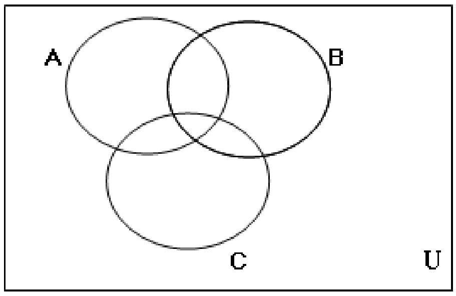
(e) $(A - B) \cap A$

(f) $B - (B \cap A)$

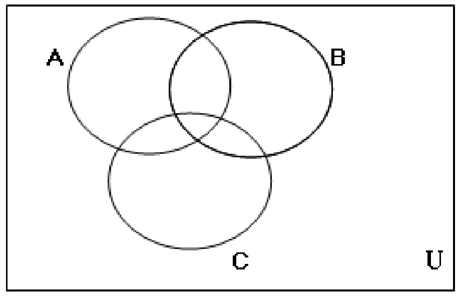
[5] Dados $P = \{3, 10\}$ e $Q = \{10, 21, 40\}$, determine o conjunto X, sabendo-se que $P \cap X = \{3\}$, $Q \cap X = \{21\}$ e $P \cup Q \cup X = \{3, 10, 21, 40, 51\}$.

[6] Utilizando-se do Diagrama abaixo, hachure as situações propostas:

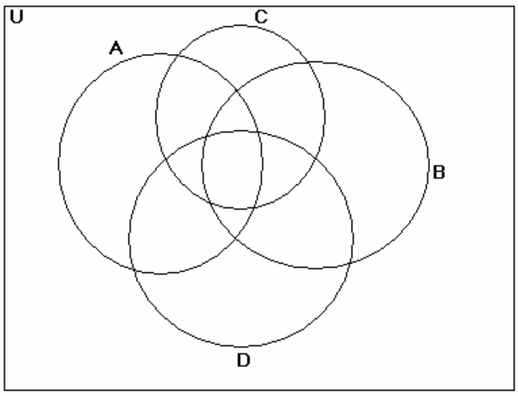
(a) $(B \cup C) - (A \cap C)$



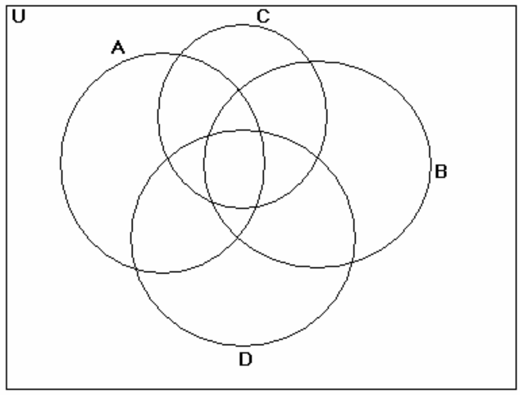
(b) $(A \cap B) - C$



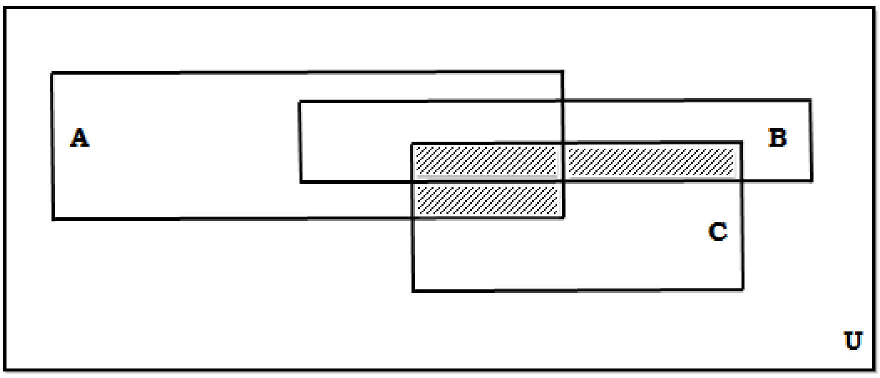
(c) $(B \cup D) - (C \cap A)$



(d) $(A - B) \cap (C - D)$



[7] No Diagrama abaixo, a parte hachurada representa:



(a) $(A \cap B) \cap C$

(b) $(A \cap C)$

(c) $C \cap (A \cup B)$

(d) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

(e) $(A \cup B) \cup C$

[8] Numa empresa multinacional de TI, trabalham 122 analistas dos quais 96 são brasileiros, 64 homens, 47 fumantes, 51 homens brasileiros, 25 homens fumantes, 36 brasileiros fumantes e 20 homens brasileiros fumantes. Determine o número de mulheres brasileiras não fumantes; o número de homens fumantes não brasileiros; o número de mulheres fumantes; o número de homens brasileiros fumantes; o número de mulheres não fumantes.

[9] Numa equipe de programadores, 28 programam em JAVA, 12 programam em COBOL e 8 programam em JAVA e COBOL. Quantos programadores há nesta equipe? Quantos só programam em JAVA?

[10] Numa entrevista para preenchimento de vagas para o setor de programação verificou-se que entre os 60 candidatos: 25 entrevistados programam em JAVA; 26 programam em COBOL; 26 programam DELPHI; 9 programam em JAVA e DELPHI; 11 programam em JAVA e COBOL; 8 programam em COBOL e DELPHI; 3 programam nas três linguagens. Quantos dos entrevistados não programam em nenhuma linguagem?

[11] Num levantamento entre 25 computadores de um laboratório de informática e constatou-se que: 15 tinham antivírus; 12 tinham o pacote OFFICE; 11 tinham o navegador MOZILLA; 5 tinham antivírus e o MOZILLA; 9 tinham antivírus e o OFFICE; 4 tinham OFFICE e MOZILLA; 3 tinham as três opções. Ache o número de computadores que têm apenas o MOZILLA; apenas antivírus; apenas o pacote OFFICE; o pacote OFFICE e MOZILLA, mas não antivírus; que não tenham nenhuma das opções.

[12] Numa pesquisa sobre preferências partidárias, perguntando aos entrevistados se já haviam votado nos partidos A, B, C ou D. Esta pesquisa trouxe os seguintes fatos: das 130 pessoas entrevistadas, 17 já votaram no partido D. Estas pessoas que já votaram no partido D nunca votaram em outro partido; 60 pessoas já votaram no partido A; 50 pessoas já votaram no partido B; 70 pessoas já votaram no partido C; 30 pessoas já votaram nos partidos A e C; 25 pessoas já votaram nos partidos B e C; 22 pessoas já votaram nos partidos A e B.

Sabendo que todos os 130 entrevistados já votaram em algum dos quatro partidos mencionados, determine: quantas pessoas já votaram nos três partidos? Quantas pessoas só votaram no partido A? Quantas pessoas só votaram em um partido? Quantas pessoas já votaram em exatamente dois partidos?

[13] Sabendo que Z representa o conjunto dos números inteiros, se considerarmos os conjuntos $A = \{x \in Z \mid -1 < x \leq 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, escreva o conjunto D, tal que $D = \{ (x, y) \in A \times B \mid y \geq x + 4\}$.

[14] Seja o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Quais as propriedades verificadas em cada uma das seguintes relações?

$R = \{ (a, a), (b, b), (a, c), (c, c)\}$

$S = \{ (a, a), (b, b), (b, a)\}$

$T = \{ (a, a), (a, b), (b, a)\}$

$V = \{ (a, a), (b, b), (a, c), (a, b)\}$

$X = \{ (a, a), (a, b), (b, c), (a, c)\}$

[15] Trace o grafo orientado que representa a relação definida por $R = \{ (a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b)\}$. Quais as propriedades que são verificadas nesta relação?

[16] Seja a função $f: A \rightarrow B$ tal que $f(x) = 0$, se x for par e $f(x) = 1$, se x for ímpar. Sendo o conjunto $A = \{x \in \aleph^* \mid x < 10\}$ e $B = \{x \mid x$ é dígito do sistema binário$\}$. Escreva todos os pares ordenados da função f.

[17] Sejam os conjuntos $A = \{-1, 1, 2, -2, 3\}$ e $B = \{2, 5, 10, 20\}$; seja também a relação definida por $g = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = x^2 + 1\}$.

(a) determine os pares ordenados que representam g; determine o Domínio e a Imagem de g;

(b) determine os pares ordenados que representam g^{-1}. A relação g^{-1} é uma função?

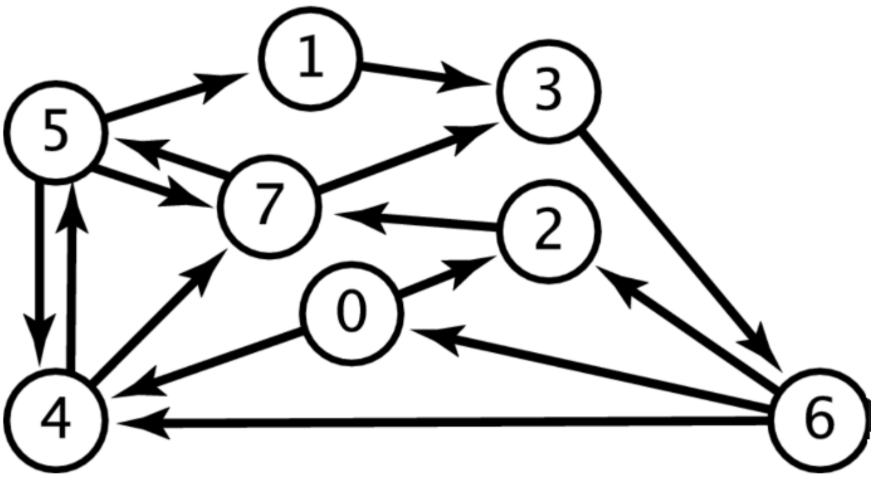
[18] Uma pessoa lança uma moeda sucessivamente até que ocorram duas caras consecutivas, ou que quatro lançamentos sejam realizados, o que primeiro ocorrer. Quais as sequências de resultados possíveis?

[19] As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. Sendo, assim, qual posição ocupará a palavra VAPOR? E a posição da palavra ROVAP?

[20] Para instalar um programa em um computador no Laboratório de Redes de uma Faculdade, é necessário uma senha formada por três algarismos distintos; em seguida, para reiniciar o programa e completar a instalação, é necessário digitar uma outra senha formada por duas letras distintas escolhidas entre as letras da palavra INSTAL. Qual será, neste caso, o número máximo de tentativas que uma pessoa, não conhecedora das duas senhas, deverá realizar para ter sucesso na instalação de um programa?

[21] Considere o seguinte conjunto N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados com os elementos deste conjunto? Dos números de três algarismos formados nas condições anterior, quantos são os que tem o algarismo **1** na primeira posição (centenas)?

[21] Considere o grafo orientado abaixo. Descreva formalmente esse grafo. Ache o grau de cada vértice. Determine todos os seus ciclos:



Referências Bibliográficas

ABE, Jair Minoro. *Teoria intuitiva dos conjuntos*. São Paulo: Makron McGraw-Hill, 1991.

ALENCAR FILHO, Edgard de. *Iniciação à lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

GERSTING, Judith L. *Fundamentos matemáticos para a Ciência da Computação – Um tratamento moderno de Matemática discreta.* 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática elementar.* v. 1. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIPSCHUTZ, S. *Teoria e problemas de Matemática Discreta*. Porto Alegre: Bookman, 2004 (Coleção Schaum).

MENEZES, Paulo Blauth. *Matemática Discreta para Computação e Informática.* Porto Alegre: Editora Sagra Luzzatto, 2004.

ROSEN, Kenneth H. *Matemática Discreta e suas aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

SCHEINERMAN, E. R. *Matemática Discreta: uma introdução.* São Paulo: Cengage Learning, 2008.

SULLIVAN, Michael; MIZRAHI, A. *Matemática finita: uma abordagem aplicada.* Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006.