

문제 1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $(\sqrt[4]{4})^2 = 2$

② $\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{4}$

③ $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2}$

④ $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$

⑤ $\sqrt[4]{125} \times \sqrt{\sqrt{5}} = 5$

① $4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

② $\sqrt[3]{\frac{20}{5}} = \sqrt[3]{4}$

③ $2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = 2^{\frac{8}{15}} = \sqrt[15]{2^8}$

④ $2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$

⑤ $5^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}} = 5^1 = 5$

문제 2. 세 실수 x, y, z 가 $3^x = 4^y = \left(\frac{1}{12}\right)^z$ 을 만족시킬 때,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ 의 값을 구하시오.

(단, $xyz \neq 0$)

$$\text{let } 3^x = 4^y = \left(\frac{1}{12}\right)^z = t$$

$$x = \log_3 t$$

$$\frac{1}{x} = \log_t 3$$

$$y = \log_4 t \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} = \log_t 4$$

$$z = \log_{\frac{1}{12}} t$$

$$\frac{1}{z} = \log_t \frac{1}{12}$$

$$\log_t 3 + \log_t 4 + \log_t \frac{1}{12} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \log_t 3 + \log_t 4 + \log_t \frac{1}{12}$$

문제 3. $a > 0$ 이고 $a^{2x} = 3$ 일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

$$(1) \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} \quad \times a^x$$

$$(2) \frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^{3x} + a^{-3x}} \quad \times a^{3x}$$

$$(1) \quad \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \frac{a^{6x} - 1}{a^{6x} + 1} = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} = \frac{7}{9} = \frac{13}{14}$$

문제 4. 두 실수 a, b 가 $2^a = 3, 5^b = 2$ 를 만족시킬 때, 다음을 a, b 로 나타내시오.

(1) $\log_5 3$

(2) $\log_3 \frac{4}{25}$

$$a = \log_2 3 \quad b = \log_5 2 \Rightarrow \frac{1}{b} = \log_2 5$$

$$(1) \log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \frac{a}{\frac{1}{b}} = ab$$

$$(2) \log_3 \frac{4}{25} = \frac{\log_2 2^2 - \log_2 5^2}{\log_2 3} = \frac{2 - \frac{2}{b}}{a} \\ = \frac{2b - 2}{ab}$$

문제 5. 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\log_2(4^{\frac{3}{4}} \times \sqrt{2^5})^{\frac{1}{2}}$

(2) $-2\log \sqrt{10} + \log \sqrt[3]{100} - \log \sqrt{\frac{1}{1000}}$

(1) $\log_2(2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^2 = 2$

(2) $-2\log 10^{\frac{1}{2}} + \log 10^{\frac{2}{3}} - \log 10^{-\frac{3}{2}}$

$= -1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$

문제 6. $10 < x < 100$ 이고 $\log \sqrt{x}$ 와 $\log x^2$ 의 차가 정수일 때, $\log x$ 의 값을 구하시오.

$$(1) \log x^2 - \log \sqrt{x} = 2\log x - \frac{1}{2}\log x = \frac{3}{2}\log x$$

$$(4) \log 10 < \log x < \log 100 \quad (\because 10 < x < 100)$$

$$1 < \log x < 2$$

$$1.5 = \frac{3}{2} < \frac{3}{2}\log x < 3$$

$$\therefore \frac{3}{2}\log x = 2$$

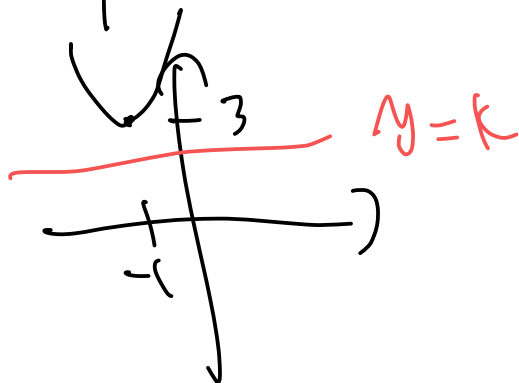
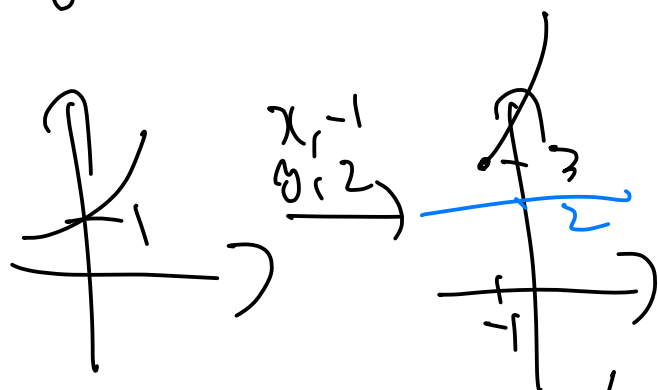
$$\therefore \log x = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

문제 7. 함수 $y = 2^{|x+1|} + 2$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.

i) $x+1 \geq 0$ 일 때

$$y = 2^{x+1} + 2$$

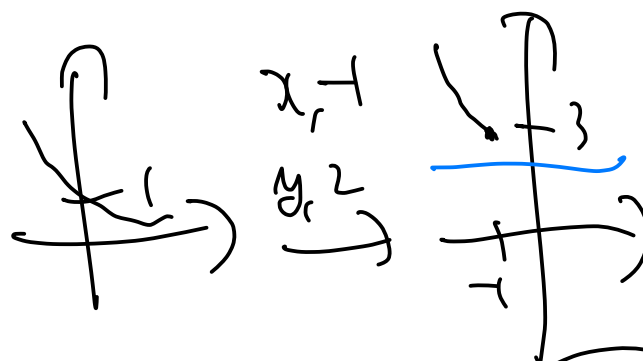
$$y = 2^x$$



ii) $x+1 < 0$ 일 때

$$y = 2^{-(x+1)} + 2$$

$$y = 2^{-x}$$



$$k < 3$$

문제 8. 다음 중 함수 $y = \log_3(-x+1) + 2$ 에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x > 1\}$ 이다. ✗

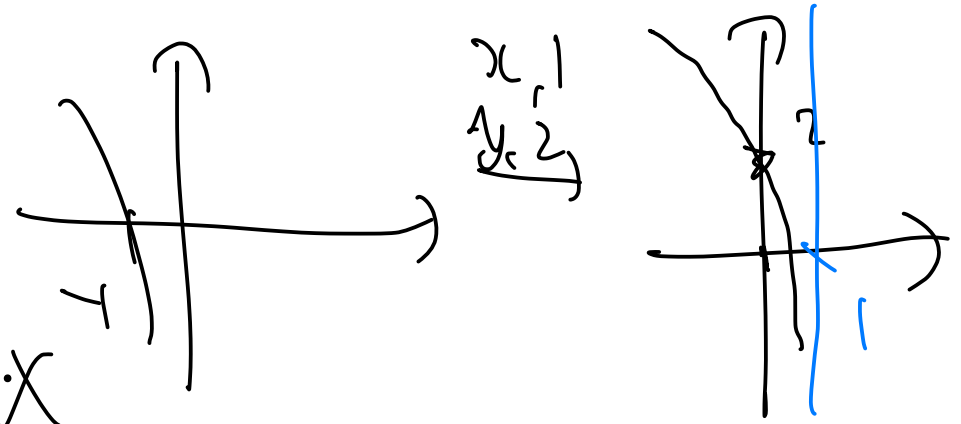
② 치역은 $\{y \mid y > 2\}$ 이다. ✗

③ 그래프의 점근선은 직선 $x = 1$ 이다. ✓

④ 그래프는 점 $(0, 3)$ 을 지난다. ✗

⑤ x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다. ✗

$$y = \log_3(-x)$$



① $\text{정의역} = \{x \mid x < 1\}$.

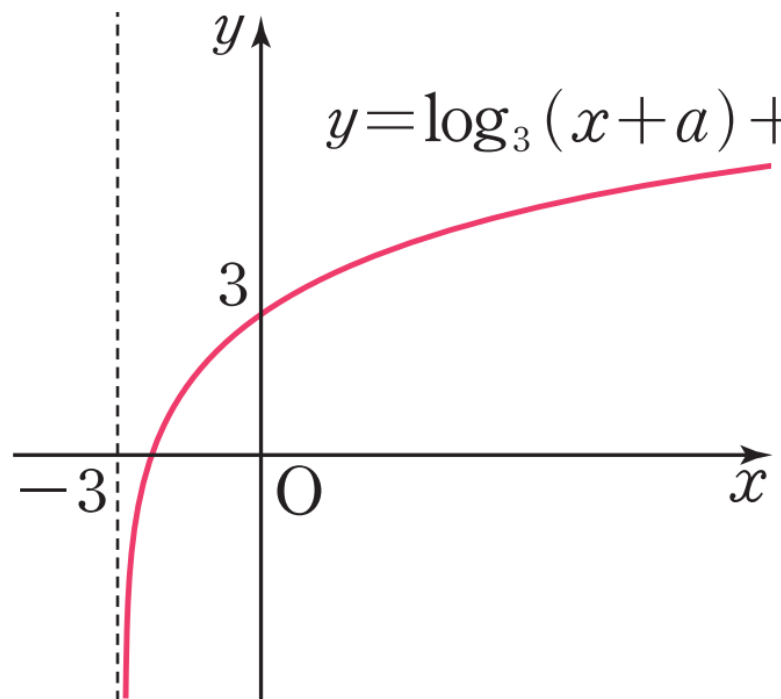
⑤ 값소장스

② $\text{치역} : \text{값소장스} = \{y \mid y > 2\}$.

③ $x = 1$

④ $f(0) = \log_3 1 + 2 = 2 \neq 3$

문제 9. 함수 $y = \log_3(x + a) + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같고 직선 $x = -3$ 이 이 그래프의 점근선일 때, 상수 a, b 의 값을 구하시오.



$$\begin{aligned}
 & x+4 \\
 & x \rightarrow x+3 \\
 & \text{i) } a=3 \\
 & \text{ii) } y = \log_3(x+3) + b \quad \downarrow (0,3) \text{ 점 } y \\
 & 3 = \log_3 3 + b \\
 & b=2
 \end{aligned}$$

문제 10. 다음 방정식과 부등식을 푸시오.

$$(1) \frac{3^{x^2+1}}{3^{2(x-1)}} = 9$$

$$(2) 2\log_{\frac{1}{3}}(x-4) > \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$

$$(1) 3^{x^2+1-2(x-1)} = 3^2$$

$$x^2+1-2x+2 = 2$$

$$x^2-2x+1 = 0$$

$$x=1$$

$$(2) (i) x-4 > 0, x-2 > 0$$

$$\therefore x > 4$$

$$(ii) \log_{\frac{1}{3}}(x-4)^2 > \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$

$$(x-4)^2 < x-2 \quad (\because 0 < \frac{1}{3} < 1)$$

$$x^2-8x+16 < x-2$$

$$x^2-9x+18 < 0$$

$$\begin{matrix} -3 \\ -6 \end{matrix}$$

$$\therefore 4 < x < 6$$

$$\therefore 3 < x < 6$$

문제 11. $\left(\frac{1}{1024}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되도록 하는 정수 n 의 값을 모두 구하시오.

$$(2^{-10})^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{10}{n}}$$

(i) 음수인 경우.

$$n < 0$$

(ii) 분수인 경우.

$$n = 4, 2, -5, -10$$

문제 12. 이차방정식 $x^2 - 10x + 2 = 0$ 의 두 근이 $\log a, \log b$ 일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값을 구하시오.

let $A = \log a, B = \log b$

i) $\alpha + \beta = 10 = \log a + \log b$

ii) $\alpha\beta = 2 = (\log a)(\log b)$

$$\therefore \log_a b + \log_b a = \frac{\log b}{\log a} + \frac{\log a}{\log b}$$

$$= \frac{(\log a)^2 + (\log b)^2}{(\log a)(\log b)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A^2 + B^2}{AB} \\ &= \frac{(A+B)^2 - 2AB}{AB} \\ &= \frac{10^2 - 2 \cdot 2}{2} \\ &= 48 \end{aligned}$$

문제 13. 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} + 3$ 에 대한 다음 물음에 답하십시오.

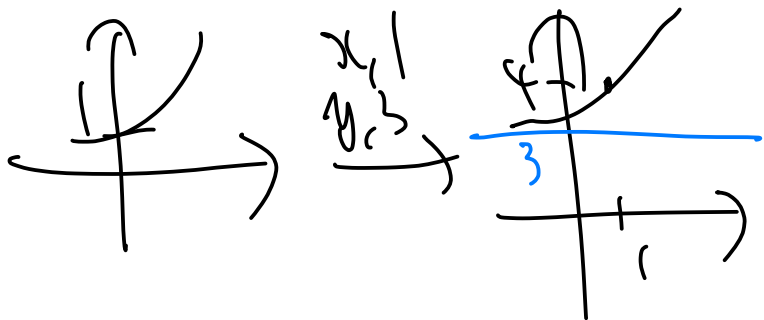
① 증가함수 ↗ () ↘
② 감소함수 ↘ () ↗

(1) 이 함수의 그래프를 그리시오.

(2) 정의역이 $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ 일 때, 이 함수의 최댓값과 최솟값을 구하십시오.

(1) $y = 2^{x-1} + 3$

$y = 2^x$



(2)

↗ 증가함수 이므로

$y_{\text{최대}} = 2^{3-1} + 3 = 1$

$y_{\text{최소}} = 2^{-1} + 3 = \frac{13}{4}$

문제 14. 함수 $f(x) = \log_2 \left(1 + \frac{1}{x+3} \right)$ 에서

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = 3$$

을 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하시오.

$$i) f(x) = \log_2 \frac{x+4}{x+3}$$

$$ii) \log_2 \frac{5}{4} + \log_2 \frac{6}{5} + \cdots + \log_2 \frac{n+4}{n+3}$$

$$= \log_2 \frac{\cancel{5}}{4} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{6}} \cdots \frac{n+4}{\cancel{n+3}}$$

$$= \log_2 \frac{n+4}{4} = 3$$

$$\frac{n+4}{4} = 8$$

$$n+4 = 32$$

$$n = 28$$

문제 15. 함수 $y = \log_3(x-1) + \log_3(7-x)$ 의 최댓값을 구하시오.

$$i) \quad x-1 > 0, \quad 7-x > 0$$

$$\therefore 1 < x < 7$$

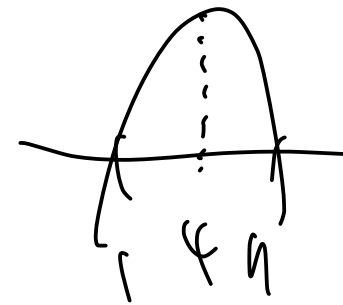
$$ii) \quad y = \log_3((x-1)(7-x))$$

$$y_{\max} = \log_3 9 \quad \left(\because 0 < \frac{1}{e} < 1 \right)$$

$$= 2$$

$$* \quad g(x) = (x-1)(7-x)$$

$$g(x)_{\max} = (4-1)(7-4) = 9$$



$$\frac{1+7}{2} = 4$$

문제 16. 별의 밝기는 지구에서 그 별을 볼 때 밝기인 겉보기 등급과 그 별이 지구에서 10파섹의 거리에 있다고 가정했을 때 밝기인 절대 등급으로 나타낸다. 지구까지 거리가 x 파섹인 별의 겉보기 등급을 m , 절대 등급을 M 이라고 하면

$$m - M = 5 \log x - 5$$

인 관계가 성립한다고 한다. 겉보기 등급이 4, 절대 등급이 -5인 별의 지구까지 거리는 몇 파섹인지 구하시오.

$$\therefore 63.1 \text{ 파섹}$$

$$\therefore x = 63.1$$

(단, $\log 6.31 = 0.8$ 로 계산한다.)

$$4 - (-5) = 5 \log x - 5$$

$$\frac{28}{10} = \frac{4}{5} = \log x$$

$$\log x = 2.8$$

$$= \log 63.1$$

$$= 2 + 0.8$$

$$= \log 10^2 + \log 6.31$$