

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

А. И. МИТЮХИН

ДИСКРЕТНОЕ ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Лабораторная работа

МИНСК 2014

## 1. Цель работы

Изучение свойств дискретных ортогональных преобразований и их применение в цифровой обработке сигналов и изображений.

## 2. Введение

### 2.1. Способы отсчёта значений сигнала

Математические сигналы – это функции одной или более независимых переменных. Например, речевой сигнал представляется как функция времени, а изображение (фотография) – функция яркости от двух пространственных переменных. Независимая переменная может быть как непрерывной, так и дискретной. Поскольку реальные физические процессы протекают во времени, то в качестве математической модели сигнала, представляющего эти процессы, используют функции времени, отражающие изменения физических процессов.

#### 2.1.1. Классификация сигналов

По роли в передаче конкретной информации сигналы могут быть разделены на полезные и мешающие (помехи). Полезные сигналы переносят заданную информацию, а помехи искажают её, хотя, может быть, и переносят другую информацию.

По степени определенности ожидаемых значений сигнала все сигналы можно разделить на детерминированные сигналы и случайные сигналы. Случайным сигналом называют функцию времени, значения которой заранее неизвестны и могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью. В качестве основных характеристик случайных сигналов принимают:

а) закон распределения вероятности (относительное время пребывания величины сигнала в определенном интервале);

б) спектральное распределение мощности сигнала.

Детерминированным называется сигнал, значение которого в любой момент времени может быть точно определено. Детерминированные сигналы могут быть периодическими и непериодическими.

Периодическим называется сигнал, для которого выполняется условие

$$x(t) = x(t + kT), -\infty < t < \infty, \quad (2.1)$$

где  $k$  – любое целое число,  $T$  – период, являющийся конечным отрезком времени.

Среди детерминированных сигналов особое место занимают испытательные сигналы, необходимость в существовании которых обусловлена потребностями испытания характеристик разрабатываемых электронных устройств. Самым распространенным испытательным сигналом является гармоническое колебание, которое используется в измерительной практике для оценки частотных свойств устройств различного назначения.

Пример 2.1. Представление периодического гармонического колебания (рисунок 2.1) имеет следующий вид:

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t - \varphi_0), \quad (2.2)$$

или 
$$x(t) = x_m \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi_0\right),$$

где:  $x_m$ ;  $T$ ;  $f_0 = \frac{1}{T}$  [с<sup>-1</sup>], [Гц];  $\omega_0 = 2\pi f_0$  [рад/с];  $\varphi_0$  – соответственно амплитуда, период, основная линейная частота, круговая частота и начальная фаза колебания.

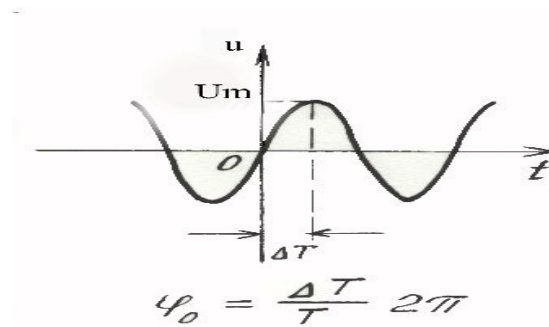


Рисунок 2.1 – Гармонический сигнал

По способу отсчёта значений сигнала во времени сигналы делятся на:

- непрерывные;
- дискретные;
- цифровые.

Непрерывный сигнал описывается непрерывной функцией  $x(t)$ , задаётся на непрерывных промежутках, и обычно называется аналоговым. Аналоговый сигнал может быть действительным или комплексным. Интервал изменения переменной времени может быть конечным или бесконечным. Для непрерывного (континуального) это несчётное множество, например,  $[0, t)$  или  $[0, \infty)$ . Выходные сигналы датчиков являются отражением некоторых физических процессов. Они, как правило, непрерывны, поскольку большинство физических процессов непрерывны по своей природе. Аналоговые сигналы достаточно просто генерировать и обрабатывать, однако они позволяют решать относительно простые технические задачи. Работа современных информационных систем основана на использовании дискретных и цифровых сигналов.

Дискретным называется сигнал, дискретный во времени и непрерывный по состоянию. Он задаётся решетчатой функцией  $x_d(nT)$  дискретной переменной  $n$ . Величина  $x_d(nT)$  – отсчёт сигнала в точке  $n$ , указывающей порядковый номер отсчёта, рисунок 2.2.

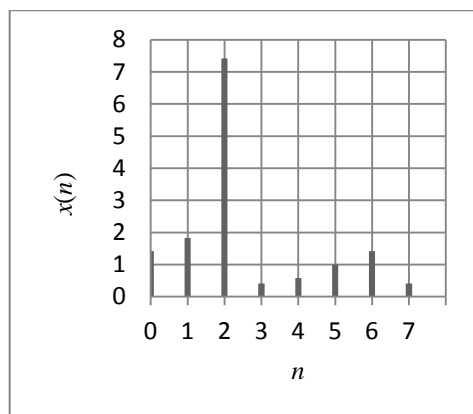


Рисунок 2.2.

Для дискретного и цифрового сигналов это счётное множество, включающее  $N$  точек – интервал  $[0, N-1]$ . Интервал  $T$  называется периодом дискретизации, а обратная величина  $f_d = \frac{1}{T}$  – частотой дискретизации. Дискретный сигнал может быть действительным или комплексным. Его характеристиками являются энергия и мощность

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2, P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2,$$

которые могут интерпретироваться как энергия и мощность ступенчатых огибающих дискретных сигналов (их непрерывных аналогов).

Дискретные сигналы ортогональны, если их взаимная энергия удовлетворяет условию

$$E_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2^*(n) = 0,$$

где знак  $*$  обозначает комплексное сопряжение.

Энергия и мощность ортогональных сигналов аддитивны так как

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x_1(n) + x_2(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_1(n)|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} |x_2(n)|^2.$$

Цифровая обработка сигналов требует, чтобы дискретные сигналы были квантованы по величине, чтобы их амплитуда принимала только фиксированные значения. В этом случае дискретные сигналы называются цифровыми. Цифровой сигнал дискретен как во времени, так и по состоянию. Цифровой сигнал также описывается решетчатой функцией  $x(nT)$ , которая принимает конечное число значений на некотором интервале  $x'_d \leq x_d \leq x''_d$ . Эти значения называются уровнями квантования, а соответствующая функция – квантованным сигналом. Квантование производится с целью получения конечной последовательности чисел. При попадании отсчёта сигнала в пределы того или иного шага квантования производится его округление до уровня квантования, соответствующего этому шагу, рисунок 2.3.

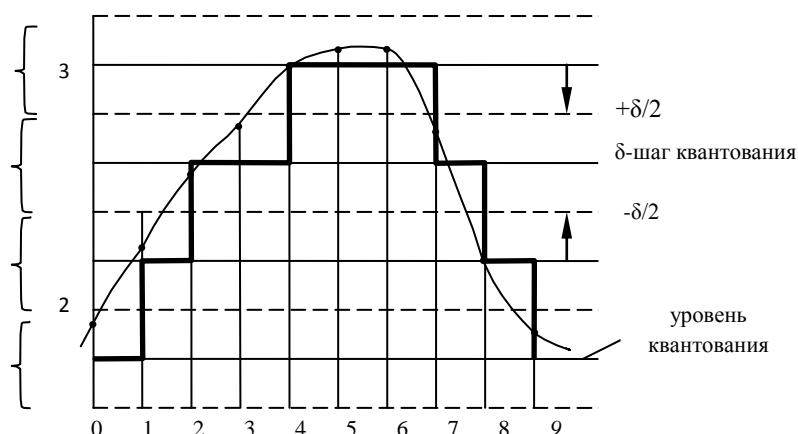


Рисунок 2.3 – Квантованный сигнал

Цифровой сигнал отличается от дискретного  $x(nT)$ :

$$\zeta_Q(nT) = x_d(nT) - x(nT),$$

где  $\zeta_Q(nT)$  – ошибка квантования или искажения, возникающие за счёт квантования). Максимальная ошибка квантования при использовании округления равна половине шага квантования,

$$\text{Max}|\sigma| = \frac{\delta}{2}.$$

На выходе АЦП, рисунок 2.3, формируется последовательность двоичных чисел  $\{x\}$ , соответствующая значениям  $x_d(nT)$ , т.е.  $x(nT) = \{000\ 001\ 010\ 010\ 011\ 011\ 011\}$ .

При изучении цифровых систем удобно пользоваться нормированным временем

$$\hat{t} = \frac{t}{T} = \frac{nT}{T} = n.$$

Нормированное время  $\hat{t}$  есть номер  $n$  отсчёта дискретного или цифрового сигнала. Для описания дискретного (цифрового) сигнала могут быть использованы равнозначные обозначения:

$$x(nT), N_1 \leq n \leq N_2; \quad (2.3)$$

$$x(n), N_1 \leq n \leq N_2. \quad (2.4)$$

Обозначение (2.3) применяется при равномерном расположении отсчётов; обозначение (2.4) может применяться при неравномерном расположении отсчётов.

## 2.2. Формы представления детерминированных сигналов

Модели сигналов в виде функции времени предназначены, в первую очередь, для анализа формы сигналов. При решении задач прохождения сигналов сложной формы через какие-либо устройства такая модель сигнала часто не совсем удобна и не позволяет понять суть происходящих в устройствах физических процессов.

Поэтому сигналы представляют набором элементарных (базисных) функций, в качестве которых наиболее часто используют ортогональные гармонические (синусоидальные и косинусоидальные) функции. Выбор

именно таких функций обусловлен тем, что они являются, с математической точки зрения, собственными функциями инвариантных во времени линейных систем (систем, параметры которых не зависят от времени), т.е. не изменяют своей формы после прохождения через эти системы. В результате сигнал может быть представлен множеством амплитуд, фаз и частот гармонических функций, совокупность которых называется спектром сигнала.

Таким образом, существуют две формы представления произвольного детерминированного сигнала: временное и частотное (спектральное). Первая форма представления основана на математической модели сигнала в виде функции времени  $t$ :

$$x \Rightarrow x(t),$$

вторая – на математической модели сигнала в виде функции частоты  $\omega = 2\pi f$ , причем эта модель существует только в области комплексных функций:

$$X \Rightarrow X(j\omega).$$

Обе формы представления сигнала связаны между собой парой преобразований Фурье:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.5)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.6)$$

При использовании линейной частоты  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  преобразования Фурье имеют следующий вид:

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2.7)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jf)e^{j2\pi ft} d\omega. \quad (2.8)$$

Из формул (2.6), (2.8) следует, что любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте.

Пример 2.2. Временное представление гармонического колебания имеет следующий вид (2):

$$x(t) = \cos(\omega_0 t - \varphi_0),$$

или 
$$x(t) = x_m \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \varphi_0\right),$$

Для представления такого колебания в частотной области достаточно задать две функции частоты, показывающие, что на частоте  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$  амплитуда сигнала равна  $x_m$ , а начальная фаза равна  $\varphi_0$ :

$$x(\omega) = \begin{cases} x_m, & \omega = \omega_0, \\ 0, & \omega \neq \omega_0; \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \varphi_0, & \omega = \omega_0, \\ 0, & \omega \neq \omega_0. \end{cases}$$

Значение  $x_m = x(\omega_0)$  называется амплитудным спектром гармонического колебания, а  $\varphi_0 = \varphi(\omega_0)$  называются фазовым спектром гармонического колебания. Их совокупность (2.9) – просто спектр.

### 2.3. Представление дискретных последовательностей

Теория цифровой обработки сигналов связана с описанием и обработкой временных и частотных последовательностей. Пусть задана произвольная временная дискретная последовательность  $x(n) = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$ . Такая числовая последовательность может быть представлена как сумма взвешенных и задержанных цифровых единичных импульсов. Цифровой единичный импульс (отсчёт), рисунок 2.4а, определяется следующим образом:

$$U_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

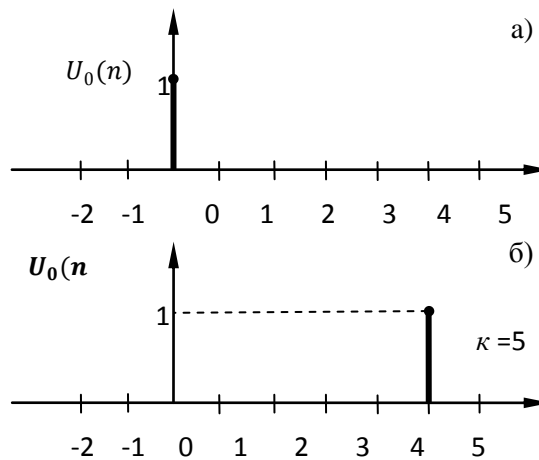


Рисунок 2.4

В цифровых системах этот импульс играет такую же роль, как и дельта-функция Дирака  $\delta(t)$  (рисунок 2.5) в аналоговых системах. По определению  $\delta$ -функция удовлетворяет следующим условиям:

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1.$$

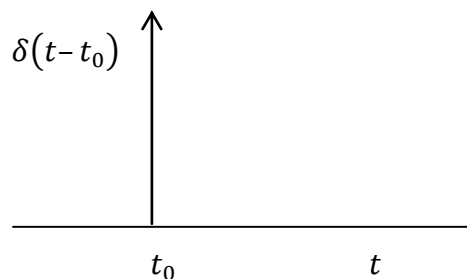


Рисунок 2.5 – Символическое изображение дельта-функции

Таким образом,  $\delta$ -функция равна нулю при всех отличных от нуля значениях аргумента и принимает в точке  $t = 0$  бесконечно большое значение. Площадь под кривой, ограниченной  $\delta$ -функцией, равна единице. Различие между

цифровым единичным импульсом и  $\delta$ -функцией состоит в том, что цифровой единичный импульс является физически реализуемым сигналом, тогда как аналоговый единичный импульс  $\delta(t)$  рассматривается только как обобщённая функция. На рисунке 2.4б изображён единичный отсчёт, задержанный на  $k$  отсчётов, который определяется как

$$U_0(n - k) = \begin{cases} 1, n = k, \\ 0, n \neq k, \end{cases} \quad (2.11)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В общем случае любой отсчёт произвольной дискретной последовательности записывается в виде

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)U_0(n - k), \quad (2.12)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,

Пример 2.3. Задана дискретная последовательность  $x(n) = \{1,41; 1,83; 7,41; 0,41; 0,58; 1; 1,41; 0,41\}$ , рисунок 2.6. Записать выражение для определения отсчёта с номером  $n = 6$ .

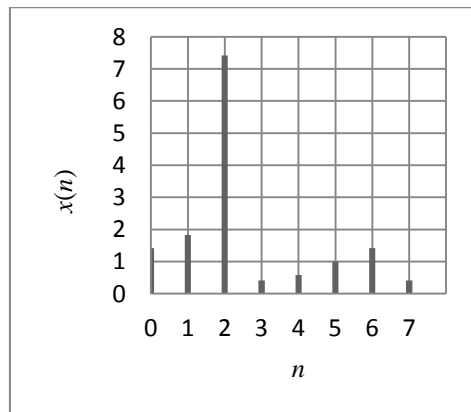


Рисунок 2.6

Значение отсчёта данной последовательности определяется как

$$x(6) = \sum_{k=0}^7 x(k)U_0(6 - k) = x(0)U_0(6 - 0) + x(1)U_0(6 - 1) + x(2)U_0(6 - 2) + x(3)U_0(6 - 3) + x(4)U_0(6 - 4) + x(5)U_0(6 - 5) + x(6)U_0(6 - 6) + x(7)U_0(6 - 7) = x(6)U_0(0) = x(6) = 1,41.$$

Упражнение 2.1. Дан дискретный сигнал

$x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4)\} = \{1; 1,5; -1,2; 4; -4,8\}$ . Записать выражение, определяющее значение отсчёта последовательности с номером  $n = 3$ .

## 2.4. Теорема дискретизации

Дискретизация представляет собой процедуру взятия мгновенных значений непрерывного сигнала  $x(t)$ .

Положение 1. Задан сигнал, энергия которого полностью содержится внутри полосы от 0 до  $W$  Гц; сигнал дискретизируется с интервалами  $T$  секунд.

Теорема 2.1. Исходный сигнал может быть полностью восстановлен при частоте дискретизации  $f_d = \frac{1}{T}$  не менее  $2W$ .



В западной научной литературе принято считать, что принцип дискретизации был высказан Найквистом (Н. Nyquist) в 1928 году. По советским источникам теорему дискретизации сформулировал и доказал академик В. А. Котельников в 1931 году. Строгое определение и использование в качестве теоремы дано Шенноном (С. Е. Shannon) в 1948 году.

Положение 2. Задан сигнал (приближенно) с частотным спектром, ограниченным частотой  $W$  Гц, существующий  $t$  секунд.

Теорема 2.2. Сигнал может быть полностью восстановлен (описан)  $N = 2Wt$  отсчётами.

Замечание – Определение сигнала как приближённое введено для математической корректности. По самой природе преобразования Фурье никакая функция не может быть ограничена по частоте и времени. Существует концептуальная трудность строгого частотного ограничения реального сигнала частотой  $W$ . В силу конечной длительности сигнала, рисунок 2.7, он имеет бесконечно широкий спектр. В моменты возникновения-окончания сигнала временные интервалы  $\Delta t$  его формирования очень малы и, следовательно,  $\Delta W$  очень велико.

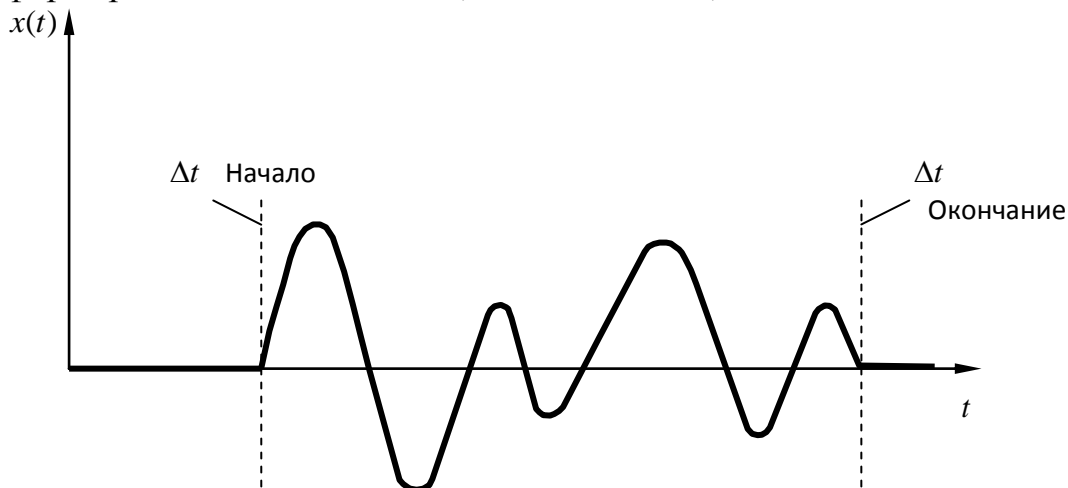


Рисунок 2.7

Фактически бесконечность спектра является препятствием для преобразования сигнала  $x(t)$  в цифровую форму. Если  $W \rightarrow \infty$ , дискретизация невозможна. Тем не менее, в спектре любого конечного сигнала есть такие высшие составляющие, начиная с некоторого верхнего значения которых, частоты  $W$  имеет незначительные амплитуды, и потому ими можно пренебречь без заметного искажения самого сигнала.

Ограничение спектра до частоты  $W = \frac{f_d}{2}$  осуществляется антиэлайсинговым фильтром. Например, для телефонного сигнала  $W = 3,4$  кГц минимальная стандартная частота его дискретизации  $f_d = 8$  кГц. Временной интервал дискретизации равен  $T = \frac{1}{8 \cdot 10^3} = 125$  мкс.

Для нестационарных процессов с неограниченным спектром интервал дискретизации  $T = \frac{1}{f_d}$  определяется временем корреляции  $\tau_k$  сигналов, а именно

$$T \leq \tau_k.$$

Взаимная корреляция  $R(\tau)$  двух сигналов конечного периода  $T_c$  в непрерывной временной области определяется формулой

$$R(\tau) = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} x(t)h(t + \tau)dt.$$

Корреляционная функция – это показатель сходства или общих свойств двух сигналов. Значение 0 указывает на нулевую корреляцию. Это означает, что сигналы независимы, например, если один из сигналов случаен. Малые значения  $R(\tau)$  указывают на незначительную корреляцию.

Взаимная нормированная корреляция  $r(n)$  двух последовательностей данных  $x(n)$  и  $h(n)$  записывается как

$$r(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(n + k), n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.13)$$

Этот математический аппарат находит очень широкое применение в обработке изображений, в сфере компьютерного зрения, дистанционного зондирования со спутников, в которых сравниваются данные с различных изображений, в реализации технического контроля качества выпускаемых изделий, в климатологии и в др. приложениях.

Стационарный случайный процесс – статистические свойства его не изменяются при переносе начала отсчёта времени (или другого аргумента, от которого зависит рассматриваемый процесс).

Нестационарный процесс – анализ осуществляется лишь по одной реализации процесса. Различают нестационарные процессы с переменным во времени значением, рисунок 2.8а, и с переменным во времени средним квадратом, рисунок 2.8б.

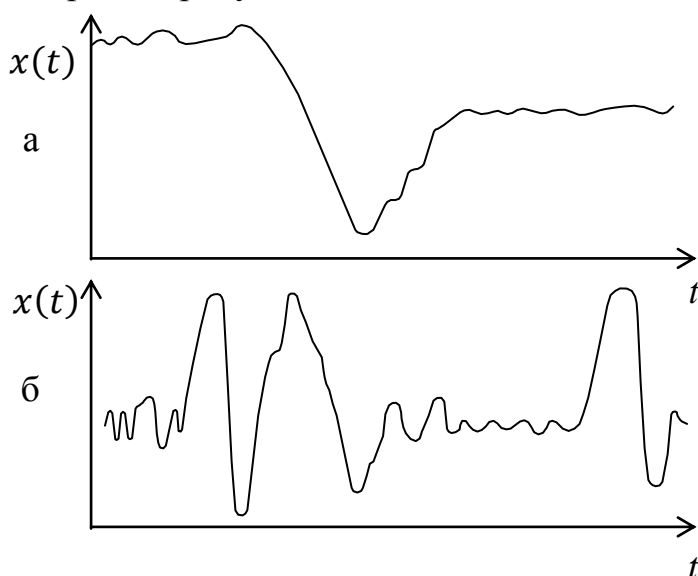


Рисунок 2.8

Теоретически точное восстановление сигнала после дискретизации может быть выполнено с помощью идеального ФНЧ с прямоугольной характеристикой и частотой среза  $f_s = \frac{f_d}{2}$ , однако, практически это

исключено, так как для создания фильтра потребуется затратить бесконечное время.

По теореме дискретизации максимальная частота аналогового сигнала не должна превышать половину частоты дискретизации  $f_d$ , следовательно, в частотной области все дискретные сигналы целесообразно рассматривать в диапазоне  $[0, \frac{f_d}{2}]$  или  $[0, \frac{\omega_d}{2}]$ .

При анализе дискретных сигналов удобно пользоваться нормированной частотой  $\hat{f} = \frac{f}{f_d} = fT$  или  $\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_d} = \frac{2\pi f}{f_d} = 2\pi fT$ , и рассматривать дискретный сигнал в области  $\hat{f} \in [0; 0,5]$  или  $\hat{\omega} \in [0; \pi]$ . Применение нормированных частот позволяет исследовать частотные характеристики дискретных систем и спектры дискретных сигналов в единой полосе частот. Для ЦОС важны не абсолютные значения частоты сигнала и частоты дискретизации, а их отношение, т.е. значение нормированной частоты. Покажем это на примере.

Пример 2.4. На рисунке 2.9 изображена дискретная синусоида  $x(n)$ .

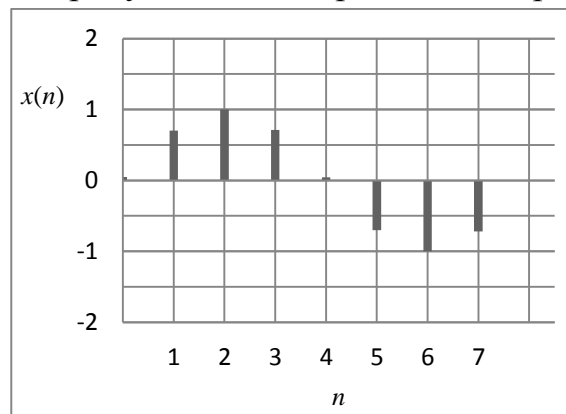


Рисунок 2.9

Она связана с аналоговым гармоническим сигналом выражением

$$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow x_m \sin(2\pi f_0 nT)$$

где  $T$  – период дискретизации.

Сравним две дискретные синусоиды, каждая из которых имеет следующие значения параметров:

$$x_1(t) = \sin(2\pi f_1 nT_1) = \sin(2\pi f_1 n \frac{1}{f_{d_1}}),$$

где  $f_1 = 5$  Гц,  $f_{d_1} = 25$  Гц.

$$x_2(t) = \sin(2\pi f_2 nT_2) = \sin(2\pi f_2 n \frac{1}{f_{d_2}}),$$

где  $f_1 = 10$  кГц,  $f_{d_1} = 25$  кГц.

Подставив соответствующие величины в  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , получим:

$$x_1(t) = \sin\left(2\pi f_1 n \frac{1}{f_{d_1}}\right) = \sin\left(2\pi 5n \frac{1}{25}\right) = \sin\left(2\pi n \frac{1}{5}\right),$$

$$x_2(t) = \sin\left(2\pi f_2 n \frac{1}{f_{d_2}}\right) = \sin\left(2\pi 5 \cdot 10^3 n \frac{1}{25 \cdot 10^3}\right) = \sin\left(2\pi n \frac{1}{5}\right).$$

Действительно, форма этих дискретных сигналы одинакова, так как равны их нормированные частоты.

Пример 2.5. Определить ширину полосы частот цифрового сигнала покомпонентного телевидения (ТВ).

Замечание. В покомпонентном телевидении разделённые сигналы яркости  $Y$  и цветоразностные сигналы  $R - Y$  и  $B - Y$  квантуются на 256 уровней. Частота дискретизации яркостного канала выбрана равной  $f_{d_Y} = 13,5$  МГц, частота дискретизации цветоразностных сигналов  $f_{d_R} = f_{d_B} = 6,75$  МГц.

Решение. Ширина полосы частот  $W$  равна

$$W = f_{d_Y} n + f_{d_R} n + f_{d_B} n = 13,5 \cdot 8 + 6,75 \cdot 8 + 6,75 \cdot 8 = 216 \text{ МГц}$$

где  $n$  – значность двоичного кода АЦП.

Пример 2.6. Определить количество отсчётов  $N$  яркостного сигнала в строчном интервале ТВ стандарта с параметрами: 625 строк в кадре, 25 кадров в секунду. Частота дискретизации сигнала яркостного канала  $f_{d_Y} = 13,5$  МГц.

$$\text{Решение. } N = 2Wt = f_{d_Y} t = 13500000 \cdot 64 \cdot 10^{-6} = 864,$$

где  $t$  – длительность строки.

### Упражнение 2.2

Определить количество отсчётов  $N$  сигнала цветности в строчном интервале ТВ стандарта с параметрами: 625 строк в кадре, 25 кадров в секунду. Частота дискретизации сигнала цветности  $f_{d_R} = 6,75$  МГц.

## 3. Представление дискретных систем и сигналов в частотной области

Помимо временной области сигналы и линейные системы могут описываться в областях других независимых переменных. В этом случае соответствующие функции времени преобразуются в функции другого аргумента, например, в функции частоты.

Замечание – следует различать подобные преобразования и преобразования функций одной и той же независимой переменной.

### 3.1. Спектральный (гармонический) анализ сигналов

Гармонический анализ – это раздел математики, который изучает представления функций в виде тригонометрических рядов и интегралов.

В 1807 Жан Батист Жозеф Фурье высказал идею о том, что периодическая функция  $x(t) = x(t + kT)$  может быть представлена в виде синусоидальных и/или косинусоидальных функций различных частот, умноженных на некоторые коэффициенты.

#### 3.1.1. Инвариантность синусоиды

Если входной сигнал – это гармоническое колебание (функция времени синусоида/косинусоида)

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t - \varphi_0),$$

то выходной сигнал линейной системы будет также синусоидальный той же частоты  $\omega_0$ , хотя амплитуда  $x_m$  и начальная фаза  $\varphi_0$  могут отличаться от первоначальных значений. Таким образом, форма сигнала сохраняется, так как в линейной системе с сигналом возможны только такие операции как умножение на постоянную величину, дифференцирование, интегрирование, задержка и суммирование.

На практике используют и иные способы представления сигналов. В отображении сигналов, наряду с синусоидальной функцией, широко применяется комплексная экспоненциальная функция вида

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t. \quad (3.1)$$

Рисунок 3.1 иллюстрирует графическое представление этой функции.

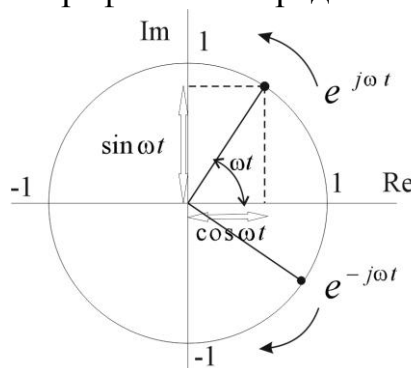


Рисунок 3.1

Функция  $x(t) = e^{j\omega t}$  отражает положение комплексного числа  $e^{j\omega t}$  на единичной окружности в комплексной плоскости, где на оси абсцисс представлена его действительная часть, а на оси ординат – его мнимая часть. Выражению  $x(t) = e^{j\omega t}$  соответствует точка, расположенная на единичной окружности в комплексной плоскости. Прямая, соединяющая эту точку с началом координат комплексной плоскости образует с действительной осью угол  $\varphi = \omega t$ . Точка движется по окружности против часовой стрелки со скоростью  $\omega \frac{\text{рад}}{\text{с}}$  – поэтому  $\omega$  называют круговой частотой. Выражение  $x(t) = e^{j\omega t}$  представляет собой единичный вектор, угол которого линейно

нарастает со временем со скоростью  $\omega \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Выражение  $x(t) = e^{-j\omega t}$  соответствует вектору, угол которого линейно нарастает со временем в противоположном направлении с той же скоростью  $\omega \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Поскольку

$$e^{-j\omega t} = \cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t) = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) = (e^{j\omega t})^*,$$
то  $e^{-j\omega t}$  и  $e^{j\omega t}$  являются сопряженными функциями.

### 3.1.2. Представление периодической функции рядом Фурье

Основным понятием в гармоническом анализе является гармоническое колебание. В гармоническом анализе вводится понятие  $n$ -й гармоники периодического колебания частоты  $\omega_0$ , под которой понимают гармоническое колебание с частотой, в  $n$  раз превышающей основную частоту  $\omega_0$ . Например,  $x'(t) = x_m \cos(2\omega_0 t - \varphi_0) = x_m \cos(2 \cdot 2\pi f_0 t - \varphi_0) = x_m \cos\left(\frac{2 \cdot 2\pi}{T} t - \varphi_0\right)$  выполняет два колебания за каждые  $T$  секунд.

Следующим важным понятием является спектр сигнала. Под спектром сигнала понимают совокупность его гармонических составляющих. Введение понятия спектра сигнала обусловило использование в технических приложениях название спектрального анализа для гармонического анализа сигналов.

Как известно, любой сигнал  $x(t)$ , описываемый периодической функцией времени, удовлетворяющей условиям Дирихле (модели реальных сигналов им удовлетворяют), можно представить в виде суммы гармонических колебаний, называемой рядом Фурье:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t, \quad (3.2)$$

где  $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$  – среднее значение сигнала за период или постоянная составляющая сигнала,  $\{a_n\}, \{b_n\}$  – множества коэффициентов.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt, \quad (3.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt. \quad (3.4)$$

Из формул (3.2 – 3.4) следует, что функцию  $x(t)$  можно представить множеством действительных чисел  $\{a_0, a_n, b_n\}$ .

### 3.1.3. Комплексная форма ряда Фурье

С целью упрощения расчетов часто используют вместо тригонометрической формы записи ряда Фурье его комплексную форму. Расчет спектров сигналов в комплексной области значительно проще, поскольку нет необходимости рассматривать отдельно коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  тригонометрической формы записи ряд Фурье.

С учетом формул Эйлера

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}),$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}),$$

где  $e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t$  – комплексная экспоненциальная функция,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}.$$

В этом случае  $x(t)$  определяется множеством комплексных чисел  $\{C_n\}$ :

$$C_0 = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = a_0$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = |C_n|e^{j\varphi_n},$$

где  $|C_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\varphi_n = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\text{Im}C_n}{\text{Re}C_n}\right) = \arctg\frac{-b_n}{a_n}, n = 1, 2, \dots \\ 0, n = 0. \end{cases}$

Совокупность комплексных амплитуд  $C_n$  называют комплексным спектром периодического сигнала. На рисунке 3.2 показана геометрическая интерпретация комплексного числа  $C_n$ .

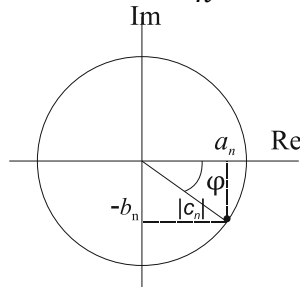


Рисунок 3.2

Угол  $\varphi_n$  отражает ориентацию комплексного вектора относительно направления действительной оси.

Совокупность значений  $|C_n|$  и  $\varphi_n$  называется спектром периодической функции. Амплитуды гармоник  $|C_n|$  характеризуют амплитудный спектр, а начальные фазы  $\varphi_n$  – фазовый спектр.

Таким образом, спектр периодического сигнала представляется в виде постоянной составляющей и бесконечного числа гармонических колебаний (синусоидальных или косинусоидальных) с соответствующими амплитудами и начальными фазами. На рисунках 3.3 и 3.4 приведены амплитудный и фазовый спектры некоторого периодического сигнала.

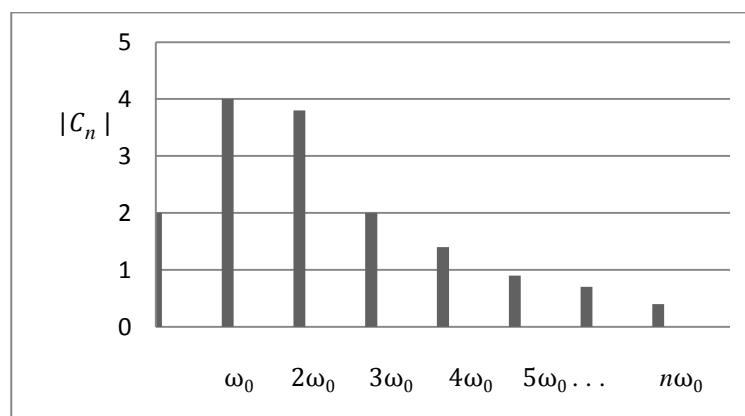


Рисунок 3.3– Амплитудный спектр сигнала

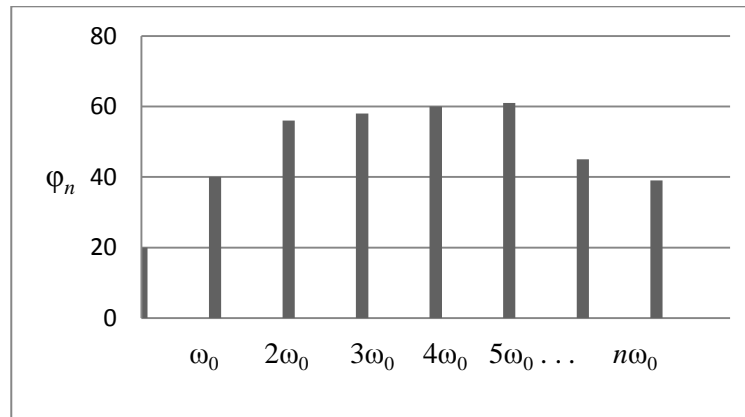


Рисунок 3.4– Фазовый спектр сигнала

Каждая гармоническая составляющая изображена вертикальными отрезками, длины которых (в некотором масштабе) равны ее амплитуде и фазе. Как видно, спектр периодического сигнала является дискретным или, как говорят, линейчатым. Частоты всех гармоник кратны основной частоте. Это означает, что если периодический сигнал следует с частотой, например, 1 кГц, то в его спектре могут быть только частоты 0кГц, 1 кГц, 2 кГц и т.д. В спектре такого периодического сигнала не могут присутствовать, например, частоты 1,5 кГц или 1,2 кГц.

### 3.2. Преобразование Фурье

Когда функция не является периодической (но площадь под графиком ее модуля конечна), она может быть выражена в виде интеграла от синусов и/или косинусов, умноженных на некоторую весовую функцию, а именно

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.5)$$

где  $\omega$  непрерывная круговая частота. Поскольку  $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ , преобразование (3.5) основано на множестве синусоидальных функций. Имеется аналогия между функцией  $X(j\omega)$  и коэффициентами ряда Фурье. Функция  $X(j\omega)$  называется частотным спектром сигнала.  $X(j\omega)$  указывает вес, который придается выражению  $e^{j\omega t}$ .

Определение 3.1. Прямое преобразование Фурье (Фурье-образ) непрерывной функции  $x(t)$  называется функция

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.6)$$

Значение функции  $X(j\omega)$  в области ее определения определяется интегралом по всем значениям функции  $x(t)$ . В свою очередь, значения функции  $x(t)$  умножаются на синусы и косинусы разных частот. Область



значений переменной  $\omega$ , на которой принимает свои значения функция  $X(j\omega)$ , называется частотной областью, поскольку значение переменной  $\omega$  определяет частоты составляющих преобразование. Значения переменной  $t$  также влияет на частоты, но так как по этой переменной производится интегрирование, это влияние одинаково для всех значений переменной  $\omega$ . Преобразование Фурье можно представить призмой, которая разлагает функцию  $x(t)$  на различные составляющие в зависимости от ее частотного содержания. Преобразование Фурье описывает функцию с помощью совокупности составляющих ее частот.

Определение 3.2. Функция  $x(t)$  может быть полностью восстановлена при помощи обратного преобразования Фурье (3.5).

Это свойство позволяет работать в Фурье-области, а затем вернуться во временную область определения функции без потери информации. Так как любая функция может быть представлена совокупностью синусоид и/или косинусоид, линейное преобразование произвольного сигнала может анализироваться в три этапа:

- представлять сигнал в виде комбинации синусоид;
- рассчитывать отклик на каждую из этих отдельных синусоид;
- комбинировать отдельные результаты.

### 3.3. Дискретная комплексная экспоненциальная последовательность

В цифровых системах сигналы определяются лишь для дискретных значений времени  $t = nT$ . В этом случае сигнал  $x(t)$  (3.1), записанный как комплексная экспоненциальная функция, преобразуем следующим образом:

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \Leftrightarrow x(nT) = e^{j\omega nT} = \cos \omega nT + j \sin \omega nT, -\infty < n < \infty. \quad (3.7)$$

Для нормированной частоты

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_d} = \omega T$$

выражение (3.7) можно представить в виде

$$x(n) = e^{j\hat{\omega} f_d nT} = e^{j\hat{\omega} \frac{1}{T} nT} = e^{j\hat{\omega} n} = \cos \hat{\omega} n + j \sin \hat{\omega} n. \quad (3.8)$$

Определение 3.3. Функция  $x(n) = e^{j\hat{\omega} n}$  называется дискретной комплексной экспоненциальной последовательностью.

Вещественная и мнимая часть последовательности (3.8) меняется синусоидально в зависимости от  $n$ . По аналогии с непрерывным временем параметр  $\hat{\omega}$  называется круговой частотой дискретной комплексной экспоненты. В формуле (3.8) частота  $\hat{\omega}$  измеряется в радианах.

### 3.4. Дискретизированное по времени преобразование Фурье

Пара преобразований Фурье для дискретизированного сигнала  $x(n)$  имеет вид

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\hat{\omega}n}, \quad (3.9)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\hat{\omega}}) e^{j\hat{\omega}n} d\hat{\omega}. \quad (3.10)$$

Для упрощения записи формул преобразования Фурье далее используется обозначение нормированной частоты  $\hat{\omega}$  как  $\omega$ . Тогда формула

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.11)$$

определяет дискретизированное по времени прямое преобразование Фурье или Фурье-образ последовательности  $x(n)$ .  $X(e^{j\omega})$  называют также спектральной функцией. Поскольку  $X(e^{j\omega})$  – непрерывная периодическая функция частоты, она может быть выражена рядом Фурье.

Формула (3.11) представляет собой разложение периодической функции  $X(e^{j\omega})$  в виде ряда Фурье, в котором коэффициентами Фурье являются значения отсчетов последовательности  $x(n)$ .

Формулу

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.12)$$

называют обратным преобразованием Фурье.

Обратное преобразование Фурье (3.12) можно трактовать как представление последовательности  $x(n)$  через непрерывную периодическую функцию частоты  $X(e^{j\omega})$ . Последовательность  $x(n)$  можно рассматривать в виде суперпозиции экспоненциальных сигналов с комплексными амплитудами  $X(e^{j\omega})$ .

Замечание. Пара преобразований Фурье существует только тогда, когда ряд (3.11) сходится.

Фурье-образ последовательности  $x(n)$  в алгебраической и показательной форме записывается как

$$X(e^{j\omega}) = \operatorname{Re}X(e^{j\omega}) + j\operatorname{Im}X(e^{j\omega}), \quad (3.13)$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg X(e^{j\omega})}. \quad (3.14)$$

Совокупность значений  $|X(e^{j\omega})|$  и  $\varphi = \arg X(e^{j\omega})$  характеризуют амплитудный спектр и фазовый спектр последовательности  $x(n)$ .

## 4. Дискретное преобразование Фурье

### 4.1. Конечные дискретные комплексные экспоненциальные функции

Как отмечалось ранее, для описания дискретных линейных стационарных систем в континуальном спектральном анализе используются дискретные комплексные экспоненциальные последовательности вида

$$x(n) = e^{j\hat{\omega}n} = \cos \hat{\omega}n + j \sin \hat{\omega}n, \quad -\infty < n < \infty. \quad (4.1)$$

Данная система функций составляет счетное бесконечное множество и определена на бесконечном интервале частоты  $\hat{\omega}$ .

Экспоненциальная последовательность может быть задана на конечном интервале времени  $[0, NT]$ , где  $N$  – целое положительное число. Тогда величина  $NT$  определяет основной период дискретной комплексной экспоненциальной последовательности. В этом случае значение

$\Delta f = \frac{1}{NT}$  – основная линейная частота последовательности. Основная круговая частота

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f = \frac{2\pi}{NT}$$

определяет период дискретизации по частоте. Абсолютное значение непрерывной частоты  $\omega = \Delta\omega k, k = 0, 1, \dots, N-1$ . Далее преобразуем сигнал  $x(n)$  (4.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} x(n) &= e^{j\hat{\omega}n} = e^{j\omega nT} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{j\Delta\omega knT} = e^{j\frac{2\pi}{NT}knT} = e^{\frac{2\pi kn}{N}} = \cos \frac{2\pi kn}{N} + j\sin \frac{2\pi kn}{N}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В дискретном преобразовании Фурье используется система комплексных дискретных экспоненциальных функции (ДЭФ), определяемых выражением

$$\text{def}(k, n) = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right) = \cos \frac{2\pi kn}{N} - j\sin \frac{2\pi kn}{N}.$$

Введем обозначение  $W = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$ . Тогда

$$\text{def}(k, n) = W^{kn}.$$

Переменная  $W^{kn}$  называется поворачивающим множителем. Переменные  $k$  и  $n$  принимают целочисленные значения  $k, n = 0, 1, \dots, N-1$ . Так как показатель степени комплексного числа  $W^{kn}$  со знаком „плюс“, то функция  $\exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right)$  описывает точку, которая движется по окружности в направлении часовой стрелки. В выражении (4.2) переменные времени и частоты изменяются дискретно, в отличие от (4.1), где время изменяется дискретно, а частота непрерывно. Заметим, что огибающая дискретных значений функции  $\text{def}(k, n)$  соответствует функции  $e^{-j\hat{\omega}n}$ . Рисунок 4.1 иллюстрирует графическое представление этой функции.

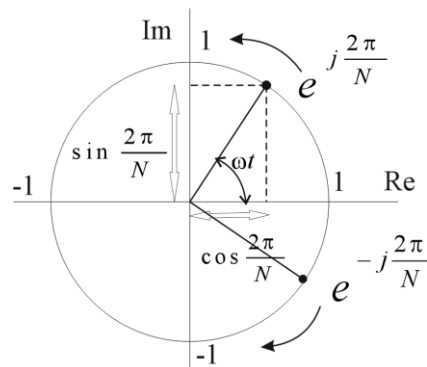


Рисунок 4.1

Если переменная  $n$  последовательно принимает значения  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , то через  $N$  шагов, комплексный вектор проходит  $2\pi$  радиан или совершает один оборот на комплексной плоскости. Вращаясь, вектор ДЭФ занимает на плоскости только  $N$  фиксированных положений. Выражение  $W^{kn}$  представляет собой единичный вектор на комплексной плоскости, угол которого линейно нарастает со временем. Модуль комплексного числа  $W^{kn}$  равен  $\left| e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \right| = 1$ , а его аргумент  $\varphi = \arctg \frac{\operatorname{Im} W^{kn}}{\operatorname{Re} W^{kn}}$ .

Пример 4.1. Пусть  $N = 8$ . Значения фазы  $\varphi$  вектора ДЭФ для  $k = 1, n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  соответственно равны  $\varphi = \{-45^\circ, -90^\circ, \dots, -315^\circ, -360^\circ\}$ . Следовательно, при увеличении  $n$  фаза ДЭФ нарастает по линейному закону.

Пример 4.2. Пусть  $N = 8, k = 2$ . Значения фазы  $\varphi$  вектора ДЭФ для  $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  соответственно равны  $\varphi = \{-90^\circ, -180^\circ, -270^\circ, -360^\circ, -450^\circ, -540^\circ, -630^\circ, -720^\circ\}$ .

Через 8 шагов комплексный вектор проходит  $4\pi$  радиан или совершает два оборота на комплексной плоскости за тоже время (пример 4.1)

$$t = NT,$$

где  $T$  – интервал дискретизации.

Скорость нарастания фазы  $\varphi$  вектора ДЭФ определяет номер  $k$ . Можно сказать, что фаза ДЭФ нарастает со скоростью  $\frac{2\pi}{N}k$  радиан. В примере 4.2 со скоростью  $\frac{2\pi}{8}2 = \frac{\pi}{2} \text{рад}$  на отсчет.

Величина полной фазы за дискретное время  $n$  определяется как

$$\varphi = \left( \frac{2\pi k}{N} \right) n,$$

где  $\left( \frac{2\pi k}{N} \right)$  – скорость изменения фазы ДЭФ или частота этой функции. Таким образом, частота ДЭФ – это число оборотов, совершаемых вектором ДЭФ на интервале ее определения  $N$ .

Пример 4.3. Вычисление значений ДЭФ.

1.  $N = 8, k = 1, n = 1$ .

Решение.  $W^{kn} = W^1 = \exp\left(-j\frac{2\pi}{8}\right) = \exp(-j45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

2.  $N = 8, k = 1, n = 0$ .

Решение.  $W^0 = 1$ .

3.  $N = 8, k = 1, n = 8$ .

Решение.  $W^8 = W^N = \exp\left(-j\frac{2\pi 8}{8}\right) = \exp(-j2\pi) = 1$ .

4.  $N = 8, k = 3, n = N$ .

Решение.  $W^{\frac{3N}{N}} = W^3 = \exp\left(-j\frac{2\pi 3 \cdot 8}{8 \cdot 8}\right) = \exp\left(-j\frac{6\pi}{8}\right) =$

$$= \exp(-j135^\circ) = \cos 135^\circ - j\sin 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

На рисунке 4.2 показаны положения вектора ДЭФ на комплексной плоскости примера 4.3.

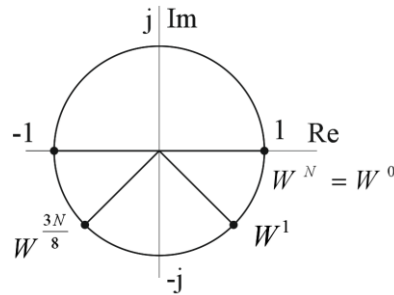


Рисунок 4.2

Систему ДЭФ записывают в виде матрицы  $V$ , строки которой нумеруются переменной  $k$ , столбцы переменной  $n$ . В пересечении  $k$ -й строки и  $n$ -го столбца записывается величина  $W^{kn}$ :

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots & N-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ N-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & W^{kn} & \dots & \dots \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (4.3)$$

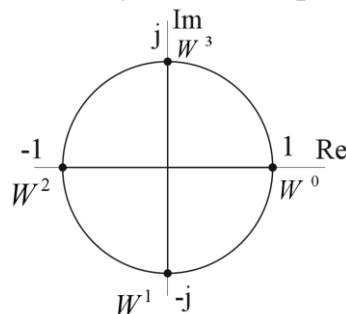
Например, для  $N = 4$  матрица  $V$  имеет следующий вид:

$$V = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Если подставить в эту матрицу числовые значения степенного ряда  $W$ , то получим

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

На рисунке 4.3 показаны положения вектора ДЭФ и ее значения на комплексной плоскости, соответствующие матрице (4.5).



### Рисунок 4.3

#### 4.2. Свойства дискретных экспоненциальных функций

1. Функции  $\text{def}(k, n)$  ортогональны, т.е.

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{kn} (W^{ln})^* = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l, \\ N, & \text{если } k = l. \end{cases} \quad (4.6)$$

Так как  $(W^{kn})^* = W^{-kn}$ , то

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{kn} W^{-ln} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l, \\ N, & \text{если } k = l. \end{cases}$$

Следствием свойства ортогональности является:

- скалярное произведение различных двух строк матрицы  $V$ , одна из которых должна быть комплексно сопряженной, равно нулю;
- скалярное произведение одинаковых двух строк матрицы  $V$ , одна из которых должна быть комплексно сопряженной, равно  $N$ .

Действительно,  $W^{kn} (W^{kn})^* = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = 1$ . Сумма  $N$  единиц даст число  $N$ .

Матричная запись свойства ортогональности имеет вид

$$VV^* = NI,$$

где  $I$  – единичная матрица.

2. Периодичность:

$$\text{если } kn = Nl + r, \text{ то } W^{kn} = W^{Nl+r} = W^{Nl} W^r = W^r. \quad (4.7)$$

Поскольку ДЭФ являются периодическими функциями, матрицу (4.3) можно переписать с минимальными фазами  $((kn))_N$ , образующимися после вычитания из значения  $kn$  целого числа периодов  $N$ , т.е.

$$kn \equiv r \pmod{N}.$$

Для  $N = 4$  матрицу ДЭФ (4.4) с минимальными фазами

$$V = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}.$$

3. Симметричность.

ДЭФ является функцией двух переменных  $k$  и  $n$ . Выводы относительно одной из переменных справедливы и для другой. Тогда

$$V = V^T.$$

4. Обратная матрица ДЭФ.

Из свойства ортогональности  $VV^* = NI$ . Умножим обе части этого равенства слева на  $V^{-1}$ :

$$\begin{aligned} V^{-1}VV^* &= V^{-1}NI = IV^* = V^{-1}NI, \\ V^{-1} &= N^{-1}V^*. \end{aligned} \quad (4.8)$$

5. Мультипликативность:

- по строкам  $\text{def}(k_1, n) \text{def}(k_2, n) = \text{def}(k_1 + k_2, n)$ ;
- по столбцам  $\text{def}(k, n_1) \text{def}(k, n_2) = \text{def}(k, n_1 + n_2)$ .

Действительно,  $e^{-j\frac{2\pi k_1 n}{N}} e^{j\frac{-2\pi k_2 n}{N}} = e^{j\frac{-2\pi(k_1+k_2)n}{N}}$ . При умножении любых двух строк (столбцов) матрицы  $V$  получается строка (столбец) той же матрицы. Номер полученной строки (столбца) равен сумме номеров сомножителей.

#### 4.3. Определение дискретного преобразования Фурье

Прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности  $x(n)$  определяется как дискретная последовательности  $X(k)$  в частотной области (экспоненциальная форма)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn}, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.9)$$

где  $k$  – индекс ДПФ в частотной области,  $n$  – временной входной последовательности отсчетов сигнала.

Дискретное преобразование Фурье устанавливает связь между временным и частотным представлениям сигнала при разложении его по конечным дискретным экспоненциальным функциям.

Обратное ДПФ (ОДПФ) имеет следующий вид:

$$x(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-kn}, n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.10)$$

Взаимная обратимость выражений (4.9) и (4.10) доказывается подстановкой  $X(k)$  в  $x(n)$ , т.е.

$$x(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(l) W^{kl} W^{-kn}. \quad (4.11)$$

Так как  $x(l)$  не зависит от  $k$ , изменяем порядок суммирования в (4.11),

$$x(n) = N^{-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{k=0}^{N-1} W^{kl} W^{-kn}. \quad (4.12)$$

В силу ортогональности ДЭФ внутренняя сумма отлична от нуля только при  $l = n$ . В этом случае, правая часть выражения (4.12) равна

$$x(n) = N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) N = N^{-1} x(n) N = x(n).$$

Тригонометрическая форма ДПФ:

- прямое ДПФ  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) (\cos \frac{2\pi kn}{N} - j \sin \frac{2\pi kn}{N})$ ;
- обратное ДПФ  $x(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) (\cos \frac{2\pi kn}{N} + j \sin \frac{2\pi kn}{N})$ .

Замечание. Принципиальное различие между дискретизированным по времени преобразованием Фурье и ДПФ обусловлено характером системы функций  $\{e^{-j\hat{\omega}n} = e^{-j\omega nT}\}$  и  $\{W^{kn}\}$ , а именно:

- огибающая дискретных значений функции  $W^{kn}$  соответствует функции  $e^{-j\hat{\omega}n} = e^{-j\omega nT}$ ;
- конечный интервал времени  $[0, NT]$  задания функции  $W^{kn}$ ;
- периодической структурой отсчетов восстанавливаемой последовательности  $x(n) = x(n + N)_N$ .

#### 4.3.1. Свойства дискретного преобразования Фурье

1. Периодичность. Свойство периодичности ДЭФ  $W^{Nl+k} = W^k$  приводит к выражениям

$$X(Nl \pm k) = X(\pm k) \text{ и } x(Nl \pm n) = x(n).$$

Действительно,  $X(Nl + k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{(Nl+k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{kn} = X(k)$ .

Обычно ограничиваются рассмотрением одного периода длиной  $N$  во временной и в частотной области. Это позволяет определить матричную форму ДПФ:

$$\text{– прямое ДПФ} \quad \mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{x}, \quad (4.13)$$

где  $\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-1)]^T$  и  $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$  – векторы отсчетов последовательности спектральных коэффициентов и сигнала соответственно;

– обратное ДПФ  $\mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}$ . Используя формулу (4.8), получаем

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{V}^*\mathbf{X}. \quad (4.14)$$

2. Линейность. Класс линейных систем определяется линейными операциями или принципом суперпозиции. Если  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$  входные последовательности, а  $X_1(k)$  и  $X_2(k)$  соответственно их ДПФ, то при подаче на вход последовательности  $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$  систему называют линейной тогда и только тогда, когда выполняется

$$X(k) = aX_1(k) + bX_2(k).$$

где  $a$  и  $b$  произвольные постоянные параметры (константы). Спектр последовательности  $x(n)$  равен

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} (ax_1(n) + bx_2(n))W^{kn} = a \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)W^{kn} + b \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)W^{kn} = \\ &= aX_1(k) + bX_2(k). \end{aligned}$$

3. Инвариантность ДПФ относительно сдвига по времени и частоте:

1. Инвариантность относительно циклического сдвига по времени. Если последовательность  $x(n)$  имеет ДПФ  $X(k)$ , то ДПФ последовательности  $x(n \pm h)$  равно

$$X_{\pm}(k) = W^{\mp kh}X(k).$$



Рассмотрим две последовательности  $x(n)$  и  $x_1(n) = x(n - h)$ ,  $h = 2$ . Формы последовательности показаны на рисунке 4.4. а, б.

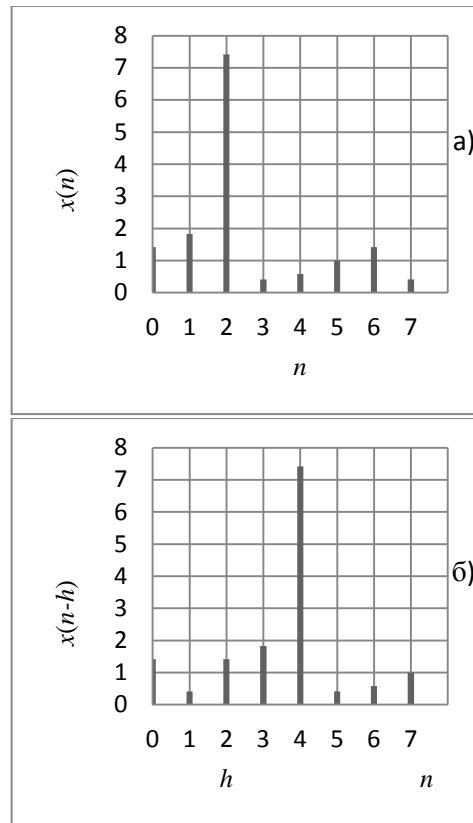


Рисунок 4.4

ДПФ последовательности  $x_1(n) = x(n - h)$  равно

$$X_{-h}(k) = \sum_{n=h}^{(N-1)+h} x(n - h)W^{kn}.$$

Заменяя индекс суммирования  $n$ , и введя новую переменную  $l = n - h$ , получим

$$X_{-h}(k) = \sum_{l=0}^{(N-1)} x(l)W^{k(l+h)} = \sum_{l=0}^{(N-1)} x(l)W^{kl}W^{hk} = W^{hk}X(k),$$

где  $W^{hk} = \exp\left(-j\frac{2\pi kh}{N}\right) = \left(\cos\frac{2\pi kh}{N} - j\sin\frac{2\pi kh}{N}\right)$ . Тогда

$$X_{-h}(k) = W^{hk}|X(k)|e^{j\arg X(k)}.$$

Таким образом, при сдвиге дискретного сигнала по времени изменениям подвергаются только фазы дискретных функций (фазовый спектр), амплитудный спектр не изменяется.

2. Инвариантность относительно сдвига по частоте. Если спектральной последовательности  $X(k)$  соответствует последовательность  $x(n)$ , то при сдвиге последовательности  $X(k \pm h)$  исходная последовательность  $x(n)$  получит фазовый сдвиг, т.е.

$$x_{\pm}(n) = W^{\pm kn}x(n).$$

Пусть  $X_1(k) = X(k - h)$ . Обратное ДПФ последовательности  $X(k - h)$  равно

$$x_{-h}(n) = N^{-1} \sum_{k=h}^{(N-1)+h} X(k-h) W^{-kn}.$$

Заменяя индекс суммирования  $k$ , и введя новую переменную  $l = k - h$ , получим

$$x_{-h}(n) = N^{-1} \sum_{l=0}^{(N-1)} X(l) W^{-n(l+h)} = N^{-1} \sum_{l=0}^{(N-1)} x(l) W^{-nl} W^{-hn} = W^{-hn} x(n),$$

где  $W^{-hn} = \exp\left(j \frac{2\pi nh}{N}\right) = \left(\cos \frac{2\pi nh}{N} + j \sin \frac{2\pi nh}{N}\right)$ .

4. Теорема о свертке. Если исходные последовательности отсчетов сигналов  $x(n)$  и  $h(n)$  имеют конечные периоды  $N$ , их циклическая свертка определяется формулой

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(n-m), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Вычислим ДПФ последовательности  $y(n)$ .

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(n-m) W^{kn}. \quad (4.15)$$

Так как  $x(m)$  не зависит от  $n$ , изменяем порядок суммирования в (4.15).

$$Y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} h(n-m) W^{kn}. \quad (4.16)$$

Используя свойство инвариантности относительно циклического сдвига по времени, можно записать составляющую выражения (4.16) как

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n-m) W^{kn} = W^{km} H(k).$$

Тогда

$$Y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W^{mk} H(k) = X(k) H(k). \quad (4.17)$$

Таким образом, спектр свертки равен произведению спектров сворачиваемых последовательностей. Коэффициенты свертки вычисляются на основе ОДПФ по формуле

$$y(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Теорема (4.17) позволяет вычислить коэффициенты свертки при помощи ДПФ по формуле

$$y(n) = \text{ДПФ}^{-1}\{\text{ДПФ}x(n) \cdot \text{ДПФ}h(n)\}.$$

При больших величинах  $N$  на практике применяют эффективные алгоритмы вычисления свертки с использованием быстрых преобразований Фурье.

5. Теорема о корреляции. По определению корреляционная функция двух конечных последовательностей  $x(n)$  и  $h(n)$  равна

$$r(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(n+m), \quad \text{для } n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Вычислим ДПФ последовательности  $r(n)$ .

$$R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} r(n) W^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(n+m) W^{kn}. \quad (4.18)$$

Так как  $x(m)$  не зависит от  $n$ , изменяем порядок суммирования в (4.18).

$$R(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} h(n+m) W^{kn}. \quad (4.19)$$

Используя свойство инвариантности относительно циклического сдвига по времени, можно записать составляющую выражения (4.19) как

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n+m) W^{kn} = W^{-km} H(k).$$

Тогда

$$R(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W^{-mk} H(k) = X(k)^* H(k). \quad (4.20)$$

Таким образом, спектр корреляционной функции равен произведению спектров сворачиваемых последовательностей, причем один из спектров берется в комплексном сопряжении.

Коэффициенты корреляционной функции вычисляются на основе ОДПФ по формуле

$$r(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} R(k) W^{-kn}, n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Теорема позволяет вычислить коэффициенты корреляционной функции при помощи ДПФ по формуле

$$r(n) = \text{ДПФ}^{-1} \{ \text{ДПФ}^* x(n) \cdot \text{ДПФ} h(n) \}.$$

На практике применяют эффективные алгоритмы вычисления корреляционной функции с использованием быстрых преобразований Фурье.

6. Теорема Парсеваля. Пусть последовательности  $x(n)$  и  $h(n)$  будут идентичными. В этом случае теорема о корреляции записывается как

$$R(k) = X(k)^* X(k) = |X(k)|^2, k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Коэффициенты корреляционной функции, вычисляются на основе выражения ОДПФ, т.е.

$$r(n) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} R(k) W^{-kn} = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 W^{-kn} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) x(n+m) \quad (4.21)$$

В частном случае, для  $n = 0$  равенство (4.21) сводится к соотношению

$$r(0) = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 W^{-k0} = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)^2, \\ N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)^2. \quad (4.22)$$

Из (4.22) следует, что энергия сигнала, вычисленная во временной области (по переменной  $n$ ) равна энергии сигнала, вычисленной в частотной области. Каждая величина  $|X(k)|^2$  представляет собой мощность дискретной гармоники, имеющей частоту с номером  $k$ .

## 5. Предварительное задание

### 5.1. Вычислить значения ДЭФ:

$W^2, W^3, W^{-1}, W^{-2}, W^{-3}$  при  $N = 8$ .

5.2. Функции системы ДЭФ записать в виде матрицы  $V$  размерностью  $8 \times 8$ .

5.3. Вычислить спектр дискретизированного сигнала, показанного на рисунке 5.1, с помощью ДПФ. Построить графики амплитудного и фазового спектров.

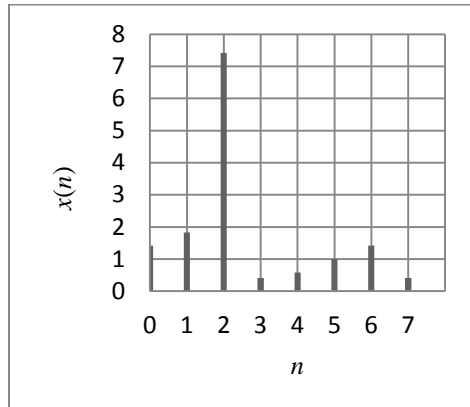


Рисунок 5.1

5.4. По полученным значениям ДПФ с помощью ОДПФ восстановить исходные значения отсчетов сигнала.

5.5. Вычислить автокорреляционную функцию (АКФ) последовательности  $x(n) = (1, -1, 1, 1, -1, 1, -1)$ . Построить графики входного сигнала и АКФ.

5.6. Вычислить автосвертку последовательности  $x(n) = (1, -1, 1, 1, -1, 1, -1)$ . Построить график свертки.

## 6. Лабораторное задание

6.1. Провести вычисления, подтверждающие свойства 1, 2, 5 дискретных экспоненциальных функций.

6.2. Вычислить спектр дискретизированного сигнала (п. 5.3), сдвинутого по времени на  $t = 3T$  интервалов дискретизации. Построить графики сигнала, амплитудного и фазового спектров.

6.3. По полученным значениям ДПФ с помощью ОДПФ восстановить значения отсчетов сигнала (п. 6.2). Построить график восстановленного дискретизированного сигнала.

6.4. Используя исходные данные, полученные у преподавателя, вычислить корреляционную функцию:

- по определению;
- с помощью ДПФ. Построить график КФ.

6.5. Используя исходные данные (п. 6.4) вычислить свертку:

- по определению;

– с помощью ДПФ. Построить график свертки.

6.6. Используя исходные данные (п. 6.4), провести вычисления, подтверждающие теорему Парсеваля.

## 7. Содержание отчета

7.1. Решение задач предварительного задания.

7.2. Расчеты и графики лабораторного задания.

7.3. Анализ результатов и выводы.

## 8. Контрольные вопросы

8.1. При каких условиях возможно представление непрерывного сигнала его дискретными значениями?

8.2. Что выражает корреляционная функция (АКФ, ВКФ)?

8.3. Поясните метод спектрального анализа.

8.4. Поясните понятие «спектр сигнала».

8.5. Поясните понятие «разложение сигнала в ряд Фурье».

8.6. При каких условиях точность приближения сигнала рядом Фурье повышается?

8.7. Поясните различия комплексной экспоненциальной функции, дискретной комплексной экспоненциальной функции и конечной дискретной комплексной экспоненциальной функции.

8.8. Поясните свойства ДЭФ.

8.9. Поясните свойства ДПФ.

8.10. Поясните различия ряда Фурье, преобразования Фурье, дискретизированного по времени преобразования Фурье и дискретного преобразования Фурье.

## Литература

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – М.: Техносфера, 2006.
2. Теория прикладного кодирования: Учеб. пособие. В 2 т. В.К. Конопелько,
3. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2008.
4. Овсянников В.А. Методы формирования и цифровой обработки сигналов. Учебное пособие для студентов специальности «Радиосвязь, радиовещание и телевидение» в 2-ух частях. – Мн.: БГУИР 2010.
5. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов.- М.: Бином-Пресс, 2006.
6. Смит С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников: Пер. с англ. – М.: Додека-XXI, 2008.
7. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов/ А.Б. Сергиенко-СПб.: Питер, 2003.

8. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. А.И. Солонина, Улахович Д.А. и др. - СПб: БХВ – Петербург, 2003.
9. Лосев В.В. Микропроцессорные устройства обработки информации. Алгоритмы цифровой обработки: Учебное пособие для вузов. – Мн: Выш. школа, 1990.