♦ 교과서 문제 풀이입니다.
♦ 문제풀이 및 해설은 오른쪽 qr코드와 같습니다.
♦ 함께 열심히 해 봅시다.

개념 1. 등차수열

1. 일반항

$a_n = a + (n-1)d$ (첫째항 + 한개 부족한 공차 곱)

2. 등차중항

a, b, c 이 순서대로 등차수열 $\Rightarrow 2b = a + c$

3. 등차수열의 부분합

$S_n = \dfrac{n(a + a_n)}{2}$ (갯수 × (첫째항+끝항) 나누기 2)

개념 2. 등비수열

1. 일반항

$a_n = ar^{(n-1)}$ (첫째항 × 한개 부족한 공비 제곱)

2. 등비중항

a, b, c 이 순서대로 등비수열 $\Rightarrow b^2 = ac$

3. 등비수열의 부분합

$S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

개념 3. 합의 기호 Σ의 성질

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (합차는 분배된다.)

(2) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (상수곱은 밖으로 나온다.)

유의

(3) $\sum_{k=1}^{n} c = cn$ ex) $\sum_{k=1}^{2} 3 = \underbrace{3}_{k=1} + \underbrace{3}_{k=2} = 3\times 2$

(4) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \neq \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k$

ex) $\sum_{k=1}^{2} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2$

$\sum_{k=1}^{2} a_k \times \sum_{k=1}^{2} b_k = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$

예제 1. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 7$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 9$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k + 3b_k)$ (2) $\sum_{k=1}^{10}(-2a_k + 3)$

(1) $2\sum_{k=1}^{10} a_k + 3\sum_{k=1}^{10} b_k$

$= 2\cdot 7 + 3\cdot 9$

$= 41$

(2) $-2\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 3$

$= -2\cdot 7 + 3\cdot 10$

$= 16$

문제 1. $\sum_{k=1}^{10} a_{2k} = 30$, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = 40$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{20} a_k$ (2) $\sum_{k=1}^{20} (-1)^k a_k$

$\sum_{k=1}^{10} a_{2k} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{20}$ ⋯ ①

$\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{19}$ ⋯ ②

(1) $\sum_{k=1}^{20} a_k = ① + ② = 30 + 40 = 70$

(2) $\sum_{k=1}^{20} (-1)^k a_k = ① - ② = 30 - 40$

$= -10$

개념 4. 시그마 공식

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

문제 2. 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $1+2+3+\cdots+10$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$

(1) $\sum_{k=1}^{10}k=\frac{10\cdot 11}{2}=55$

(2) $\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=385$

(3) $\sum_{k=1}^{10}k^3=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2=3025$

예제 2. 다음 식의 값을 구하시오.

$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

예제 3. 다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=1\times\left[\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{n-1}{2(n+1)}$$

문제 3. 다음 식의 값을 구하시오.

문제8 (2) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\cancel{k+1}-\cancel{k}}$$

$$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$$

$$=\sqrt{n+1}-1$$