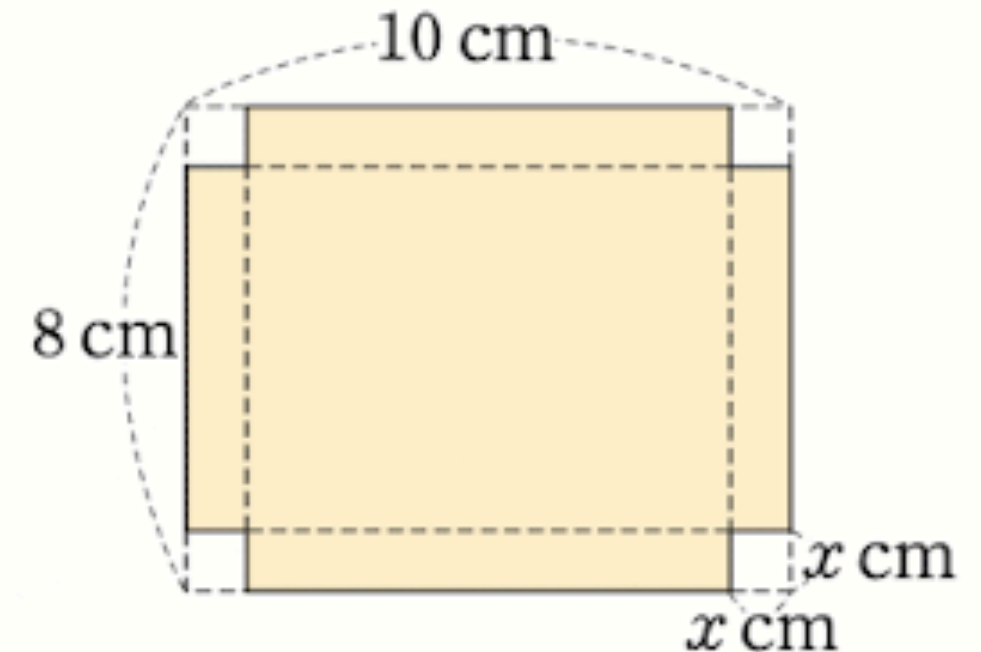


## 9. 고차방정식

# 생각열기

오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 10 cm, 세로의 길이가 8 cm인 직사각형 모양의 친환경 재생 종이 있다. 이 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가  $x$  cm인 정사각형을 잘라 내고, 점선 부분을 접어 부피가  $48 \text{ cm}^3$ 인 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다.



- 1 상자의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이와 높이를 각각  $x$ 에 대한 식으로 나타내 보자.
- 2 상자의 부피를  $x$ 에 대한 방정식으로 나타내 보자.

공 공 치 조 차

**(공식 이용)예제1. 다음 방정식을 푸시오.**

(1)  $x^3 + 1 = 0$

(2)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

# 풀이

(1) 좌변 인수분해 공식

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ 또는 } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(2) Let  $x^2 = X$  치환

$$X^2 - 10X + 9 = 0$$

$$(X - 1)(X - 9) = 0$$

$$X = 1 \text{ 또는 } X = 9$$

역치환

$$x^2 = 1 \text{ 또는 } x^2 = 9$$

$$\therefore x = \pm 1 \text{ 또는 } x = \pm 3$$

**문제1. 다음 방정식을 푸시오.**

$$(1) x^3 - 4x^2 + x = 0$$

$$(2) x^3 + 27 = 0$$

$$(3) x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$(4) (x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x) + 2 = 0$$

답

$$(1) \ x = 0 \text{ 또는 } x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$(2) \ x = -3 \text{ 또는 } x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$



$$(3) \ x = \pm\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \pm\sqrt{3}$$

$$(4) \ x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

**(조립제법)예제2. 다음 방정식을 푸시오.**

$$(1) \ x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$$

$$(2) \ x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

**풀이**

$$(1) \text{ Let } P(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$$

$$P(-1) = 0$$

$$P(x) = (x + 1)(x^2 + 6x + 8)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 1 & 7 & 14 & 8 \\
 & & -1 & -6 & -8 \\
 \hline
 & 1 & 6 & 8 & 0
 \end{array}$$

$$(x + 1)(x^2 + 6x + 8) = 0$$

$$(x + 1)(x + 2)(x + 4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = -4$$

**풀이**

$$(2) \text{ Let } P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$$

$$P(2) = 0, P(-1) = 0$$

$$P(x) = (x - 2)(x + 1)(x^2 + 1)$$

2	1	-1	-1	-1	-2
		2	2	2	2
-1	1	1	1	1	0
		-1	0	-1	
	1	0	1	0	

$$(x - 2)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = \pm i$$



**문제2. 다음 방정식을 푸시오.**

$$(1) \ x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$(2) \ x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6 = 0$$

답

$$(1) \ x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

$$(2) \ x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{2}i$$

예제3. ESG 열풍으로 불필요한 포장재를 줄이기 위해  
전자 기기 포장이 날로 간편해지고 있다. 어느 업체는 밑  
면의 가로의 길이가 **20** cm, 세로의 길이가 **15** cm이  
고 높이가 **15** cm인 직육면체 모양의 전자 기기 포장  
상자의 모든 모서리의 길이를 각각 같은 길이만큼

줄여서 처음 포장상자의 부피의  $\frac{1}{3}$  배인 상자를 만들려

고 한다. 몇 cm를 줄여야 하는지 구하시오.

**풀이**

Let 모서리의 길이:  $x$  cm

$$\text{부피: } V = (20 - x)(15 - x)(15 - x)$$

$$= \frac{1}{3} \times 20 \times 15 \times 15 \quad (0 < x < 15)$$

$$x^3 - 50x^2 + 825x - 3000 = 0$$

$$(x - 5)(x^2 - 45x + 600) = 0$$

$$x - 5 = 0 \text{ 또는 } x^2 - 45x + 600 = 0$$

5	1	—50	825	—3000
		5	—225	3000
	1	—45	600	0

$$x = 5 \text{ 또는 } x = \frac{45 \pm 5\sqrt{15}i}{2}$$

$$\therefore x = 5 \quad (x \text{는 실수})$$

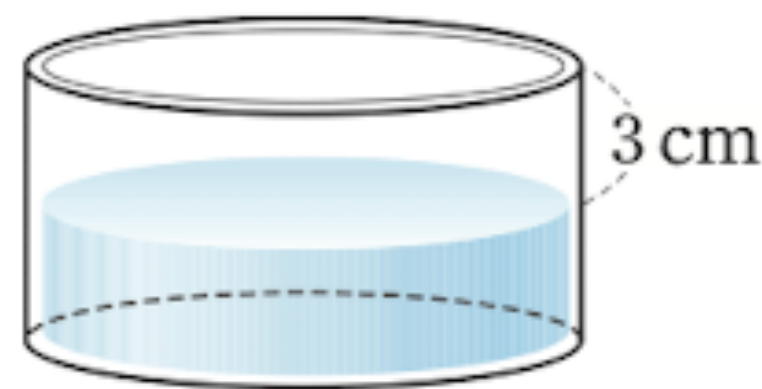


$$\therefore x = 5 \quad (\because x^2 - 45x + 600 > 0)$$

## 문제3.

오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이와 높이가 같은 원기둥 모양의 그릇에  $108\pi \text{ cm}^3$ 의 물을 부었더니 그릇의 위에서부터 3 cm를 남기고 물이 채워졌다. 이 그릇의 높이를 구하시오.

(단, 그릇의 두께는 생각하지 않는다.)



# 생각 넓히기

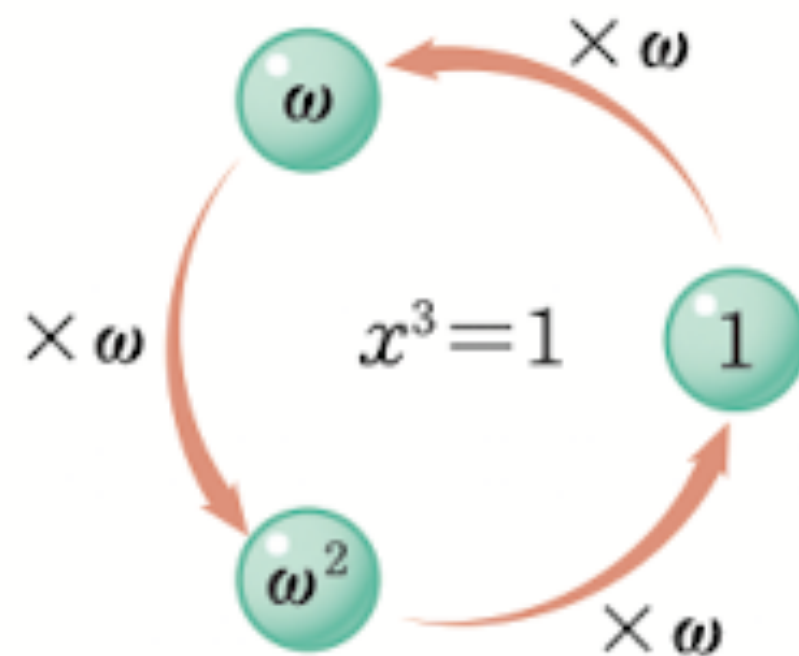
삼차방정식  $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을  $\omega$ 라고 할 때,  
다음 성질이 성립한다.

①  $\omega$ 는 방정식  $x^3 - 1 = 0$ 의 근이므로  $\omega^3 - 1 = 0$

$\therefore \omega^3 = 1$

②  $x^3 - 1 = 0$ 에서  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\omega$ 는 방정식  $x^3 - 1 = 0$ 의 근이므로  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$



# 생각 넓히기

위의 성질을 이용하여 다음 식의 값을 구해보자.

(1)  $\omega^2 + \omega^4$

(2)  $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{101}$

**풀이(1)**

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$\omega^2 + 1 = -\omega$$

$$\therefore \omega^2 + \omega^4 = \omega^2(1 + \omega)$$

$$= \omega \times (-\omega) = -\omega^3 = -1$$

## 풀이(2)

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{101}$$

$$= (1 + \omega + \omega^2) + \omega^3(1 + \omega + \omega^2)$$

$$+ \dots + \omega^{90}(1 + \omega + \omega^2) = 0$$