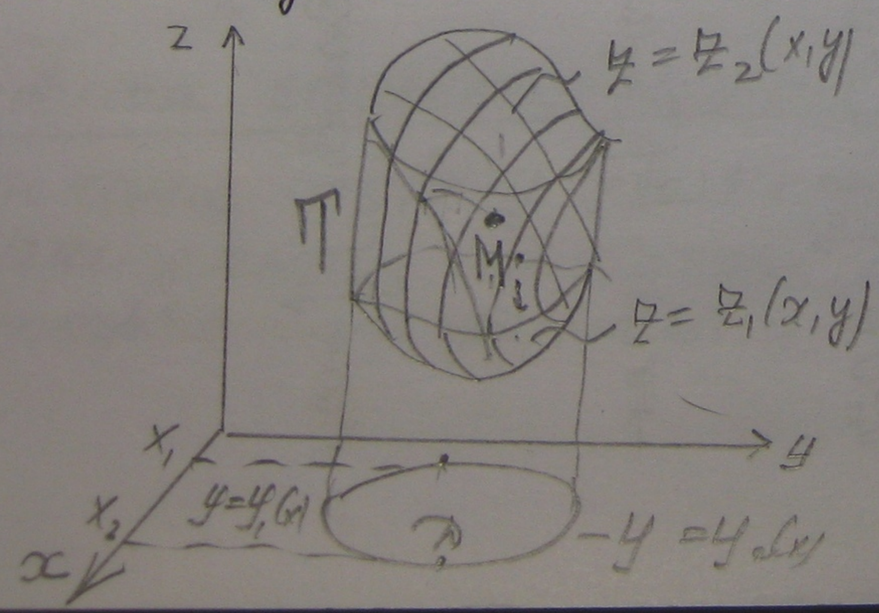
Тройной интеграл

Обобщение определенного интеграла на случай функций 3-х переменных. Теория тройного интеграла аналогична теории двойного интеграла

Рассмотрим некоторую поверхность S. Поверхность наз. простой если она распадается на конечное число частей, описываемых уравнениями $z = f(x,y)$, или $x = \varphi(y,z)$, или $y = \Psi(x,z)$, причем ф-ции f, φ и Ψ непрерывны в некоторой простой области D

Рассмотрим некоторое тело T, ограниченное простой поверхностью. Такие тела наз. кубируемыми, т.е. имеющими объем.

Пусть в каждой точке этого тела задана функция $u = f(x,y,z)$



Разобьем тело T простыми поверхностями на части $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_n$ с диаметрами $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots d_n$ и объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots \Delta V_n$ наибольший из диаметров — ранг дробления λ

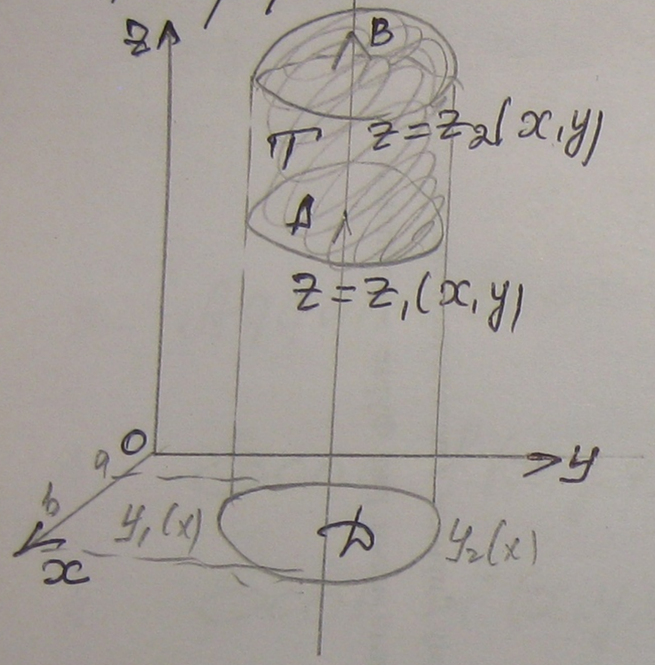
$$\lambda = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

1) В каждой частичной ячейке T_i возьмем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и вычислим в ней значение функции $f(x_i, y_i, z_i) = f(M_i)$; 2) Умножим это значение функции на объем соответствующей ячейки ΔV_i; 3) Составим произведение $f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$; 4) просуммируем эти произведения $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$; 5) Измельчая дробление, будем искать предел последовательности интегральных сумм. Если этот предел существует и не зависит от способа дробления и выбора точек M_i, то он наз. тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по телу T и обозначается

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sigma_n = \iiint_T f(M)\,dV = \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

<u>Теорема существования тройного интеграла</u>. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в каждой точке тела T, ограниченного простой поверхностью, то $\exists$ тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ по телу T

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.



Тело T - простая область, ограниченная снизу поверхностью $z=z_1(x,y)$, сверху поверхностью $z=z_2(x,y)$, причем z_1 и z_2 непрерывны в области D, являющейся проекцией тела на плоскость XOY.

Будем считать область T правильной в отношении оси OZ, т.е. любая прямая, ∥ OZ, пересекает границу области не более, чем в 2-х точках. Сбоку тело может быть ограничено цилиндрической поверхностью, образующие которой ∥ OZ, а направляющей служит граница простой области D, расположенной в пл. XOY.

Тогда можно записать

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\underbrace{dx\,dy\,dz}_{\text{или } dV} = \iint\limits_D \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]\underbrace{dx\,dy}_{\text{или } dS} =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Если D ограничена сверху $y_2(x)$; снизу $y_1(x)$ а сбоков $x=a$, $x=b$, то

Всего 6 случаев

3!

обл. T можно разбить

Свойства тройного интеграла

1. Линейность $\iiint\limits_T (c_1 f_1(x,y,z) \pm c_2 f_2(x,y,z))\,dV =$

$$= c_1 \iiint\limits_T f_1(x,y,z) \pm c_2 \iiint\limits_T f_2(x,y,z)$$

2. Аддитивность $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{T_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{T_2} f(x,y,z)\,dV$

3. Если $f(x,y,z) \geq 0 \Rightarrow \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dV \geq 0$

4. Если $f(x,y,z) \geq \varphi(x,y,z) \Rightarrow \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dV \geq \iiint\limits_T \varphi(x,y,z)\,dV$

5. $\iiint\limits_T dV = V$, если $f(x,y,z) = 1$

6. Оценка $m \leq f(x,y,z) \leq M \Rightarrow mV \leq \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dV \leq MV$

7. Т. о среднем $\exists\, M_0(x_0, y_0, z_0) \in T : \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dV = f(x_0,y_0,z_0) \cdot V$

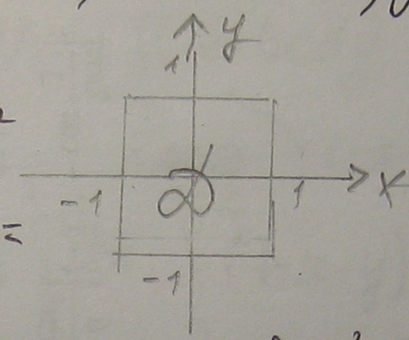
где $V = V_T$

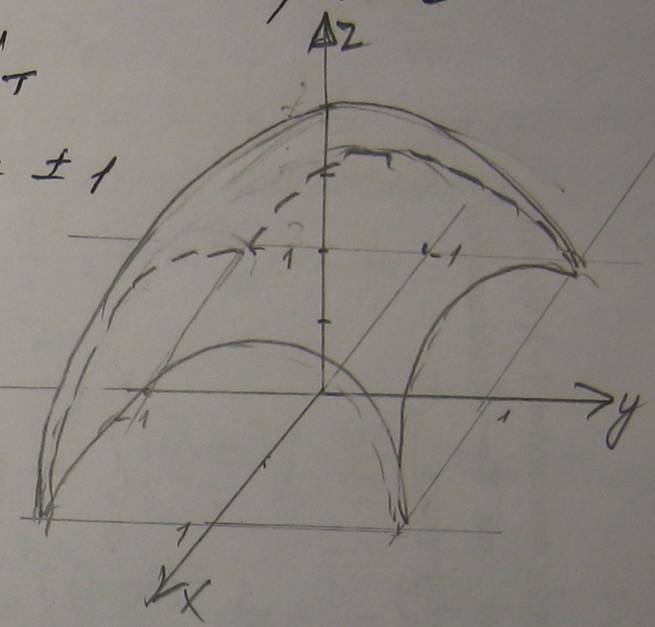
Геометрический смысл тройного интеграла

Если $f(x,y,z)=1$, то $\iiint\limits_T dx\,dy\,dz = V_T$

<u>пример</u> $z=2-x^2-y^2$; $z=0$; $x=\pm 1$; $y=\pm 1$

параболоид вращения





$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_0^{2-x^2-y^2} dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_0^{2-x^2-y^2} = \left[\int\limits_0^{2-x^2-y^2} dz = z\Big|_0^{2-x^2-y^2} = 2-x^2-y^2 \right.$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1} (2-x^2-y^2)\,dy = \int\limits_{-1}^{1} \left[2y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(\left(2-x^2-\frac{1}{3}\right) - \left(-2+x^2+\frac{1}{3}\right)\right) dx$$

$$= \int \left(2-x^2-\frac{1}{3}+2-x^2-\frac{1}{3}\right) dx = \int \left(4-2x^2-\frac{2}{3}\right) dx = \left(\frac{10x}{3} - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{10}{3}-\frac{2}{3}+\frac{10}{3}-\frac{2}{3}$$

$$4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$

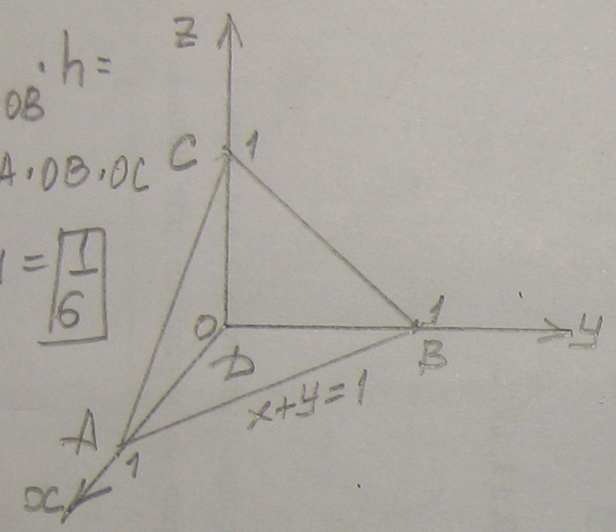
$$= \frac{20}{3}-\frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

Вычислим объем тела, ограниченного плоскостью $x+y+z=1$ и координатными плоскостями $x=0, y=0, z=0$ (6)

$V=\frac{1}{3}S_{\Delta AOB}\cdot h=$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot OC$

$=\frac{1}{6}1\cdot1\cdot1=\boxed{\frac{1}{6}}$



1) С пом. двойного интеграла, исходя из его геометрического смысла

$$V_T=\iint\limits_{D_{\Delta AOB}} \underbrace{z}_{1-x-y}\,dx\,dy=\iint\limits_{D}(1-x-y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy=\int_0^1\left[(1-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=$$

$$=\int_0^1\left((1-x)^2-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}\,dx=-\frac{(1-x)^3}{6}\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$

2) С помощью тройного интеграла, исходя из его геометрического смысла

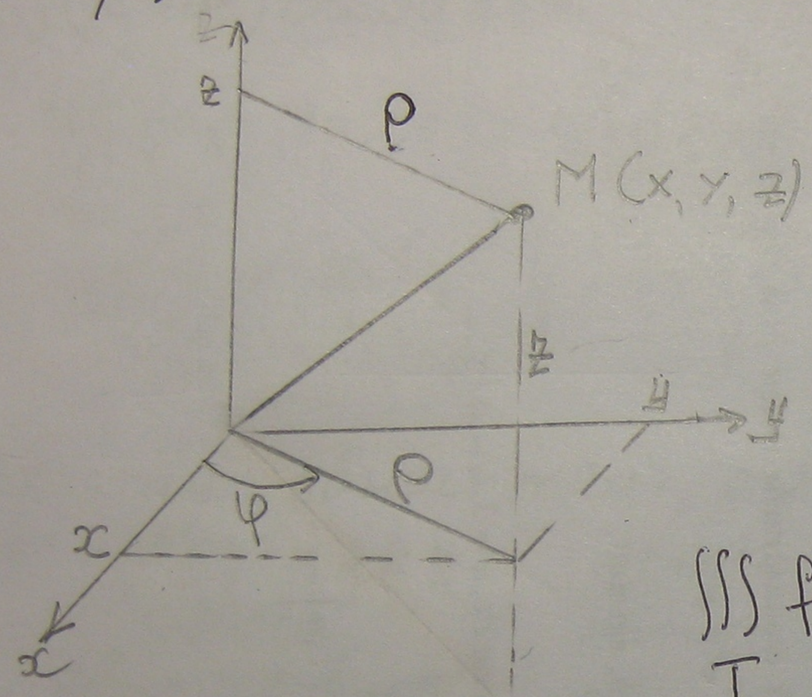
$$V_T=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz=\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy\int_0^{1-x-y}dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=$$

6 способов

$$=\begin{cases} I_3=\int_0^{1-x-y}dz=z\Big|_0^{1-x-y}=1-x-y \\ I_2=\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy=\left[(1-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}=\frac{(1-x)^2}{2} \\ I_1=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}=-\frac{(1-x)^3}{6}\Big|_0^1=\frac{1}{6}\end{cases}$$

$dx\,dy\,dz$
$dy\,dx\,dz$
$dy\,dz\,dx$
$dz\,dy\,dx$
$dx\,dz\,dy$

Цилиндрические координаты – обобщение полярных координат на плоскости: $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$



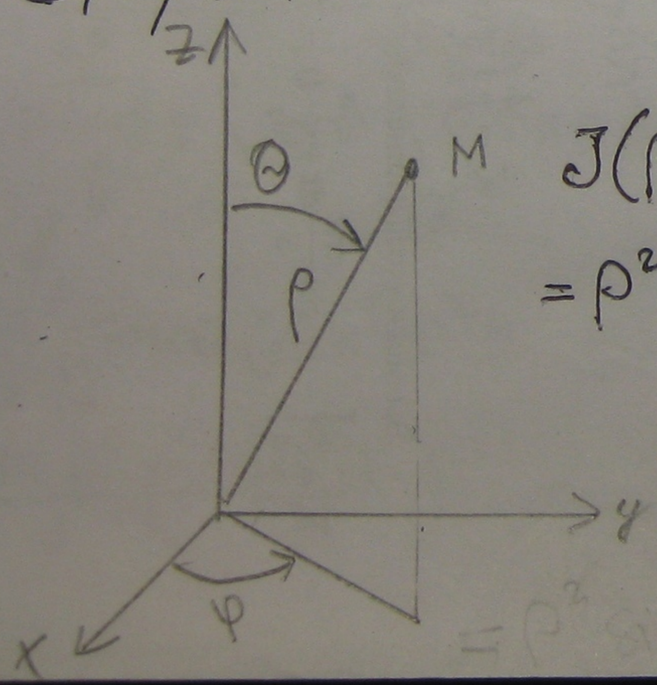
$$J(\rho,\varphi,z)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \begin{cases} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{cases}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \ge 0$$

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_T f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

Сферические координаты

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi \qquad \rho\ge 0$$
$$y=\rho\sin\theta\sin\varphi \qquad 0\le\varphi\le 2\pi$$
$$z=\rho\cos\theta \qquad 0\le\theta\le\pi$$



$$J(\rho,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

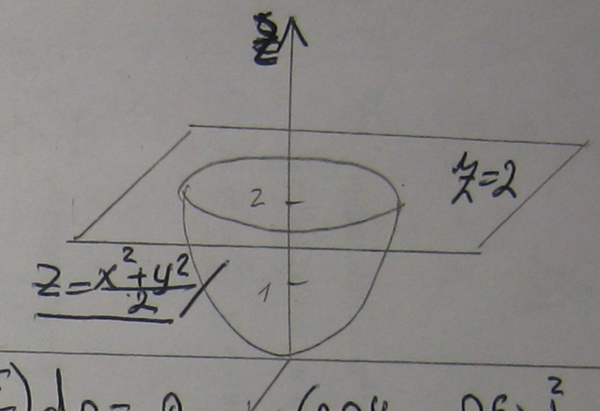
$$=\rho^2\sin\theta$$

$$=\cos\theta\left(\rho^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta\right)+$$
$$+\rho\sin\theta\left(\rho\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)=$$
$$=\cos\theta\,\rho^2\sin\theta\cos\theta+\rho\sin\theta\,\rho\sin^2\theta=\rho^2\sin\theta$$

Вычислить тройной интеграл в цилиндрических координатах

(8)

$$\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \quad T:\ z=2\ ;\ 2z = x^2+y^2$$



$$= \iiint\limits_T \rho^2 \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2} dz =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 d\rho \cdot \left(z\Big|_{\frac{\rho^2}{2}}^{2} \right) = 2\pi \int_0^2 \rho^3 \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho = 2\pi \int_0^2 \left(2\rho^3 - \frac{\rho^5}{2}\right) d\rho = 2\pi \times \left(\frac{2\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{12}\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{3}\pi$$

Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

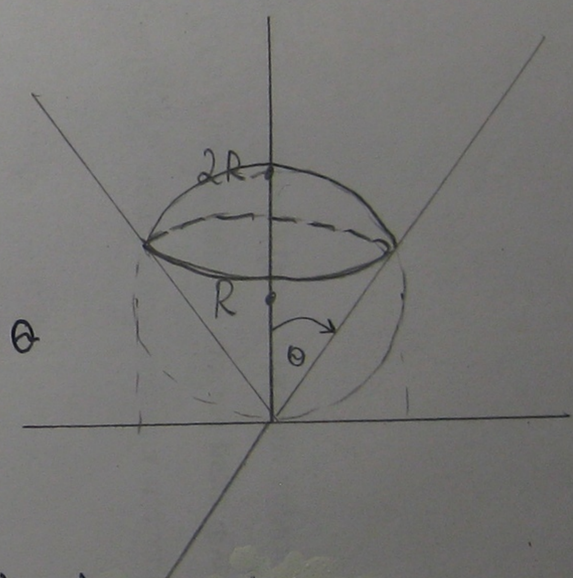
$x^2+y^2+z^2 = 2Rz$; $x^2+y^2 = z^2$

сфера | конус

$\rho^2 = 2R\rho\cos\theta$ | $\rho^2\sin^2\theta = \rho^2\cos^2\theta$

$\rho = 2R\cos\theta$ | $\sin\theta = \pm\cos\theta$

$\theta = \frac{\pi}{4}$



$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho^2 \sin\theta\, d\rho = 2\pi \int_0 \sin\theta\, d\theta \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^{2R\cos\theta} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \left(8R^3\cos^3\theta - 0\right) d\theta = \frac{2\pi}{3} \cdot 2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^3\theta \sin\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3}\left(-\frac{\cos^4\theta}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi R^3}{3}\left(-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{3}{4} = \pi R^3$$

Сфера $x^2+y^2+z^2=4$ и параболоид $x^2+y^2=3z$ $\rho^2=3z$

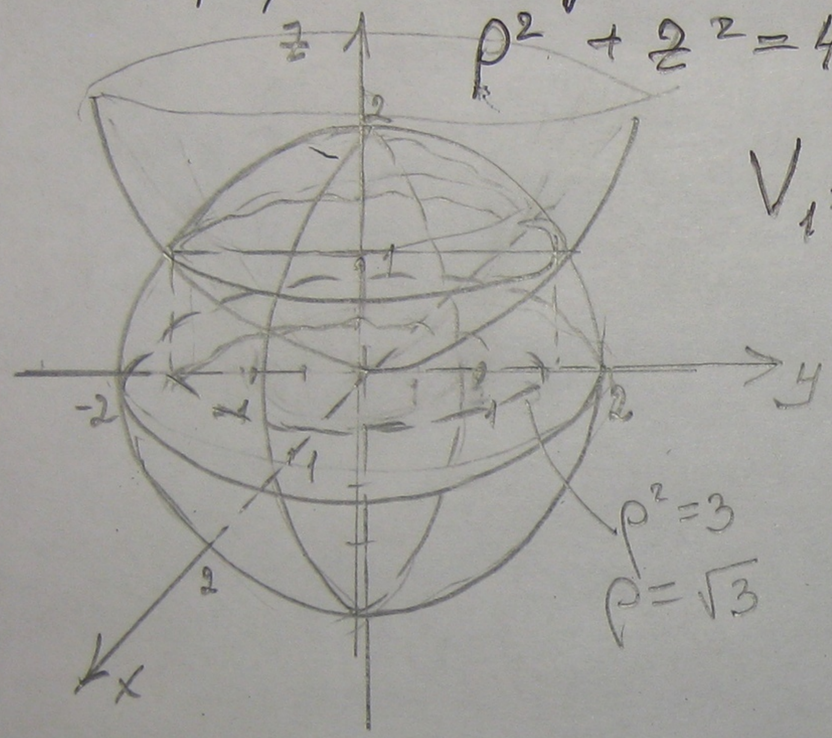
$\rho^2+z^2=4$ $z=\sqrt{4-\rho^2}$

линия пересечения $z=\frac{\rho^2}{3}$

$z^2+3z=4$

$z^2+3z-4=0$

$-4;\ 1$ $z=1\ (z\geq\rho)$



$$V_1=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\,d\rho\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}}dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-\rho^2}\,\rho-\frac{\rho^3}{3}\right)d\rho=$$

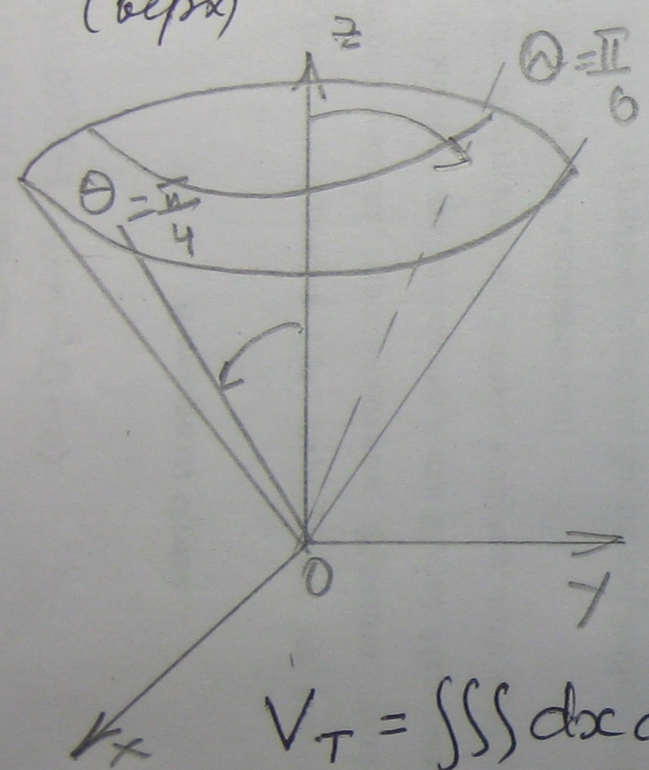
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(-\frac{1}{2}(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}-\frac{\rho^4}{12}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-\frac{9}{12}\right)d\varphi=\frac{19}{6}\pi$$

$$V_2=V_{шара}-V_1=\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3-\frac{19}{6}\pi=\frac{15}{2}\pi$$

$z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$; $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$

конус (верх) конус (верх) сфера – верхняя полуф.



сферические координаты

1) конус $z = \sqrt{x^2+y^2}$

$\rho\cos\theta = \rho|\sin\theta| \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

2) конус $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$

$\rho\cos\theta = \sqrt{3}\,\rho|\sin\theta| \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

3) сфера $z = \sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow \rho = 2$

$$V_T = \iiint_T dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^2 \rho^2 \sin\theta\, d\rho$$

$$I_1 = \int_0^2 \rho^2 \sin\theta\, d\rho = \sin\theta \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}\sin\theta$$

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{3}\sin\theta\, d\theta = \frac{8}{3}(-\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}\cdot 4$$

$$V_T = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}\cdot 4\, d\varphi = \frac{8\pi}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$