

2. 나머지 정리

생각열기

등식 $x(x+2)+1=(x+1)^2$ 에 대하여 다음 물음에 답해 보자.

- ① 등식의 좌변과 우변의 x 에 각각 $-2, 2, 5$ 를 대입하여 다음 표를 완성하고, 좌변과 우변의 식의 값을 서로 비교해 보자.

	-2	2	5
$x(x+2)+1$			
$(x+1)^2$			

- ② ①의 좌변과 우변의 식의 값이 x 의 값에 관계없이 항상 같은지 이야기해 보자.

등식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 항등식이 되기 위

한 조건

$$c = 0$$

$x = 0$ 대입

$$a + b = 0$$

$x = 1, c = 0$ 대입

$$a - b = 0$$

$x = -1, c = 0$ 대입

$$\therefore a = 0, b = 0, c = 0$$

따라서 등식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 x 에 대한
항등식이면

$$a = 0, b = 0, c = 0$$

문제1. 등식

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

이 x 에 대한 항등식이면

$a = a', b = b', c = c'$ 임을 설명하시

오.

개념 항등식의 성질

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ 이 x 에 대한 항등식
이면 $a = 0, b = 0, c = 0$ 이다.

또, $a = 0, b = 0, c = 0$ 이면

$ax^2 + bx + c = 0$ 은 x 에 대한 항등식이다.

(2)

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

이 x 에 대한 항등식이면

$$a = a', b = b', c = c' \text{ 이다.}$$

또, $a = a', b = b', c = c'$ 이면

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

은 x 에 대한 항등식이다.

미정계수법

계수 비교하기

수치 대입하기(나머지 정리, 특수한 경우)

예제1. 등식

$$a(x-1)^2 + b(x-1) - 2 = x^2 - 2x - 1$$

이 x 에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b

의 값을 구하시오.

방법1. 계수 비교하기

좌변을 전개하면

$$a(x - 1)^2 + b(x - 1) - 2 = ax^2 + (-2a + b)x + a - b - 2$$

우변과 비교하면

$$a = 1, -2a + b = -2, a - b - 2 = -1$$

연립하면

$$a = 1, b = 0$$

방법2. 수치 대입하기

양변에 $x = 0, x = 2$ 를 대입

$$a - b - 2 = -1, a + b - 2 = -1$$

연립하면

$$a = 1, b = 0$$

수치 대입은 특수한 경우에만 유리함

문제2. 다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c 의 값을 구하시오.

(1) $x^2 + ax + 4 = (bx + 1)(x = c)$

(2)

$$x^2 + 3x + 5 = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c$$

답

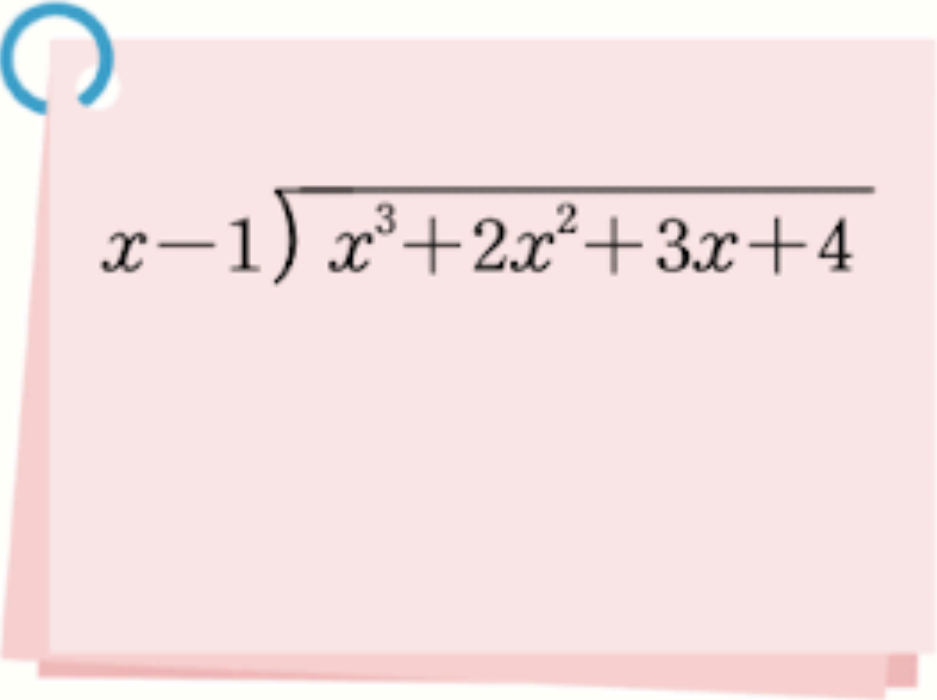
$$(1) \ a = 5, b = 1, c = 4$$

$$(2) \ a = 1, b = 1, c = 3$$

생각열기

다항식 $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ 에 대하여 다음 물음에 답해 보자.

- ① 다항식 $P(x)$ 를 일차식 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지를 구해 보자.
- ② $P(1)$ 의 값을 구하고 ①에서 구한 나머지와 비교해 보자.


$$x-1 \overline{) x^3 + 2x^2 + 3x + 4}$$

나머지 정리

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$$

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(x) + R$$

$$\therefore R = P(\alpha)$$

나머지 정리

다항식 $P(x)$ 를 일차식 $x - \alpha$ 로 나누었을 때의 나

머지를 R 이라 하면

$$R = P(\alpha)$$

문제3. 다항식

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$$

를 다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $x - 2$

(2) $x + 2$

답

(1) 4, (2) -16

예제2. 다항식 $P(x)$ 를 일차식 $ax + b$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라고 할 때,

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right) \text{임을 보이시오. (단, } a, b \text{는 상수이다.)}$$

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + R$$

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

x 에 대한 식 x 가 없는 식

문제4. 다항식 $P(x) = 6x^3 + x^2 + 1$ 을

다음 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $2x + 1$

(2) $3x - 1$

답

(1) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$

**예제3. 다항식 $P(x)$ 를 $x - 2$ 로 나누었을 때
의 나머지는 4이고, $x + 3$ 로 나누었을 때
의 나머지는 -1 이다. $P(x)$ 를
 $(x - 1)(x + 2)$ 로 나누었을 때의 나머지
를 구하시오.**

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)Q(x) + ax + b$$

$$P(2) = 2a + b = 4$$

$$P(-3) = -3a + b = -1$$

연립하면

$$a = 1, b = 2$$

따라서 구하는 나머지는 $x + 2$ 이다.

문제5. 다항식 $P(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지는 3이고, $x + 2$ 로 나누었을 때의 나머지는 -3 이다. $P(x)$ 를 $(x - 1)(x + 2)$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

답

$$2x + 1$$

인수 정리

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$$

이때 $P(x) = 0$ 이면

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$$

즉, $P(x)$ 는 $x - \alpha$ 로 나누어떨어진다.

인수 정리

다항식 $P(x)$ 에 대하여

1. $P(\alpha) = 0$ 이면 $P(x)$ 는 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어떨어진다.

2. $P(x)$ 가 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어떨어지면

$$P(\alpha) = 0 \text{이다.}$$

문제6. 다음 일차식 중에서 다항식

$x^3 + 3x^2 - x - 3$ 의 인수인 것을 모두 찾으시오.

$x - 1, x + 1, x - 2, x + 2, x - 3, x + 3$

답

$$x - 1, x + 1, x + 3$$

예제4. 다항식 $P(x) = x^3 - 10x + a$ 가 $x - 3$ 으로 나누어떨어질 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

$$P(3) = 3^3 - 10 \times 3 + a = -3 + a = 0$$

$$\therefore a = 3$$

문제7. 다항식

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 6$$

$x + 1$ 로 나누어떨어질 때, 상수 a 의 값을

구하시오.



2

조립제법

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + 2x + 7 \\
 x - 2 \overline{) 3x^3 - 4x^2 + 3x - 13} \\
 \underline{3x^3 - 6x^2} \\
 2x^2 + 3x - 13 \\
 \underline{2x^2 - 4x} \\
 7x - 13 \\
 \underline{7x - 14} \\
 1
 \end{array}$$

3 ← 3 — 몫
 3 — x^2 의 계수
 $-4 + 3 \times 2 = 2$ ← x 의 계수
 $3 + 2 \times 2 = 7$ ← 상수항
 $-13 + 7 \times 2 = 1$ ← 나머지

조립제법

$$\begin{array}{r} x-2 \overline{) 3x^3-4x^2+3x-13} \\ \underline{3x^3-6x^2+6x-12} \\ 3x^2+2x+7 \\ \underline{3x^2-6x+12} \\ 8x-5 \\ \underline{8x-16} \\ 11 \end{array}$$

몫: $3x^2+2x+7$ 나머지: 1

예제5. 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하십시오.

$$(2x^3 + x^2 + 2) \div (x - 1)$$

1	2	1	0	2
		2	3	3
	2	3	3	5

몫: $2x^2 + 3x + 3$ 나머지: 5

문제8. 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하십시오.

$$(1) (2x^3 - x^2 - 3x + 2) \div (x - 2)$$

$$(2) (x^3 + 2x^2 + 2) \div (x + 1)$$

답

(1) 몫: $2x^2 + 3x + 3$ 나머지: 8

(2) 몫: $x^2 + x - 1$, 나머지: 3

예제6. 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(4x^3 - 4x^2 - 3x + 3) \div (2x - 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 \frac{1}{2} & 4 & -4 & -3 & 3 \\
 & & 2 & -1 & -2 \\
 \hline
 & 4 & -2 & -4 & 1
 \end{array}$$

몫: $2x^2 - x - 2$, 나머지: 1

문제9. 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하시오.

$$(1) (3x^3 + 5x^2 - 5x + 4) \div (3x - 1)$$

$$(2) (4x^3 + 2x^2 - 14x - 3) \div (2x + 1)$$

답

(1) 몫: $2x^2 + 2x - 1$, 나머지: 3

(2) 몫: $2x^2 - 7$, 나머지: 4