Теория поля – раздел физики, механики, математики в которой изучаются скалярные, векторные, тензорные поля. (электрические, магнитные, тепловые, ...)

Математическая теория поля – векторный анализ

Понятия: градиент, поток, дивергенция, циркуляция, ротор, потенциал

Полем наз. область T трехмерного пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины. Если эта величина скалярная (число) $U=U(M)$ говорят, что в области T задано (определено) скалярное поле. Если каждой точке M пространства T ~~задана~~ соответствует некоторый вектор $\vec{a}=\vec{a}(M)$, то говорят, что задано векторное поле

Если ф-ции $U(M)$ и $\vec{a}(M)$ не зависят от времени, то поле наз. стационарным, в противном случае – нестационарным

Плоские поля, если $M(x,y)$

Скалярное поле. Поверхности и линии уровня

②

$U(x,y,z)=const$ $\quad U(x,y)=const$ $\quad U(x,y,z)$ – потенциал

эквипотенциальные поверхности. изобары, изохоры, изотермы

Производная по направлению $\frac{\partial U}{\partial e}=\lim\frac{U(N)-U(M)}{\rho}=$, $\rho=пр_e MN$

$$=\lim_{N\to M}\frac{U(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-U(x,y,z)}{\rho}=\lim_{N\to M}\frac{\Delta U}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\Delta y}{\rho}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\Delta z}{\rho}+\delta_1\rho\right);\quad \boxed{\frac{\partial U}{\partial e}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma};\quad \vec{e}^{\,0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$\frac{\partial U}{\partial e}=\vec{N}\cdot\vec{e}^{\,0}$ $\quad \vec{N}=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ – нормаль к поверхности уровня

скорость изменения поля.

частные производные – производные ф-ции в направлении координатных осей

Если направление задается некоторой кривой e то в качестве напр. косинусов берут напр. косинусы касательной в точке дифференцирования

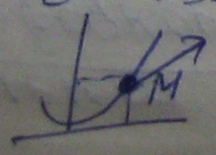
Пр.1 Найти пр. ф-ции $U=x^2+y^2-4yz$ в (.) $M(0,1,2)$ в напр. $N(2,3,3)$

$\vec{e}=\vec{MN}=(2;2;1)$ $\quad \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}$; $\cos\delta=\frac{1}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{1}{3}$

$\frac{\partial U}{\partial x}=2x\big|_M=2\cdot 0=0$; $\frac{\partial U}{\partial y}=2y-4z\big|_M=2-4\cdot 2=-6$; $\frac{\partial U}{\partial z}\big|_M=-4y\big|_M=4$

$\frac{\partial U}{\partial e}=0\cdot\frac{2}{3}-6\cdot\frac{2}{3}-4\cdot\frac{1}{3}=-\frac{16}{3}$

Пр.2 $U=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad y=x^2$ $\quad M(1,1)$ $\quad N(2,4)$



$y'=2x\big|_{x=1}=2=k$ $\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}\to$

$y-1=2(x-1)$ $\quad \vec{e}(1,2)$

$\frac{\partial U}{\partial e}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_M\cdot\frac{1}{\sqrt5}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big|_M\cdot\frac{2}{\sqrt5}=$

$=-\frac{1}{\sqrt2}\frac{1}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{2}{\sqrt5}$

$=-\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot 3$

③ <u>Градиент скалярного поля</u>. Его свойства. Связь градиента с производной по направлению. Оператор Гамильтона

$\exists$ $U=U(x,y,z)$ и в Т $\exists$ частные производные U'_x; U'_y; U'_z пов. уровня $U(x,y,z)=C$ не имеют особых точек, т.е. тех точек, где $U'_x=U'_y=U'_z=0$. Тогда пов. уровня $U(x,y,z)=C$ в каждой точке имеет касательную плоскость, а следовательно и нормаль к пов-ти, которая имеет координаты $\frac{\partial U}{\partial x}$; $\frac{\partial U}{\partial y}$; $\frac{\partial U}{\partial z}$, т.е. $\vec{N}=\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}}$$ градиент скалярного поля $\perp$ пов. уровня в каждой точке

$$\frac{\partial U}{\partial e}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial e}=\overrightarrow{grad}\,U\cdot\vec{e}^{\,0}$$ или

$$\frac{\partial U}{\partial e}=\text{пр}_{\vec{e}^{\,0}}\,\overrightarrow{grad}\,U \to max,$$ если $\vec{e}^{\,0}$ совп. с $\overrightarrow{grad}\,U$. Т.о. в направлении градиента скалярное поле имеет наибольшую скорость изменения. Вычислим эту наиб. скорость

$$\vec{e}^{\,0}=\frac{\overrightarrow{grad}\,U}{|\overrightarrow{grad}\,U|};\quad \text{пр}_{\vec{e}}\,\overrightarrow{grad}\,U=\overrightarrow{grad}\,U\cdot e^{0};\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial e}\right)_{наиб}=(\overrightarrow{grad}\,U)\cdot\vec{e}^{\,0}=\overrightarrow{grad}\,U\cdot\frac{\overrightarrow{grad}\,U}{|\overrightarrow{grad}\,U|}=\frac{|\overrightarrow{grad}\,U|^2}{|\overrightarrow{grad}\,U|}=|\overrightarrow{grad}\,U|$$

Пр. Дано поле температур $T(x,y,z) = \lambda(x^2+y^2+z^2)$. Найти наибольшую скорость изменения поля $T(x,y,z)$ в точке

(4) $M_0(1;1;3)$.

Найдем градиент: $\frac{\partial T}{\partial x} = 2\lambda x$; $\frac{\partial T}{\partial y} = 2\lambda y$; $\frac{\partial T}{\partial z} = 2\lambda z$

$\overrightarrow{grad}\, T = 2\lambda x\vec{i} + 2\lambda y\vec{j} + 2\lambda z\vec{k}$

$|\overrightarrow{grad}\, T| = \sqrt{(2\lambda x)^2+(2\lambda y)^2+(2\lambda z)^2} = 2|\lambda|\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\Big|_{M_0} = 2\lambda\sqrt{1^2+1^2+3^2} = 2\lambda\sqrt{11}$

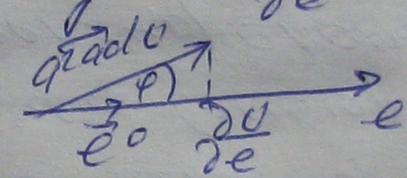
Свойства градиента скалярного поля

1) $\overrightarrow{grad}(U+V) = \overrightarrow{grad}(U) + \overrightarrow{grad}(V)$; 2) $\overrightarrow{grad}(cU) = c\,\overrightarrow{grad}\,U$

3) $\overrightarrow{grad}(U\cdot V) = U\overrightarrow{grad}\,V + V\overrightarrow{grad}\,U$; 4) $\overrightarrow{grad}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V\,\overrightarrow{grad}\,U - U\,\overrightarrow{grad}\,V}{V^2}$

5) Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку. Действительно, по $\forall$ направлению вдоль поверхности уровня $(U=c)$ $\frac{\partial U}{\partial e} = 0$, но тогда из формулы $\frac{\partial U}{\partial e} = \overrightarrow{grad}\,U\cdot\vec{e}^{\,0}$

$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial e} = |\overrightarrow{grad}\,U|\cdot|\vec{e}^{\,0}|\cos\varphi = |\overrightarrow{grad}\,U|\cdot\cos\varphi$



$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0$

6) $\overrightarrow{grad}\, f(U) = \frac{\partial f}{\partial U}\cdot\overrightarrow{grad}\,U$; Д-во: $\overrightarrow{grad}\, f(U) = \frac{\partial}{\partial x}(f(U))\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f(U))\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f(U))\vec{k} = \frac{\partial f}{\partial U}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial U}\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial U}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial f}{\partial U}\cdot\overrightarrow{grad}\,U$

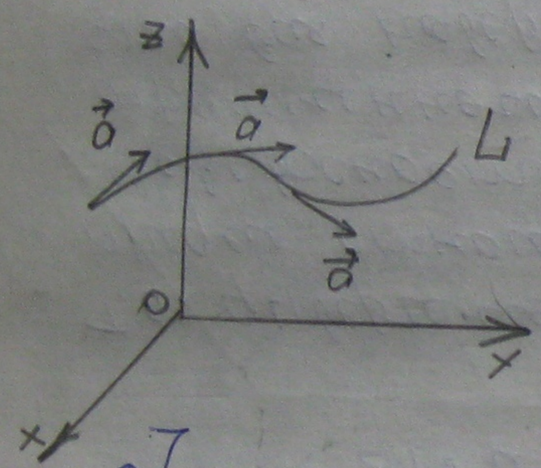
Для компактной записи градиента исп. оператор Гамильтона „набла" $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$\overrightarrow{grad}\, U(x,y,z) = \nabla U(x,y,z)$

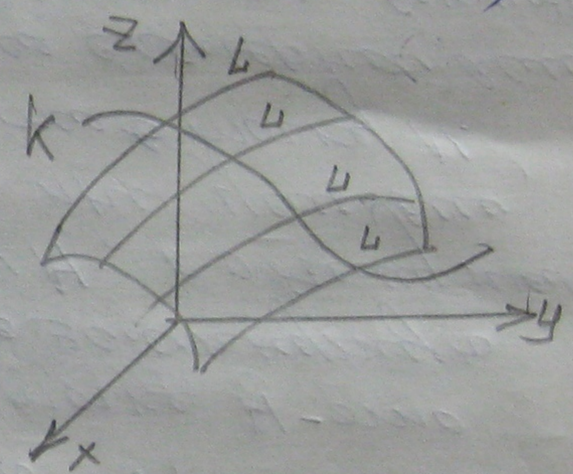
⑤ Векторное поле. Векторные линии и векторные поверхности

Если в каждой точке пространственной области T задан некоторый вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, то векторное поле имеет место быть.

Задание одного векторного поля равносильно заданию трех скалярных полей $a_x(x,y,z,t)$; $a_y(x,y,z,t)$ и $a_z(x,y,z,t)$, где (x,y,z) точка $\in T$, а t - время, если a_x, a_y, a_z незав. от t, то векторное поле наз. стационарное



L - векторная линия - вектор поля $\vec{a}$, соотнесенный каждой точке этой кривой, касается этой кривой в указанной точке

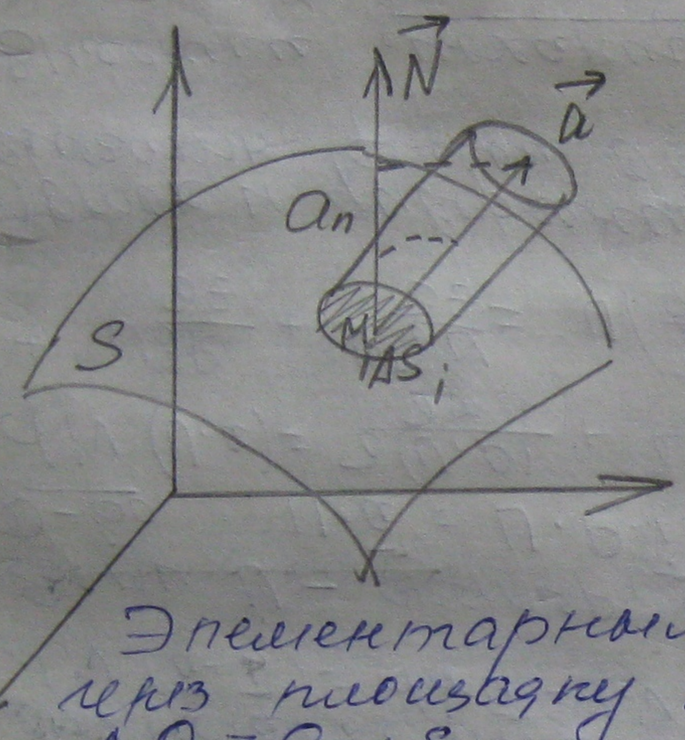


Через каждую точку некоторой кривой K проходит векторная линия L. Совокупность векторных линий обр. векторную поверхность. В случае K - замкнутой — векторная трубка.

Векторная линия L задана пересечением двух поверхностей $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$. Вектор $\vec{\tau}$, лежащий на касательной к кривой L и имеет координаты dx, dy, dz т.о.

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}$$ - система ур-ний векторных линий

⑥ Поток векторного поля через поверхность



Пусть в поле вектора $\vec{a}=(P,Q,R)$ дан двусторонняя поверхность S. Выберем на ней определенную сторону и на стороне элементарную площадку ΔS_i. Возьмем точку M_i. В этой точке найдем нормаль N к элементарной площадке и будем считать вектор $\vec{a}$ постоянным в пределах этой площадки. Обозначим a_n проекцию $\vec{a}$ на направление нормали $\vec{N}$

О. Элементарным потоком векторного поля $\vec{a}$ через площадку ΔS_i в выбранную сторону назовем

$$\Delta Q_i = a_n \Delta S_i$$

Разбивая S на малые ΔS_i и суммируя элементарные потоки ΔQ_i при стремлении ранга дробления к нулю получаем

$$Q = \iint_S a_n \, dS$$

поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность S в выбранную сторону

$a_n = \vec{a}\cdot\vec{n} \Rightarrow Q = \iint \vec{a}\cdot\vec{n}\, dS$, где $\vec{n} = \vec{N}^0$, т.к. $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$\vec{a} = (P, Q, R)$, где $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z) \Rightarrow$

$$Q = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy$$

(7) Поток - скалярная величина. Мех. смысл - к-во жидкости протек. через поверхность в выбранную сторону за 1 время.

$Q>0$ вытекает больше, чем втекает - источники

$Q<0$ втекает больше, т.е. имеются стоки, помощ. жидкость

$Q=0$ равно вытекает и втекает

Дивергенция - скалярная величина, хар. распределение и интенсивность источников и стоков (расходимость)

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}} \qquad \operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a}$$

Свойства дивергенции

1. Если $\vec{a}$ - пост. вектор, то $\operatorname{div}\vec{a} = 0$
2. $\operatorname{div}(c\cdot\vec{a}) = c\cdot\operatorname{div}\vec{a}$
3. $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b}$
4. Если U - скаляр, $\vec{a}$ - вектор, то $\operatorname{div}(U\cdot\vec{a}) = U\cdot\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\,\vec{\nabla}U$

Д-во: $U\cdot\vec{a} = U\cdot P\cdot\vec{i} + U\cdot Q\cdot\vec{j} + UR\cdot\vec{k}$

$$\operatorname{div}(U\cdot a) = \frac{\partial(U\cdot P)}{\partial x} + \frac{\partial(U\cdot Q)}{\partial y} + \frac{\partial(U\cdot R)}{\partial z} = U\frac{\partial P}{\partial x} + P\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial Q}{\partial y} + Q\frac{\partial U}{\partial y} +$$

$$+ U\frac{\partial R}{\partial z} + R\frac{\partial U}{\partial z} = U\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + (P, Q, R)\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Поток и дивергенцию векторного поля можно связать ф-лой Остроградского - Гаусса

$$\boxed{\oiint_S a_n\,ds = \iiint_T \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz} \quad (*)$$

Внесем механический смысл дивергенции

по т. о среднем для тройного интеграла имеем:

⑧ $\iiint\limits_T \operatorname{div}\vec{a}(M)\,dV = V\cdot\operatorname{div}\vec{a}(M_c)$, где M_c – некоторая (средняя) точка области V

тогда формулу ⊛ можно записать так:

$$\oiint\limits_S a_n\,ds = V\cdot\operatorname{div}\vec{a}(M_c) \Rightarrow \operatorname{div}\vec{a}(M_c) = \frac{Q}{V}$$

"сжимая" тело в точку, в пределе получим:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{\substack{V\to 0\\ L\to 0}} \frac{1}{V}\oiint\limits_S a_n\,ds = \lim_{L\to 0}\frac{Q_T}{V_T}$$

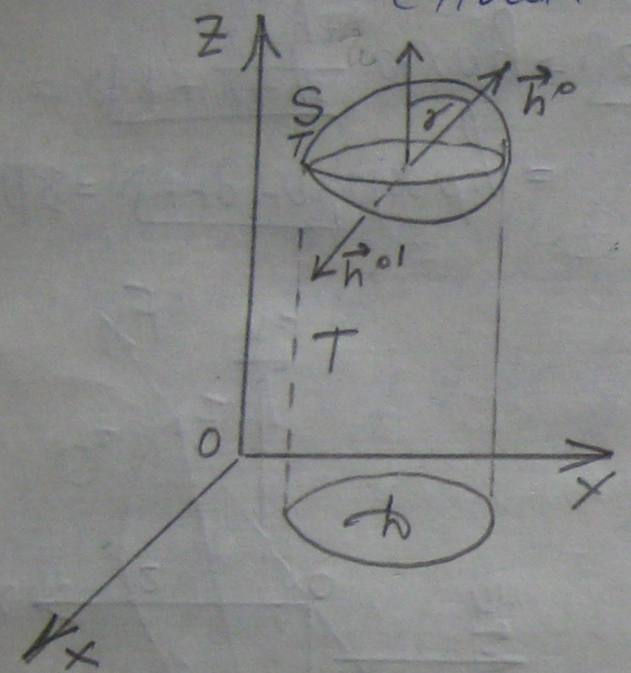
Т.о. дивергенция векторного поля $\vec{a}$ в точке M – это предел отношения потока поля через замкнутую поверхность S, окружающую точку M, к объему тела, ограниченного данной поверхностью при условии, что вся поверхность (объем) стягивается в точку M.

Див. векторного поля в точке является скалярной величиной. Она образует скалярное поле в данном векторном поле. Если это векторное поле считать полем скоростей, то при $\operatorname{div}\vec{a}(M)>0$ – M – источник; при $\operatorname{div}\vec{a}(M)<0$ – M – сток. Т.е. дивергенция хар. мощность (расход в ед. времени) источника или стока

9 **Пример**

общие рекомендации

Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ из тела T, ограниченного поверхностью S, с пом. пов. инт. I и II рода. Результат проверить с пом. т. Остроградского–Гаусса.



Поток – пов. инт. I рода

$$Q = \iint\limits_{S_T} a_n \, dS \qquad S_T: F(x,y,z) = 0$$

a_n – проекция вектора $\vec{a}$ на нормаль

$$\vec{n} = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

Если пов. S_T задана явным уравнением

$z = f(x,y)$, то $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = p(x,y)$

получим $\boxed{\vec{n} = -p(x,y)\vec{i} - q(x,y)\vec{j} + \vec{k}}$ $\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = q(x,y)$

Можно рассматривать два единичных вектора, соотв. данной нормали $\vec{n}$, которые имеют противоположные направления

$$\vec{n}^0 = \frac{-p(x,y)\vec{i} - q(x,y)\vec{j} + k}{\sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}}; \quad \vec{n}^{0\prime} = -\vec{n}^0$$

острый угол с Oz $\qquad$ тупой угол с Oz

(10) Обозначим α, β, γ – углы, которые нормаль к поверхности образует с координатными осями. Тогда:

Для верхней стороны поверхности:

$$\cos\alpha = \frac{-p(x,y)}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}}; \quad \cos\beta = \frac{-q(x,y)}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}}$$

Для нижней стороны поверхности

$$\cos\alpha = \frac{p(x,y)}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}}; \quad \cos\beta = \frac{q(x,y)}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}}; \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}}$$

Если выполнены условия существования поверхностного интеграла I рода, то остается выразить его через двойной интеграл по области D, явл. проекцией тела T на xOy, т.е.

$$\iint_S a_n\,ds = \iint_S \Phi(x,y,z)\,ds = \iint_D \Phi[x,y,f(x,y)]\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}\,dx\,dy$$

причем, для верхней стороны поверхности

$$a_n = \vec{a}\cdot\vec{n}^\circ = a_x\left(\frac{-p(x,y)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + a_y\left(\frac{-q(x,y)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + a_z\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$$

для нижней

$$= a_x\left(\frac{p(x,y)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + a_y\left(\frac{q(x,y)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + a_z\left(\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$$

(11) Используя формулы, связывающие пов. инт. I и II рода, получим:

$$\iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,dS = \iint a_x\,dy\,dz + a_y\,dz\,dx + a_z\,dx\,dy$$

α, β, γ – углы нормали к поверхности, по которой идет интегрирование в пов. инт. II рода

Если выполнены условия существования пов. инт. II, то он выражается через двойной

$$\iint_S \Phi(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_D \Phi[x,y,f(x,y)]\,dx\,dy \text{ – верхняя сторона}$$

остальные аналогично

$$= -\iint_D \Phi[x,y,f(x,y)]\,dx\,dy \text{ – нижняя сторона}$$

Используя т. Остр.-Гаусса, запишем: $a_x = P(x,y,z)$, $a_y = Q(x,y,z)$, $a_z = R(x,y,z)$ $\Rightarrow$

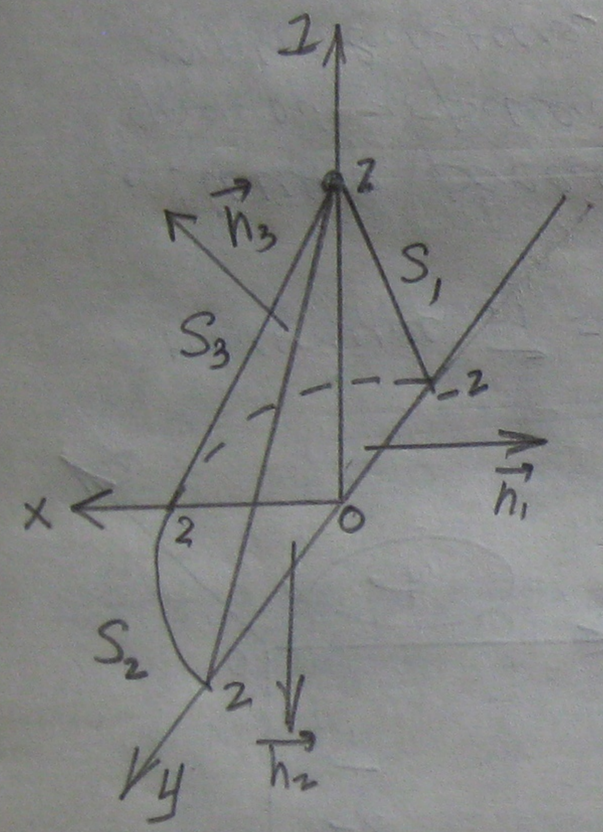
$$Q = \iiint_T \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dx\,dz + R(x,y,z)\,dx\,dy$$

Пример вычислить поток 3-мя способами

(12) $\vec{a} = \vec{i} + 3z\vec{k}$

$\Pi: \; z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}, \; x = 0, \; z = 0, \; x \geq 0$



Решение: Данное тело ограничено тремя поверхностями

$S_1: \; x = 0$, пл. yOz, $\vec{n}_1 = -i$ – единичный вектор внешней нормали к пов-ти S_1

для этой пов-ти $a_n = -1$

$(a_x \cdot \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cdot \cos\gamma = 1(-1) + 0 + 0)$

$S_2: \; z = 0$, пл. xOy, $\vec{n}_2 = -k$ – единичный вектор внешней нормали к пов. S_2

$a_n = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3z(-1) = -3z$

S_3: часть конуса $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = p(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = q(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$ds = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy$;

$\cos\alpha = \frac{-x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}$; $\cos\beta = \frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}$; $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$a_n = -\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{3z}{\sqrt{2}}$

(13) поток вектора $\vec{a}$ из тела T равен сумме 3-х потоков

$$\Pi = \Pi_{S_1} + \Pi_{S_2} + \Pi_{S_3} \quad ; \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

вычислим Q с пом. пов. инт. I

$$Q_1 = \iint\limits_{S_1} a_{n_1} ds = \iint\limits_{S_1} (-1)\,dy\,dz = -\int_0^2 dz \int_{z-2}^{2-z} dy = -4 \quad (\text{или } S_{\Delta\text{-ка}})$$

$$Q_2 = \iint\limits_{S_2} a_{n_2} ds = -\iint\limits_{S_2} 3z\,dx\,dy = 0 \quad , \text{т.к. для } S_2 \ z=0$$

$$Q_3 = \iint\limits_{S_3} a_{n_3} ds = \iint\limits_{S_3} (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\,ds = \iint\limits_{S_3} \left[\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{3z}{\sqrt{2}}\right] ds =$$

$$= \iint\limits_{D} \left[\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{3(2-\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{2}}\right]\sqrt{2}\,dx\,dy = \iint\limits_{D} \frac{x+6\sqrt{x^2+y^2}-3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

$$Q_3 = \iint\limits_{D} \frac{\rho\cos\varphi + 6\rho - 3\rho^2}{\rho}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 (\rho\cos\varphi + 6\rho - 3\rho^2)\,d\rho =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[(\cos\varphi + 6)\frac{\rho^2}{2} - \rho^3\right]_0^2 = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + 2)\,d\varphi = \left[2\sin\varphi + 4\varphi\right]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4 + 4\pi$$

$$Q = Q + Q_2 + Q_3 = -4 + 0 + 4 + 4\pi = \boxed{4\pi}$$

(14) Вычислим с пом. пов-инт-ла II рода

$$Q = \iint\limits_S a_x(x,y,z)\,dydz + a_y(x,y,z)\,dzdx + a_z(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_S P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q_1 = \iint 1\,dydz + 0\,dzdx + 3z\,dxdy = -\iint\limits_{S_1} dydz = -4$$

S_1 – нижняя сторона, на S_1: $x=0$ $dx=0$

$$Q_2 = \iint 1\,dydz + 0\,dzdx + 3z\,dxdy = 0$$

S_2 – нижняя сторона, на S_2: $z=0$ $dz=0$

$$Q_3 = \iint 1\cdot dydz + 0\,dzdx + 3z\,dxdy = \iint\limits_{D_1} dydz + 3\iint\limits_{D_2}\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

S_3 – верхняя сторона, на S_3: $z = 2-\sqrt{x^2+y^2}$

$$= 4 + 3\iint\limits_{D_2}(2-\rho)\rho\,d\rho\,d\varphi = 4 + 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 (2\rho-\rho^2)\,d\rho = 4+4\pi$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -4+4+4\pi = 4\pi$$

по ф. Остр.-Гаусса

$$Q = \iiint\limits_T \left[\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right]dxdydz = \iiint\limits_T\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz =$$

$$= 3\iiint\limits_T dxdydz = 3\cdot\frac{1}{3}S_{осн}\frac{H}{2} = \frac{\pi R^2\cdot H}{2} = \frac{\pi\cdot 2^2\cdot 2}{2} = \boxed{4\pi}$$