Криволинейные интегралы

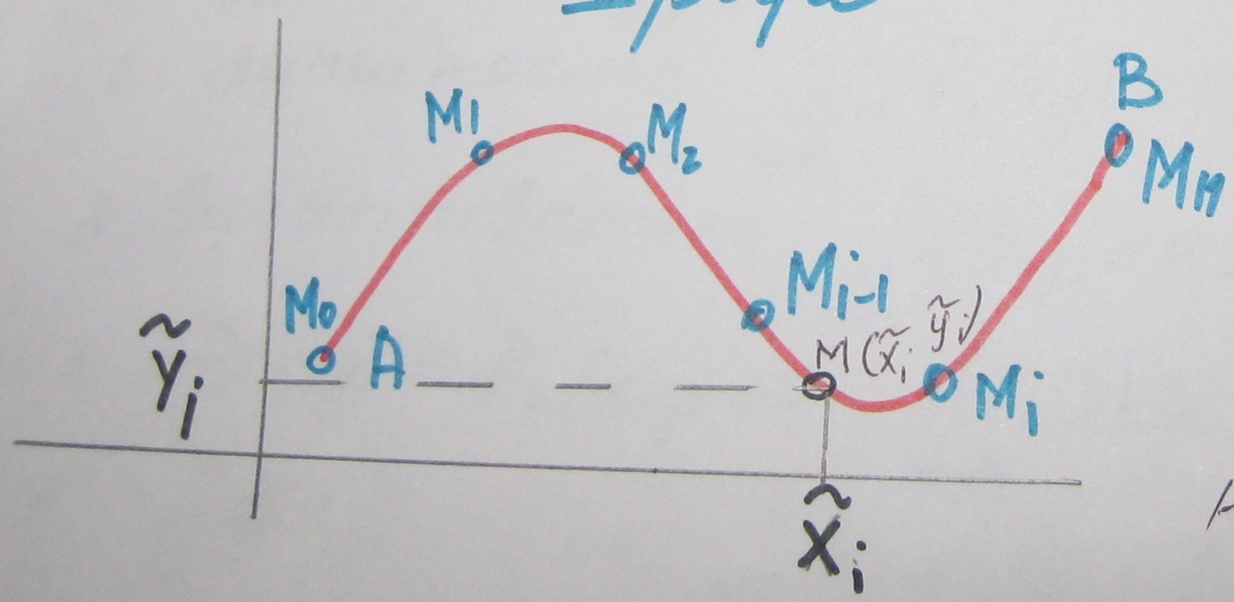
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl$$

$$\iint_D f(x,y)\,\underbrace{dx\,dy}_{ds}$$

$$\iiint_T f(x,y,z)\,\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dv}$$

Криволинейный интеграл I рода



Разобьем AB, $\lambda = \max \Delta l_i$

Выберем точку $M(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$

Вычислим $f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$

Составим $\sigma_n \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\Delta l$

Найдем $\lim \sigma_n = \int_{AB} f(x,y)\,dl$

<u>Теорема</u> Если $f(x,y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой (т.е. в каждой точке $(x;y)$ $\exists$ касательная к данной кривой и положение ее непрерывно меняется при перемещении точки по кривой), то криволинейный интеграл I рода $\exists$ и его величина не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек в них.

Аналогично вводится понятие кр. инт. I рода по пространственной кривой L от ф-ции $f(x,y,z)$

<u>Свойства</u> криволинейного интеграла <u>I рода</u>

1. $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl$ К.И. I рода не зав. от направления
2. линейность $\int\limits_{AB} (c_1 f_1(x,y) \pm c_2 f_2(x,y))\,dl = c_1 \int\limits_{AB} f_1(x,y)\,dl \pm c_2 \int\limits_{AB} f_2(x,y)\,dl$
3. Аддитивность $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{AC} f(x,y)\,dl + \int\limits_{CB} f(x,y)\,dl$
4. $f_1(x,y) \le f_2(x,y) \Rightarrow \int\limits_{AB} f_1(x)\,dl \le \int\limits_{AB} f_2(x)\,dl$
5. $\int\limits_{AB} dl = l$; 6) $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = f(x_0,y_0)\cdot l$ т. о среднем

Вычисление криволинейного интеграла I рода

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$ $A: t = \alpha$; $B: t = \beta$

непр. диф. на $[\alpha, \beta]$

то $$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t))\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$$

Аналогично формула для пространственной кривой

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t); z(t))\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t); z(t))\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

При явном представлении кривой интегрирование $y = \varphi(x)$

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_{a}^{b} f(x, \varphi(x)) \cdot \sqrt{1 + y_x'^2}\,dx$$

Полярное представление кривой интегрирования

$\rho = \rho(\varphi)$ $\quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$ $\quad dl = \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi$

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi$$

1) Вычислить $\int\limits_{AB}(x-y)\,dl \Rightarrow$; AB : $A(0;0)$; $B(4;3)$; AB: $y=\frac{3}{4}x$

$y'=\frac{3}{4}$

$y'^2=\frac{9}{16}$

$$\Rightarrow \int_0^4\left(x-\frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\,dx=\int_0^4\frac{x}{4}\cdot\frac{5}{4}\,dx=\frac{5x^2}{32}\Big|_0^4=\frac{5}{2}$$

2) Вычислить длину дуги астроиды $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$

$$\frac{1}{4}L=\int\limits_{AB}dl=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3a\sin^2 t\cos t)^2+(3a\cos^2 t(-\sin t))^2}\,dt=$$

$$=\frac{3a}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=\frac{3a}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=\frac{3a}{16}(-\cos 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a}{16}(1+1)=\frac{3a}{8}$$

3) $\int\limits_{AB}\sqrt{x^2+y^2}\,dl=$ $\quad L: x^2+y^2=ax \quad \rho^2=a\rho\cos\varphi \quad \rho=a\cos\varphi \,\Big|\, a>0$

$dl=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=a\,d\varphi \quad / \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$$=\int\limits_{AB}\rho\cdot a\,d\varphi=\int\limits_{AB}a^2\cos\varphi\,d\varphi=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=a^2\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\underline{\underline{2a^2}}$$

4) $\int\limits_{AB}\left(5z-2\sqrt{x^2+y^2}\right)dl=$ $\quad AB: x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t \quad 0\le t\le\pi$

$$=\int_0^{\pi}\left(5t-2\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}\right)\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,dt=$$

$$=\int_0^{\pi}3t\sqrt{2+t^2}\,dt=\int_0^{\pi}\frac{3}{2}\sqrt{2+t^2}\,d(2+t^2)=(2+t^2)^{3/2}\Big|_0^{\pi}=\sqrt{(2+\pi^2)^3}-2\sqrt{2}$$

Применение криволинейных интегралов I рода

1) Вычисление массы материальной кривой

Пусть кривая AB задана уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная ф-ция на промежутке $[a,b]$. Плотность $\rho=\rho(x,y)$. Разобьем кривую AB на n частей, выберем в произвольной точке (ξ_k,η_k) $\rho(\xi_k,\eta_k)$. Рассмотрим ~~промежутки~~ произведение $\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k$ – масса промежутка. Составим сумму произведений $M=\sum_{k=0}^{n-1}\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta l_k$. Устремим ранг дробления к нулю, получим $M=\int_{AB}\rho(x,y)\,dl$

Вычислить массу четверти эллипса $x=5\cos t$, $y=4\sin t$ (I четь), если ее линейная плотность $\rho=y$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3 \qquad \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{9}$$

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\sqrt{25\sin^2 t+16\cos^2 t}\,dt=\sqrt{25(1-\cos^2 t)+16\cos^2 t}\,dt=\sqrt{25-9\cos^2 t}\,dt$$

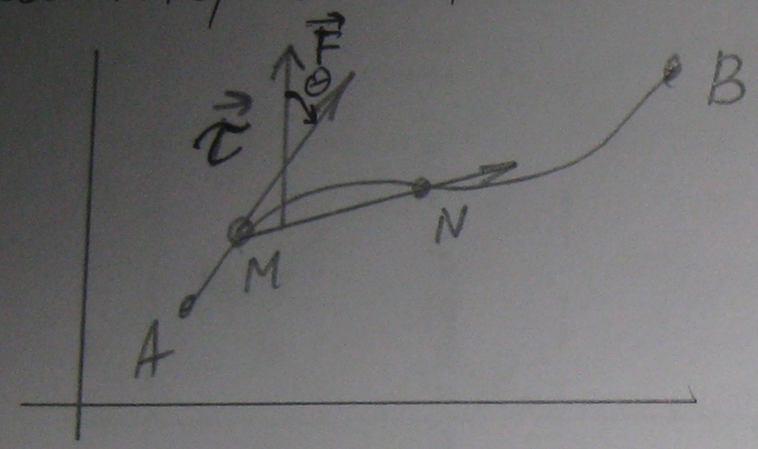
$$=\sqrt{25\left(1-\frac{25-16}{25}\right)\cos^2 t}\,dt=5\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$$

$$M=-\frac{ab}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{2}\left[\varepsilon\cos t\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}+\arcsin(\varepsilon\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2b}{2\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}+\right.$$

$$\left.+\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)=\frac{25\cdot 4}{2\cdot 3}\left(\frac{4}{25}\cdot 3+\arcsin\frac{3}{5}\right)$$

$$\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}=\frac{b}{a}\right)$$

Вычисление работы силы по перемещению материальной точки вдоль кривой AB



При движении по кривой от A к B точка M предшествует точке N тогда будем считать, что секущая проходящая от M к N имеет направление совпадающее с направлением кривой AB. Касательная $\vec{\tau}$ есть предельное положение секущей при условии, что $N \to M$.

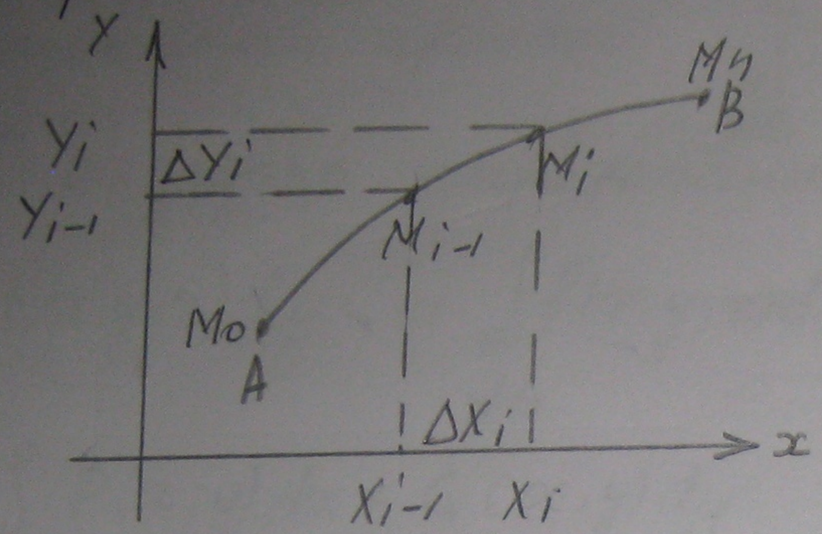
Тогда направление с секущей переходит на касательную и про такую касательную говорят, что она имеет направление, совпадающее с направлением кривой AB.

Найдем работу силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки M из точки A в точку B вдоль кривой AB

Разобьем кривую AB произвольным образом на части и будем считать, что каждый k-й участок кривой — элементарный отрезок, длина которого l_k. Сила $\vec{F}$ на каждом участке постоянна по величине и направлению и угол между силой и участком кривой равен θ, тогда элементарная работа силы $\Delta A_k = F_k \Delta l_k \cos\theta$

Отсюда вся работа $A = \int\limits_{AB} F\cos\theta \, dl$

Криволинейные интегралы II рода



∃ в плоскости XOY лежит кривая AB, в каждой точке которой определена функция $f(x,y)$.
Разобьем кривую AB произвольным образом точками $M_0, M_1, \dots M_i, \dots M_n$ на n частей.
∃ $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots d_n$ - диаметры дуг $\overset{\frown}{M_0M_1}, \overset{\frown}{M_1M_2}, \dots \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}, \dots \overset{\frown}{M_{n-1}M_n}$
$\lambda = \max d_i$ - ранг дробления

На каждой дуге возьмем произвольную точку $P_k(\xi_k, \eta_k)$ вычислим в ней значение функции $f(\xi_k, \eta_k)$ и составим произведение $f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k$, где $\Delta x = x_{k+1} - x_k$
Просуммируем все такие произведения, т.е. составим интегральную сумму $\sigma_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k$
Изменяя дробление и устремляя ранг дробления к нулю, ищем предел [illegible] $I = \lim \sigma_n$

Если этот предел существует не зависит от способа дробления и выбора точек (ξ_k, η_k), то он наз. криволинейным интегралом второго рода от ф-ции $f(x,y)$ по кривой AB и обозначается

$$I = \int\limits_{AB} f(x,y)\,dx. \qquad \text{т.о.} \qquad \int\limits_{AB} f(x,y)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{k=0}^{\infty} f(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k$$

Точно так же определяется интеграл по пространственной кривой $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dx$

Аналогично определяются интегралы $\int\limits_{AB} f(x,y)dy$ или $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dy$ и $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dz$, т. е.

$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x,y)dy$ $\qquad$ $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

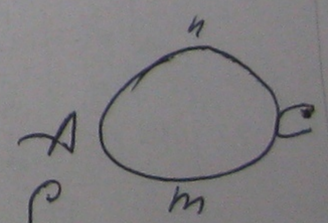
Если кривая AB гладкая, а функции P, Q, R непрерывны на кривой AB, то криволинейный интеграл II рода $\exists$.

Свойства криволинейного интеграла II рода

1. $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$ — проекции дуги $M_{i-1}M$ на оси Ox и Oy меняют знаки с изменением направления.

2. $AB = AC \cup CB$: $\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}$

3. Если $AB \in P \perp Ox$, то $\int\limits_{AB} P(x,y)dx = 0$ (все $\Delta x_i = 0$)



4. $\int\limits_{AmC_nA} = \int\limits_{AmC} + \int\limits_{C_nA}$, но $\int\limits_{C_nAmC} = \int\limits_{C_nA} + \int\limits_{AmC}$ т.о $\int\limits_{AmC_nA} = \int\limits_{C_nAmC}$

Вычисление криволинейного интеграла II рода сводится к вычислению определенного интеграла

Параметрическое представление кривой интегрирования

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(P(x(t);y(t))x'_t + Q(x(t);y(t))y'_t\right)dt$$

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_{AB} \left(P(x(t),y(t),z(t))x'_t + Q(x(t),y(t),z(t))y'_t + R(x(t),y(t),z(t))z'_t\right)dt$$

Явное представление кривой интегрирования $y=\varphi(x)$ $x\in[a,b]$, то x можно принять за параметр $x=x$; $y=\varphi(x)$

тогда $$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \left(P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))y'_x\right)dx$$

I и II рода связаны $$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,dl$$

углы обр. касательной к кривой с осями Ox и Oy