♦ 전체 : 선택형 15문항(70점), 서답형 5문항(30점)

♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 함수 $f(x)=x^2+3x$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3.5점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=2x+3$

$f'(1)=2+3=5$

2. 함수 $f(x)=(x-a)(x^2-2x+4)$에서 $f'(a)=3$일 때, $f'(1)$의 값은? (단, a는 상수) [3.7점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=1\cdot(x^2-2x+4)+(x-a)(2x-2)$

i) $f'(a)=a^2-2a+4=3$ ii) $f'(1)=3$

$a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

3. 함수 $f(x)=\begin{cases}-2x^2+3x+1 & (x\ge 2)\\ 5x-k & (x<2)\end{cases}$ 에서 극한값 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$가 존재할 때, 상수 k의 값은? [3.9점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

i) $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}(-2x^2+3x+1)=-8+6+1=-1$

ii) $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}(5x-k)=10-k=-1$ ($\because$ 극한 존재)

$\therefore k=11$

4. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $4x^2-3x+1\le f(x)\le 4x^2-3x+5$를 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+3}$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+5}{x^2+3}=4$

이므로 사잇값 정리에 의해

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+3}=4$

5. 두 함수 $f(x), g(x)$가 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^2}=5$를 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3f(x)+4x^3}{xg(x)-x^2}$의 값은? [4.3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\cdot\frac{f(x)}{x^3}+4}{\frac{g(x)}{x^2}-\frac{1}{x}}$

$=\dfrac{3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}+4}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}$ ($\because$ 극값 수렴)

$=\dfrac{3\cdot 2+4}{5-0}=2$

6. 다음 식을 이용하여 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}-1}$의 값을 구하면? [4.3점]

<보 기>

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+\cdots$
$+a^1b^{n-2}+b^{n-1})$

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

let $a^5=x$

$\lim_{a\to1}\frac{a^5-1}{a-1}=\lim_{a\to1}\frac{\cancel{(a-1)}(a^4+a^3+a^2+a+1)}{\cancel{a-1}}$

$=5$

7. 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2-ax & (x\ge1)\\ bx^2+2 & (x<1)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a,b에 대하여 $a+3b$의 값은? [4.7점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

i) $x=1$ 에서 연속이므로

ㄱ) $\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^2-ax)=1-a$

ㄴ) $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(bx^2+2)=b+2$

$\therefore 1-a=b+2 \Rightarrow a+b=-1$

ii) $x=1$ 에서 미분가능하므로

ㄷ) $\lim_{x\to1^+}f'(x)=\lim_{x\to1^+}(2x-a)=2-a$

ㄹ) $\lim_{x\to1^-}f'(x)=\lim_{x\to1^-}(2bx)=2b$

$\therefore 2-a=2b \Rightarrow a+2b=2$

$\therefore a=-4,\ b=3 \Rightarrow a+3b=-4+9=5$

8. 함수 $f(x)=x^3-x$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-4h)}{3h}$의 값은? [4.7점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

(준식) $=\frac{6}{3}f'(1)$

$=2\cdot2$

$=4$

$\left(\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-1 \\ f'(1)=2 \end{array}\right)$

9. 닫힌구간 $[0,2]$에서 정의된 세 함수가 다음과 같다.

$f(x)=2x^2-3x+1$, $g(x)=x^2-x+1$,

$h(x)=\begin{cases}x^2-2x+2 & (0\le x<1)\\ x-1 & (1\le x\le2)\end{cases}$

닫힌구간 $[0,2]$에서 연속인 함수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4.9점]

<보 기>

ㄱ. $f(x)h(x)$ ㄴ. $g(x)h(x)$

ㄷ. $\frac{f(x)}{g(x)}$ ㄹ. $\frac{g(x)}{f(x)}$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $f(x)h(x)$: 연속 (∵ 다항함수)

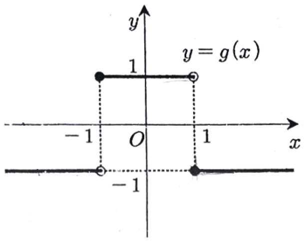
ㄴ. $\lim_{x\to1^-}g(x)h(x)=1 \neq \lim_{x\to1^+}g(x)h(x)=0$

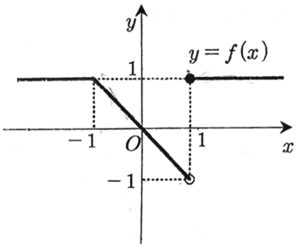
$\therefore$ 불연속.

ㄷ. $g(x)\neq0$ 이므로 연속함수의 성질에 의해 연속

ㄹ. $f(1)=0$ 이므로 불연속 (정의 안됨)

10. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 옳은 설명만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4.9점]





<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.
~~ㄷ~~. 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$에서 불연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x\to1^-}(f(x)+g(x)) = -1+1=0$

$\lim_{x\to1^+}(f(x)+g(x)) = 1-1=0$　　∴ $x=1$ 에서 연속.

$f(1)+g(1)=1-1=0$

ㄴ. $\lim_{x\to-1^-} f(x)g(x) = 1\cdot(-1)=-1$　　∴ $x=-1$ 에서 불연속

$\lim_{x\to-1^+} f(x)g(x) = 1\cdot1=1$

ㄷ. $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{-1}=-1$

$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-1}{1}=-1$　　∴ $x=1$에서 연속.

$\frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1}{-1}=-1$

11. 이차함수 $f(x)$는 $f(1)f(2)<0$, $f(3)f(4)<0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)=\begin{cases} xf(x) & (x\ge0) \\ xf(-x) & (x<0) \end{cases}$ 일 때, 방정식 $g(x)=0$의 근의 개수는? [5.1점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

i) 이차함수는 연속이므로 사잇값 정리에 의해
$f(x)=0$ 은 $(1,2)$, $(3,4)$ 에서 근을 가진다.
이때 이차함수는 최대 2개의 근을 가지므로
$f(x)=0$ 은 정확히 2개의 근을 가진다.

ii) $f(-x)=0$ 은 $y=f(x)$의 y축 대칭이므로
정확히 2개의 근을 가진다.　i, ii에서 4개의

iii) $f(x)=0 \Rightarrow g(x)=xf(x)=0$ 이므로 근이 보존된다.

iv) $g(0)=0$ 이므로 $x=0$ 에서 한개의 근을 가진다.

∴ iii, iv 에 의해 $g(x)=0$ 의 근은 5개이다.

12. 두 다항함수 $f(x), g(x)$가 모든 실수 x에 대해 $(x-1)f(x)=g(x)-x^3$을 만족한다. $\lim_{x\to\infty} f(x)=-2$일 때, $g(0)$의 값은? [5.3점]

① −4　② −2　③ 0　④ 2　⑤ 4

i) $f(x)=\begin{cases} \frac{g(x)-x^3}{x-1} & (x\ne1) \\ f(1) & (x=1) \end{cases}$

ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)-x^3}{x-1} = -2$ 이므로

$g(x)=x^3-2x+b$ 이다. (∵ 이차항이 존재하면 극한값이 없다)

iii) $f(1)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-x^3}{x-1}$　(∵ f : 연속(다항함수))

$=\lim_{x\to1}\frac{-2x+b}{x-1}$　　∴ $b-2=0$ (∵ $\lim_{x\to1}(x-1)=0$)

$b=2$

∴ $g(0)=b=2$

($f(x)=-2$, 상수함수는 다항함수)

13. 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가

$(x^2-x-2)f(x)=x^3-ax^2+b$를 만족시킬 때, $f(-1)+f(2)$의

값은? (단, a, b는 상수) [5.5점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

i) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-ax^2+b}{x^2-x-2} & (x\neq -1,\ x\neq 2)\\ f(-1) & (x=-1)\\ f(2) & (x=2)\end{cases}$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4\\ & & -1 & 4 & -4\\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0\end{array}$$

ii) $\lim_{x\to -1}(x^2-x-2)=0$, $\lim_{x\to 2}(x^2-x-2)=0$ 이고

$f(x)$는 연속함수 이므로

$\begin{cases}-1-a+b=0\\ 8-4a+b=0\end{cases}$

$a=3,\ b=4$

iii) $f(-1)=\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-x-2}$ (∵ 연속)

$=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-2)^2}{(x+1)(x-2)}$

$=-3$

마찬가지로 $f(2)=0$

$\therefore f(-1)+f(2)=-3+0=-3$

14. 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여

$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$를 만족시키고, $f'(2)=3$일 때, $f'(x)$

를 구하면? [5.5점]

① $f'(x)=-x+3$

② $f'(x)=x+3$

③ $f'(x)=-x+5$

④ $f'(x)=x+5$

⑤ $f'(x)=-x-5$

i) $f'(2)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\cancel{f(2)}+f(h)-2h-\cancel{f(2)}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}-2=3$

$\therefore \lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=5$

ii) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\cancel{f(x)}+f(h)-xh-\cancel{f(x)}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}-x$

$=5-x$

15. 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 미분가능한 함수이며

함수 $g(x)=2x-1$라 하자.

다음은 함수의 곱의 미분법의 증명 과정이다.

<증 명>

$\{f(x)g(x)\}'$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+\boxed{\text{(가)}}}{h}\right\}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}g(x+h)$

$+\lim_{h\to 0}f(x)\times\lim_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$f(x)g(x+h)-f(x)g(x)$

빈칸 (가) 에 알맞은 식을 $Q(x)$라고 할 때,

$\lim_{h\to 0}\dfrac{Q(x)}{-hf(x)}$의 값을 구하시오.(단, 모든 실수 x에 대해 $f(x)\neq 0$이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$Q(x)=f(x)g(x+h)-f(x)g(x)$

$\lim_{h\to 0}\dfrac{Q(x)}{-hf(x)}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\cancel{f(x)}(g(x+h)-g(x))}{-h\cancel{f(x)}}$

$=-g'(x)$

$=-2$

서답형

단답형 1. $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+a}-b}{2x+2}=\frac{1}{8}$일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오. [5점]

i) $\sqrt{-1+a}-b=0$ $\quad (\because \lim_{x\to-1}(2x+2)=0)$

$b=\sqrt{-1+a}$

ii) $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{-1+a}}{2(x+1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{x+a-(-1+a)}}{2\cancel{(x+1)}}\times\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{-1+a}}$

$=\frac{1}{4\sqrt{a-1}}=\frac{1}{8}$

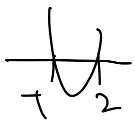
$\therefore \sqrt{a-1}=2$

$\boxed{a=5,\ b=2}$

단답형 2. 실수 a에 대하여 집합 $\{x\,|\,x^2+2(a+1)x+3(a+1)=0, x$는 실수$\}$의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 함수 $f(a)$가 불연속인 a의 값을 모두 구하시오. [5점]

$D/4=(a+1)^2-3(a+1)$

$=(a-2)(a+1)$



i) $a<-1,\ a>2$ 일 때

$f(a)=2$

ii) $a=-1$ or 2 일 때

$f(a)=1$

$\boxed{\therefore a=-1, 2}$

iii) $-1<a<2$ 일 때

$f(a)=0$

서술형 1. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, f(3))$에서 접하는 접선의 기울기가 6일 때, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^3-27}$의 값을 구하시오. [6점]

i) $f'(3)=6$ $\quad (\because$ 접선의 기울기$)$

ii) $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}$

$=f'(3)\cdot\lim_{x\to3}\frac{1}{x^2+3x+9}$

$=6\cdot\frac{1}{27}$

$=\boxed{\frac{2}{9}}$

서술형 2. 다항함수 $f(x)$가

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+x^2-3x+1}=-2$, $\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{f(x)}=\frac{1}{2}$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하시오. [7점]

i) $f(x)$는 삼차항의 계수가 -2인 삼차함수

ii) $\lim_{x\to-2}(x+2)^2=0$ 이고 $\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{f(x)}=\frac{1}{2}\neq 0$

이므로 $\lim_{x\to-2}f(x)=0=f(-2)$

(∵ $f(x)$는 다항함수이므로 연속)

따라서 인수정리에 의해

$f(x)$는 $(x+2)^2$을 인수로 가진다.

∴ let $f(x)=-2(x+2)^2(x+k)$

iii) $\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{f(x)}=\lim_{x\to-2}\frac{\cancel{(x+2)^2}}{-2\cancel{(x+2)^2}(x+k)}$

$=\frac{1}{-2(-2+k)}=\frac{1}{2}$

$\therefore 2-k=1$

$k=1$

$\therefore f(x)=-2(x+2)^2(x+1)$

$\therefore f(0)=-2\cdot 2^2\cdot 1$

$=\boxed{-8}$

서술형 3. 두 함수

$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2 & (x<1) \\ x^2-bx+2 & (x\ge 1)\end{cases}$, $\quad g(x)=\begin{cases} -x+1 & (x<1) \\ x+3 & (x\ge 1)\end{cases}$

에 대하여 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 $a+b$의 값을 구하시오. [7점]

i) $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2(x+a)}{-(x-1)}$가 존재하므로

$\lim_{x\to1^-}x^2(x+a)=1+a=0$ (∵ $\lim_{x\to1^-}(-(x-1))=0$)

$\therefore a=-1$

ii) $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2\cancel{(x-1)}}{-\cancel{(x-1)}}=-1$

iii) $\frac{f(1)}{g(1)}=\frac{3-b}{4}=-1$ (∵ 연속)

$b=7$

$\therefore a+b=-1+7=\boxed{6}$.