

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение Образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Лабораторная работа №1

ДИСКРЕТНОЕ ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Выполнил студент гр. 381064
Мойсенович А.В.

Проверил
Митюхин А.И.

1. Цель работы

Изучение свойств дискретных ортогональных преобразований и их применение в цифровой обработке сигналов и изображений

2. Решение задач предварительного задания

2.1. Вычислить значения ДЭФ: W^2 , W^3 , W^{-1} , W^{-2} , W^{-3} при $N = 8$.

$$W^2 = e^{-j\frac{2 \cdot 2\pi}{8}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -j;$$

$$W^3 = e^{-j\frac{3 \cdot 2\pi}{8}} = e^{-j\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - j\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -0,707 - j0,707;$$

$$W^{-1} = e^{j\frac{2\pi}{8}} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,707 + j0,707;$$

$$W^{-2} = e^{j\frac{2 \cdot 2\pi}{8}} = e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j;$$

$$W^{-3} = e^{j\frac{3 \cdot 2\pi}{8}} = e^{j\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -0,707 + j0,707.$$

2.2. Функции системы ДЭФ записать в виде матрицы V размерностью 8×8

$$W^0 = e^{-j\frac{0 \cdot 2\pi}{8}} = e^0 = 1;$$

$$W^1 = e^{-j\frac{2\pi}{8}} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,707 - j0,707;$$

$$W^2 = -j;$$

$$W^3 = -0,707 - j0,707;$$

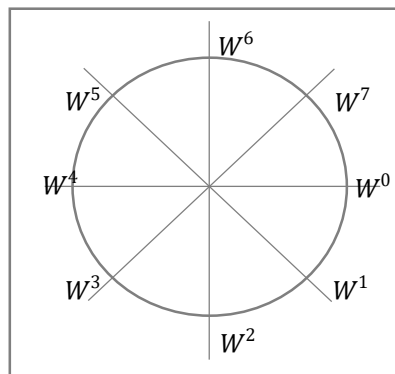
$$W^4 = -1;$$

$$W^5 = -0,707 + j0,707;$$

$$W^6 = j;$$

$$W^7 = 0,707 + j0,707.$$

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0	W^0
1	W^0	W^1	W^2	W^3	W^4	W^5	W^6	W^7
2	W^0	W^2	W^4	W^6	W^8	W^{10}	W^{12}	W^{14}
3	W^0	W^3	W^6	W^9	W^{12}	W^{15}	W^{18}	W^{21}
4	W^0	W^4	W^8	W^{12}	W^{16}	W^{20}	W^{24}	W^{28}
5	W^0	W^5	W^{10}	W^{15}	W^{20}	W^{25}	W^{30}	W^{35}
6	W^0	W^6	W^{12}	W^{18}	W^{24}	W^{30}	W^{36}	W^{42}
7	W^0	W^7	W^{14}	W^{21}	W^{28}	W^{35}	W^{42}	W^{49}



k\m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0,707-j0,707	-j	-0,707-j0,707	-1	-0,707+j0,707	j	0,707+j0,707
2	1	-j	-1	j	1	-j	-1	j
3	1	-0,707-j0,707	j	0,707-j0,707	-1	0,707+j0,707	-j	-0,707+j0,707
4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
5	1	-0,707+j0,707	-j	0,707+j0,707	-1	0,707-j0,707	j	-0,707-j0,707
6	1	j	-1	-j	1	j	-1	-j
7	1	0,707+j0,707	j	-0,707+j0,707	-1	-0,707-j0,707	-j	0,707-j0,707

Матрица (V) ДЭФ

2.3. Вычислить спектр дискретизированного сигнала, показанного на рисунке 1.1, с помощью ДПФ. Построить графики амплитудного и фазового спектров.

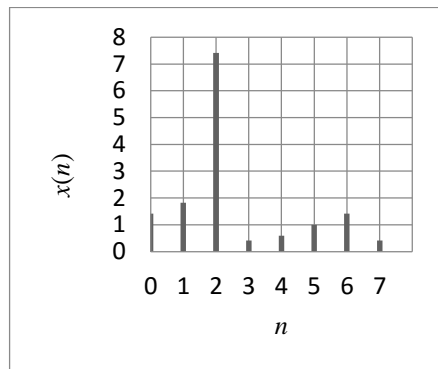


Рисунок 1.1

$$X = V \times x$$

$$X = V \times \begin{bmatrix} 1,414 \\ 1,828 \\ 7,414 \\ 0,414 \\ 0,586 \\ 1 \\ 1,414 \\ 0,414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,484 \\ 1,413 - j6,585 \\ -6,828 - j2 \\ 0,243 + j5,415 \\ 7,172 \\ 0,243 - j5,415 \\ -6,828 + j2 \\ 1,413 + j6,585 \end{bmatrix}$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$C_0 = \sqrt{14,484^2 + 0^2} = 14,484;$$

$$C_1 = \sqrt{1,413^2 + 6,585^2} = 6,735;$$

$$C_2 = \sqrt{6,828^2 + 2^2} = 7,115;$$

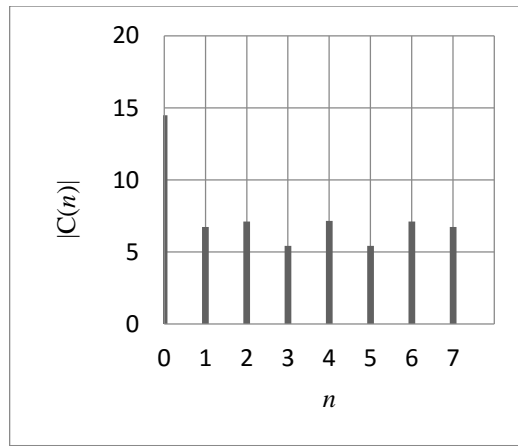
$$C_3 = \sqrt{0,243^2 + 5,415^2} = 5,42;$$

$$C_4 = \sqrt{7,172^2 + 0^2} = 7,172;$$

$$C_5 = \sqrt{0,243^2 + 5,415^2} = 5,42;$$

$$C_6 = \sqrt{6,828^2 + 2^2} = 7,115;$$

$$C_7 = \sqrt{1,413^2 + 6,585^2} = 6,735;$$



Амплитудный спектр сигнала

$$\varphi_n = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\text{Im}C_n}{\text{Re}C_n}\right) = \arctg\frac{-b_n}{a_n}, n = 1, 2, \dots \\ 0, n = 0. \end{cases}$$

$$\varphi_0 = 0;$$

$$\varphi_1 = \arctg\left(\frac{-6,585}{1,413}\right) = \arctg(-4,66) = -77,887;$$

$$\varphi_2 = \arctg\left(\frac{-2}{-6,828}\right) = \arctg(0,293) = 16,326;$$

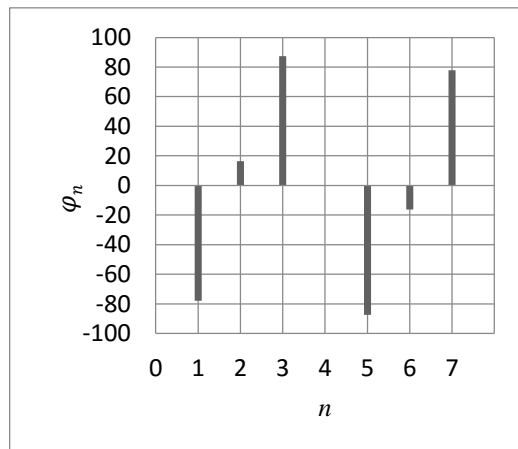
$$\varphi_3 = \arctg\left(\frac{5,415}{0,243}\right) = \arctg(22,284) = 87,435;$$

$$\varphi_4 = \arctg\left(\frac{0}{7,172}\right) = \arctg(0) = 0$$

$$\varphi_5 = \arctg\left(\frac{-5,415}{0,243}\right) = \arctg(-22,284) = -87,435;$$

$$\varphi_6 = \arctg\left(\frac{2}{-6,828}\right) = \arctg(-0,293) = -16,326;$$

$$\varphi_7 = \arctg\left(\frac{6,585}{1,413}\right) = \arctg(4,66) = 77,887.$$



Фазовый спектр сигнала

2.4. По полученным значениям ДПФ с помощью ОДПФ восстановить исходные значения отсчетов сигнала.

$$x = V^{-1} * X$$

$$x = V^{-1} \times X = \begin{bmatrix} 1,414 \\ 1,828 \\ 7,414 \\ 0,414 \\ 0,586 \\ 1 \\ 1,414 \\ 0,414 \end{bmatrix}$$

3. Расчеты и графики лабораторного задания.

3.1. Провести вычисления, подтверждающие свойства 1, 2, 5 дискретных экспоненциальных функций.

Свойство 1. Функции $\text{def}(k, n)$ ортогональны, т.е.

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{kn} (W^{ln})^* = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l, \\ N, & \text{если } k = l. \end{cases}$$

Так как $(W^{kn})^* = W^{-kn}$, то

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{kn} W^{-ln} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l, \\ N, & \text{если } k = l. \end{cases}$$

При $k=3$ и $l=5$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{3n} (W^{5n})^* = 1 \cdot 1 + (-0,707 - j0,707) \cdot (-0,707 - j0,707) + j \cdot j + (0,707 - j0,707) \cdot (0,707 - j0,707) + (-1) \cdot (-1) + (0,707 + j0,707) \cdot (0,707 + j0,707) + (-j) \cdot (-j) + (-0,707 + j0,707) \cdot (-0,707 + j0,707) = 0;$$

При $k=3$ и $l=3$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{3n} W^{4n} = 1 \cdot 1 + (-0,707 - j0,707) \cdot (-0,707 + j0,707) + j \cdot (-j) + (0,707 - j0,707) \cdot (0,707 + j0,707) + (-1) \cdot (-1) + (0,707 + j0,707) \cdot (0,707 - j0,707) + (-j) \cdot (j) + (-0,707 + j0,707) \cdot (-0,707 - j0,707) = 8;$$

Свойство 2: Периодичность

При $r=0, 1, \dots, N-1$ и $m=0, 1, 2, \dots$

$$W^{mN+r} = e^{-j \frac{(mN+r) \cdot 2\pi}{N}} = e^{-j \frac{mN \cdot 2\pi}{N}} e^{-j \frac{r \cdot 2\pi}{N}} = (\cos(m \cdot 2\pi) - j \sin(m \cdot 2\pi)) e^{-j \frac{r \cdot 2\pi}{N}} = e^{-j \frac{r \cdot 2\pi}{N}} = W^r;$$

$$W^{28} = W^{3 \cdot 8 + 4} = e^{-j \frac{(3 \cdot 8 + 4) \cdot 2\pi}{8}} = e^{-j 6\pi} e^{-j \pi} = (\cos(6\pi) - j \sin(6\pi)) (\cos(\pi) - j \sin(\pi)) = -1 = W^4;$$

Свойство 5: Мультипликативность:

- по строкам $\text{def}(k_1, n) \text{def}(k_2, n) = \text{def}(k_1 + k_2, n)$;
- по столбцам $\text{def}(k, n_1) \text{def}(k, n_2) = \text{def}(k, n_1 + n_2)$.

При $n=1, k_1=1, k_2=2$

$$\text{def}(1,1) \text{def}(2,1) = (0,707 - j0,707)(-j) = -0,707 - j0,707;$$

$$\text{def}(3,1) = e^{-j \frac{6\pi}{8}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - j \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -0,707 - j0,707$$

$$\text{def}(1,1) \text{def}(2,1) = \text{def}(3,1)$$

При $k=1, n_1=3, n_2=7$

$$\text{def}(1,3) \text{def}(1,7) = (-0,707 - j0,707)(0,707 + j0,707) = -j;$$

$$\text{def}(1,10) = e^{-j\frac{20\pi}{8}} = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) - j\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -j;$$

$$\text{def}(1,3) \text{ def}(1,7) = \text{def}(1,10)$$

3.2. Вычислить спектр дискретизированного сигнала (п. 1.3), сдвинутого по времени на $t = 3T$ интервалов дискретизации. Построить графики сигнала, амплитудного и фазового спектров.

$$x_1 = x(n+3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,414 \\ 0,414 \\ 1,414 \\ 1,828 \\ 7,414 \\ 0,414 \\ 0,586 \end{bmatrix}$$

$$X = V \times x = V \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1,414 \\ 0,414 \\ 1,414 \\ 1,828 \\ 7,414 \\ 0,414 \\ 0,586 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,484 \\ -5,655 + j3,657 \\ 2 - j6,828 \\ 3,999 + j3,657 \\ -7,172 \\ 3,999 - j3,657 \\ 2 + j6,828 \\ -5,655 - j3,657 \end{bmatrix}$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$C_0 = \sqrt{14,484^2 + 0^2} = 14,484;$$

$$C_1 = \sqrt{5,655^2 + 3,657^2} = 6,735;$$

$$C_2 = \sqrt{2^2 + 6,828^2} = 7,115;$$

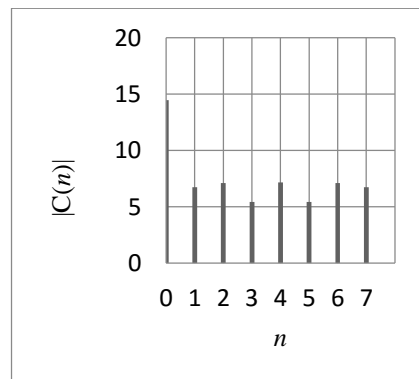
$$C_3 = \sqrt{3,999^2 + 3,657^2} = 5,42;$$

$$C_4 = \sqrt{7,172^2 + 0^2} = 7,172;$$

$$C_5 = \sqrt{3,999^2 + 3,657^2} = 5,42;$$

$$C_6 = \sqrt{2^2 + 6,828^2} = 7,115;$$

$$C_7 = \sqrt{5,655^2 + 3,657^2} = 6,735;$$



Амплитудный спектр сигнала

$$\varphi_0 = 0;$$

$$\varphi_1 = \arctg\left(\frac{3,657}{-5,655}\right) = \arctg(-0,64) = -32,885;$$

$$\varphi_2 = \arctg\left(\frac{-6,828}{2}\right) = \arctg(-3,414) = -73,674;$$

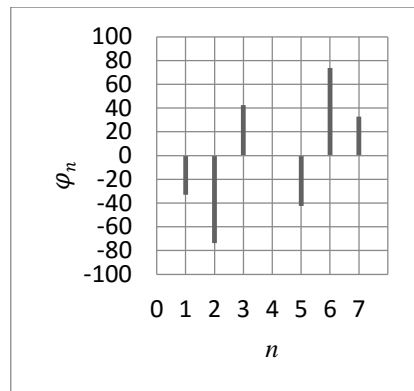
$$\varphi_3 = \arctg\left(\frac{3,657}{3,999}\right) = \arctg(0,914) = 42,436;$$

$$\varphi_4 = \arctg\left(\frac{0}{-7,172}\right) = \arctg(0) = 0$$

$$\varphi_5 = \arctg\left(\frac{-3,657}{3,999}\right) = \arctg(-0,914) = -42,436;$$

$$\varphi_6 = \arctg\left(\frac{6,828}{2}\right) = \arctg(3,414) = 73,674;$$

$$\varphi_7 = \arctg\left(\frac{-3,657}{-5,655}\right) = \arctg(0,64) = 32,885.$$



Фазовый спектр сигнала

3.3. По полученным значениям ДПФ с помощью ОДПФ восстановить значения отсчетов сигнала (п. 2.2). Построить график восстановленного дискретизированного сигнала.

$$x = N^{-1}V^*X$$

$$x = \frac{1}{8}V \times X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,414 \\ 0,414 \\ 1,414 \\ 1,828 \\ 7,414 \\ 0,414 \\ 0,586 \end{bmatrix}$$

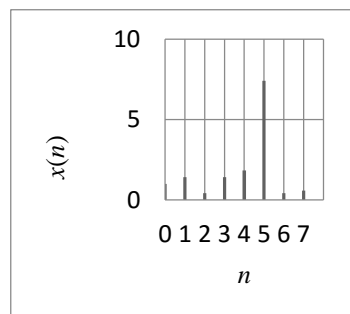


График восстановленного дискретизированного сигнала

4. Индивидуальное задание.

Дискретизированный сигнал:

$$x(n) = \{4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5\}$$

$$X = V \times x_1 = V \times \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ -1 + j2,414 \\ 0 \\ -1 + j0,414 \\ 0 \\ -1 - j0,414 \\ 0 \\ -1 - j2,414 \end{bmatrix}$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$C_0 = \sqrt{36^2 + 0^2} = 36;$$

$$C_1 = \sqrt{(-1)^2 + 2,414^2} = 2,613;$$

$$C_2 = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0;$$

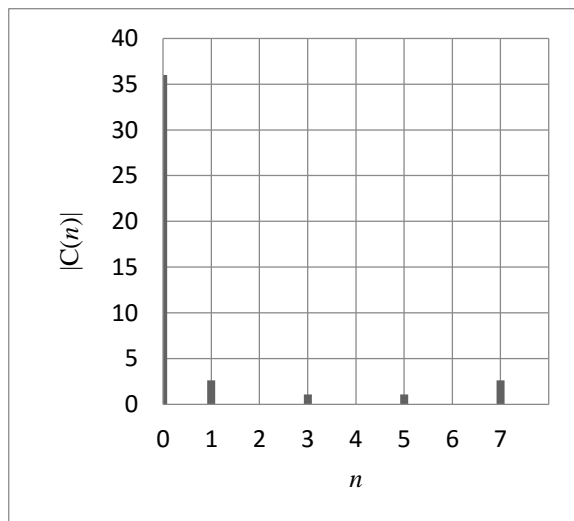
$$C_3 = \sqrt{(-1)^2 + 0,414^2} = 1,082;$$

$$C_4 = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0;$$

$$C_5 = \sqrt{(-1)^2 + (-0,414)^2} = 1,082;$$

$$C_6 = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0;$$

$$C_7 = \sqrt{(-1)^2 + 2,414^2} = 2,613;$$



Амплитудный спектр сигнала

$$\varphi_n = \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right);$$

$$\varphi_0 = 0;$$

$$\varphi_1 = \arctg\left(\frac{2,414}{-1}\right) = \arctg(-2,414) = -67,5;$$

$$\varphi_2 = \arctg\left(\frac{0}{0}\right) = \arctg(0/0) = 0;$$

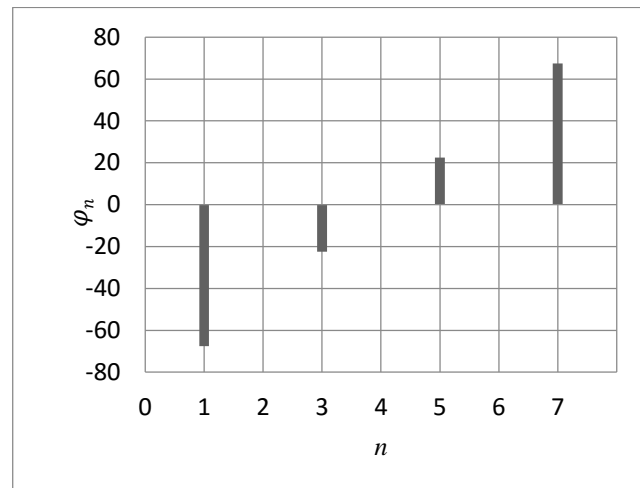
$$\varphi_3 = \arctg\left(\frac{0,414}{-1}\right) = \arctg(-0,414) = -22,5;$$

$$\varphi_4 = \arctg\left(\frac{0}{0}\right) = \arctg\left(\frac{0}{0}\right) = 0$$

$$\varphi_5 = \arctg\left(\frac{-0,414}{-1}\right) = \arctg(0,414) = 22,5;$$

$$\varphi_6 = \arctg\left(\frac{0}{0}\right) = \arctg\left(\frac{0}{0}\right) = 0;$$

$$\varphi_7 = \arctg\left(\frac{-2,414}{-1}\right) = \arctg(2,414) = 67,5;$$



Фазовый спектр сигнала

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1} \times \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

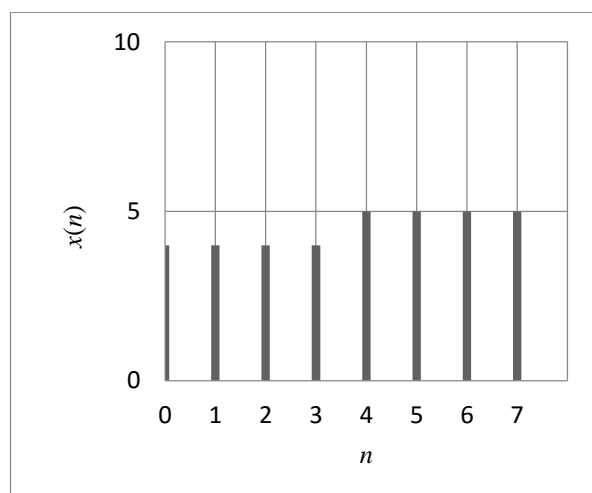


График восстановленного дискретизированного сигнала

Дискретизированный сигнал, смещенный на 3и интервала дискретизации:
 $x(n) = \{5, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 5\}$

$$X = V \times x_1 = V \times \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 2,414 - j \\ 0 \\ -0,414 + j \\ 0 \\ -0,414 - j \\ 0 \\ 2,414 + j \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \sqrt{36^2 + 0^2} = 36;$$

$$C_1 = \sqrt{(2,414)^2 + (-1)^2} = 2,613;$$

$$C_2 = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0;$$

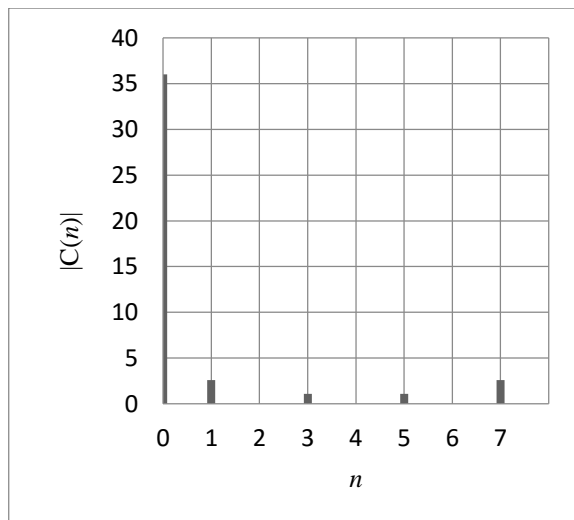
$$C_3 = \sqrt{(-0,414)^2 + 1^2} = 1,082;$$

$$C_4 = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0;$$

$$C_5 = \sqrt{(-0,414)^2 + (-1)^2} = 1,082;$$

$$C_6 = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0;$$

$$C_7 = \sqrt{(2,414)^2 + 1^2} = 2,613;$$



Амплитудный спектр сигнала

$$\varphi_0 = 0;$$

$$\varphi_1 = \arctg\left(\frac{-1}{2,414}\right) = \arctg(-0,414) = -22,5;$$

$$\varphi_2 = \arctg\left(\frac{0}{0}\right) = \arctg(0/0) = 0;$$

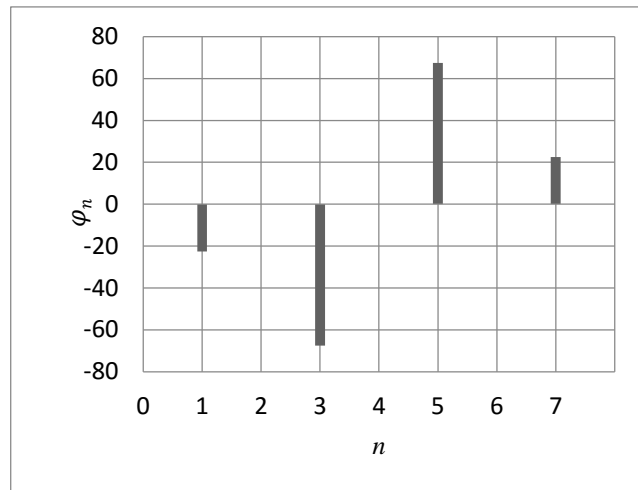
$$\varphi_3 = \arctg\left(\frac{1}{-0,414}\right) = \arctg(-2,414) = -67,5;$$

$$\varphi_4 = \arctg\left(\frac{0}{0}\right) = \arctg\left(\frac{0}{0}\right) = 0$$

$$\varphi_5 = \arctg\left(\frac{-1}{-0,414}\right) = \arctg(0,245) = 67,5;$$

$$\varphi_6 = \arctg\left(\frac{0}{0}\right) = \arctg\left(\frac{0}{0}\right) = 0;$$

$$\varphi_7 = \arctg\left(\frac{1}{2,414}\right) = \arctg(0,414) = 22,5;$$



Фазовый спектр сигнала

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1} \times \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

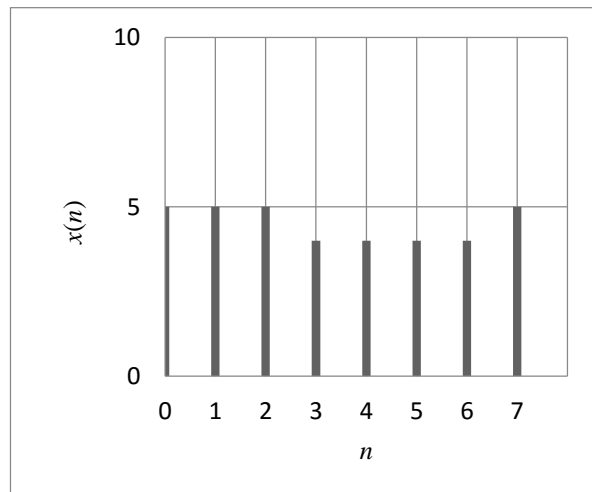


График восстановленного дискретизированного сигнала

5. Анализ результатов и выводы.

При сдвиге значений дескритезированного сигнала значения фазового спектра также смещаются. Амплитудный спектр остается прежнем. Можно сделать вывод, что однозначно восстановить дескритезированный сигнал невозможно, основываясь только на амплитудном или фазовом спектре.

В результате выполнения лабораторной работы было изучено дискретное преобразование Фурье. При расчетах было определено, что при обратном преобразовании сигнал равен исходному, что подтверждает теорию. Подтверждены расчетами следующие свойства дискретных экспоненциальных функций: ортогональность, периодичность и мультипликативность.