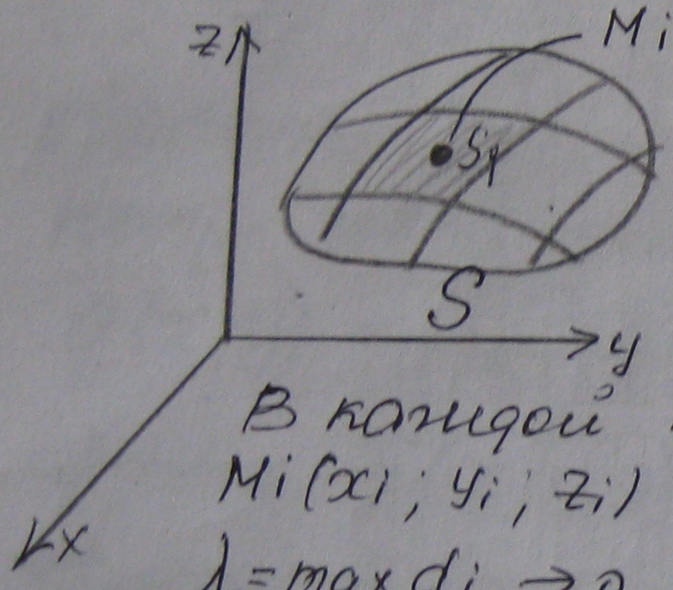
Поверхностный интеграл I рода – обобщение двойного



J в точках некоторой поверхности S (см. площадь) пространства Oxyz определена непрерывная ф-ция $f(x; y; z)$. Разобьем поверхность S на n частей, площади которых ΔS_i, а диаметры d_i $(i=\overline{1,n})$. В каждой части S_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$ и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta S_i$

$\lambda = \max d_i \to 0$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta S_i = \iint_S f(x,y,z)\,ds$$

а) lim J;
б) не зав. от способа разбиения
в) не зав. от M_i

Свойства:

1) линейность
2) аддитивность
3) $f_1(x,y,z) \le f_2(x,y,z) \Rightarrow \iint_S f_1(x,y,z)\,ds \le \iint_S f_2(x,y,z)\,ds$
4) $\iint_S ds = S$
5) $\left|\iint_S f(x,y,z)\,ds\right| \le \iint_S |f(x,y,z)|\,ds$;
6) теорема о среднем
$\iint_S f(x,y,z)\,ds = f(x_c; y_c; z_c)\cdot S$

Вычисление поверхностного инт. I рода

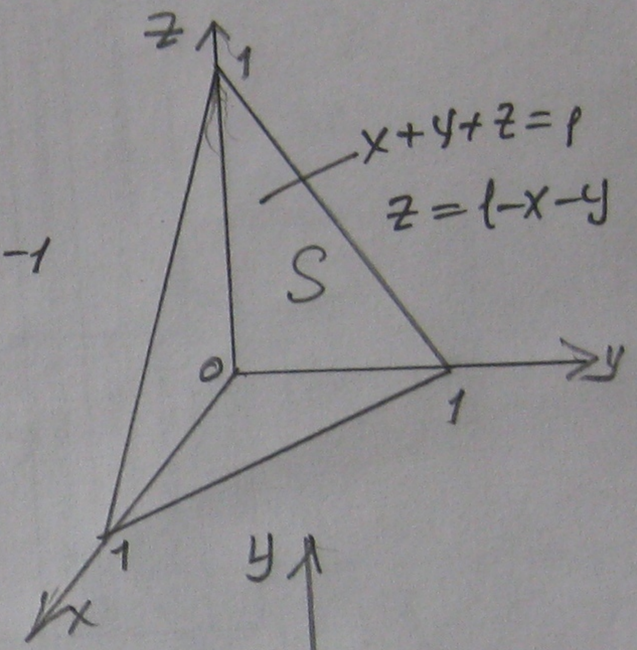
②

Т. ∃ пов. инт I рода: Если пов. задана ур. $S: z=f(x,y)$, $f(x,y)$ опр. и непрерывна в простой области D пл-ти xOy и имеет в этой обл. непр. частные пр-ные $p(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $q(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ и если в каждой точке пов. S ф-ция $F(x,y,z)$ непр., то пов. инт. I рода от ф-ции $F(x,y,z)$ ∃ и выражается через двойной

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS=\iint\limits_{S_D} F[x,y,f(x,y)]\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}\,dx\,dy$$

проекция S на xOy

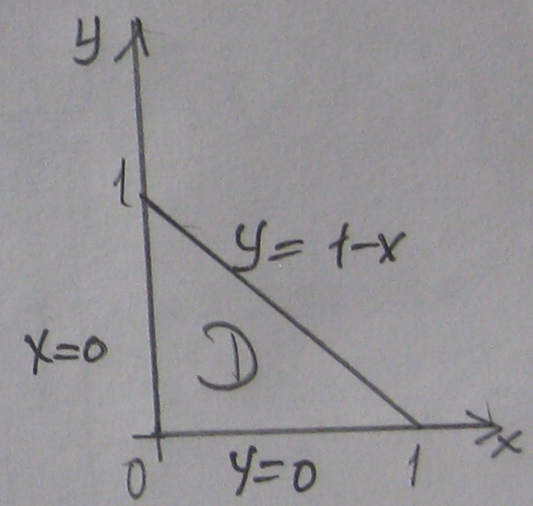
Пример 1 $\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+z)^3}$, S: $x+y+z=1$ в I октанте



Выразим поверхность S явно, как

$z=f(x,y)$; $z=1-x-y$; $z'_x=-1$; $z'_y=-1$

D - треугольник в пл. XOY, огранич. прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$



$$dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+1+1}\,dx\,dx=$$

$$=\sqrt{3}\,dx\,dy$$

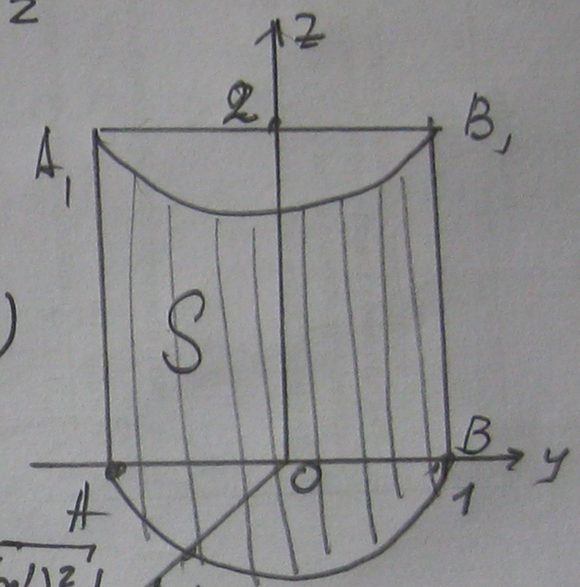
$$\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+z)^3}=\iint\limits_D \frac{\sqrt{3}\,dx\,dy}{(1+x+1-x-y)^3}=\iint\limits_D \frac{\sqrt{3}\,dx\,dy}{(2-y)^3}=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(2-y)^3}=\sqrt{3}\int_0^1\left[\frac{1}{2(2-y)^2}\right]_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1\left[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{4}\right]dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}x\right)\Big|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

Пример 2 Вычислить $\iint x(y+z)\,dS$, где S - часть цилиндрической поверхности $x^2+y^2=1$, $x\geq 0$ отсеченной плоскостями $z=0$; $z=2$

$S:\ x=\sqrt{1-y^2}$



Решение. Здесь уравнение поверхности $x=\sqrt{1-y^2}$, т.е. $x=x(y,z)$

Следовательно,

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS=\iint_{D_S} F(x(y,z);y;z)\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dy\,dz,$$

D_S - проекция S на yoz - прямоугольник AA_1B_1B

$$x'_y=-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}};\quad x'_z=0;$$

$$I=\iint_{D_{yoz}}\sqrt{1-y^2}\,(y+z)\sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}\,dy\,dz=\iint_{D_{yoz}}(y+z)\,dy\,dz=\int_{-1}^{1}dy\int_0^2(y+z)\,dz=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^2 dy=\int_{-1}^{1}(2y+2)\,dy=4$$

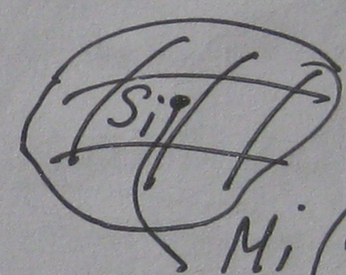
Приложения пов. инт. I рода

1) Площадь поверхности $S = \iint\limits_S dS = \iint\limits_S \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy$

2) Масса поверхности. Известна плотность распределения массы $\gamma = \gamma(x,y,z)$ в каждой точке поверхности

1) разбиваем поверхность S на n частей

2) берем произвольную точку M_i, предполагая, что в пределах S_i плотность $\gamma = const$



$S_{S_i} = \Delta S_i$

$M_i(x_i, y_i, z_i)$

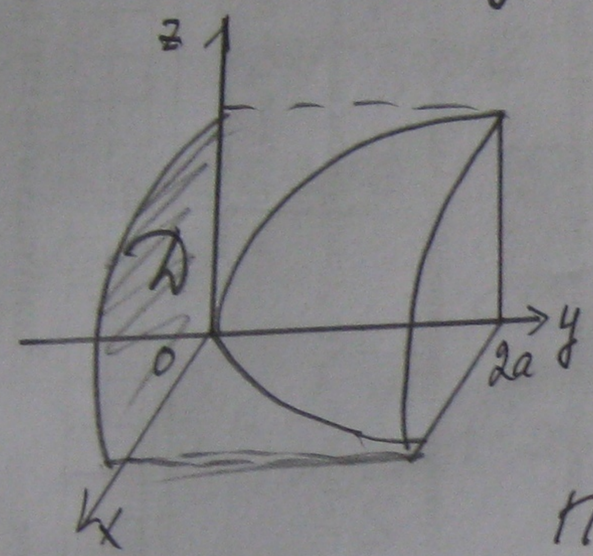
3) $m_i = \gamma(x_i; y_i; z_i)\Delta S_i$

4) $M = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma(x_i; y_i; z_i)\Delta S_i$

5) $M = \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} m = \lim \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma(x_i; y_i; z_i)\Delta S_i = \iint\limits_S \gamma(x,y,z)\,dS$

Площадь поверхности

параболоида $ay = x^2 + z^2$, нах. в I октанте и огр. пл. $y = 2a$



Пример Вычислить площадь ⑥

Ур-е поверхности $y = \dfrac{x^2+z^2}{a} = y(x,z)$

$y'_x = \dfrac{2x}{a}$; $y'_z = \dfrac{2z}{a}$

D: проекция поверхности на xOz

$$dS = \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2}\, dx\, dz$$

проекция представляет собой окружность

$ay = x^2 + z^2$ $y = 2a$ $\Rightarrow$ $x^2 + z^2 = 2a^2$ радиус $a\sqrt{2}$

Т.о. $dS = \sqrt{1 + \dfrac{4x^2}{a^2} + \dfrac{4z^2}{a^2}}\, dx\, dz = \sqrt{\dfrac{a^2 + 4(x^2+z^2)}{a^2}}\, dx\, dz$

$$S = \frac{1}{a} \iint\limits_{D_{xOz}} \sqrt{a^2 + 4(x^2+z^2)}\, dx\, dz = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4 \cdot 3} (a^2 + 4\rho^2)^{3/2} \Big|_0^{a\sqrt{2}} = \frac{13}{12} \pi a^2$$

Пр. Вычислить массу пластинки, лежащей в I октанте на плоскости $x+y+z=1$, плотность которой в каждой точке $\gamma(x,y,z)=\frac{z}{k}$ $(k=const)$

Решение $S: x+y+z=1$; $z=1-x-y$; $z'_x=z'_y=1$

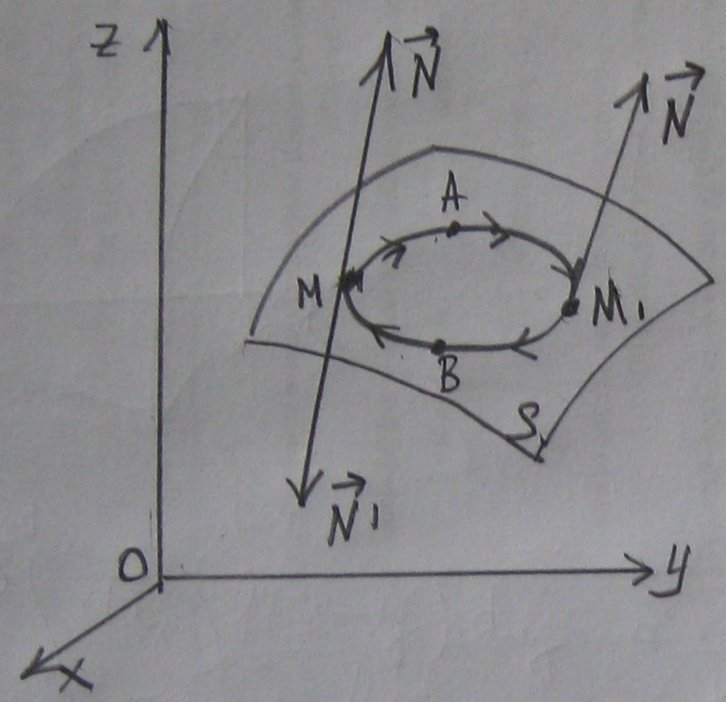
$$dS=\sqrt{1+1+1}\,dx\,dy=\sqrt{3}\,dx\,dy$$

$$M=\frac{1}{k}\iint\limits_S(1-x-y)\,dS=\frac{1}{k}\iint\limits_D(1-x-y)\sqrt{3}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{3}}{6k}$$ кг

$$=\frac{\sqrt{3}}{k}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy=\frac{\sqrt{3}}{k}\int_0^1\left[(1-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{k}\int_0^1\left[(1-x)^2-\frac{(1-x)^2}{2}\right]dx=\frac{\sqrt{3}}{k}\left[-\frac{(1-x)^3}{2\cdot 3}\right]\Bigg|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{k\cdot 6}$$

Двусторонние и односторонние поверхности



<u>Двусторонняя</u>, если нет ни одного контура, переворачивающего нормаль

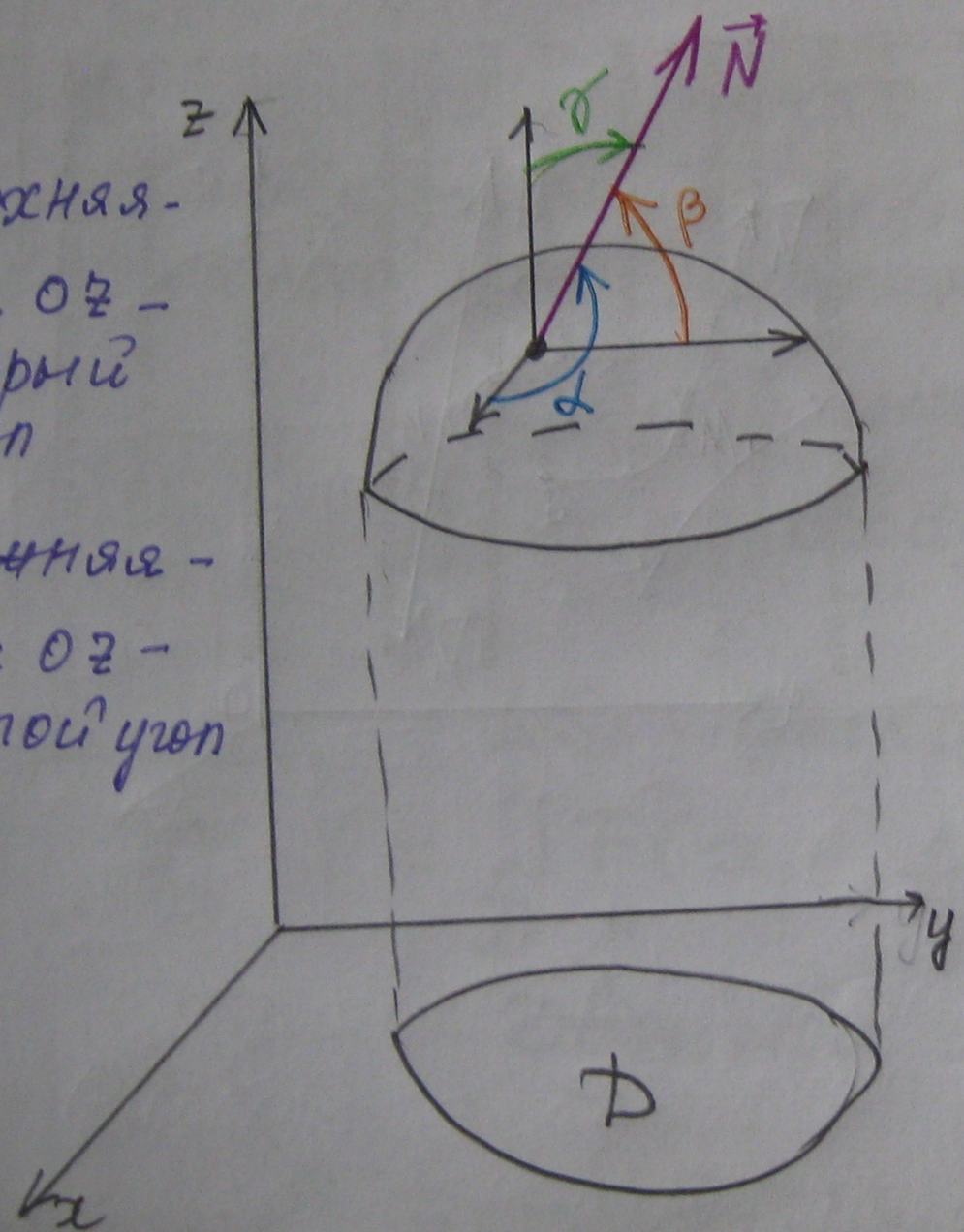
<u>Односторонняя</u>, если найдется хотя бы один контур, переворачивающий нормаль

(лист Мёбиуса)

О. Совокупность точек двусторонней пов-ти вместе с соответствующими направлениями нормалей, непрерывно переходящих друг в друга при перемещении нормали по поверхности, не пересекая ~~её~~ границы, наз. стороной поверхности

верхняя - $\vec{N}$ с Oz - острый угол

нижняя - $\vec{N}$ с Oz - тупой угол



Если двусторонняя поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$, где $f(x,y)$ и $p(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}$ и $q(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}$ непр. в D, то для верхней стороны поверхности напр. косинусы нормали опр.

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}};\quad \cos\beta=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}};$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

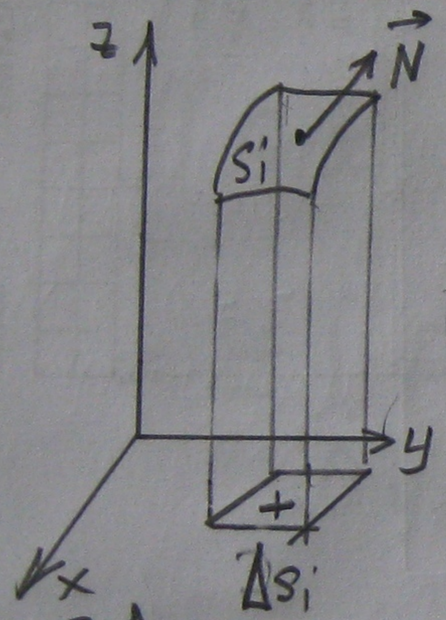
для нижней стороны поверхности

$$\cos\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}};\quad \cos\beta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}};$$

$$\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

Поверхностные интегралы II рода

J в каждой точке двусторонней пов-ти S задана фция $F(x,y,z)$. Выберем сторону (верхнюю или нижнюю) - ориентировевная пов.



О. пов. инт. по координатам

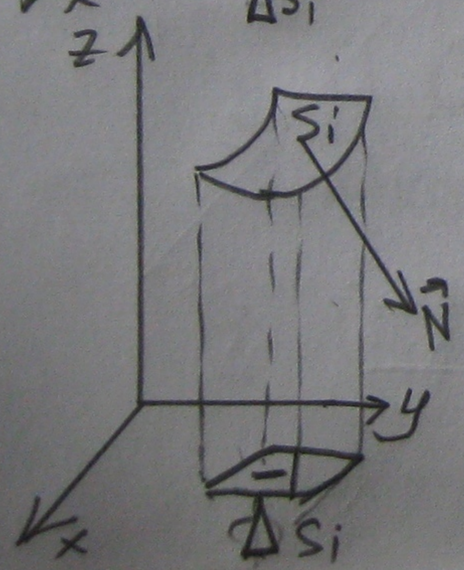
$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} F(x_i;y_i;z_i)\Delta S_i$$

ΔS_i - проекция S_i на пл. XOY

$$= \iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\,dx\,dy$$

для верхней стороне поверхности

двойной интеграл



$$= -\iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\,dx\,dy$$

для нижней стороны поверхности

Аналогично определяются интегралы

$$\iint_S F(x,y,z)\,dy\,dz \quad \text{и} \quad \iint_S F(x,y,z)\,dx\,dz$$

Принято обозначение общего вида пов. инт. II р

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dx\,dz + R(x,y,z)\,dx\,dy =$$

$$= \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,dy\,dz \pm$$

$$\pm \iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)\,dx\,dz \pm$$

$$\pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$$

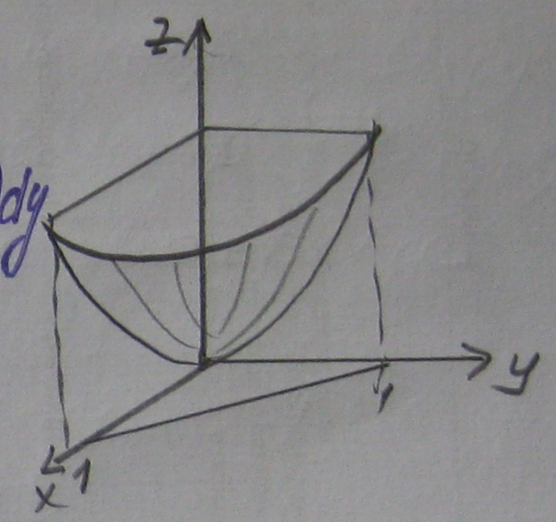
Т. ∃ пов. инт. II рода. Если двусторонняя пов-ть S задана уравнением $z=f(x,y)$, причем $f(x,y)$ и $p(x,y)=\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ и $q(x,y)=\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$ ∃ и непр. в D_{xoy} и если в каждой точке пов. S задана непр. $F(x,y,z)$, то пов. инт. по верхней и нижней стороне пов. S существует и выражается через двойной инт. для верхней и нижней сторон S.

Если пов. замкнутая, то $\oiint\limits_{S_+}$ или $\oiint\limits_{S_-}$

Свойства

1) П.и. II рода меняет знак при перемене сторонности.
2) линейность
3) аддитивность
4) Если S_1, S_2, S_3 – цилиндрические пов-ти с образующими $\parallel Oz$, $\parallel Ox$, $\parallel Oy$, то $\iint\limits_{S_1} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S_2} P(x,y,z)\,dy\,dz = \iint\limits_{S_3} Q\,dx\,dz = 0$

Пр Вычислить $\iint\limits_S z\,dx\,dy$ по нижней стороне пов-ти S, зад. уравнением $z=x^2+y^2$ над областью D, ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$



$$I=\iint\limits_{S\text{ нижняя}} z\,dx\,dy=-\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy$$

$$=-\int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}dx=-\int_0^1\left(x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{1}{3}\left(-\frac{(1-x)^4}{4}\right)\right]_0^1=-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{6}$$

Связь между пов. инт-лами I и II рода.

Покажем, что ① $\iint\limits_S F(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_S F(x,y,z)\cos\gamma\,dS$ ②

$S: f(x,y) = z$

① $\iint\limits_S F(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_D [F(x,y,f(x,y))]\,dx\,dy$

② $\iint\limits_S F(x,y,z)\cos\gamma\,dS = \iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\dfrac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\sqrt{p^2+q^2+1}\,dx\,dy$

$= \iint\limits_D [F(x,y,f(x,y))]\,dx\,dy$ ч.т.д.

Аналогично $\iint\limits_S F\,dy\,dz = \iint\limits_S F\cos\alpha\,dS$; $\iint\limits_S F\,dx\,dz = \iint\limits_S F\cos\beta\,dS$

следовательно $\iint\limits_S P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dx\,dz + R(x,y,z)\,dx\,dy =$

$= \iint\limits_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\,dS$, где

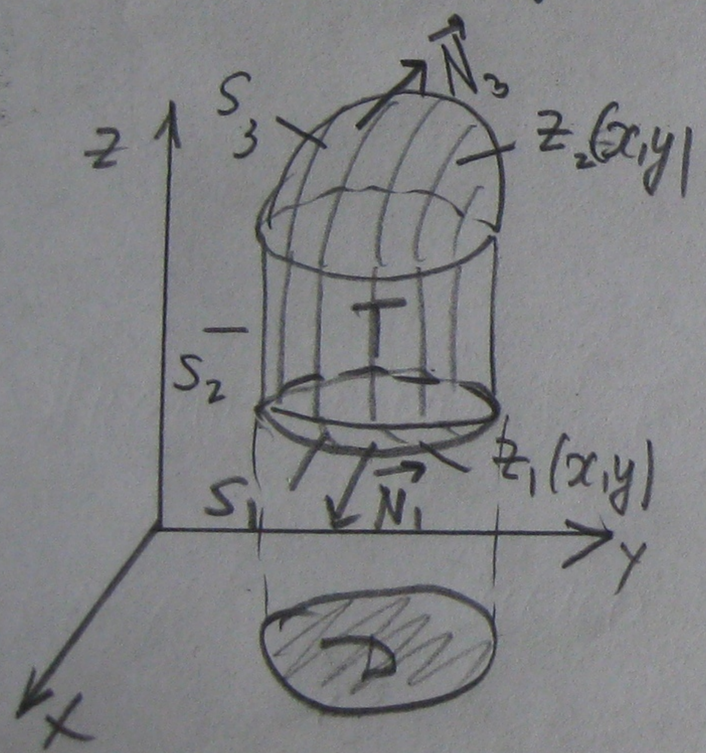
$dy\,dz = \cos\alpha\,dS \quad dx\,dz = \cos\beta\,dS \quad dx\,dy = \cos\gamma\,dS$

Формула Остроградского-Гаусса

– связь между тройным инт-лом по телу T и поверхностным по полной пов-ти, огр. телом T, причем пов. инт. вып. по внешней стороне

$$\iiint\limits_T \left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{S_T \text{ внешняя}} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy$$

$$= \iint\limits_{S_T \text{ внешняя}} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right) ds$$



$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint\limits_D R(x,y,z_2(x,y))\,dx\,dy - \iint R(x,y,z_1(x,y))\,dx\,dy$$

= восстановим пов. инт.

$$\iint\limits_{S_3 \text{ (верх)}} R(x,y,z)\,dx\,dy + \left(\iint\limits_{S_2} = 0\right) + \iint\limits_{S_1 \text{ (низ)}} R(x,y,z)\,dx\,dy$$

$$= \oiint\limits_S R(x,y,z)\,dx\,dy$$

Формула Остроградского-Гаусса (аналог ф. Остр.-Грина) связь между пов. инт. по замкн. пов. и тройным инт-лом

(15) пример

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{S_V} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dx\,dz + R(x,y,z)\,dx\,dy$$

$$\parallel$$

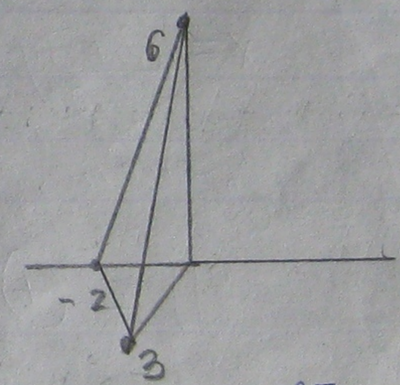
$$\oiint\limits_{S_V} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

$$I_1 = \oiint\limits_{+S} -x\,dy\,dz + z\,dx\,dz + 5\,dx\,dy =$$

S: внешняя сторона пирамиды $2x-3y+z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iiint (-1+0+0)\,dx\,dy\,dz = -\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = -\left(\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot 6\right) = -6$$



$$I_2 = \oiint\limits_{+S} 4x^3\,dy\,dz + 4y^3\,dx\,dz - 6z^4\,dx\,dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 12x^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 12y^2 \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = -24z^3$$

S: полная пов. цилиндра $x^2+y^2=a^2$, $z=h$

$$I = 12\iiint\limits_V (x^2+y^2-2z^3)\,dx\,dy\,dz \quad \text{[цил. координаты]}$$

$$= 12\iint\limits_{S_{xy}} dx\,dy \int_0^h (x^2+y^2-2z^3)\,dz = 12\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \left[(x^2+y^2)z - \frac{z^4}{2}\right]_0^h dx\,dy = 12h\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\rho^3 - \frac{h^3}{2}\rho\right)d\rho =$$

$$= 6\pi a^2 h(a^2-h^3)$$

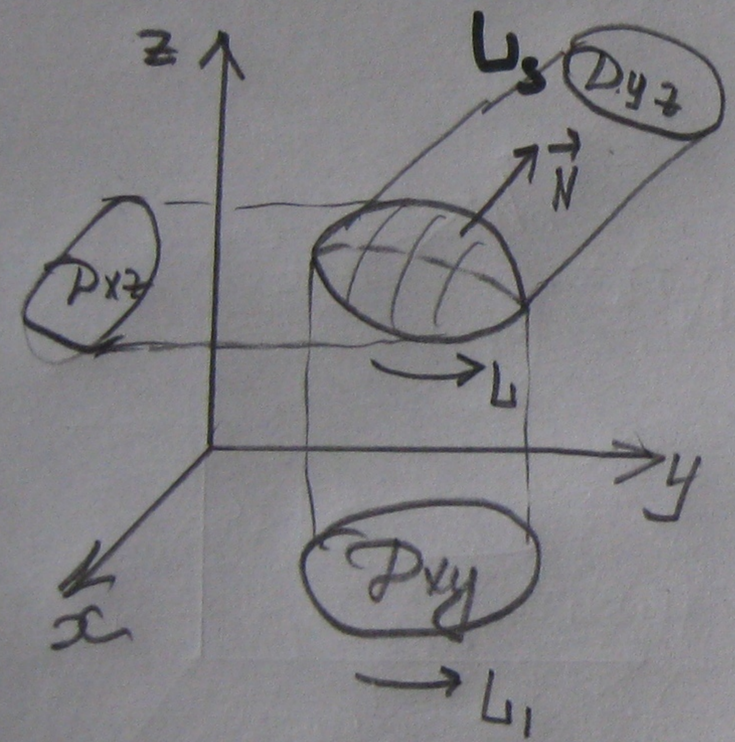
$Q = 6 + 81 - = AP \cdot \frac{E}{2} -$

Формула Стокса

связь пов. и крив. II рода по замкн. кривой

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dx\,dz=$$

$$=\oint_L P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$$



Д-во:

Рассм. ф-цию $P(x,y,z)$, кот. P'_x и P'_z

$$\underbrace{\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dx\,dz-\frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy}=\oint_L P(x,y,z)\,dx=$$

$$=\oint_{L_1} P(x,y,z(x,y))\,dx=\iint_D\left(0-\frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=-\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy=-\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\gamma\,ds$$

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = -\frac{\partial z}{\partial x} : -\frac{\partial z}{\partial y} : 1 \Rightarrow -\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

Тогда

$$-\iint\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\gamma\, ds = -\iint \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\left(-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma\, ds =$$

$$= -\iint_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\, ds - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\, ds = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\, ds - \iint_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\, ds =$$

$$= \iint \frac{\partial P}{\partial z}\, dx\, dz - \iint_S \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy \Rightarrow$$

$$\oint_L P(x,y,z)\, dx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\, dx\, dz - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

Аналогично $\oint_L Q(x,y,z)\, dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\, dy\, dz$;

$$\oint_L R(x,y,z)\, dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\, dy\, dz - \frac{\partial R}{\partial x}\, dx\, dz$$

Складывая почленно, получим ф-лу Стокса

Формула Стокса – связь между поверхностными и криволинейными интегралами II рода пример

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dx+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dx\,dz=$$

$$=\oint_{L_S} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$$

$$I=\oint_L x^2y^3\,dx+dy+z\,dz$$

$L:\ x^2+y^2=R^2$

S - полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

Непосредственно

$x=R\cos t\ ;\ y=R\sin t\ ;\ z=0$

$t\in[0;2\pi]$

$P=x^2y^3 \quad \frac{\partial P}{\partial z}=0\ ;\ \frac{\partial P}{\partial y}=3x^2y^2$

$Q=1 \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=0$

$R=z \quad \frac{\partial R}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial R}{\partial y}=0$

$$I=\iint_S (0-0)\,dy\,dz+(0-0)\,dx\,dz+(0-3x^2y^2)\,dx\,dy$$

$$=-3\iint_D x^2y^2\,dx\,dy=-3\iint_D \rho^5\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^R\rho^5\,d\rho=$$

$$=-\frac{3}{6}R^6\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\,d\varphi=-\frac{1}{8}R^6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi$$

$$=-\frac{R^6}{16}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}+0=-\frac{\pi R^6}{8}$$

$$I=\int_0^{2\pi}R^2\cos^2 t\cdot R^3\sin^3 t\,(-R\sin t)\,dt+\int_0^{2\pi}R\cos t\,dt$$

$$=-R^6\int_0^{2\pi}\sin^4 t\cos^2 t\,dt+0=$$

$$=-R^6\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt$$

$$=-\frac{R^6}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt+\frac{R^6}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\cos 2t\,dt$$

$$=-\frac{R^6}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt+0=-\frac{R^6}{16}2\pi=-\frac{\pi R^6}{8}$$

по ф. Стокса