

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение Образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Лабораторная работа №1
(часть 2)
ДИСКРЕТНОЕ ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Выполнил студент гр. 381064
Данелян П.В.

Проверил
Митюхин А.И.

1. Цель работы

Изучение свойств дискретных ортогональных преобразований и их применение в цифровой обработке сигналов и изображений

2. Решение задач предварительного задания

2.1. Вычислить автокорреляционную функцию (АКФ) последовательности $x(n) = (1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1)$. Построить графики входного сигнала и АКФ.

По определению:

$$r(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n+m), \text{ для } n = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$h(n) = x(n) = (1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1);$$

$$r(0) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8;$$

$$r(1) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+1) = -1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = -4;$$

$$r(2) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+2) = 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 0;$$

$$r(3) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+3) = 1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0;$$

$$r(4) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+4) = -1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 = 0;$$

$$r(5) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+5) = -1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 = 0;$$

$$r(6) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+6) = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 = 0;$$

$$r(7) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+7) = -1 - 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 = -4;$$

С помощью ДПФ:

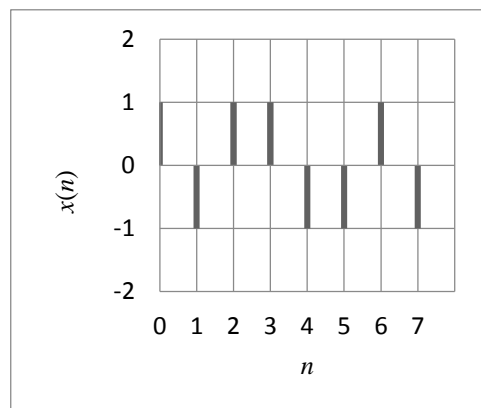
$$r(n) = \text{ДПФ}^{-1}\{\text{ДПФ}^*x(n) \cdot \text{ДПФ}h(n)\};$$

$$\text{ДПФ}^*x(n) = V^* \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,586 + j1,414 \\ -2 - j2 \\ 3,414 + j1,414 \\ 4 \\ 3,414 - j1,414 \\ -2 + j2 \\ 0,586 - j1,414 \end{bmatrix};$$

$$\text{ДПФ}h(n) = V \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,586 - j1,414 \\ -2 + j2 \\ 3,414 - j1,414 \\ 4 \\ 3,414 + j1,414 \\ -2 - j2 \\ 0,586 + j1,414 \end{bmatrix};$$

$$\{\text{ДПФ}^*x(n) \cdot \text{ДПФ}h(n)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,343 \\ 8 \\ 13,657 \\ 16 \\ 13,657 \\ 8 \\ 2,343 \end{bmatrix};$$

$$r(n) = \text{ДПФ}^{-1}\{\text{ДПФ}^*x(n) \cdot \text{ДПФ}h(n)\} = V^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2,343 \\ 8 \\ 13,657 \\ 16 \\ 13,657 \\ 8 \\ 2,343 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix};$$



Входной сигнал

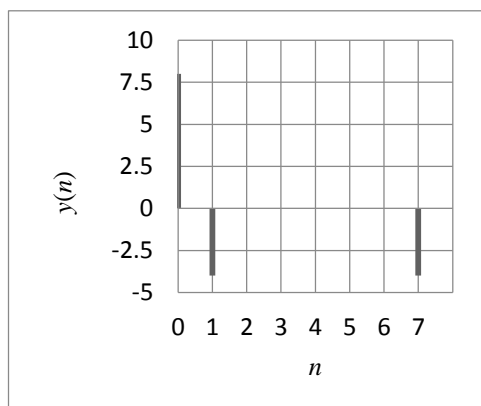


График корреляционной функции

2.2. Вычислить автосвертку последовательности $x(n) = (1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1)$.

Построить график свертки.

По определению:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m), \text{ для } n = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$h(n) = x(n) = (1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1);$$

$$y(0) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(0-m) = 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 1 = 4;$$

$$y(1) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(1-m) = -1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 0;$$

$$y(2) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(2-m) = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 = 0;$$

$$y(3) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(3-m) = 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 = 0;$$

$$y(4) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(4-m) = -1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 0;$$

$$y(5) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(5-m) = -1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0;$$

$$y(6) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(6-m) = 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 4;$$

$$y(7) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(7-m) = -1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -8;$$

С помощью ДПФ:

$$y(n) = \text{ДПФ}^{-1}\{\text{ДПФ}x(n) \cdot \text{ДПФ}h(n)\};$$

$$\{\text{ДПФ}x(n) \cdot \text{ДПФ}h(n)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,656 - j 1,657 \\ -j8 \\ 9,656 - j9,655 \\ 16 \\ 9,656 + j9,655 \\ j8 \\ -1,656 + j 1,657 \end{bmatrix};$$

$$y(n) = \frac{1}{8} \cdot V^* \{\text{ДПФ}x(n) \cdot \text{ДПФ}h(n)\} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix};$$

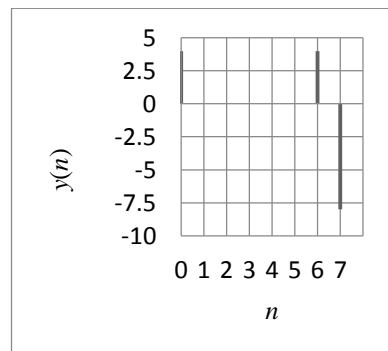


График свертки

3. Расчеты и графики лабораторного задания.

3.1. Используя исходные данные, полученные у преподавателя, вычислить корреляционную функцию:

– по определению;

– с помощью ДПФ.

Построить график КФ.

Входные данные:

$$x(n) = \{-2, 4, 6, 6, 6, -5, 1, 2\};$$

$$h(n) = \{6, 4, 4, 3, 3, 2, 1, 2\};$$

Решение: -34 48

По определению:

$$r(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n+m), \text{ для } n = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$r(0) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m) = 59;$$

$$r(1) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+1) = 65;$$

$$r(2) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+2) = 44;$$

$$r(3) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+3) = 18;$$

$$r(4) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+4) = 46;$$

$$r(5) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+5) = 61;$$

$$r(6) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+6) = 82;$$

$$r(7) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+7) = 75;$$

С помощью ДПФ:

$$r(n) = \text{ДПФ}^{-1}\{\text{ДПФ}^*x(n) \cdot \text{ДПФ}h(n)\};$$

$$\text{ДПФ}^*x(n) = V^* \times \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -4 + j14,192 \\ -3 - j9 \\ -11 + j4,192 \\ 4 \\ -11 - j4,192 \\ -3 + j9 \\ -4 - j14,192 \end{bmatrix};$$

$$\text{ДПФ}h(n) = V \times \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 3 - j5,121 \\ 4 - j \\ 2 + j0,878 \\ 3 \\ 2 - j0,878 \\ 4 + j \\ 3 + j5,121 \end{bmatrix};$$

$$\{\text{ДПФ}^*x(n) \cdot \text{ДПФ}h(n)\} = \begin{bmatrix} 450 \\ 56.133 + j75.4766 \\ -21 - j33 \\ -30.133 - j0.523 \\ 12 \\ -30.133 + j0.523 \\ -21 + j33 \\ 56.133 - j75.4766 \end{bmatrix};$$

$$r(n) = \frac{1}{8} \cdot V^*\{\text{ДПФ}^*x(n) \cdot \text{ДПФ}h(n)\}; = \begin{bmatrix} 59 \\ 65 \\ 44 \\ 18 \\ 46 \\ 61 \\ 82 \\ 75 \end{bmatrix};$$

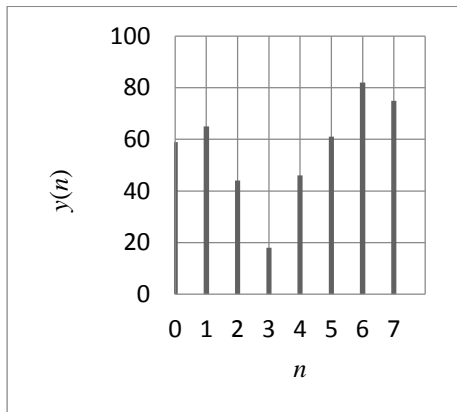


График корреляционной функции

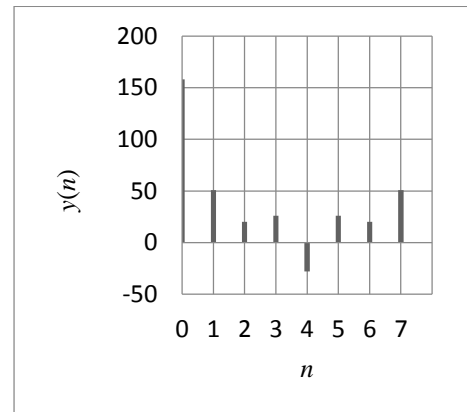


График автокорреляционной функции

3.2. Используя исходные данные (п. 3.1) вычислить свертку:

– по определению;

– с помощью ДПФ. Построить график свертки.

По определению:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m), \text{ для } n = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$y(0) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(0-m) = 29;$$

$$y(1) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(1-m) = 42;$$

$$y(2) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(2-m) = 61;$$

$$y(3) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(3-m) = 85;$$

$$y(4) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(4-m) = 85;$$

$$y(5) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(5-m) = 48;$$

$$y(6) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(6-m) = 56;$$

$$y(7) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(7-m) = 44;$$

С помощью ДПФ:

$$y(n) = \text{ДПФ}^{-1}\{\text{ДПФ}x(n) \cdot \text{ДПФ}h(n)\};$$

$$\text{ДПФ}x(n) = V^* \times \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -4 - j14.192 \\ -3 + j9 \\ -11 - j4.192 \\ 4 \\ -11 + j4.192 \\ -3 - j9 \\ -4 + j14.192 \end{bmatrix};$$

$$\text{ДПФ}h(n) = V \times \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 3 - j5.121 \\ 4 - j \\ 2 + j0.878 \\ 3 \\ 2 - j0.878 \\ 4 + j \\ 3 + j5.121 \end{bmatrix};$$

$$\{\text{ДПФ}x(n) \cdot \text{ДПФ}h(n)\} = \begin{bmatrix} 450 \\ -89.234 - j29.748 \\ -3 + j39 \\ -22.765 - j19.748 \\ 12 \\ -22.765 + j19.748 \\ -3 - j39 \\ -89.234 + j29.748 \end{bmatrix};$$

$$y(n) = \frac{1}{8} \cdot V^* \{ \text{ДПФ} x(n) \cdot \text{ДПФ} h(n) \} = \begin{bmatrix} 29 \\ 42 \\ 61 \\ 85 \\ 85 \\ 48 \\ 56 \\ 44 \end{bmatrix};$$

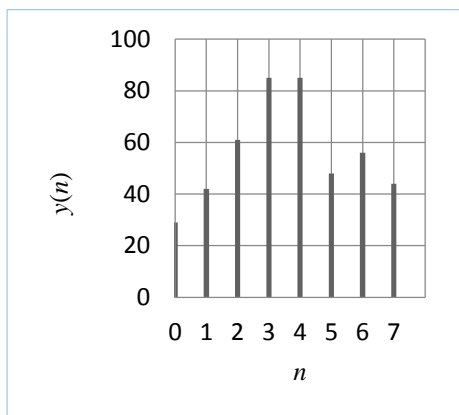


График свертки

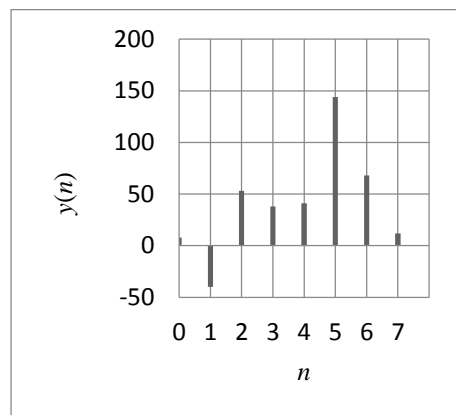


График автосвертки

3.1. Используя исходные данные, провести вычисления, подтверждающие теорему Парсеваля.

$$R(k) = X(k) * Y(k), k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

$$R = V \times r$$

$$R = V \cdot \begin{bmatrix} 59 \\ 65 \\ 44 \\ 18 \\ 46 \\ 61 \\ 82 \\ 75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \\ 56.133 + j75.4766 \\ -21 - j33 \\ -30.133 - j0.523 \\ 12 \\ -30.133 + j0.523 \\ -21 + j33 \\ 56.133 - j75.4766 \end{bmatrix};$$

$$X = \begin{bmatrix} 18 \\ -4 + j14,192 \\ -3 - j9 \\ -11 + j4,192 \\ 4 \\ -11 - j4,192 \\ -3 + j9 \\ -4 - j14,192 \end{bmatrix};$$

$$Y = \begin{bmatrix} 25 \\ 3 - j5.121 \\ 4 - j \\ 2 + j0,878 \\ 3 \\ 2 - j0,878 \\ 4 + j \\ 3 + j5.121 \end{bmatrix};$$

$$R(0) = 18 \cdot 25 = 450;$$

$$R(1) = (-4) \cdot 3 + 14,192 \cdot (-5.121) = 56.133;$$

$$R(2) = (-3) \cdot 4 + (-9) \cdot 1 = -21;$$

$$R(3) = (-11) \cdot 2 + 4,192 \cdot 0,878 = -30.133;$$

$$R(4) = 4 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 12;$$

$$R(5) = (-11) \cdot 2 + (-4,192) \cdot (-0,878) = -30.133;$$

$$R(6) = (-3) \cdot 4 + 9 \cdot 1 = -21;$$

$$R(7) = (-4) \cdot 3 + (-14,192) \cdot 5.121 = 56.133;$$

При $x(n)$ равном $h(n)$:

$$R(k) = X(k)^* X(k) = |X(k)|^2, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

$$R = V \cdot \begin{bmatrix} 158 \\ 51 \\ 20 \\ 26 \\ -28 \\ 26 \\ 20 \\ 51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1296 \\ 6.828 \\ 0 \\ 1,172 \\ 0 \\ 1,172 \\ 0 \\ 6,828 \end{bmatrix};$$

$$R(0) = |18|^2 = 18^2 + 0^2 = 324;$$

$$R(1) = |-4 + j14,192|^2 = 103.876;$$

$$R(2) = |-3 - j9|^2 = 144;$$

$$R(3) = |-11 + j4,192|^2 = 46.348;$$

$$R(4) = |4|^2 = 16;$$

$$R(5) = |-11 - j4,192|^2 = 230.796;$$

$$R(6) = |-3 + j9|^2 = 36;$$

$$R(7) = |-4 - j14,192|^2 = 330.948;$$