♦ 교과서 문제 풀이입니다.
♦ 문제풀이 및 해설은 오른쪽 qr코드와 같습니다.
♦ 함께 열심히 해 봅시다.

문제 1. 지수함수 $y=(a^2+a-5)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 이때 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

밑>1 이므로

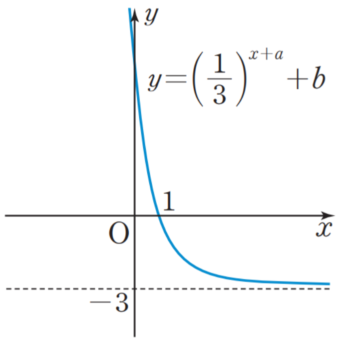
$a^2+a-5>1$

$a^2+a-6>0$

-2
3

$\boxed{a<-3 \text{ or } a>2}$

문제 2. 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+a}+b$의 그래프가 다음 그림과 같고 직선 $y=-3$이 이 그래프의 점근선일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.



i) 점근선 $y=-3$ 이므로

$b=-3$

ii) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+a}-3$

(1, 0) 대입

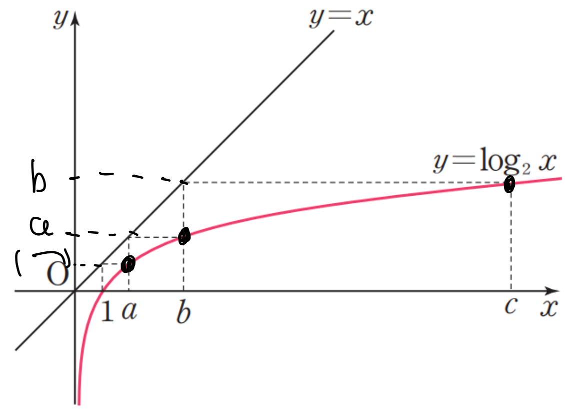
$0=\left(\frac{1}{3}\right)^{1+a}-3$

$3^1=3^{-1-a}$

$1=-1-a$

$\therefore a=-2$

문제 3. 다음 그림은 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=x$이다. 이때 $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



i) $(a, 1)$ 대입

$1=\log_2 a$

$a=2^1=2$

ii) (b, a) 대입

$a=\log_2 b$

$2=\log_2 b$

$b=2^2=4$

iii) (c, b) 대입

$b=\log_2 c$

$4=\log_2 c$

$c=2^4=16$

$\therefore a+b+c=2+4+16$

$=22$

문제 4. 함수 $y=\log_3(x-2)+3$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 함수 $y=\log_3(3x-9)$의 그래프와 일치할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

$y=\log_3(x-2)+3 \xrightarrow[y,\,b]{x,\,a} y=\log_3((x-a)-2)+b+3$

$y=\log_3(3x-9) \Rightarrow y=\log_3 3(x-3)$

$=\log_3(x-3)+1$

$\boxed{\therefore a=1,\ b=-2}$

문제 5. 다음 세 수의 대소를 비교하시오.

(1) $2\sqrt{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $8^{\frac{1}{6}}$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$, $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}$, $2\log_4 3$

(1) $2^{\frac{3}{2}}$, 2^{2}, $2^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2} < \frac{3}{2} < 2$

$2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{2}$ (∵ 밑>1)

∴ $8^{\frac{1}{6}} < 2\sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}}$, $\log_{\frac{1}{2}} 3^{-\frac{1}{2}}$, $\log_{\frac{1}{2}} 3^{-1}$

$\frac{1}{2} > -\frac{1}{2} > -1$

$3^{\frac{1}{2}} > 3^{-\frac{1}{2}} > 3^{-1}$ (∵ 밑>1)

$\log_{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} < \log_{\frac{1}{2}} 3^{-\frac{1}{2}} < \log_{\frac{1}{2}} 3^{-1}$ (∵ 밑<1)

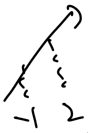
∴ $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3} < \log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3} < 2\log_4 3$

문제 6. 정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 2\}$일 때, 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y = 3^{x-1} - 1$

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x+5) + 3$

(1) $y = 3^{x}$



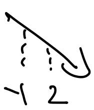
증가함수 이므로

$y_{최대} = 3^{2-1} - 1 = 2$

$y_{최소} = 3^{-1-1} - 1 = -\frac{8}{9}$

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}} 2x$

$= -\log_3 2x$



감소함수 이므로

$y_{최대} = \log_{\frac{1}{3}}(-2+5) + 3 = -1 + 3 = 2$

$y_{최소} = \log_{\frac{1}{3}}(4+5) + 3 = -2 + 3 = 1$

y=x와의 교점.

문제 7. 함수 $y = 2^{x-m} + n$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표가 각각 1, 2일 때, 상수 m, n의 값을 구하시오.

$2^{x-m} + n = x$

i) $x=1$ 일 때 ii) $x=2$ 일 때

$2^{1-m} + n = 1$ ⋯① $2^{2-m} + n = 2$ ⋯②

② − ①

$2^{2-m} - 2^{1-m} = 1$

$(2^2 - 2^1)\cdot 2^{-m} = 1$

$2 \cdot 2^{-m} = 1$

양변에 2^m을 곱함.

$2 = 2^m$

$\boxed{m = 1, \ n = 0}$

문제 8. 자외선이 어느 필름을 한 장 통과할 때마다 통과하기 전 양의 80%가 차단된다고 한다. 자외선이 몇 장의 필름을 통과해야 맨 처음 자외선 양의 99.2%가 차단되는지 구하시오.

$\cancel{A}\left(\frac{20}{100}\right)^n = \cancel{A}\left(\frac{0.8}{100}\right)$

$\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^n = \left(\frac{1}{5}\right)^3$

∴ $n = 3$

3장

문제 9. 어느 도시의 미세 먼지 농도는 매년 4%씩 증가한다고 한다. 이와 같은 비율로 미세 먼지 농도가 계속 증가한다고 할 때, 미세 먼지 농도가 현재의 2배 이상이 되는 것은 최소 몇년 후인지 구하시오. (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 1.04 = 0.02$로 계산한다.)

$$\cancel{A}\times\left(\frac{104}{100}\right)^n \geq \cancel{A}\times 2$$

$$\log(1.04)^n \geq \log 2 \quad (\because 밑>1)$$

$$n\log 1.04 \geq 0.3$$

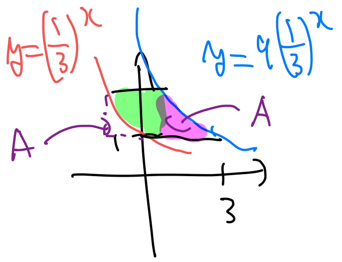
$$n\times 0.02 \geq 0.3$$

$$n \geq 15$$

∴ 15년 후

도전문제

문제 10. 두 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=9\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 두 직선 $y=1$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



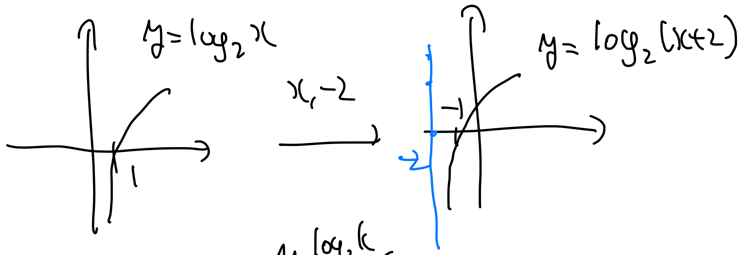
$$y=9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

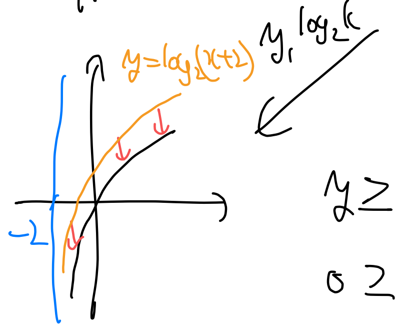
$$=3^2\cdot 3^{-x}=3^{-(x-2)}$$

$$\therefore S = 2\times(3-1) = 4$$

문제 11. 함수 $y=\log_2 k(x+2)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않을 때, 양수 k의 최댓값을 구하시오.

$$y=\log_2(x+2)+\log_2 k$$





$y\geq\log_2 k(x+2)$ (0,0) 대입

$$0\geq\log_2 2k$$

$$\log_2 2^0\geq\log_2 2k$$

$$2^0\geq 2k \quad (\because 밑>1)$$

$$\therefore \frac{1}{2}\geq k>0 \quad (\because 양수\ k)$$

문제 12. 2보다 큰 실수 a에 대하여 $a\leq x<a^2$에 대하여 $(\log_a x)^2$, $\log_a x^2$, $\log_a(\log_a x)$의 대소를 비교하시오.

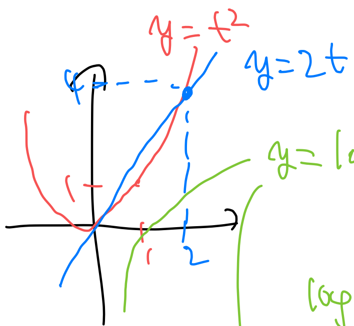
i) $\log_a a\leq\log_a x<\log_a a^2$ ($\because$ 밑>1)

$$1\leq\log_a x<2$$

ii) let $\log_a x = t$ $(x>0,\ 1\leq t<2)$

$(\log_a x)^2=t^2$, $\log_a x^2 = 2\log_a x = 2t$,

$\log_a(\log_a x)=\log_a t$



$y=\log_a t$

$2<a$

$\log_a 2<\log_a a$ ($\because$ 밑>1)

$\therefore \log_a 2<1$

$$\boxed{\therefore \log_a x<(\log_a x)^2<\log_a x^2}$$