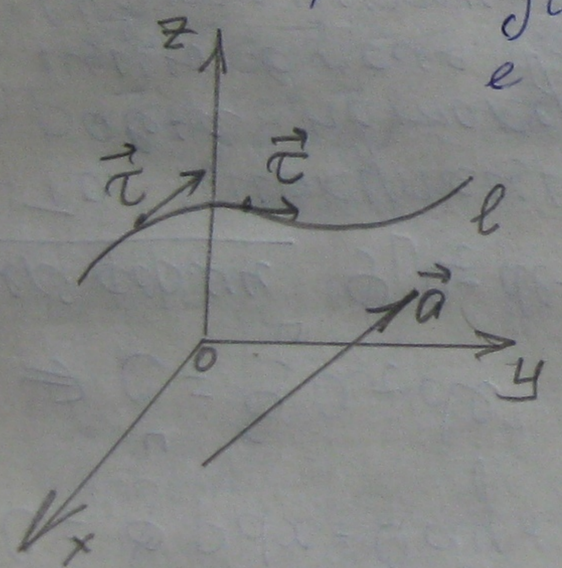
Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру. Вихрь векторного поля. Векторная форма теоремы Стокса. (вспом плоского поля – формула Грина)

∃ в поле вектора $\vec{a}$ лежит кривая L, имеющая в каждой своей точке касательный вектор $\vec{\tau}$. (не путать с векторной линией)

Обозначим $a_\tau = Пр_{\vec{\tau}} \vec{a}$. Тогда криволинейный интеграл $\int_l a_\tau dl$ наз. <u>линейным интегралом</u>.



Если кривая L замкнута, то

$C = \oint_L a_\tau dl$ наз. <u>циркуляцией</u> векторного поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру

$a_\tau dl = Пр_{\vec{\tau}} \vec{a} \cdot dl = \vec{a} \cdot d\vec{l} = (\vec{a} = (P, Q, R)) \cdot (d\vec{l} = (dx, dy, dz))$

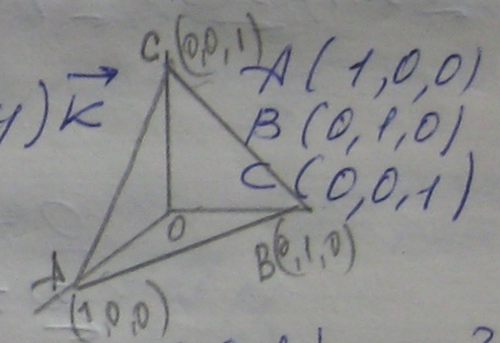
$= P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$

тогда $\oint_L a_\tau dl = \oint_L P dx + Q dy + R dz = \oint_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dl$

II рода I рода

Физический смысл циркуляции: если кривая L расположена в силовом поле, то циркуляция — это работа силы $\vec{a}(M)$ поля $\vec{a}$ при перемещении материальной точки M вдоль L.

Вдоль замкнутых векторных линий циркуляция отлична от нуля, потому что в каждой точке векторной линии скалярное произведение $\vec{a}\cdot d\vec{r}$ сохраняет знак: „+", если направление $\vec{a}$ совп. с напр. обхода векторной линии; „−", если противоположное



<u>пример</u> $\vec{a} = (x-2z)\vec{i} + (x+3y+z)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$

$$C = \oint_L = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$$

AB: $x+y=1$; $z=0$; $dz=0$ $\Rightarrow$ $\int_{AB} = \int_1^0 (x-0)\,dx + (x+3-3x+0)(-dx) + 0 = \frac{3}{2}$

BC: $y+z=1$; $x=0$; $dx=0$ $\Rightarrow$ $\int_{BC} = \int_1^0 (0-2+2y)\cdot 0 + (0+3y+1-y)\,dy + (0+y)(-dy) = -\frac{3}{2}$

CA: $x+z=1$; $y=0$; $dy=0$ $\Rightarrow$ $\int_{CA} = \int_0^1 (x-2+2x)\,dx + 0 + (5x+0)(-dx) = -3$

$$C = \oint_{ABCA} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3$$

Ротор поля (вихрь) – это вектор $\vec{rot}\,\vec{a}(M)$, который определяется формулой

$$\vec{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

или в векторной форме

$$\vec{rot}\,\vec{a}(M) = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

Свойства ротора:

1) Если $\vec{a}$ – постоянный вектор, то $\vec{rot}\,\vec{a} = \vec{0}$
2) $\vec{rot}\,(c\cdot\vec{a}) = c\cdot\vec{rot}\,\vec{a}$, где $c = const$
3) $\vec{rot}\,(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{rot}\,\vec{a} + \vec{rot}\,\vec{b}$
4) U – скаляр, $\vec{a}$ – вектор $\Rightarrow$ $\vec{rot}(U\vec{a}) = U\,\vec{rot}\,\vec{a} + \vec{grad}\,U \times \vec{a}$

$$U\vec{a} = \{UP;\ UQ;\ UR\}$$

$$\vec{rot}\,U\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ UP & UQ & UR \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(UR)}{\partial y} - \frac{\partial(UQ)}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial(UP)}{\partial z} - \frac{\partial(UR)}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(UQ)}{\partial x} - \frac{\partial(UP)}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= U\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(R\frac{\partial U}{\partial y} - Q\frac{\partial U}{\partial z}\right)\vec{i} + U\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(P\frac{\partial U}{\partial z} - R\frac{\partial U}{\partial x}\right)\vec{j} + U\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} + \left(Q\frac{\partial U}{\partial x} - P\frac{\partial U}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\vec{grad}\,U \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= U\,\vec{rot}\,\vec{a} + \vec{grad}\,U \times \vec{a}$$

Функция векторного аргумента. Связь криволин.

$$+ U\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\vec{k} + \left(Q\frac{\partial U}{\partial x} - P\frac{\partial U}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad \begin{vmatrix} P & Q & R \end{vmatrix}$$

Применяя формулу Стокса (связь криволин. интеграла II по замкн. контуру и пов. инт-ла), можно записать:

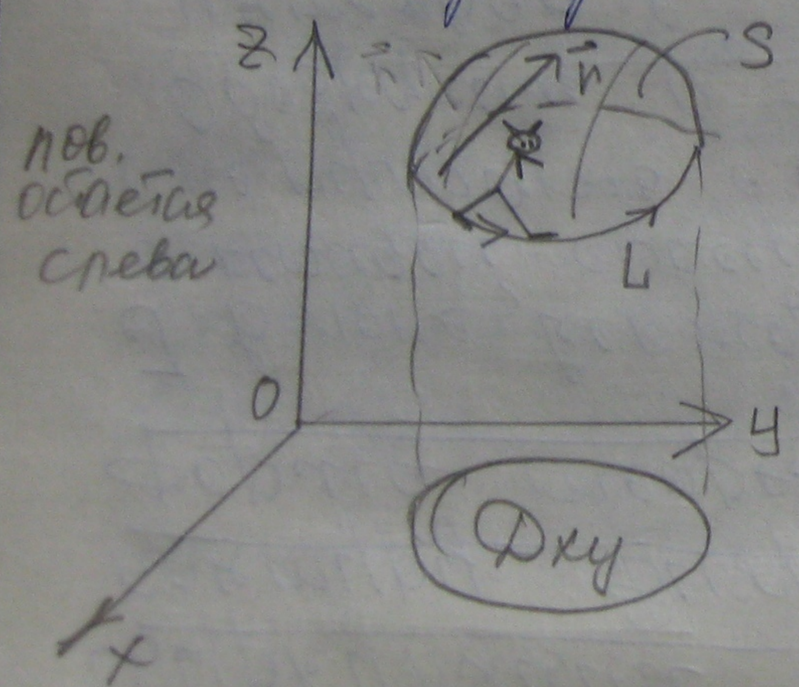
$$C = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$\Rightarrow C = \oint_L a_\tau\,dl \Rightarrow \oint_L a_\tau\,dl = \iint_S \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{a}\,dS}_{\text{векторная форма ф. Стокса}}$$

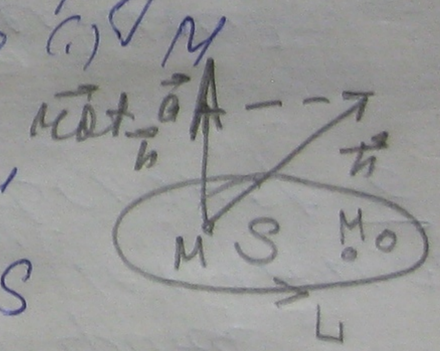
т.о. вихрь не зависит от выбора коорд. осей

<u>Вект. форма</u> $\oint_L a_\tau\,dl = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{a})\cdot\vec{n}\,dS$

Т.о. циркуляция вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L равна потоку вектора $\vec{a}$ через поверхность S, лежащую в поле вектора $\vec{a}$ и ограниченную контуром L (натянутую на контур)



Рассмотрим достаточно малую плоскую площадку S с контуром L, содержащую (.) M



по т. о среднем для пов. интеграла имеем

поток вихря $\iint_S \mathrm{rot}_{\vec{n}}\,\vec{a}\,dS = \mathrm{rot}_{\vec{n}}\,\vec{a}(M_0)\cdot S$

тогда $\oint_L a_\tau\,dl = \mathrm{rot}_{\vec{n}}\,\vec{a}\cdot S \Rightarrow$

$$\mathrm{rot}_{\vec{n}}\,\vec{a}(M) = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_L a_\tau\,dl$$

проекция вихря на напр. равна пределу отнош. циркуляции $\perp S$

Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ по замкнутому контуру L, помещающемуся при пересечении плоскости $\frac{}{4}$ с координатными плоскостями, разными способами:

1. Непосредственно:
   а) с пом. крив. инт. I рода; б) с пом. крив. инт. II рода
2. С пом. теоремы Стокса выразив поток вихря ~~а) выразив~~ векторного поля через поверхностный интеграл а) I рода; б) II рода.

Итак 1. : $C = \oint_L a_\tau dl$, dl - диф-л дуги кривой; $a_\tau = пр_{\vec{\tau}}\vec{a}$ - проекция векторного поля $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{\tau}$ - касательного к кривой L. Этот касательный вектор образует с координатными осями Ox, Oy, Oz углы α, β, γ. Тогда $a_\tau = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$

Отсюда циркуляция - криволин. инт-л I рода

$$C = \oint_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl$$

Принимая во внимание связь между криволинейным инт-лом I и II рода, получим выражение для циркуляции через крив. инт-л II рода

$$C = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Задание 2 вып. с пом. ф. Стокса, связывающую циркуляцию поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру L с поверхностным интегралом от ротора векторного поля $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ по поверхности S, натянутой на L.

$$\oint_L a_r\,dl = \iint_S \mathrm{rot}_{\vec{n}}\,\vec{a}\,dS$$; dS - диф-л площади поверхности

а) через пов. инт-л I рода

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$C = \iint_S \mathrm{rot}_{\vec{n}}\,\vec{a}\,dS = \iint_S \left((\mathrm{rot}\,\vec{a})_x \cos\alpha + (\mathrm{rot}\,\vec{a})_y \cos\beta + (\mathrm{rot}\,\vec{a})_z \cos\gamma \right) dS$$

б) через пов. инт-л II рода

$$\iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{a})_x\,dy\,dz + (\mathrm{rot}\,\vec{a})_y\,dx\,dz + (\mathrm{rot}\,a)_z\,dx\,dy$$

Дано: $\vec{a} = x\vec{i} + \vec{j} + zx\vec{k}$

π: $2x + 3y + z = 6$

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 16$

1. а) через криволинейный инт-л I рода

$P(x,y,z) = x$; $Q(x,y,z) = 1$; $R(x,y,z) = zx$

$$C = \int_{ABCA} (x\cos\alpha + 1\cdot\cos\beta + zx\cos\gamma)\,dl$$

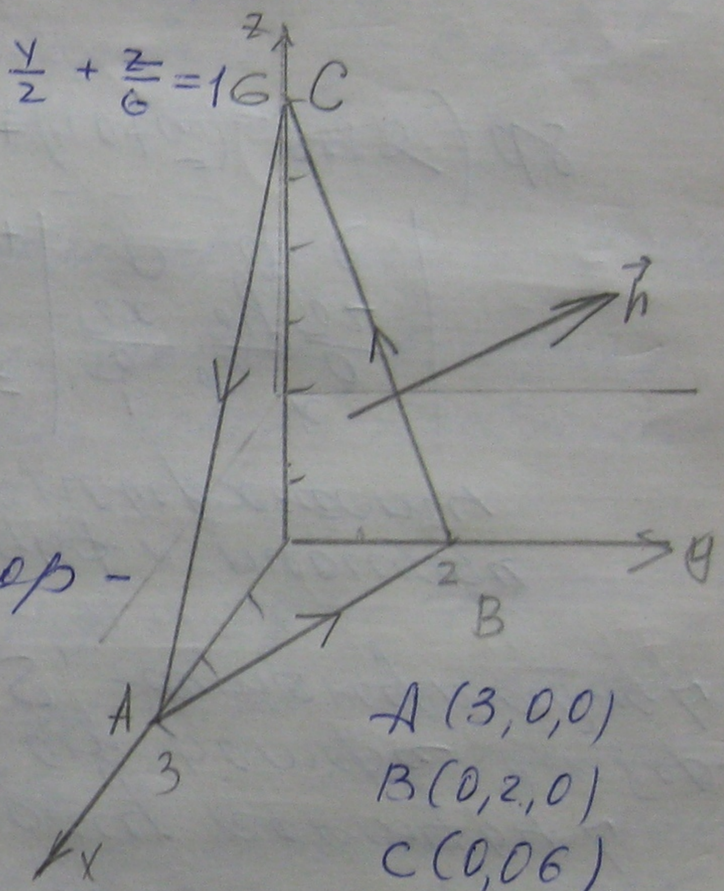
$$C = C_1 + C_2 + C_3 = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$$

$$C_1 = \int_{AB} (x\cos\alpha + 1\cdot\cos\beta + zx\cos\gamma)\,dl$$

AB – отрезок, касательный вектор – сам отрезок $\vec{AB} = (-3;2;0)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{13}}$; $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos\gamma = \frac{0}{\sqrt{13}}$



A (3,0,0)

B (0,2,0)

C (0,0,6)

для dl напишем параметрические уравнения AB, проходящей через (.) A(3,0,0) и напр. вектором (-3;2;0)

$\frac{x-3}{-3} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{0} = t$; $x = -3t + 3$; $y = 2t + 0$; $z = 0t + 0 = 0$

$$dl = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\,dt = \sqrt{(-3)^2 + (2^2) + 0}\,dt = \sqrt{13}\,dt$$

окончательно имеем: $C_1 = \int_0^1 \left[(3-3t)\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + \frac{2}{\sqrt{13}} + 0(3-3t)\cdot 0\right]\sqrt{3}\,dt$ (8)

$= \int_0^1 (-9+9t+2)\,dt = \left(-7t+\frac{9t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = -7+\frac{9}{2} = -\frac{5}{2} = -2,5$

Аналогично $C_2 = \int (x\cos\alpha + 1\cdot\cos\beta + z\cos\gamma)\,dl$

BC : $\vec{BC} = (0;-2;6)$; $\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{40}}$; $\cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{40}}$; $\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{40}}$

$|\vec{BC}| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

BC: $\frac{x-0}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-0}{6}$; $\frac{x}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{6}$

$x = 0\cdot t + 0$; $y = -2t+2$; $z = 6t+0$ $\quad t\in[0,1]$

$dl = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt = \sqrt{0+(-2)^2+6^2}\,dt = \sqrt{40}\,dt$

$C_2 = \int_0^1 \left(0\cdot 0 - \frac{2}{\sqrt{40}} + 6t\cdot 0\cdot\frac{6}{\sqrt{40}}\right)\sqrt{40}\,dt = \int_0^1 -2\,dt = -2t\Big|_0^1 = -2$

$C_3 = \int (x\cos\alpha + 1\cos\beta + z\cos\gamma)\,dl$

CA : $\vec{CA} = (3,0,-6)$; $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{45}}$; $\cos\beta = \frac{0}{\sqrt{45}}$; $\cos\gamma = \frac{-6}{\sqrt{45}}$

CA: $\frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-6}{-6} = t$; $x = 3t$; $y = 0$; $z = -6t+6$

$dl = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt = \sqrt{9+36}\,dt = \sqrt{45}\,dt$

$C_3 = \int_0^1 \left(3t\frac{3}{\sqrt{45}} + 0 + (6-6t)3t\left(-\frac{6}{\sqrt{45}}\right)\right)\sqrt{45}\,dt = \int_0^1 (9t-108t+108t^2)\,dt = -13,5$

$C = C_1 + C_2 + C_3 = -2,5 - 2 - 13,5 = \boxed{-18}$

1б) Вычислим циркуляцию с помощью крив. инт. II

$$C = \oint_{ABCA} x\,dx + dy + zx\,dz = \left\{ \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{AC} \right\} \left[x\,dx + dy + zx\,dz \right]$$

$$C_1 = \int_{AB_1} x\,dx + dy + zx\,dz = \left[\begin{array}{ll} x(t) = 3-3t & dx = -3dt \\ y(t) = 2t & dy = 2dt \\ z(t) = 0 & dz = 0dt \end{array} \right. \quad t \in [0,1]$$

$$= \int_0^1 \left((3-3t)(-3) + 2 + 0 \cdot (3-3t) \cdot 0 \right) dt = \int_0^1 (-7+9t)\,dt = -2,5$$

$$C_2 = \int_{BC_1} x\,dx + dy + zx\,dz = \left[\begin{array}{ll} x(t) = 0; & dx = 0dt \\ y(t) = 2-2t, & dy = -2dt \\ z(t) = 6t, & dz = 6dt \end{array} \right. \quad t \in [0,1]$$

$$= \int_0^1 (0 \cdot 0 - 2 + 6t \cdot 0 \cdot 6)\,dt = \int_0^1 (-2)\,dt = -2$$

$$C_3 = \int_{CA_1} x\,dx + dy + zx\,dz = \left[\begin{array}{ll} x(t) = 3t & ; dx = 3dt \\ y(t) = 0 & ; dy = 0dt \\ z(t) = 6-6t & ; dz = -6dt \end{array} \right. \quad t \in [0,1]$$

$$= \int_0^1 3t \cdot 3 + 0 + (6-6t)\,3t\,(-6)\,dt = -13,5$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = -2,5 - 2 - 13,5 = \boxed{-18}$$

2) Проверим циркуляцию с помощью ф-лы Стокса

Вычислим $\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 1 & xz \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial(zx)}{\partial y} - \frac{\partial(1)}{\partial z}\right) -$

$-\vec{j}\left(\frac{\partial(zx)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(1)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial y}\right) = 0\vec{i} - z\vec{j} + 0\vec{k} = (0;-z;0)$

Тогда:

а) выражение для циркуляции через поверхностный интеграл I рода будет:

$$C = \iint\limits_S (0\cdot\cos\alpha - z\cos\beta + 0\cos\gamma)\,dS = -\iint\limits_S z\cos\beta\,dS$$

Вычислим $\cos\beta$. Нормаль к поверхности $2x+3y+z=6$ $\vec{N} = (2;3;1)$. Направляющие косинусы:

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$; $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$

Обход контура $ABCA$ – против часовой стрелки. Направление вектора $\vec{n}$ совпадает с направлением $\vec{N}$ потому $C = -\iint\limits_S z\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}\,dS$ – выразим через двойной по области D_{xz}

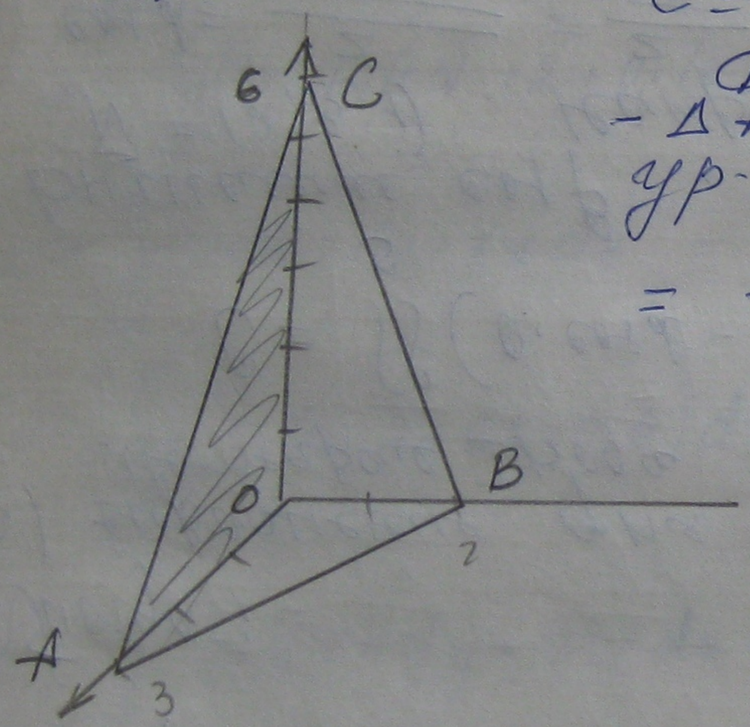
D_{xz} – проекция ΔABC на xOz. Здесь $y = \frac{6-2x-z}{3}$

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\,dz = \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2}{3};\ \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{1}{3}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + 1 + \frac{1}{9}}\, dx\,dz = \frac{\sqrt{14}}{3}\, dx\,dz$$

Следовательно

$$C = \iint\limits_{D_{xz}} \left(-z\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\frac{\sqrt{14}}{3}\, dx\,dz = -\iint\limits_{D_{xz}} z\, dx\,dz =$$



– ΔAOC

ур-е прямой AC: $2x + z = 6$ $\quad x = -\frac{z}{2} + 3$

$z = 6 - 2x$

$$= -\iint\limits_{D_{xz}} z\, dx\,dz = -\int_0^3 dx \int_0^{6-2x} z\, dz =$$

$$= -\int_0^3 dx\left[\frac{(6-2x)^2}{2}\right] dx = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(6-2x)^3}{3}\Bigg|_0^3$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}(-216) = -\frac{72}{4} = -18$$

2 б) Через поверхностный интеграл II рода

$$C = \iint\limits_{C} 0\,dy\,dz - z\,dx\,dz + 0\,dx\,dy = -\iint\limits_{S} z\,dx\,dz = -\iint z\,dx\,dz = -18$$

D_x совпадает с пов. I

т.к. $\vec{n} = (2;3;1)$ к S образует острый угол β с Oy.

Векторные дифференциальные операции первого порядка.

Применяем оператор Гамильтона $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ к комбинациям скалярных и векторных функций.

1. $\vec{\nabla} u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \overrightarrow{grad}\, u$

2. $\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = div\,\vec{a}$

3. $\vec{\nabla}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overrightarrow{rot}\,\vec{a}$

Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{e} = (\vec{e}\cdot\vec{\nabla})u$

$\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Характеристики векторных полей

Векторное поле вектора наз. соленоидальным, если во всех точках его дивергенция равна нулю, $\operatorname{div}\vec{a}=0$

Свойства соленоидального поля

1. Поток вектора через любую замкнутую поверхность равен 0, т.е. не имеет источников и стоков.
2. Соленоидальное поле является полем ротора (вихря) некоторого векторного поля, т.е. если $\operatorname{div}\vec{a}=0$, то $\exists$ такое поле $\vec{b}$, что $\vec{a}=\operatorname{rot}\vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ наз. векторным потенциалом поля $\vec{a}$

$$\operatorname{div}\vec{a}=0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{a}=0 \;;\; \vec{a}=\operatorname{rot}\vec{b} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\operatorname{rot}\vec{b}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b})=0$$, т.к. два $\vec{\nabla}$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{b}=0$$

3. В соленоидальном поле $\vec{a}$ поток вектора через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значение (называемое интенсивностью трубки)

Векторное поле наз. потенциальным (безвихревым) (градиентным), если во всех его точках ротор $= 0$ $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$

Свойства потенциального поля

1) Циркуляция потенциального поля $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру равна 0. (в потоке нет водоворотов)

$$C = \oint a_\tau dl = 0$$

2) В потенциальном поле $\vec{a}$ криволинейный инт-л $\int P dx + Q dy + R dz$ вдоль любой кривой L с началом в точке M_1 и концом в точке M_2 зависит только от положения точек M_1 и M_2 и не зависит от формы кривой (вытекает из свойства 1)

3) Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции $U(x,y,z)$. Т.е., если $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, то $\exists\, U(x,y,z)$: $\vec{a} = \operatorname{grad} U$

Т.о. для того, чтобы поле вектора $\vec{a}$ было потенциальным н. и д., чтобы $\vec{a} = \operatorname{grad} U$

Доказательство

<u>Достаточность</u> $\exists\, \vec{a} = \operatorname{grad} U$, т.е. $\vec{a} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

т.е. $P(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}$; $Q(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}$; $R(x,y,z) = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}$

Найдем координаты вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$

$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$; $\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) = 0$; $\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$;

$= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$

$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, т.о. $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ – полный диф-л и $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$

<u>Необходимость</u> $\exists \operatorname{rot}\vec{a} = 0 \Rightarrow \iint_S (\operatorname{rot} a)_{\vec{n}}\, dS = 0 \Rightarrow \int_L a_\tau\, dl = 0$

$\Rightarrow \int_L a_\tau\, dl = \int P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \Rightarrow$ под знаком ~~интег~~-ла полный дифференциал

Т.о. поле вектора $\vec{a}$ наз. потенциальным, если оно является полем градиента некоторого скаляра U потеградиента – безвихревое

$\exists\, \vec{a} = \operatorname{grad} U$, тогда безвихревое, если $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$

$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U) = 0$, т.к. 2 оператора ∇

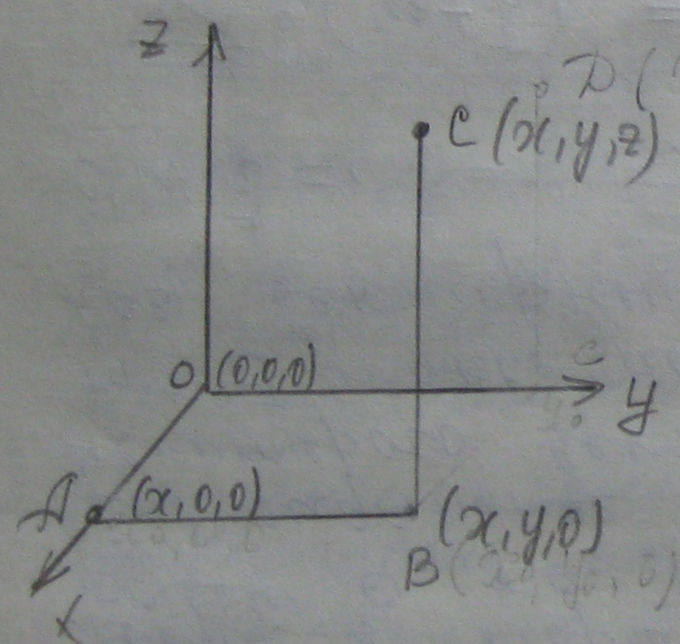
$= (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) U$

Пр. Установить потенциальность поля и найти его потенциал

$\vec{F}(z-2x;\ z-2y;\ x+y)$ $\quad \operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z-2x & z-2y & x+y \end{vmatrix} =$

$= \vec{i}\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial y} - \frac{\partial(z-2y)}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x} - \frac{\partial(z-2x)}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(z-2y)}{\partial x} - \frac{\partial(z-2x)}{\partial y}\right) =$

$= (1-1)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (0-0)\vec{k} = \vec{0}$ — потенциальное



$U(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (z-2x)\,dx + (z-2y)\,dy + (x+y)\,dz + C$

OA: $y=0;\ z=0$; $dy=0;\ dz=0$ $\quad I_{OA} = \int_0^x (z-2x)\,dx = -2\frac{x^2}{2}\Big|_0^x = -x^2$

AB: $x=const;\ z=0$; $dx=0;\ dz=0$ $\quad I_{AB} = \int_0^y (z-2y)\,dy = -y^2$

BC: $x=const;\ y=const$; $dx=0;\ dy=0$ $\quad I_{BC} = \int_0^z (x+y)\,dz =$

$= (x+y)\,z\Big|_0^z = (x+y)z$

$U(x,y,z) = I_{OA} + I_{AB} + I_{BC} = -x^2 - y^2 + xz + yz + C$

проверка: $\frac{\partial U}{\partial x} = -2x + z$; $\frac{\partial U}{\partial y} = -2y + z$; $\frac{\partial U}{\partial z} = x + y$

Вычислим потенциал непосредственным интегрированием, фиксируя точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и произвольную точку $M(x, y, z)$

$$U(x,y,z) = U(M) = \int\limits_{M_0M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Линию интегрирования (независ. от формы пути) выберем в виде ломаной $M_0M_1M_2M$, где $M_0M_1 \parallel Ox$; $M_1M_2 \parallel Oy$; $M_2M \parallel Oz$. Вдоль M_0M_1 имеем $y = y_0$, $z = z_0$ и $dy = dz = 0$. Вдоль M_1M_2 уже $x = const$ и $z = z_0$, т.е. $dx = dz = 0$, а вдоль M_2M x и y const, $dx = dy = 0$

Тогда $$U(M) = \int\limits_{x_0}^{x} P\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} R\,dz = U(x,y,z) + C$$

$U = xy^2z^3 + yz^2 + z + C$

$$\vec{F} = (y^2z^3;\ 2xyz^3 + z^2;\ 3xy^2z^2 + 2yz + 1)$$

$$\int_{x_0}^{x} y_0^2 z_0^3\,dx + \int_{y_0}^{y}\left(2xy\,z_0^3 + z_0^2\right)dy + \int_{z_0}^{z}\left(3xy^2z^2 + 2yz + 1\right)dz =$$

$$= y_0^2 z_0^3 x - y_0^2 z_0^3 x_0 + \left(2x\frac{y^2}{2}z_0^3 + z_0^2 y\right)\Big|_{y_0}^{y} + \left(3xy^2\frac{z^3}{3} + 2y\frac{z^2}{2} + z\right)\Big|_{z_0}^{z} =$$

$$= \cancel{y_0^2 z_0^3 x} - y_0^2 z_0^3 x_0 + \cancel{xy^2 z_0^3} - \cancel{xy_0^2 z_0^3} + \cancel{z_0^2 y} - z_0^2 y_0 + 3xy^2z^3 + yz^2 + z - \cancel{xy^2 z_0^3} - \cancel{yz_0^2} - z_0$$

$U = xy^2z^3 + yz^2 + z + C$ (все с 0 - конч)

Гармоническое поле (лапласово) если одновременно потенциальное и соленоидальное, т.е. $\operatorname{rot}\vec{a}=0$, $\operatorname{div}\vec{a}=0$

Т.к. $\vec{a}$ потенциальное, то его можно записать как

$\vec{a}=\operatorname{grad} U$, где $U=U(x,y,z)$ потенциал

т.к. поле одновременно и соленоидальное, то

$\operatorname{div}\vec{a}=0$, т.е. $\operatorname{div}\operatorname{grad} U=0$

$\vec{\nabla}\cdot\operatorname{grad} U=0$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}U)=0$, т.к. две ∇

$(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})U=0$

$\vec{\nabla}^2 U=0$ $\quad\Delta U=0$ – U-гармоническая ф-ция

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$$

ур-е Лапласа – лапласиан Δ

Теорема. Для того, чтобы поле градиента какой-либо скалярной ф-ции было соленоидальным н.и.д., чтобы эта ф-ция была гармонической

Д-во

Необходимость

Т поле градиента соленоидально, т.е. $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}U=0$, но

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}U=\Delta U$, т.е. $\Delta U=0 \Rightarrow U$ – гармоническая

Достаточность

Т ф-ция $U(x,y,z)$ – гармоническая, т.е. $\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$

но $\Delta U=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}U=\operatorname{div}\operatorname{grad} U$, т.е. соленоидально

Проверьте, что векторное поле $\vec{a} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ является соленоидальным