# 12. 직선의 방정식

## 2024 2학기 기하

이한희

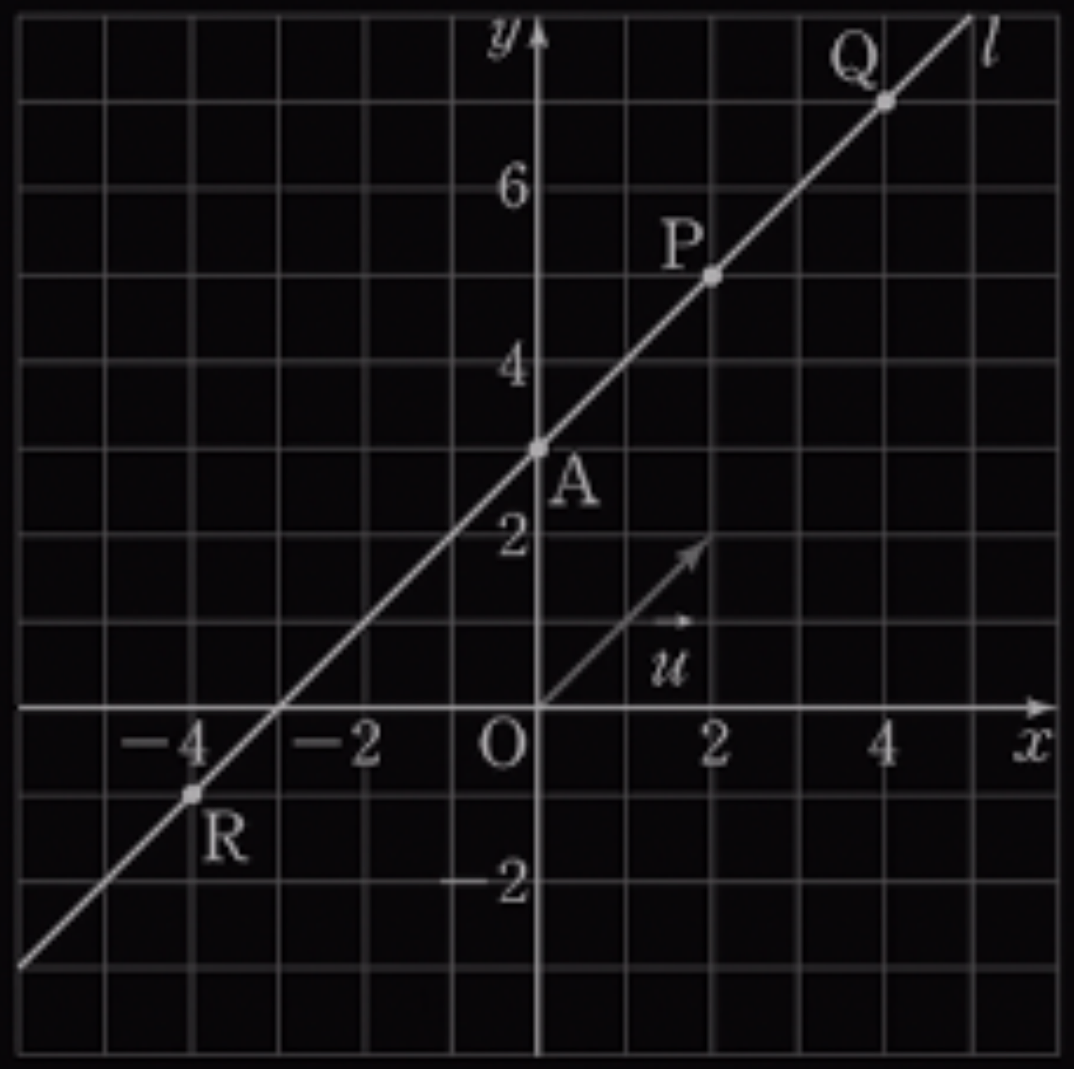
# 주어진 벡터에 평행한 직선의 방정식은 어떻게 구할까?

오른쪽 그림은 점 A(0, 3)을 지나고 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 $l$을 나타낸 것이다. 직선 $l$ 위의 세 점 P, Q, R에 대하여 다음 빈칸에 알맞은 수를 써넣으시오.

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\boxed{1}\,\vec{u}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\boxed{2}\,\vec{u}$$

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+(\boxed{-2})\,\vec{u}$$



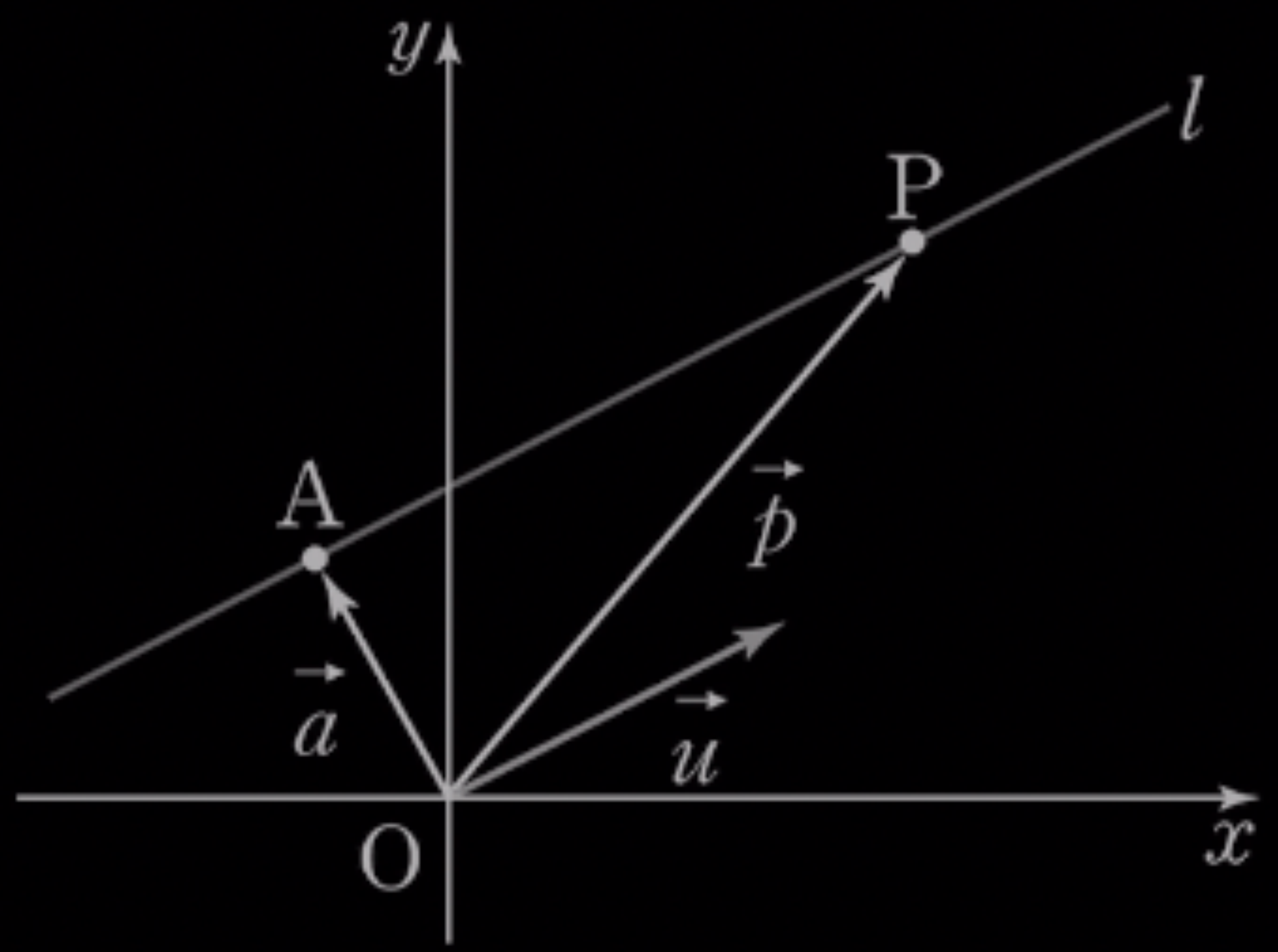
$\overrightarrow{AP}//\vec{u}$이므로

$\overrightarrow{AP}=t\vec{u}$인 실수 $t$가 존재

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$이므로

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$

방향벡터



Let $\quad \vec{u}=(a,b), A(x_1,y_1), P(x,y)$

$\vec{a}=(x_1,y_1), \vec{p}=(x,y)$

위 직선의 방정식은

$$(x,y)=(x_1,y_1)+t(a,b)$$

$$=(x_1+at, y_1+bt)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의해

$x=x_1+at, y=y_1+bt$

$ab\neq 0$일 때, 위 식은

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}$$

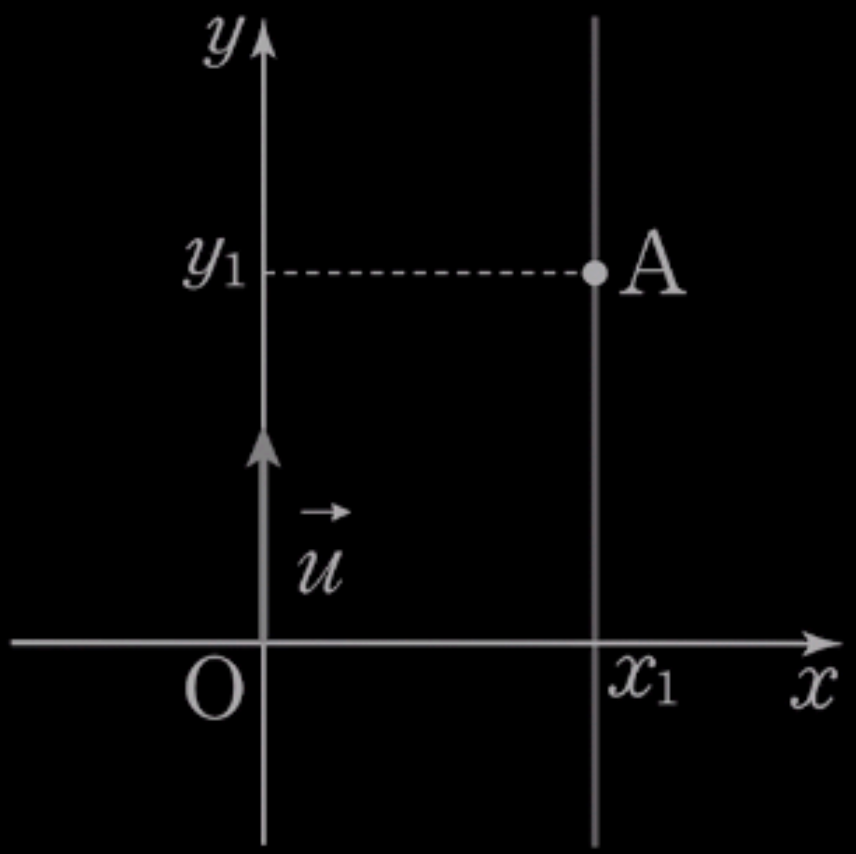
# 직선의 방정식

점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (a, b)$인 직선의 방정식은

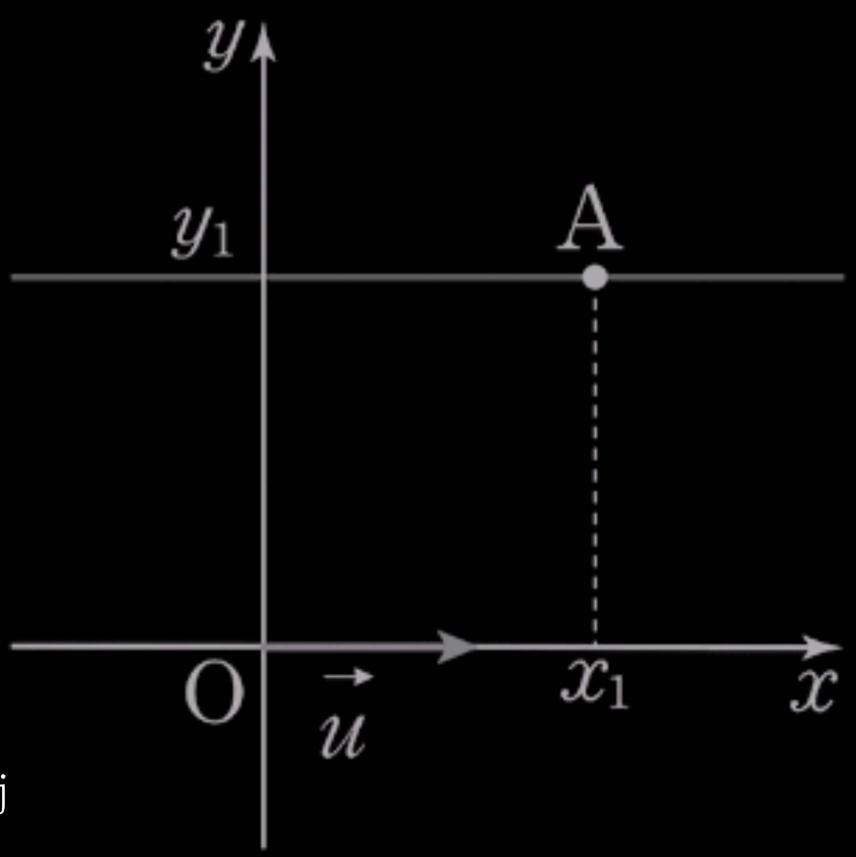
$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \ (\text{단, } ab \neq 0)$$

# 축과 평행한 직선의 방정식

$a = 0, b \neq 0$이면 $x = x_1$




$a \neq 0, b = 0$이면 $y = y_1$



# 문제1.

다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(-2, 3)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (1, 2)$인 직선

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{2}$$

$$x + 2 = \frac{y-3}{2}$$

(2) 점 $(1, 2)$를 지나고 직선 $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-y}{2}$에 평행한 직선

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2}$$

(3) 점 $(1, 5)$를 지나고 벡터 $\vec{u} = (-1, 0)$에 평행한 직선

$$y = 5$$

# 예제1.

두 점 $A(1,3), B(2,-1)$을 지나는 직선의 방정식을 벡터를 이용하여 구하시오.

구하는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB} = (2-1, -1-3) = (1, -4)$$

이 직선이 점 $A(1,3)$을 지나므로 직선의 방정식은

$$x - 1 = \frac{y-3}{-4}$$

# 문제2.(한번 해보세요~)

다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 벡터를 이용하여 구하시오.

(1) $A(5,2), B(-1,3)$ 답: $\dfrac{x-5}{-6} = y-2$

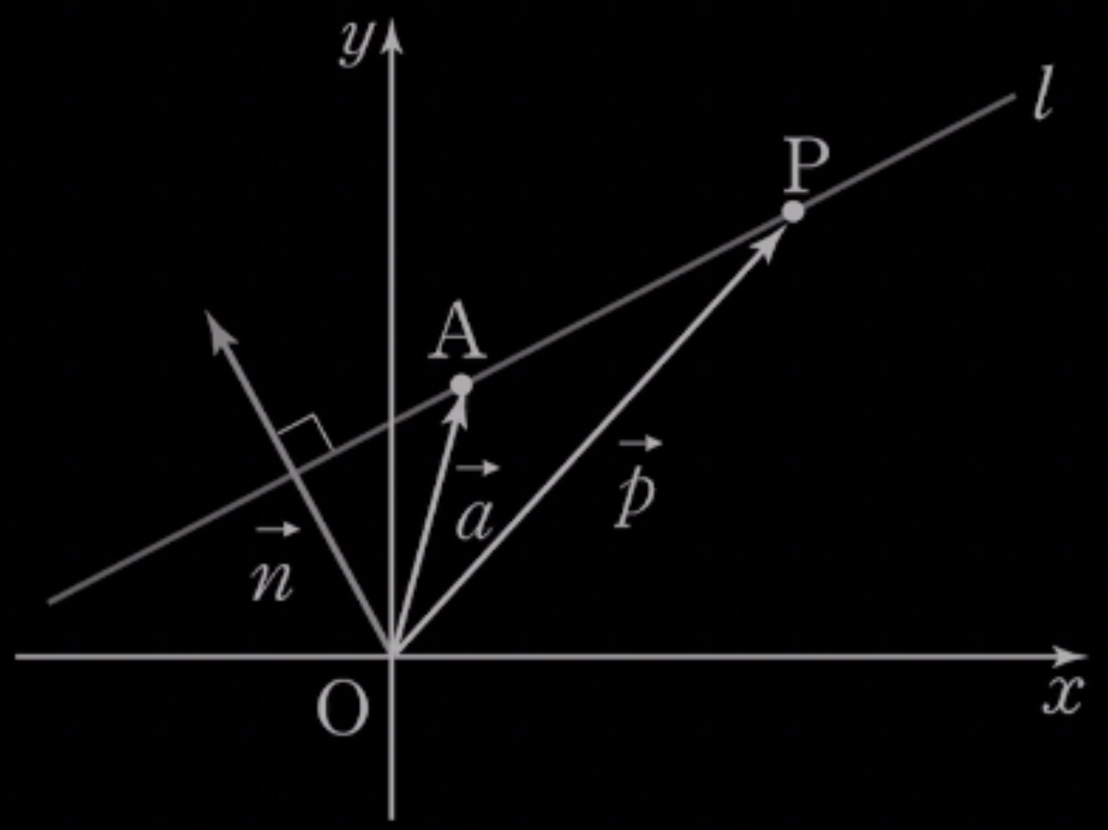
(2) $A(1,-4), B(2,-1)$ 답: $x-1 = \dfrac{y+4}{3}$

# 주어진 벡터에 수직인 직선의 방정식은 어떻게 구할까?

점 $A$를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}$에 수직인 직선 $l$의 방정식

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$




법선벡터

Let $\vec{n} = (a, b), A(x_1, y_1), P(x, y)$

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (a, b) = 0$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

# 법선벡터를 이용한 직선의 방정식

점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (a, b)$인 직선의 방정식

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

# 스스로 확인하기

점 $(1,2)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(-1,3)$인 직선의 방정식은

$$-(x-1)+3(y-2)=0$$

$$\therefore\ x-3y+5=0$$

# 문제1. (한번 해보세요~)

다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(-3,-1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(2,1)$인 직선

$$2x+y+7=0$$

(2) 점 $(-1,2)$를 지나고 벡터 $\vec{n}=(1,-4)$에 수직인 직선

$$x-4y+9=0$$

# 두 직선의 평행조건 수직조건

방향벡터끼리 평행하면 두 직선도 평행

방향벡터끼리 수직이면 두 벡터도 수직

두 직선 $l, m$의 방향벡터가 각각 $\vec{u}, \vec{v}$일 때,

$$l // m \iff \vec{u} // \vec{v}$$

$$l \perp m \iff \vec{u} \perp \vec{v}$$

# 예제2.

두 직선 $l : \dfrac{x-1}{6} - \dfrac{y-2}{k},\ m : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 두 직선 $l, m$이 서로 평행할 때, 상수 $k$의 값

(2) 두 직선 $l, m$이 서로 수직일 때, 상수 $k$의 값

두 직선 $l, m$의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$라 하면

$\vec{u} = (6, k), \vec{v} = (2, 3)$

(1) $l // m$이므로 $\vec{u} // \vec{v}$

$$(6, k) = t(2, 3)$$

$$6 = 2t, k = 3t$$

$$\therefore\ t = 3, k = 9$$

(2) $l \perp m$이므로

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

$$(6, k) \cdot (2, 3) = 0$$

$$12 + 3k = 0$$

$$\therefore\ k = -4$$

# 문제4.(한번 풀어보세요~)

두 직선 $l : \dfrac{x-2}{k} = \dfrac{y-1}{3}$, $m : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{1-y}{6}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 두 직선 $l, m$이 서로 평행할 때, 상수 $k$의 값

$$(k, 3) = -2(3, 6) \therefore\ k = -\frac{3}{2}$$

(2) 두 직선 $l, m$이 서로 수직일 때, 상수 $k$의 값

$$3k + 3 \times (-6) = 0 \therefore\ k = 6$$