문제 1. 지수함수 $y = (a^2 + a - 5)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 이때 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

$$a^2 + a - 5 > 1$$

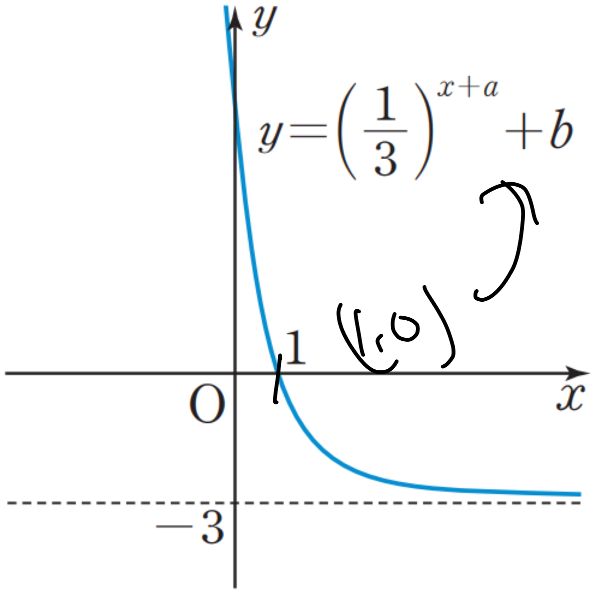
$$a^2 + a - 6 > 0$$

$$-2$$

$$3$$

$$\boxed{a < -3 \text{ or } a > 2.}$$

문제 2. 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+a}+b$의 그래프가 다음 그림과 같고 직선 $y=-3$이 이 그래프의 점근선일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.



$y = 3^{-(x+a)} + b$

i) $b = -3$

ii) $0 = 3^{-(1+a)} - 3$

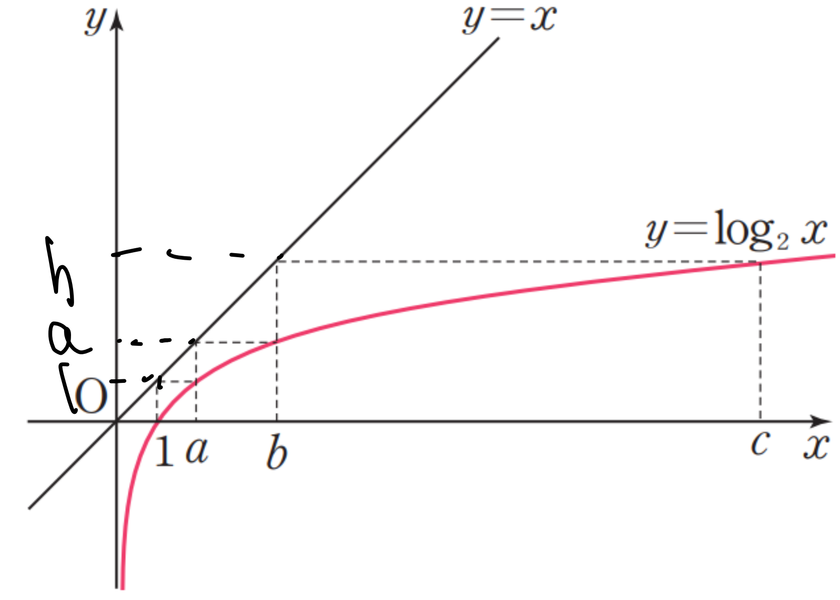
$3^1 = 3^{-(1+a)}$

$1 = -(1+a)$

$1 = -1 - a$

$\therefore a = -2$

문제 3. 다음 그림은 함수 $y = \log_2 x$의 그래프와 직선 $y = x$이다. 이때 $a + b + c$의 값을 구하시오. (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



ii) $a = \log_2 b$

$2 = \log_2 b$

$b = 2^2 = 4$

iii) $b = \log_2 c$

$4 = \log_2 c$

$c = 2^4 = 16$

i) $1 = \log_2 a$

$a = 2^1$

$\therefore a + b + c = 2 + 4 + 16$

$= 22$.

문제 4. 함수 $y = \log_3(x-2)+3$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 함수 $y = \log_3(3x-9)$의 그래프와 일치할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

$$y = \log_3(x-2)+3 \xrightarrow[y,\ b]{x,\ a} y-b = \log_3((x-a)-2)+3$$

$$y = \log_3(x-(a+2))+3+b$$

$$y = \log_3(3x-9) = \log_3 3(x-3)$$

$$= \log_3 3 + \log_3(x-3)$$

$$= \log_3(x-3)+1$$

$a = 1$

$b = -2$

문제 5. 다음 세 수의 대소를 비교하시오.

(1) $2\sqrt{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $8^{\frac{1}{6}}$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$, $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}$, $2\log_4 3$

(1) $2^{\frac{3}{2}}$ 2^{2} $2^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2} < \frac{3}{2} < 2$

$2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{2}$ (∵밑>1)

$\boxed{8^{\frac{1}{6}} < 2\sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$

(2) $\log_{2^{-1}} 3^{\frac{1}{2}}$, $\log_{2^{-2}} 3^{-1}$, $2\log_{2^2} 3$

$\log_2 3^{-\frac{1}{2}}$, $\log_2 3^{\frac{1}{2}}$, $\log_2 3$

$3^{-\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{2}} < 3^{1}$

$\boxed{\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3} < \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3} < 2\log_4 3}$

문제 6. 정의역이 $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$일 때, 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y = 3^{x-1} - 1$

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x+5) + 3$

(1) $y = 3^{x}$

$-1 \quad 2$

$y_{최대} = 3^{2-1} - 1 = 2$

$y_{최소} = 3^{-1-1} - 1 = \frac{1}{9} - 1$

$= -\frac{8}{9}$

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} 2x$

$= -\log_{3} 2x$

$-1 \quad 2$

$y_{최대} = \log_{\frac{1}{3}}(-2+5) + 3$

$= -1 + 3 = 2$

$y_{최소} = \log_{\frac{1}{3}}(4+5) + 3$

$= -2 + 3 = 1$

문제 7. 함수 $y = 2^{x-m} + n$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표가 각각 $1, 2$일 때, 상수 m, n의 값을 구하시오.

$y = 2^{x-m} + n \qquad y = x$

$2^{x-m} + n = x$

i) $2^{2-m} + n = 2$

$-\quad 2^{1-m} + n = 1$

$2^{2-m} - 2^{1-m} = 1$

$(\cancel{2^2 - 2^1})\, 2^{-m} = 1$ (2)

$2^{-m} = 2^{-1}$

$\therefore m = 1$,

ii) $2^{1-1} + n = 1$

$n = 0$.

문제 8. 자외선이 어느 필름을 한 장 통과할 때마다 통과하기 전 양의 80%가 차단된다고 한다. 자외선이 몇 장의 필름을 통과해야 맨 처음 자외선 양의 99.2%가 차단되는지 구하시오.

$$\cancel{A}\left(\frac{20}{100}\right)^n = \cancel{A}\left(\frac{0.8}{100}\right)$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$n = 3$$

$$\frac{8}{1000} = \frac{1}{125} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

문제 9. 어느 도시의 미세 먼지 농도는 매년 4%씩 증가한다고 한다. 이와 같은 비율로 미세 먼지 농도가 계속 증가한다고 할 때, 미세 먼지 농도가 현재의 2배 이상이 되는 것은 최소 몇년 후인지 구하시오. (단, $\log 2 = 0.30$, ~~$\log_1 .04$~~ $\log 1.04$ $= 0.02$로 계산한다.)

$$\cancel{A}\left(\frac{104}{100}\right)^n \geq \cancel{A}\times 2$$

$$(1.04)^n \geq 2$$

$$\log(1.04)^n \geq \log 2 \quad (\because \text{밑} > 1)$$

$$n \underbrace{\log 1.04}_{0.02} \geq 0.3$$

$$n \geq \frac{0.3}{0.02}$$

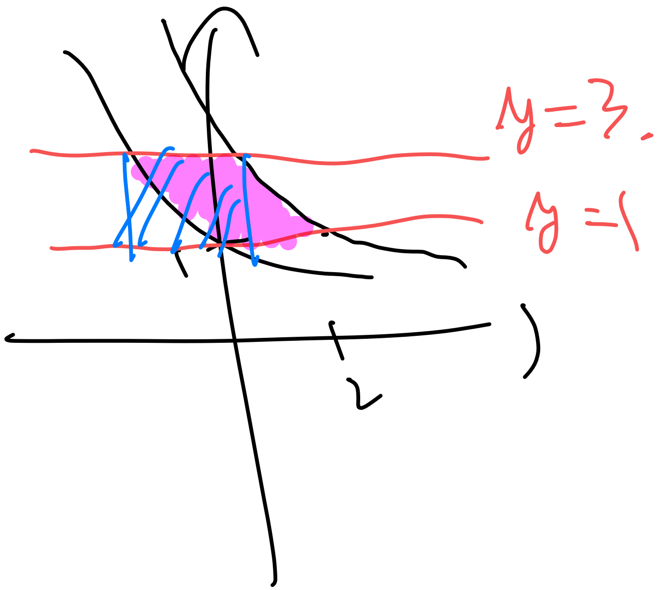
$$n \geq 15$$

$\therefore$ 15년 후

$y = 3^{-x}$

도전문제

문제 10. 두 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=9\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 두 직선 $y=1$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



$y = 3^2\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

$S = 2 \times 2 = 4$

문제 11. 함수 $y = \log_2 k(x+2)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않을 때, 양수 k의 최댓값을 구하시오.

$$y = \log_2 k + \log_2(x+2)$$

$$= \boxed{\log_2(x+2)} + \log_2 k$$

(0,0)에

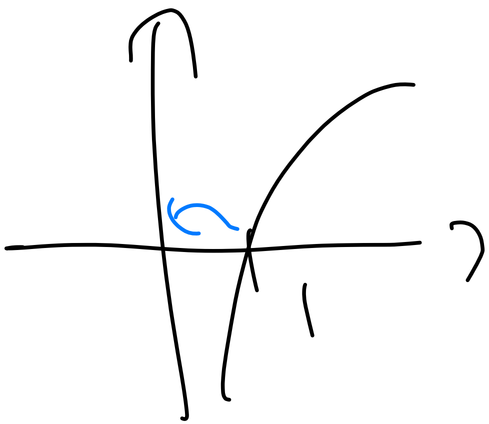
$$\longrightarrow \quad 0 \geq \cancel{\log_2 2} + \log_2 k$$

$$\log_2 k \leq -1$$

$$k \leq \frac{1}{2} \text{ (암기)}$$

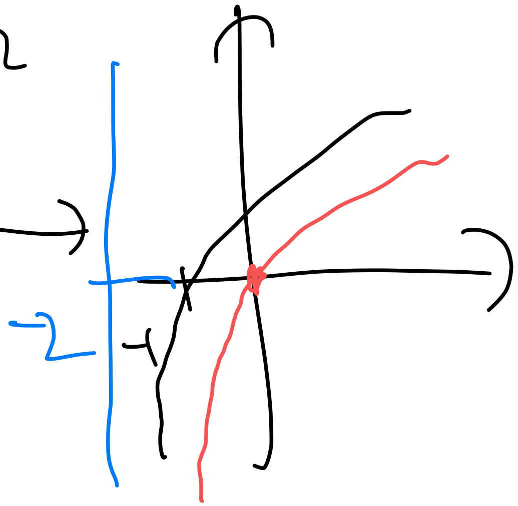
$$\frac{1}{2}$$

$$y = \log_2 x$$



x, -2

y, 0



문제 12. 2보다 큰 실수 a에 대하여 $a \le x < a^2$에 대하여 $(\log_a x)^2$, $\log_a x^2$, $\log_a(\log_a x)$의 대소를 비교하시오.

let $\log_a x = t$ $(x>0)$

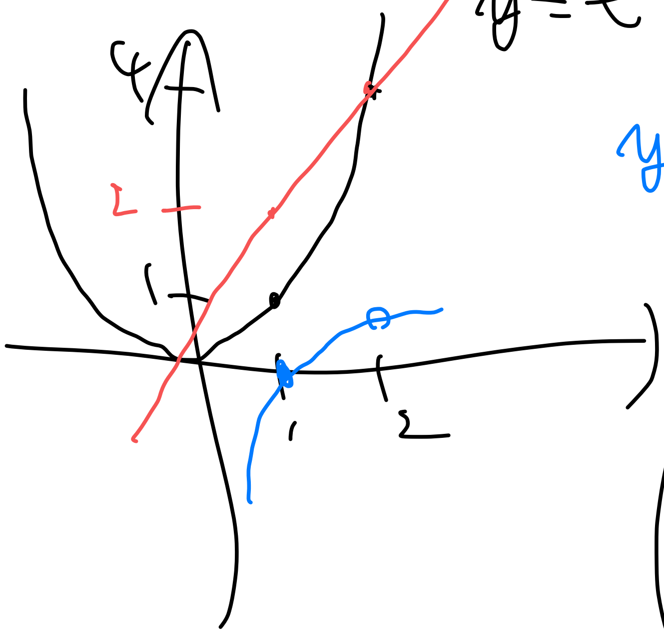
$\log_a a \le \log_a x < \log_a a^2$

$t^2,\ 2t,\ \log_a t$

$1 \le t < 2$

$y=2t$

$y=t^2$



$y=\log_a t$

$\log_a 2 < \log_a a$ (밑 >1)

$\quad\quad\quad\quad\quad\ \ \|$

$\quad\quad\quad\quad\quad\ \ 1$

$2 < a$

$$\boxed{\therefore \log_a(\log_a x) < (\log_a x)^2 < \log_a x^2}$$