

# 지수함수 로그함수의 극한

$$y = 2^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{의 그래프}$$

**문제1. 다음 극한을 조사하시오.**

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{5}{4} \right)^x = \frac{5}{4}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^x = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

**예제1. 다음에서 수렴, 발산을 조사하고, 그 극한값을 구하시오.**

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{3^x + 1}$$

분자, 분모를 각각  $3^x$  으로 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{3^x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^x} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

따라서 수렴하고, 그 극한값은 1이다

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (2^x + 2^{-x}) = 2^0 + 2^0 = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (2^x - 2^{-x}) = 2^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

그런데  $x > 0$ 인 범위에서  $2^x > 2^{-x}$  이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \infty$$

문제2. 다음에서 수렴, 발산을 조사하고, 그 극한값을 구하시오.(한 번 풀어보세요~)

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{3^x - 2^x} \text{ 수렴, } 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{5^x}{5^x - 1} \text{ 발산}$$



$y = \log_2 x, y = 2^x$ 의 그래프

**문제3. 다음 극한을 조사하시오.**

$$(1) \lim_{x \rightarrow 4} \log_4 x = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{3}} x = -\infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0+} \log_3 x = -\infty$$

## 문제4

$\lim_{x \rightarrow 0+} a^{\frac{1}{x}} = 0$ 일 때, 극한  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x$ 를 조사하고

그 과정을 설명하시오. (단,  $a > 0$ )

**예제2. 다음에서 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한 값을 구하시오.**

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_3 (3x + 2) - \log_3 x\}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x + 1}{\log_2 x}$$

풀이

(1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_3 (3x + 2) - \log_3 x\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{3x + 2}{x} = \log_3 3 = 1$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 1+} (x + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \log_2 x = 0$$

그런데  $x > 1$ 인 범위에서  $\log_2 x > 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x+1}{\log_2 x} = \infty$$

따라서 발산한다.

# 실수 $e$ 란 무엇인가?

$$1 \times 1 \times 1 \cdots = ??$$

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$$

**예제3. 다음 극한값을 구하시오.**

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1 + 4x)^{\frac{1}{4x}} \right\}^4 = e^4$$



(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x \times \{-1\}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

문제6. 다음 극한값을 구하시오. (한번 해보세요~)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{x}}$$

$$\frac{1}{e^6}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{3x} \right)^{6x}$$

$$e^2$$

**예제4. 다음 극한값을 구하시오.**

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln e = 1$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x} \times x} - 1}{x} = 1$$

# 지수함수의 미분

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \{e^h - 1\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \{e^h - 1\}}{h}$$

$$= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{e^h - 1\}}{h}$$

$$= e^x \times 1$$

$$= e^x$$

**예제1. 다음 함수를 미분하시오.**

(1)  $y = e^{x+1}$

(2)  $y = e^{2x}$

곱이

$$(1) y' = e(e^x)' = e \times e^x = e^{x+1}$$

$$(2) y = e^x \times e^x \text{ 이므로}$$

$$y' = (e^x)' \times e^x + e^x \times (e^x)'$$

$$= e^x \times e^x + e^x \times e^x = 2e^{2x}$$



# 로그함수의 미분

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left\{ \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right\}^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \times \ln e = \frac{1}{x}$$

또한

$$(\log_a x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

**예제2. 다음 함수를 미분하시오.**

(1)  $y = \ln 3x$

(2)  $y = 2 \log_5 x$

풀이

$$(1) \ y = \ln 3x = \ln 3 + \ln x \text{ 이므로}$$

$$y' = (\ln 3)' + (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(2) \ y' = 2(\log_5 x)' = \frac{2}{x \ln 5}$$

**문제1, 2. 다음 함수를 미분하시오.(한번 해보세요~)**

(1)  $y = e^{x-3}$

(2)  $y = xe^x$

(3)  $y = \ln 5x$

(4)  $y = 3 \log_2 x$

$$y' = e^{x-3}$$

$$y' = (1+x)e^x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{3}{x \ln 2}$$