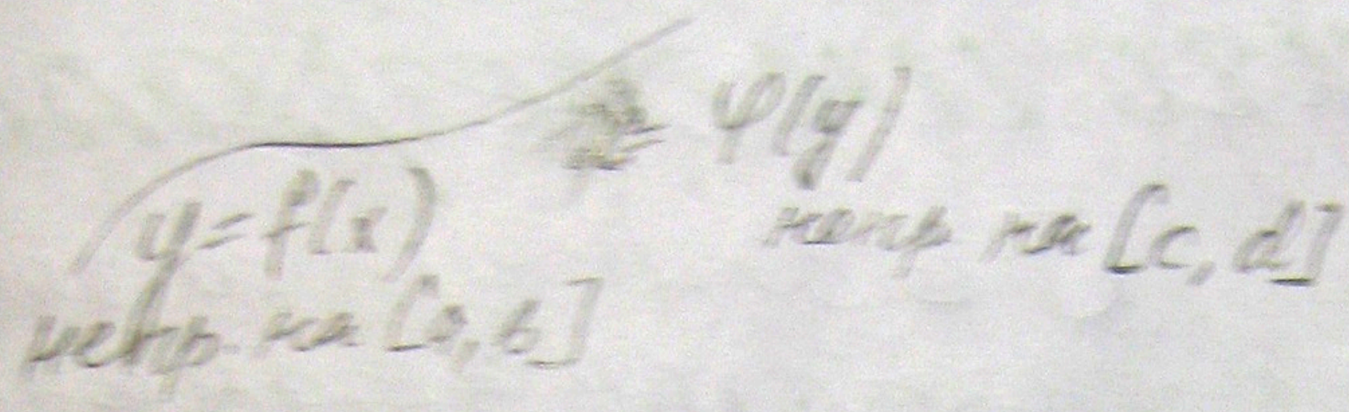
1. Простая кривая



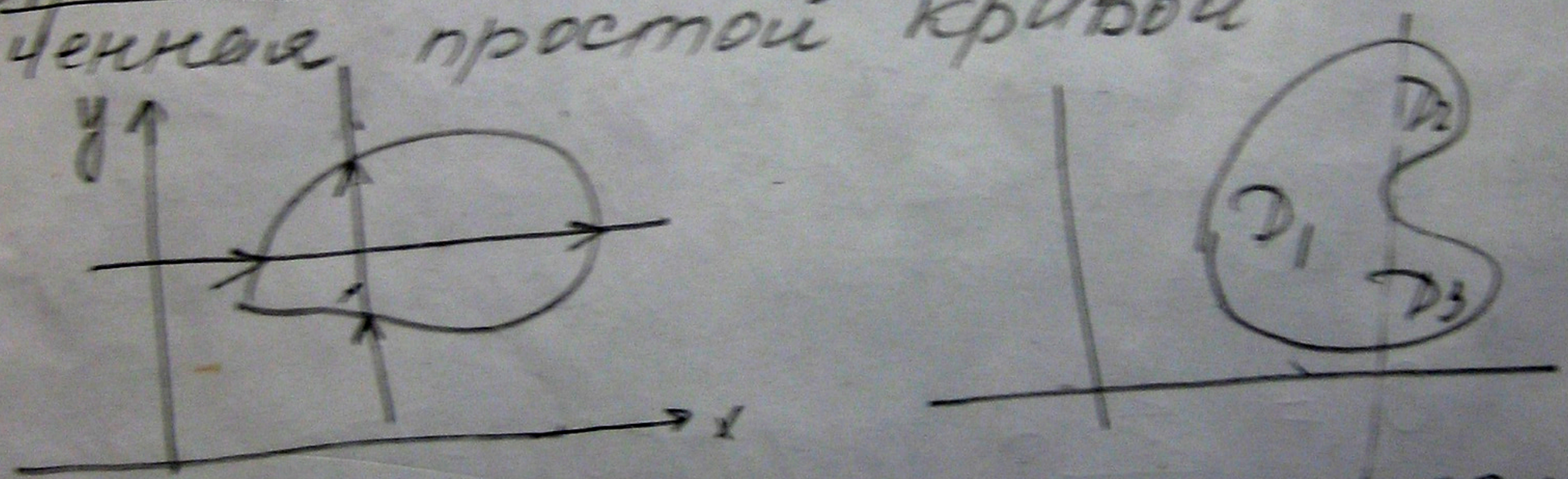
2. Замкнутая кривая – начало совпадает с концом

3. Плоская кривая – все точки которой лежат в одной плоскости

4. Точка излома – кривая не обладает гладкой

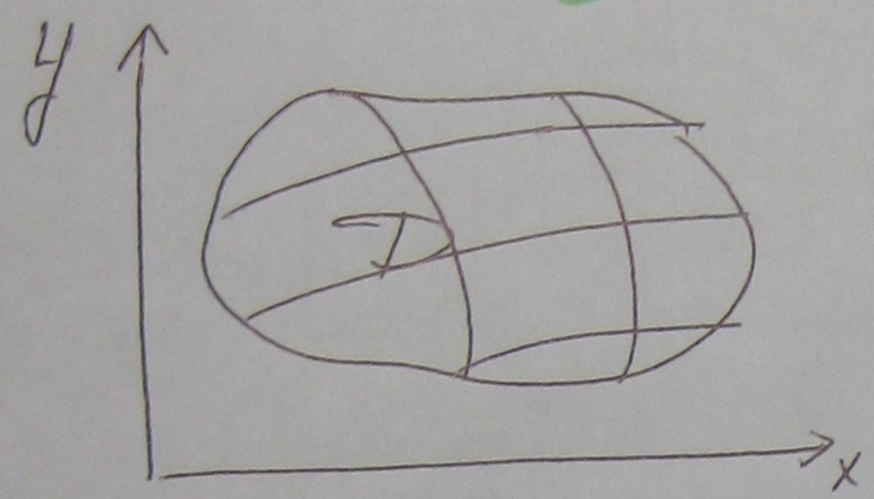
одност. кр-ны разны

Простая область – область, ограниченная простой кривой



Квадрируемая – имеет площадь

Определение двойного интеграла



∃ в замкнутой обл. D на пл. xoy задана непр. ф-ция $z=f(x,y)$

Разобьем D на n ячеек сетью простых кривых: $D_1, D_2, \dots D_n$ с площадями $\Delta S_1, \dots \Delta S_n$ и диаметрами $d_1, \dots d_n$. Наибольший из диаметров обозн.

$$\lambda = \max_{i=1,n} \{d_i\}$$

В каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$, умножим значение ф-ции $f(x_i; y_i)$ функции в этой точке на ΔS_i и составим сумму всех таких произведений

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \text{ – инт. сумма}$$

∃ $\lim_{\lambda \to 0} \sigma$ не зав. от способа дробления

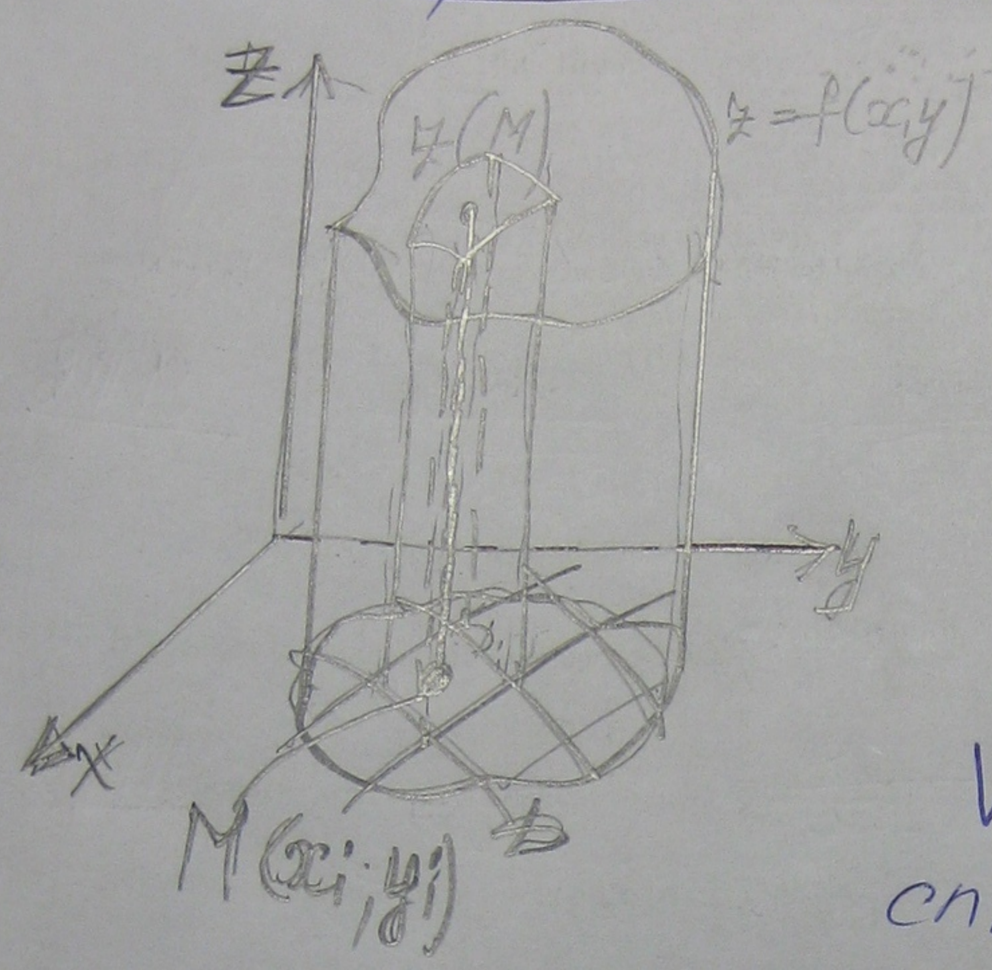
$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$$

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sigma = \iint_D f(x; y)\,dx\,dy$$

Т. ∃ – достаточное условие

Если $f(x,y)$ непр. в D, то она интегрируема в D

Геометрический смысл



Инт. сумма – сумма цилиндрич. столбиков с основанием D_i и высотой $f(M_i)$

$$\Delta V_i = f(M_i)\cdot \Delta S_i$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

$$V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

сл. $\rightarrow$ $S = \iint_D dx\,dy$

Свойства двойного интеграла

1. Линейность $\iint_D (C_1 f_1(x,y) \pm C_2 f_2(x,y))\,dx\,dy$
2. аддитивность $\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$

3. $f(x,y) \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$

4. $f_1(x,y) \leq f_2(x,y) \Rightarrow \iint f_1 \leq \iint f_2$

5. Если в каждой точке D вып. нер.

$$m \leq f(x,y) \leq M \Rightarrow$$

$$m \cdot S_D \leq \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq M \cdot S_D$$

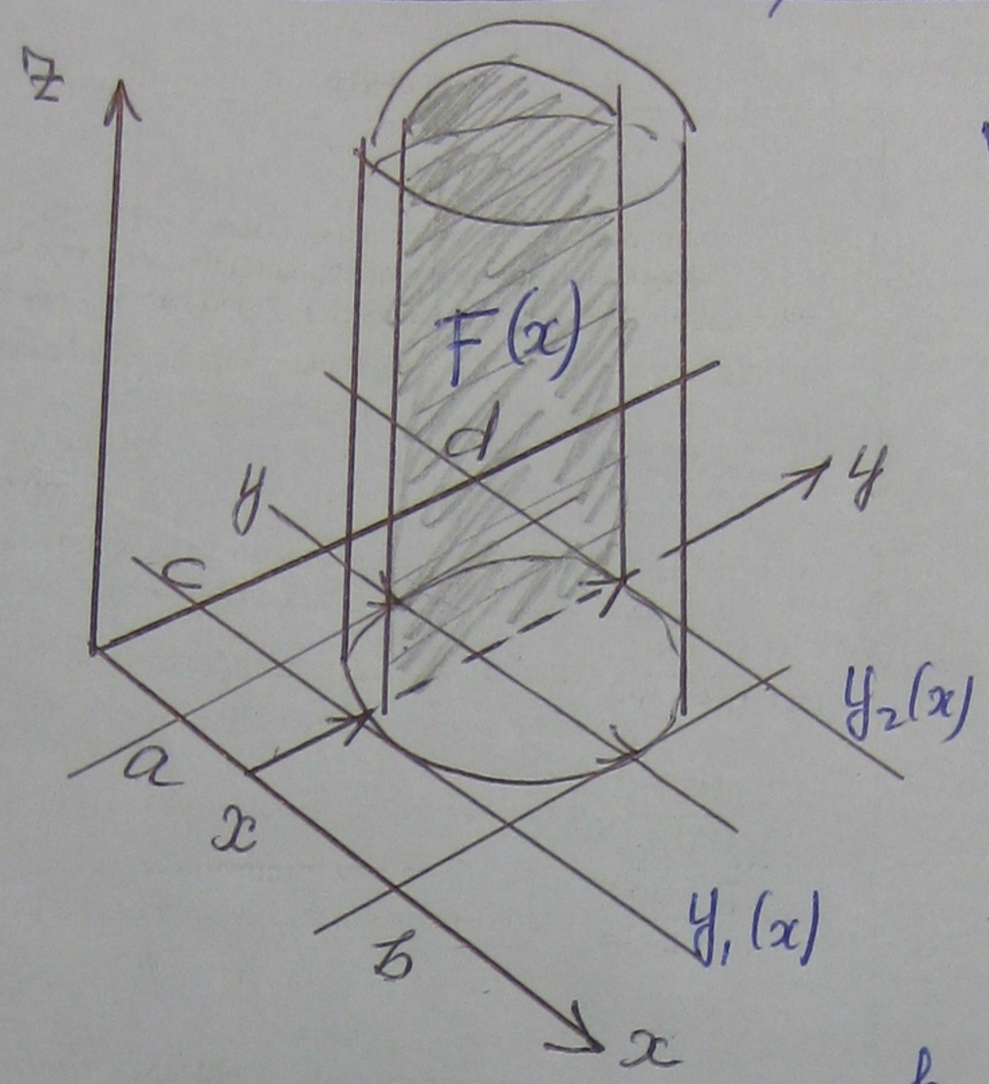
Д-во следует из 4

6. Т. о среднем: найдется $P(\xi,\eta) \in D$:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\cdot S_D$$

Д-во следует из 5 и из 1

Вычисление двойного инт-ла ③



$$V = \int_a^b F(x)\,dx \Rightarrow$$

$$F(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad x = const$$

$$\Rightarrow \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

$$= \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy =$$

правильная по y ∥ Oy

$$= \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dy$$

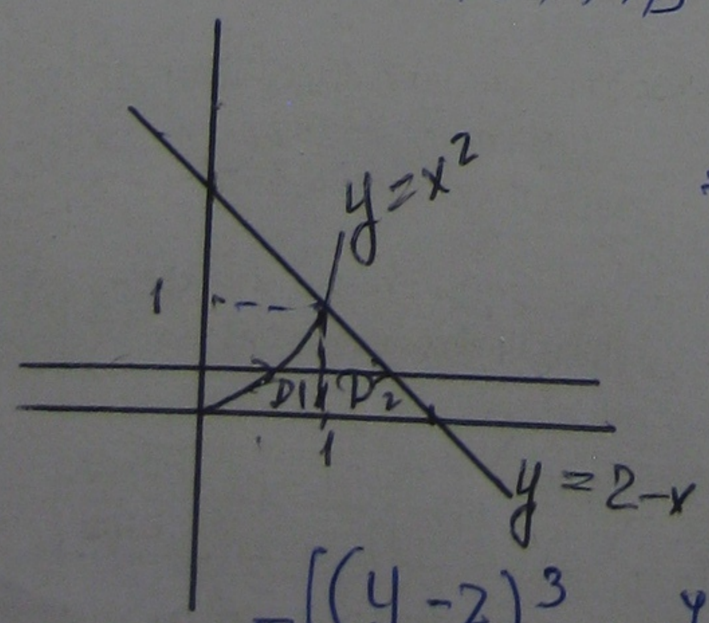
правильная по x ∥ Ox

Внешние пределы всегда постоянные

внутренние интегралы

Внутренние – зависят от области D

Вычислить $\iint_D (x+2y)\,dx\,dy \Rightarrow D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$



$$\Rightarrow \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 2yx \right) \Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} dy$$

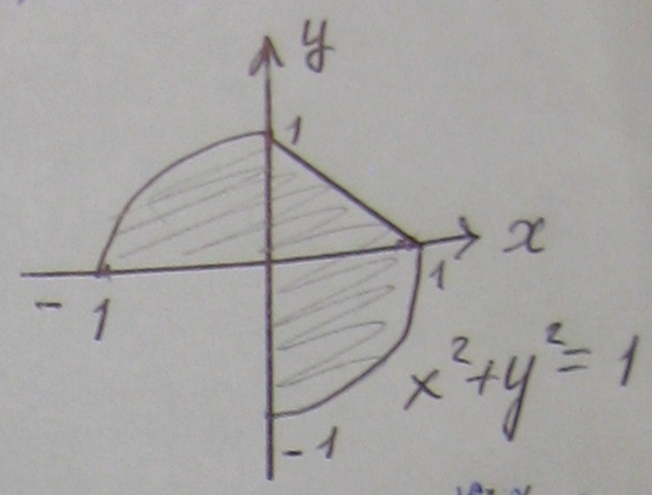
$$= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + 4y - 2y^2 - \frac{y}{2} - 2y^{\frac{3}{2}} \right) dy =$$

$$= \left[\frac{(y-2)^3}{6} + \frac{7y^2}{2\cdot 2} - 2\frac{y^3}{3} - 2\cdot 2\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{29}{20}$$

Изменить порядок интегрирования

$$I_1 = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} x\,dy =$$

$$I_2 = \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} x\,dx.$$



I_1 (область правильная относительно y) ‖ OY

1) $I_{1\,вн} = \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy = xy\Big|_{0}^{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2}$

$I_{2\,вн} = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} x\,dy = x(1-x) + x\sqrt{1-x^2}$

2) $I_1 = \int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{0}^{1}\left[x(1-x) + x\sqrt{1-x^2}\right]dx =$

$= -\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Big|_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6}$

I_2 (область, правильная относительно x) ‖ OX

1) $I_{1\,вн} = \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}$

$I_{2\,вн} = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} = \frac{(1-y)^2}{2} - \frac{1-y^2}{2} = y^2 - y$

2) $I_2 = \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\right)dy + \int_{0}^{1}(y^2-y)\,dy = \left[\frac{1}{2}y - \frac{y^3}{6}\right]_{-1}^{0} +$

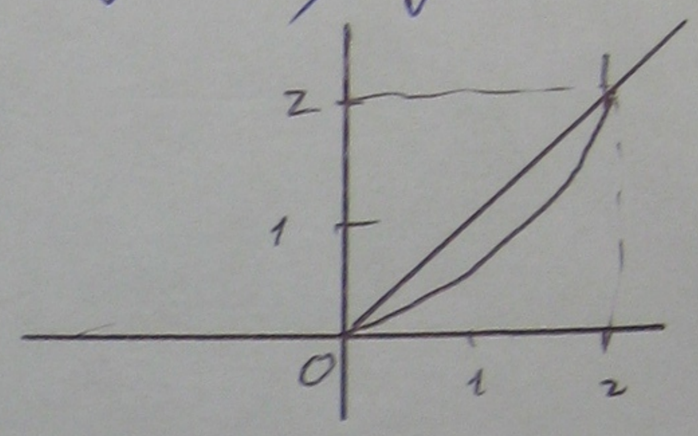
$+ \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -3+1 = -\frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Вычислить двойной интеграл через повторный (в декарт. коорд.) (5)

1) $I = \iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy = \left[D:\ 0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 1\right.$

$$= \int_0^2 x^2\,dx \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 \cdot \operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\pi$$

2) $I = \iint\limits_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2} =$ $\quad \left[D:\ y = \frac{x^2}{2},\ y = x\right]$



$$= \int_0^2 x\,dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{dy}{x^2+y^2} =$$

$$= \int_0^2 \left[\left(\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x}\right] x\,dx =$$

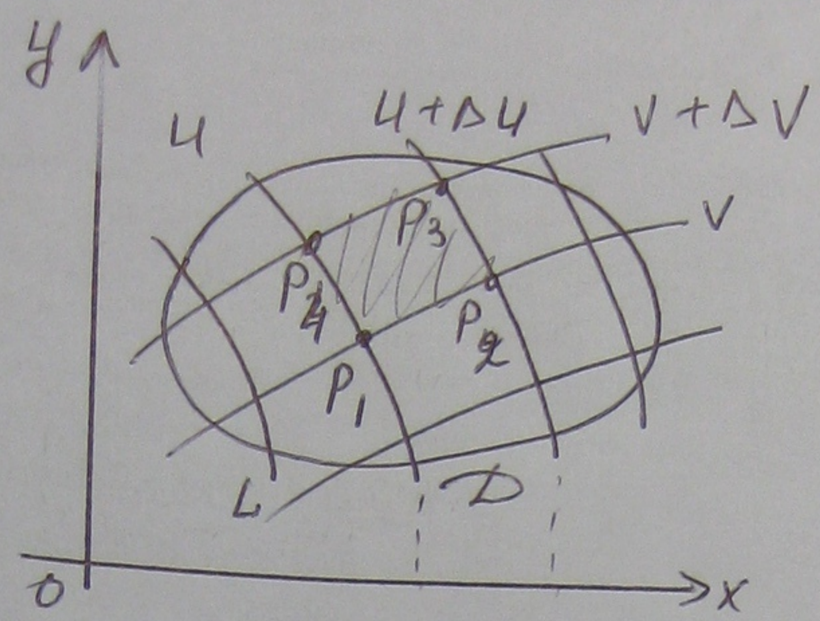
$$= \int_0^2 \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)dx = \frac{\pi}{4}\int_0^2 dx - \int_0^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\,dx =$$

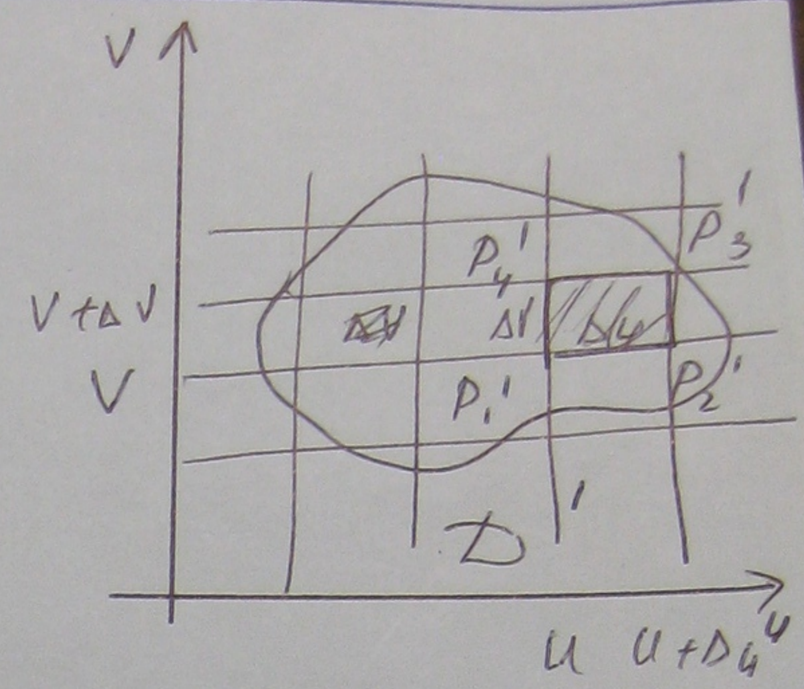
$$= \frac{\pi}{2}x\Big|_0^2 - \left(\frac{x}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \ln\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\right)\Big|_0^2 = \frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{4} + \ln 2 = \underline{\underline{\ln 2}}$$

$$\int \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\,dx = \left[\begin{array}{l|l} \operatorname{arctg}\frac{x}{2} = u & du = \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\cdot 2} \\ dx = dv & v = x \end{array}\right]$$

$$= x\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \int \frac{1}{2}\,\frac{x\,dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = x\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \ln\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$$

⑥ Замена переменных в двойном интеграле





$z = f(x,y) = F(u,v) =$

$= f(\varphi(u,v);\ \psi(u,v))$

$\Delta S' = \Delta u \cdot \Delta v$

$$\sum f(x,y)\Delta S = \sum F(u,v)\Delta S'$$

Вычислим площадь криволинейного 4-хугольника $P_1P_2P_3P_4$ в Oxy. Координаты вершин

$P_1(x_1, y_1)$ $\quad x_1 = \varphi(u,v)$; $y_1 = \psi(u,v)$

$P_2(x_2, y_2)$ $\quad x_2 = \varphi(u+\Delta u, v)$; $y_2 = \psi(u+\Delta u, v)$

$P_3(x_3, y_3)$ $\quad x_3 = \varphi(u+\Delta u, v+\Delta v)$; $y_3 = \psi(u+\Delta u, v+\Delta v)$

$P_4(x_4, y_4)$ $\quad x_4 = \varphi(u, v+\Delta v)$; $y_4 = \psi(u, v+\Delta v)$

Будем считать $P_1P_2 \parallel P_3P_4$; $P_1P_4 \parallel P_2P_3$

приращения заменим дифференциалами

$x_1 = \varphi(u,v)$ $\qquad y_1 = \psi(u,v)$

$x_2 = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u$ $\qquad y_2 = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u$

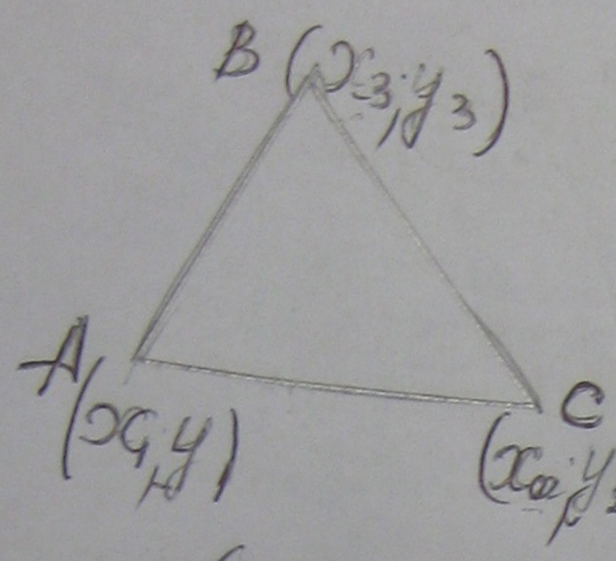
$x_3 = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v$ $\qquad y_3 = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v$

$x_4 = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v$ $\qquad y_4 = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v$

Площадь параллелограмма вычислим как удвоенную площадь треугольника

$$\Delta S = |(x_3-x_1)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y_3-y_1)| =$$

7



$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)| =$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v\right) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta u\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta u\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\Delta v\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}\Delta u\Delta v$$

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \Delta S = I\Delta S'$$

Полярные координаты $x=\rho\cos\varphi$ $y=\rho\sin\varphi$

$$\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi = \rho$$

$$J = \rho\, d\rho\, d\varphi$$

Вычислить

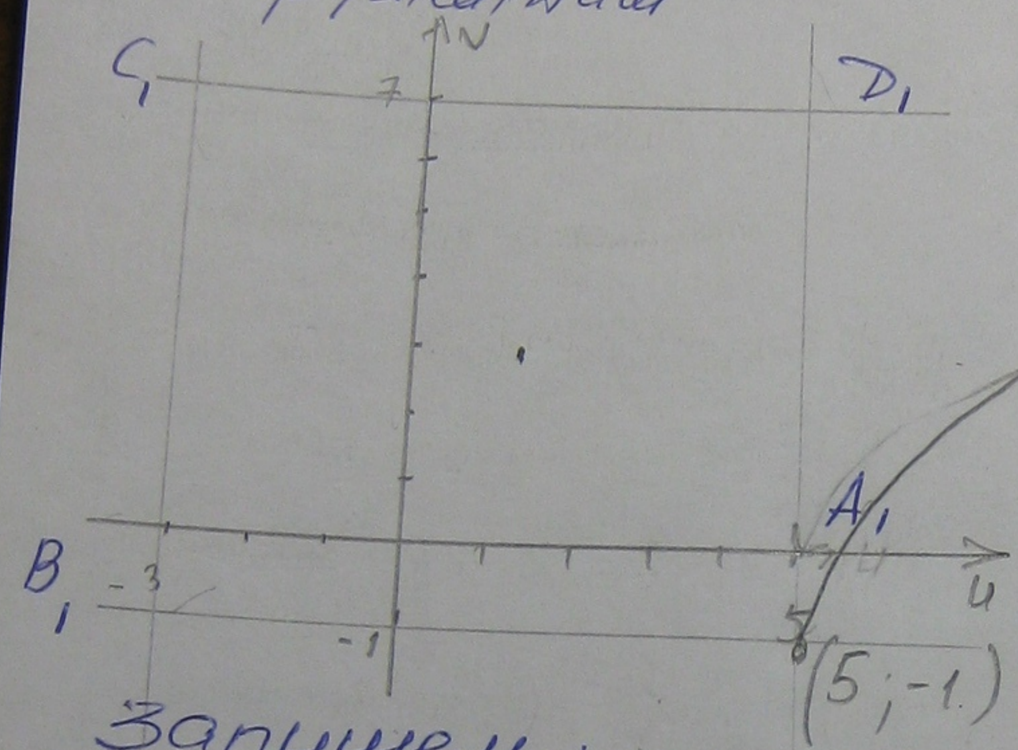
$$\iint\limits_D (2x+y)\,dx\,dy$$

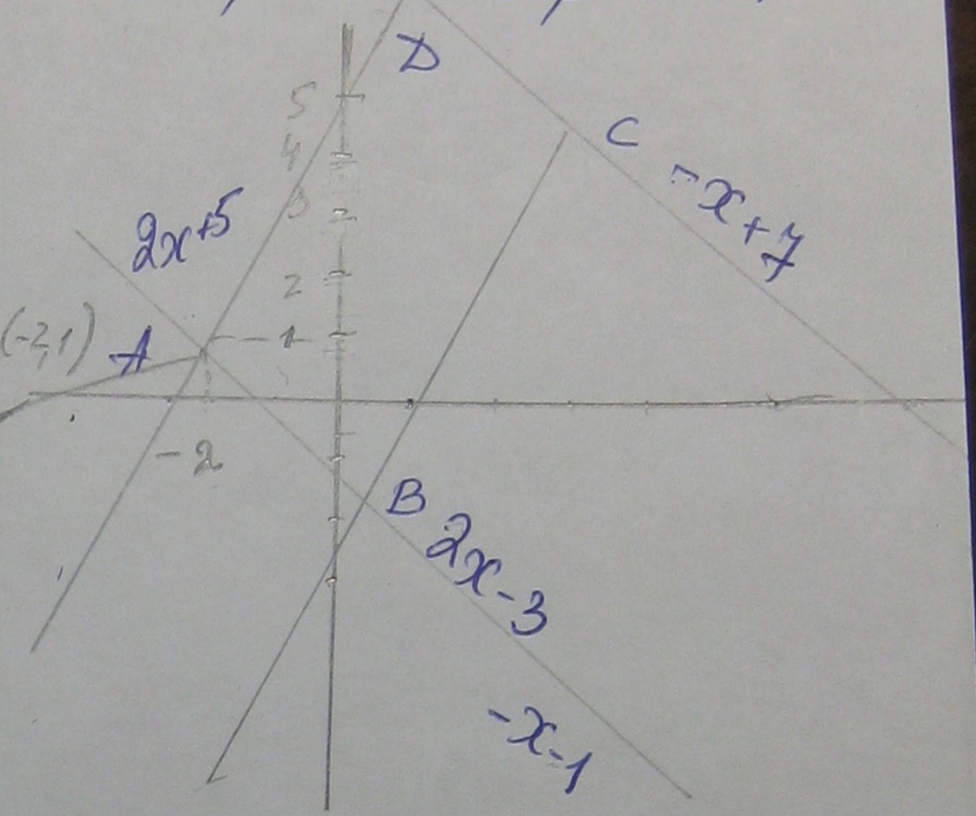
D: $y=2x-3$; $y=2x+5$

$y=-x+7$; $y=-x-1$

параллелограмм

Перейдем к новым координатам





Запишем:

$y-2x=-3$ $\quad$ $y+x=7$

$y-2x=5$ $\quad$ $y+x=-1$

перейдем после обозначения к новым координатам

$u=y-2x$; $v=y+x$

тогда: $\begin{cases} x=-\frac{u}{3}+\frac{v}{3} \\ y=\frac{u}{3}+\frac{2v}{3} \end{cases}$

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=-\frac{1}{3} \qquad |J|=\frac{1}{3}$$

направление обхода противоположное

$$\iint\limits_{ABCD}(2x+y)\,dx\,dy=\iint\limits_{A_1B_1C_1D_1}\left(-\frac{u}{3}+\frac{u}{3}v\right)\cdot\frac{1}{3}\,du\,dv=\frac{1}{9}\int_{-3}^{5}du\int_{-1}^{7}(-u+uv)\,dv$$

$$=\frac{1}{9}\int_{-3}^{5}\left(-uv+2v^2\right)\Big|_{-1}^{7}du=\frac{1}{9}\int_{-3}^{5}\left[(-7u+98)-(u+2)\right]du=$$

$$=\frac{1}{9}\left(-4u^2+96u\right)\Big|_{-3}^{5}=\frac{704}{9}$$

Вычислить

9

$$\iint\limits_{D} x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

Лемниската

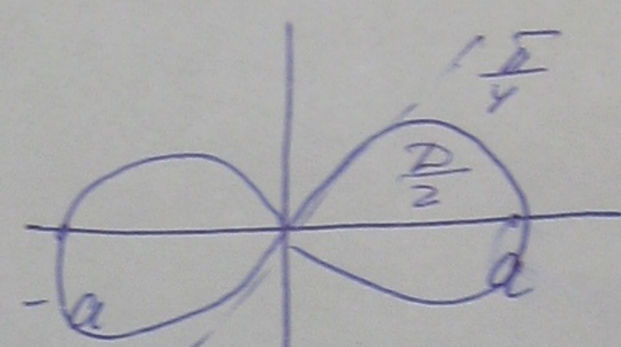
$D: (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

$x \geq 0$

$x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$

$\rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$

$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$



В силу симметрии отн. ох и оу

$$I = 2\iint\limits_{\frac{D}{2}} \rho^2\cos\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3\,d\rho =$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2\varphi)^2\,d(\sin\varphi)$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 4\sin^2\varphi + 4\sin^4\varphi)\,d(\sin\varphi) =$$

$$= \frac{a^4}{2}\left(\sin\varphi - \frac{4}{3}\sin^3\varphi + \frac{4}{5}\sin^5\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{15}a^4$$