



1. 다항식의 연산

생각열기

다음은 윤희와 승태가 각각 수학 공책에 다항식을 두 개씩 적은 것이다.



윤희

$$4x^3 - x^2 + 2x + 3$$
$$2x^4 + 3x^2 - 6x + 1$$


승태

$$-x^2 + 3 + 2x + 4x^3$$
$$1 + 2x^4 + 3x^2 - 6x$$

- 1 윤희가 적은 다항식 중에서 차수가 높은 식과 승태가 적은 다항식 중에서 차수가 낮은 식을 각각 말해 보자.
- 2 1에서 다항식의 차수를 더 쉽게 비교할 수 있도록 식을 적은 학생은 누구인지 말해 보자.

보기

(1) 다항식 $4x + x^3 + 2$ 를

내림차순으로 정리하면 $x^3 + 4x + 2$

오름차순으로 정리하면 $2 + 4x + x^3$

보기

(2) 다항식 $3x^2 + y^2 - 3x + y - 1$ 을

x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$3x^2 - 3x + y^2 + y - 1$$

보기

(2) 다항식 $3x^2 + y^2 - 3x + y - 1$ 을

y 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$y^2 + y + 3x^2 - 3x - 1$$

문제1. 다항식 $x^2 + y + 4 - 2xy^2$
를 다음과 같이 정리하시오.

- (1) x 에 대한 내림차순
- (2) y 에 대한 오름차순

답: $x^2 - 2xy^2 + y + 4, x^2 + 4 + y - 2xy^2$

다항식의 덧셈과 뺄셈은 어떻게 할까?

동류항끼리

예제1. 두 다항식

$$A = x^3 + 2x + 3, B = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A + B$

(2) $A - B$

예제1. (1)

$$A + B = (x^3 + 2x + 3) + (2x^3 - 3x^2 + 1)$$

$$= (1 + 2)x^3 - 3x^2 + 2x + (3 + 1)$$

$$= 3x^3 - 3x^2 + 2x + 4$$

예제1. (2)

$$A - B = (x^3 + 2x + 3) - (2x^3 - 3x^2 + 1)$$

$$= (x^3 + 2x + 3) + (-2x^3 + 3x^2 - 1)$$

$$= (1 - 2)x^3 + 3x^2 + 2x + (3 - 1)$$

$$= -x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

문제2. 두 다항식

$$A = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 2, B = 2x^3 + 4x^2 - 1$$

에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A + B$

(2) $A - B$

답 $5x^3 + 6x^2 - 5x + 1, x^3 - 2x^2 - 5x + 3$

문제3. 세 다항식

$$A = x^3 + 2xy + y^2, B = x^3 - 3xy, C = 2xy + 3y^2$$

에 대하여 다음을 계산하시오.

(1) $A - B + 2C$

(2) $2(A - B) + (B - C)$

답: $9xy + 7^2, x^3 + 5xy - y^2$

생각열기. 다항식의 곱셈은 어떻게 할까?

어느 기후산업 박람회에서 부스 배치를 위하여 오른쪽 그림과 같이 박람회장을 4개의 구역으로 나누었다.

- ① 4개의 구역의 넓이를 각각 구해 보자.
- ② 박람회장 전체의 넓이를 구해 보고, ①에서 구한 각 구역의 넓이의 합과 비교해 보자.



생각열기. 다항식의 곱셈은 어떻게 할까?

분배법칙 → 동류항끼리 모아서 정리

생각열기. 다항식의 곱셈은 어떻게 할까?

$$(2x - 1)(2x^2 - x + 3)$$

$$= 2x \times (2x^2 - x + 3) + (-1) \times (2x^2 - x + 3)$$

$$= 4x^3 - 2x^2 + 6x - 2x^2 + x - 3$$

$$= 4x^3 - 4x^2 + 7x - 3$$

문제4. 다음 식을 전개하시오.

$$(1) (3x + 2)(x^2 + x + 2)$$

$$(2) (x - y)(5x^2 - 2x + y)$$

$$\text{답: (1) } 3x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

$$(2) 5x^3 - 5x^2y - 2x^2 + 3xy - y^2$$

다항식의 곱셈에 관한 성질

세 다항식 A, B, C 에 대하여

1. 교환법칙 $AB = BA$

2. 결합법칙 $(AB)C = A(BC)$

3. 분배법칙

$$A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC$$

문제5. 세 다항식

$$A = x^2 - 1, B = x^2 + x, C = x + 3$$

에 대하여

$$A(B + C) + C(-A + B)$$

를 계산하시오.

$$\text{답: } x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x$$

다항식의 곱셈공식(중학)

(1)

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(2) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(3)

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

다항식의 곱셈공식(고등)

(1)

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(2) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(2) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

다항식의 곱셈공식(고등)

$$(3) (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

예제2. 다음 식을 전개하시오.

$$(1) (a + b)^3$$

$$= (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$$

예제2. 다음 식을 전개하시오.

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

예제2. 다음 식을 전개하시오.

$$(2) (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 + a^3 + b^3$$

문제6. 위와 같은 방법으로 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a - b)^3$

(2) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

답: $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, a^3 - b^3$

예제3. 곱셈공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

$$(1) (a - b + 2c)^2$$

$$= a^2 + (-b)^2 + (2c)^2 + 2 \times a \times (-b)$$

$$+ 2 \times (-b) \times (2c) + 2 \times (2c) \times a$$

$$= a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab - 4bc + 4ca$$

예제3. 곱셈공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

$$(2) (2a + b)^3$$

$$= (2a)^3 + 3 \times (2a)^2 \times b + 3 \times (2a) \times b^2 + b^3$$

$$= 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$$

문제7. 곱셈공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(2a - b - 3c)^2$

(2) $(a - 3)^3$

(3) $(2a - 1)(4a + 2a + 1)$

문제7. 곱셈공식을 이용하여 다음 식을 전개하시오.

답:

$$(1) 4a^2 + b^2 + 9c^2 - 4ab + 6bc - 12ca$$

$$(2) a^3 - 9a^2 + 27a - 27$$

$$(3) 8a^3 - 1$$

예제4. $x + y = 4, xy = 2$ 일 때,
 $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오.

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \text{에서}$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2$$

$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$= 4^3 - 3 \times 2 \times 4 = 40$$

문제 8. $x - y = 3$, $xy = 1$ 일 때,
 $x^3 - y^3$ 의 값을 구하시오.

답: 36

다항식의 나눗셈은 어떻게 할까?

문제9. 다음 나눗셈에서 빈칸 안에 알맞은 것을 써넣고, 몫과 나머지를 구하시오.

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad \boxed{} + 1 \\
 x+2 \overline{) 3x^2 + 7x - 1} \\
 \underline{3x^2 + } \\
 \boxed{} - 1 \\
 x + \boxed{} \\
 \hline
 \boxed{}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad \boxed{} - 4 \\
 x^2+2x \overline{) 2x^3 - 5x + 2} \\
 \underline{ \boxed{} + 4x^2} \\
 - 4x^2 - 5x + 2 \\
 - 4x^2 - \boxed{} \\
 \hline
 \boxed{} + 2
 \end{array}$$

문제10. 다음 두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나누었을 때의 몫 Q 와 나머지 R 를 구하고, $A = BQ + R$ 의 꼴로 나타내시오.

문제10.

$$(1) A = 4x^3 - 7x^2 + x, B = x - 1$$

$$(2) A = 3x^3 + 2x^2 - 2x + 7, B = x^2 + 1$$

문제10.

답:

$$4x^3 - 7x^2 + x = (x - 1)(4x^2 - 3x - 3) - 2$$

$$3x^3 + 2x^2 - 2x + 7 = (x^2 + 1)(3x + 2) - 5x + 5$$

예제5. 다항식 A 를 $2x + 1$ 로 나누었을 때
의 몫은 $x^2 - x + 2$ 이고 나머지는 5이다.
다항식 A 를 구하시오.

예제5.

$$A = (2x + 1)(x^2 - x + 2) + 5$$

$$= 2x(x^2 - x + 2) + (x^2 - x + 2) + 5$$

$$= (2x^3 - 2^2 + 4) + (x^2 - x + 2) + 5$$

$$= 2x^3 - x^2 + 3x + 7$$

문제11. 다항식 A 를 $x^2 - 2x$ 로 나눴을 때의
몫은 $x + 1$ 이고 나머지는 $2x - 3$ 이다. 다
항식 A 를 구하시오.

답: $x^3 - x^2 - 3$

문제12.

어느 재활용품 처리 시설에서 기계 $(x+3)$ 대를 이용하여 하루에 $(x^3+5x^2+11x+15)$ kg의 재활용품을 처리한다고 할 때, 기계 1대가 하루에 처리하는 재활용품의 무게를 x 에 대한 식으로 나타내시오. (단, $x > 0$)



답: $(x^2 + 2x + 5)$ kg