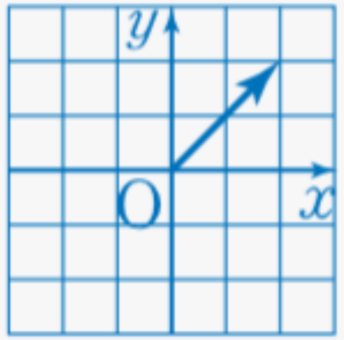
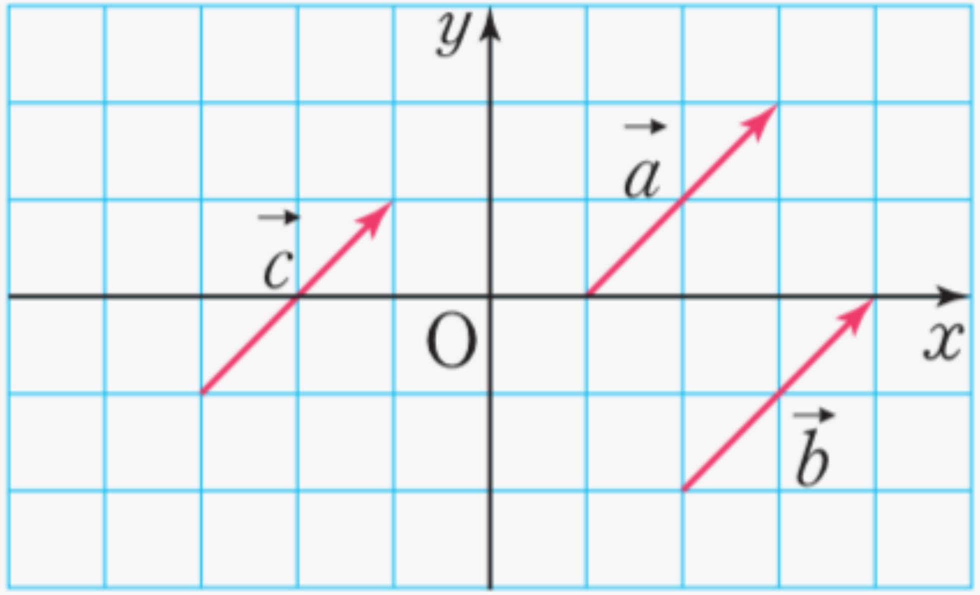
10. 평면벡터

2024 2학기 기하

이한희

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 있다. 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$를 시점이 원점 O가 되도록 평행이동하여 나타내시오.





평면벡터의 정의

O부터 A까지

크기와 방향

O를 고정하고 A의 좌표만으로 벡터를 표시

그림

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

그림

문제1

세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$라고 할 때, $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$로 나타내시오.

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$$

$$= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) - 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

$$= -\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$$

$$= -\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$$

예제1

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는

$$\vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$

임을 보이시오.

오른쪽 그림 참조

$|\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{AB}| = m : (m+n)$이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

이때 $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$이므로

$$\vec{p} - \vec{a} = \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a})$$

따라서 $\vec{p} = \vec{a} + \dfrac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a})$

$$= \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$

문제2

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m : n$ $(m > 0, n > 0, m \neq n)$으로 외분하는 점 Q의 위치벡터 $\vec{q}$는

$$\vec{q} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m - n}$$

임을 보이시오.

i) $m > n$ 일 때,

$|\overrightarrow{AQ}| : |\overrightarrow{AB}| = m : (m-n)$이므로

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$$

이때 $\overrightarrow{AQ} = \vec{q} - \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$이므로

$$\vec{q} - \vec{a} = \frac{m}{m-n}(\vec{b} - \vec{a})$$

따라서 $\vec{q} = \vec{a} + \dfrac{m}{m-n}(\vec{b} - \vec{a})$

$$= \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$

$\text{ii)}\ m < n$ 일 때도 같은 방법으로 성립.

문제3

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$라고 할 때, 다음 점의 위치벡터를 $\vec{a}, \vec{b}$로 나타내시오.

(1) 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점 P

(2) 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 Q

(1) $\vec{p} = \dfrac{3\vec{b} + 2\vec{a}}{3+2} = \dfrac{2}{5}\vec{a} + \dfrac{3}{5}\vec{b}$

(2) $\vec{q} = \dfrac{2\vec{b} - 1\vec{a}}{2-1} = -\vec{a} + 2\vec{b}$

예제2

세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$라고 할 때, 삼각형 ABC의 무게 중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$는

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

임을 보이시오.

그림

선분 BC의 중점을 M, 점 M의 위치벡터를 $\vec{m}$이라 하면

$$\vec{m} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \ \cdots\cdots ①$$

이때 삼각형 ABC의 무게중심 G는 선분 AM을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$\vec{g} = \frac{2\vec{m} + \vec{a}}{3} \ \cdots\cdots ②$$

①을 ②에 대입하면 $\vec{g} = \dfrac{2 \times \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + a}{3} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

문제5

삼각형 ABC의 무게중심을 G라고 할 때,

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

임을 보이시오.

네 점 A, B, C, G의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{g}$라고 하면

$\vec{g} = \dfrac{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}{3}$ 이므로

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = (\vec{a} - \vec{g}) + (\vec{b} - \vec{g}) + (\vec{c} - \vec{g}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{g}$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}$$

평면벡터의 성분

x좌표 $\longrightarrow$ x성분

y좌표 $\longrightarrow$ y성분

$\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ 가로로 몇 칸

$\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$ 세로로 몇 칸

$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$

그림

스스로 확인하기

점 $A(2,-3)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 할 때, 벡터 $\vec{a}$를 성분으로 나타내면 $\vec{a}=(2,-3)$이고, $\overrightarrow{e_1}=(1,0), \overrightarrow{e_2}=(0,1)$로 나타내면 $\vec{a}=2\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}$이다.

문제6

그림

오른쪽 그림과 같은 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$를 성분으로 나타내시오.

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$를 $\overrightarrow{e_1} = (1, 0), \overrightarrow{e_2} = (0, 1)$로 나타내시오.

(1) $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (-3, 1), \vec{c} = (4, -2)$

(2) $\vec{a} = 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}, \vec{b} = -3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \vec{c} = 4\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}$

$\vec{a} = (a_1, a_2)$일 때, 원점 O와 점 $A(a_1, a_2)$에 대하여 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$이므로 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 OA의 길이와 같다.

$$|\vec{a}| = \overrightarrow{OA} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

또, 두 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$에 대하여

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2$$

벡터의 크기, 서로 같을 조건

두 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$에 대하여

$$|\vec{a}| = \overline{OA} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$$

문제7

다음 벡터의 크기를 구하시오.

(1) $\vec{a} = (-2, 3)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

(2) $\vec{b} = (1, -1)$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

문제8(한번 해보세요~)

두 벡터 $\vec{a} = (3, n-2), \vec{a} = (m-3, 4-n)$에 대하여 $\vec{a} = \vec{b}$일 때, 두 실수 m, n의 값을 구하시오.

답:$m = 6, n = 3$

평면벡터의 성분에 의한 연산

$\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$ 를 $\overrightarrow{e_1}=(1,0),\overrightarrow{e_2}=(0,1)$으로 나타내면

$\vec{a}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2},\vec{b}=b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}$

$=(a_1+b_1)\overrightarrow{e_1}+(a_2+b_2)\overrightarrow{e_2}$

$=(a_1+b_1,a_2+b_2)$

$\therefore$ 각각 계산하면 된다. (뺄셈, 상수배도 마찬가지)

문제9

$\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (0, -2), \vec{c} = (1, 2)$일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내시오.

(1) $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (2, 1) + \big(2 \times 0, 2 \times (-2)\big) - (1, 2) = (1, -5)$

(2) $2(\vec{a} - 2\vec{b}) - 3(2\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c} = (-7, 0)$

예제3

$\vec{a}=(1,0), \vec{b}=(1,2), \vec{c}=(1,-2)$일 때, $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 k, l의 값을 구하시오.

$\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$를 성분으로 나타내면

$(1, -2) = k(1, 0) + l(1, 2)$

$= (k, 0) + (l, 2l)$

$= (k + l, 2l)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의해

$k + l = 1, 2l = -2$

$\therefore\ k = 2, l = -1$

문제10(한번 해보세요~)

$\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (3, -2), \vec{c} = (-6, 11)$일 때, $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 k, l의 값을 구하시오.

그림

좌표평면 위의 두 점 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$에 대하여 평면벡터 $\overrightarrow{AB}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구해보자.

$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2), \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$이므로

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2)$

$$= (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

평면벡터의 성분과 크기

$$\overrightarrow{AB} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2)$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

문제11

두 점 $A(-1,2), B(2,-1)$에 대하여 벡터 $\overline{AB}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구하시오.

$$\overrightarrow{AB} = \big(2-(-1), -1-2\big) = (3,-3)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = 3\sqrt{2}$$