

- ◆ 교과서 문제 풀이입니다.
- ◆ 문제풀이 및 해설은 오른쪽 qr코드와 같습니다.
- ◆ 함께 열심히 해 봅시다.



문제 1. 다음 계산 과정에서 처음으로 틀린 곳을 찾으시오.

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-3)^2 \times (-3)^4} \\ &= \sqrt{(-3)^6} \\ &= \{\sqrt{(-3)^3}\}^2 \\ &= (-3)^3 \\ &= -27 \end{aligned}$$

㉠
㉡
㉢
㉣

㉣

밑이 음수일 때 지수법칙 X

문제 2. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(a^3 b)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{a^{-5} b} \div (ab)^{-2}$

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{5}{2}} b^{\frac{1}{2}} \div a^{-2} b^{-2} \\ &= a^{\frac{3}{2} - \frac{5}{2} - (-2)} \times b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (-2)} = a^1 b^3 = \boxed{ab^3} \end{aligned}$$

(2) $(a^6 b^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \div \sqrt[4]{a^2 b^3} \times (a^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{8}}}$

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{6}{2}} b^{-\frac{1}{4}} \div a^{\frac{2}{4}} b^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \right) \\ &= a^{3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = a^3 b^{-1} = \boxed{\frac{a^3}{b}} \end{aligned}$$

(3) $\sqrt{\sqrt{a}} \times \sqrt{a\sqrt{a}\sqrt{a}}$

$$\begin{aligned} &= a^{\frac{1}{8}} \times a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}} a^{\frac{1}{8}} \\ &= a^{\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = a^1 = \boxed{a} \end{aligned}$$

(4) $(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ &= \boxed{a - b} \end{aligned}$$

문제 3. $a > 1$ 일 때, 다음을 만족시키는 실수 k 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{a \times \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a^3}} \div \sqrt[6]{a \times \sqrt[3]{a^k}} = 1 \\ & a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{6}} a^{\frac{3}{12}} \div a^{\frac{1}{6}} a^{\frac{k}{18}} = 1 \\ & = a^{\frac{1}{2} - \frac{k}{18}} = 1 \\ & \therefore \frac{1}{2} - \frac{k}{18} = 0 \\ & \frac{1}{2} = \frac{k}{18} \\ & \therefore k = \boxed{\frac{21}{2}} \end{aligned}$$

문제 4. $a > 0$ 이고 $a^k + a^{-k} = 5$ 일 때, 다음 식의 값을 구하시오. (단, k 는 실수)

(1) $a^{2k} + a^{-2k}$

(2) $a^{\frac{k}{2}} + a^{-\frac{k}{2}}$

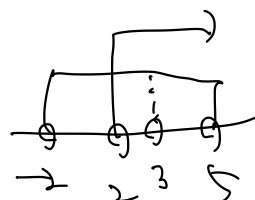
(1) $(a^k + a^{-k})^2 = 5^2$
 $a^{2k} + 2 + a^{-2k} = 25$
 $\therefore a^{2k} + a^{-2k} = \boxed{23}$

(2) Let $a^{\frac{k}{2}} + a^{-\frac{k}{2}} = t$
 $(a^{\frac{k}{2}} + a^{-\frac{k}{2}})^2 = t^2$
 $a^k + 2 + a^{-k} = t^2$
 $\therefore t^2 = 9$
 $\therefore t = \sqrt{9} \quad (\because a > 0)$
 $a^{\frac{k}{2}} + a^{-\frac{k}{2}} = \boxed{\sqrt{9}}$

문제 5. $\log_{(a-2)}(-a^2 + 3a + 10)$ 이 정의되기 위한 정수 a 의 값을 구하시오.

i) $a - 2 \neq 1 \Rightarrow a \neq 3$

ii) $a - 2 > 0, -a^2 + 3a + 10 > 0$
 $a > 2, a^2 - 3a - 10 < 0$
 $\begin{matrix} 2 & & 5 \\ -2 & & 5 \end{matrix}$
 $\therefore -2 < a < 5$



$\therefore 2 < a < 3$ or $3 < a < 5$

$\therefore a : \boxed{4}$

문제 6. 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $5^{\log_5 3 \times \log_3 11}$

$$\begin{aligned} &= (5^{\log_5 3})^{\log_3 11} \\ &= (3^{\log_5 5})^{\log_3 11} \\ &= 3^{\log_3 11} \\ &= 11^{\log_3 3} \\ &= (11) \end{aligned}$$

(2) $(\log_3 5 - \log_{\sqrt{3}} 25)(\log_5 3 + \log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{3})$

$$\begin{aligned} &= \left(\log_3 5 - \frac{\log_3 25}{\log_3 \sqrt{3}} \right) \left(\log_5 3 + \frac{\log_5 \sqrt[3]{3}}{\log_5 \frac{1}{5}} \right) \\ &= \left(\log_3 5 - \frac{\log_3 5^2}{\frac{1}{2}} \right) \left(\log_5 3 + \frac{\log_5 3^{\frac{1}{3}}}{-1} \right) \\ &= (\log_3 5 - 4 \log_3 5) \left(\log_5 3 - \frac{1}{3} \log_5 3 \right) \\ &= -3 \log_3 5 \times \frac{2}{3} \log_5 3 \\ &= (-2) \end{aligned}$$

문제 7. 1보다 큰 세 실수 a, b, c 가 $\log_a c : \log_b c = 3 : 2$ 를 만족시킬 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned} \text{let } \log_a c &= 3k, \quad \log_b c = 2k \\ a^{3k} &= c, \quad b^{2k} = c \\ a^{3k} &= b^{2k} \\ a^3 &= b^2 \quad (\because a, b > 1) \\ \therefore b &= a^{\frac{3}{2}} \\ \therefore \log_a b + \log_b a &= \log_a a^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\log_a a^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \left(\frac{13}{6} \right) \end{aligned}$$

문제 8. 외부자극의 세기를 I , 감각의 세기를 S 라고 하면

$$S = k \log I \quad (k \text{는 상수})$$

인 관계가 성립한다고 한다. 어느 자극의 세기가 600일 때, 감각의 세기가 0.7이라고 하면 이 자극의 세기가 60일 때, 감각의 세기는 얼마인지 구하시오. (단, $\log 6 = 0.8$ 로 계산한다.)

$$\begin{aligned} \text{ㄷ) } 0.7 &= k \log 600 \\ k &= \frac{0.7}{\log 600} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ) } S &= k \log 60 \\ &= \frac{0.7}{\log 600} \times \log 60 \\ &= \frac{0.7}{\log 6 + 2} \times (\log 6 + 1) \\ &= \frac{0.7}{2.8} \times 1.8 = \frac{1}{4} \times \frac{18}{10} = \frac{4.5}{10} \\ &= (0.45) \end{aligned}$$

도전문제

문제 9. 세 양수 a, b, c 에 대하여 $a^3 = 3, b^4 = 5, c^6 = 7$ 일 때, $(abc)^n$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오.

$$a = 3^{\frac{1}{3}} \quad b = 5^{\frac{1}{4}} \quad c = 7^{\frac{1}{6}}$$

$$(abc)^n = \left(3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{6}} \right)^n$$

$\therefore n$ 은 3, 4, 6의 최소공배수

$$\therefore n_{\text{최소}} = (12)$$

문제 10. 두 실수 x, y 가 $2^x = 5^y = 10$ 을 만족시킬 때, $(x-1)(y-1)$ 의 값을 구하시오.

$$i) x = \log_2 10, y = \log_5 10$$

$$\begin{aligned} x-1 &= \log_2 10 - 1, y-1 = \log_5 10 - 1 \\ &= \log_2 10 - \log_2 2 = \log_5 10 - \log_5 5 \\ &= \log_2 \frac{10}{2} = \log_2 5 = \log_5 \frac{10}{5} = \log_5 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (x-1)(y-1) &= (\log_2 5)(\log_5 2) \\ &= \cancel{\log_2 5} \times \frac{1}{\cancel{\log_2 5}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

문제 11. $\log_3 2 = a, \log_5 3 = b$ 일 때, $\log_{90} 18$ 를 a, b 로 나타내시오.

$$i) b = \frac{1}{\log_3 5}$$

$$\log_3 5 = \frac{1}{b}$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$ii) \log_{90} 18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 90}$$

$$= \frac{\log_3 2 \cdot 3^2}{\log_3 2 \cdot 3^2 \cdot 5}$$

$$= \frac{\log_3 2 + \log_3 3^2}{\log_3 2 + \log_3 3^2 + \log_3 5}$$

$$= \frac{a+2}{a+2+\frac{1}{b}} = \frac{ab+2b}{ab+2b+1}$$

문제 12. 중력과 저항을 고려하지 않을 때, 로켓의 질량을 m_0 t, 연료를 제외한 로켓의 질량을 m_1 t, 로켓의 처음 속력을 v_0 km/s, 로켓의 최종 속력을 v km/s 라고 하면

$$v_1 - v_0 = v \log_a \frac{m_0}{m_1} \quad (a \text{는 상수})$$

인 관계가 성립한다고 한다. 두 로켓 A, B에서 로켓 A는 $\frac{m_0}{m_1} = 16, v_1 - v_0 = 9$ 이고 로켓 B는 $\frac{m_0}{m_1} = 10, v_1 - v_0 = 3$ 일 때, 로켓 A의 추진체의 분사 속력은 로켓 B의 추진체의 분사 속력의 몇 배인지 구하시오. (단, $\log 1.6 = 0.2$ 로 계산한다.)

$$i) q = V_A \log_a 16 \Rightarrow V_A = \frac{q}{\log_a 16}$$

$$3 = V_B \log_a 10 \Rightarrow V_B = \frac{3}{\log_a 10}$$

$$ii) \frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{q}{\log_a 16}}{\frac{3}{\log_a 10}}$$

$$= \frac{3}{\log_a 16} \times \frac{\log_a 10}{3}$$

$$= 3 \cdot \frac{\log_a 10}{\log_a 16}$$

$$= 3 \log_{16} 10$$

$$= \frac{3}{\log_{10} 16}$$

$$= \frac{3}{1.2}$$

$$= \frac{1}{0.4}$$

$$= \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \text{ 배} \quad (2.5 \text{ 배} \text{ 옳다})$$

$$\begin{aligned} \log 1.6 &= 0.2 \\ \log 16 &= \log 1.6 \times 10 \\ &= \log 1.6 + 1 \\ &= 1.2 \end{aligned}$$