

- ◆ 교과서 문제 풀이입니다.
- ◆ 문제풀이 및 해설은 오른쪽 qr코드와 같습니다.
- ◆ 함께 열심히 해 봅시다.



### 개념 1.

#### 0 또는 음의 정수인 지수

$a \neq 0$ 이고  $n$ 이 양의 정수일 때,

$$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

문제 1. 다음 값을 구하시오.

(1)  $\left(\frac{1}{3}\right)^0$       (2)  $3^{-4}$       (3)  $(-2)^{-5}$       (4)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

(1) 1      (2)  $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$       (3)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1^5}{2^5} = -\frac{1}{32}$       (4)  $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$

문제 2. 다음은 지수가 음의 정수일 때, 지수법칙이 성립함을 보이는 과정이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1)  $a \neq 0$ 이고  $m, n$ 이 음의 정수일 때,  $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 이 성립함을 보이자.  
 $m = -p, n = -q$  ( $p, q$ 는 양의 정수)로 놓으면  
 $a^m \div a^n = a^{-p} \div a^{-q} = a^{-p} \div \frac{1}{a^q} = a^{-p} \times a^q = a^{-p+q} = a^{m-n}$   
 이다. 따라서  $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 이다.

(2)  $a \neq 0, b \neq 0$ 이고  $n$ 이 음의 정수일 때,  $(ab)^n = a^n b^n$ 이 성립함을 보이자.  
 $n = -q$  ( $q$ 는 양의 정수)로 놓으면  
 $(ab)^n = (ab)^{-q} = \frac{1}{(ab)^q} = \frac{1}{a^q b^q} = \frac{1}{a^q} \times \frac{1}{b^q} = a^{-q} b^{-q} = a^n b^n$   
 이다. 따라서  $(ab)^n = a^n b^n$ 이다.

### 개념 2.

#### 지수법칙 (2)

$a \neq 0, b \neq 0$ 이고  $m, n$ 이 정수일 때

①  $a^m a^n = a^{m+n}$       ②  $a^m \div a^n = a^{m-n}$   
 ③  $(a^m)^n = a^{mn}$       ④  $(ab)^n = a^n b^n$

문제 3. 다음 식을 간단히 하시오. (단,  $a \neq 0, b \neq 0$ )

(1)  $7^{-5} \times 7^6$       (2)  $(-2)^5 \div (-2)^7$   
 (3)  $(a^{-1})^{-2} \times a^3$       (4)  $(ab^{-2})^{-3} \div (a^2b)^{-2}$

(1)  $7^{-5+6} = 7^1 = 7$       (2)  $(-2)^{5-7} = (-2)^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

(3)  $a^{(-1) \times (-2)} \times a^3 = a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$       (4)  $a^{-3} b^{(-2) \times (-3)} \div (a^2 b)^{-2} = a^{-3} b^6 \div a^{-4} b^{-2} = a^{-3+4} b^{6+2} = a^1 b^8 = a \times b^8$

### 개념 3.

#### 유리수인 지수

$a > 0$ 이고  $m, n$  ( $n \geq 2$ )이 정수일 때,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ 특히 } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

### 문제 4.

다음 중 서로 같은 것끼리 선으로 연결하시오. (단,  $a > 0, a \neq 1$ )

①  $\sqrt[3]{a^4}$       ㉠  $a^{\frac{3}{4}}$   
 ②  $a^{-\frac{2}{5}}$       ㉡  $\sqrt[5]{a^{-2}}$   
 ③  $a^{-\frac{5}{2}}$       ㉢  $\sqrt{a^{-5}}$   
 ④  $\sqrt[4]{a^3}$       ㉣  $a^{\frac{4}{3}}$

문제 5. 다음 값을 구하시오.

- (1)  $8^{\frac{2}{3}}$  (2)  $27^{-\frac{2}{3}}$  (3)  $16^{0.25}$  (4)  $64^{-0.5}$

$$\begin{aligned} (1) (2^3)^{\frac{2}{3}} &= 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4 \\ (2) (3^3)^{-\frac{2}{3}} &= 3^{3 \times (-\frac{2}{3})} = 3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \\ (3) (2^4)^{\frac{1}{4}} &= 2^{4 \times \frac{1}{4}} = 2^1 = 2 \\ (4) (2^6)^{-\frac{1}{2}} &= 2^{6 \times (-\frac{1}{2})} = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

문제 6.  $a > 0, b > 0$ 이고  $r, s$ 가 유리수일 때, 다음이 성립함을 보이시오.

- (1)  $a^r \div a^s = a^{r-s}$  (2)  $(a^r)^s = a^{rs}$  (3)  $(ab)^r = a^r b^r$

let  $r = \frac{n}{m}, s = \frac{p}{q}$

$$\begin{aligned} (1) a^{\frac{n}{m}} \div a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{n}{m} - \frac{p}{q}} = a^{\frac{nq - mp}{mq}} = \sqrt[mq]{a^{nq - mp}} \\ &= \frac{\sqrt[mq]{a^{nq}}}{\sqrt[mq]{a^{mp}}} = \frac{(\sqrt[m]{a^n})^q}{(\sqrt[m]{a^p})^q} = \left(\frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{a^p}}\right)^q = \sqrt[m]{\frac{a^n}{a^p}} = \sqrt[m]{a^{n-p}} = a^{\frac{n-p}{m}} = a^{r-s} \\ (2) (a^{\frac{n}{m}})^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[m]{a^{\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q}}} = \sqrt[m]{a^{\frac{np}{mq}}} = \sqrt[mq]{a^{np}} = \sqrt[m]{(\sqrt[q]{a^n})^p} = (\sqrt[q]{a^n})^{\frac{p}{m}} = \sqrt[q]{a^{\frac{np}{m}}} = \sqrt[mq]{a^{np}} = a^{\frac{np}{mq}} = a^{rs} \\ (3) (ab)^{\frac{n}{m}} &= \sqrt[m]{a^n b^n} = \sqrt[m]{a^n} \sqrt[m]{b^n} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{n}{m}} = a^r b^r \end{aligned}$$

문제 7. 다음 식을 간단히 하시오.

- (1)  $2^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{7}{3}}$  (2)  $5^{\frac{3}{2}} \div 5^{-\frac{1}{2}}$   
(3)  $(125^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$  (4)  $2^{\frac{8}{5}} \times 5^{-\frac{7}{5}} \times 10^{-\frac{3}{5}}$

$$\begin{aligned} (1) 2^{-\frac{1}{3} + \frac{7}{3}} &= 2^2 = 4 \\ (2) 5^{\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2})} &= 5^2 = 25 \\ (3) 125^{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} &= 125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3 \times \frac{1}{3}} = 5^1 = 5 \\ (4) 2^{\frac{8}{5}} \times 5^{-\frac{7}{5}} \times (2 \cdot 5)^{-\frac{3}{5}} &= 2^{\frac{8}{5}} \times 5^{-\frac{7}{5}} \times 2^{-\frac{3}{5}} \times 5^{-\frac{3}{5}} \\ &= 2^{\frac{8}{5} - \frac{3}{5}} \times 5^{-\frac{7}{5} - \frac{3}{5}} = 2^1 \times 5^{-2} = 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 2 \times \frac{1^2}{5^2} = 2 \times \frac{1}{25} = \frac{1}{25} \end{aligned}$$

예제 1.  $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

- (1)  $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a^4} \div \sqrt[3]{a^2}$  (2)  $(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a+b)$

$$\begin{aligned} (1) a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{4}{3}} \div a^{\frac{2}{3}} &= a^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{3}} = a^1 = a \\ (2) (a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) &= a^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= a^1 - b^1 \\ &= a - b \end{aligned}$$

지수법칙 (3)

$a > 0, b > 0$ 이고  $r, s$ 가 유리수일 때

- ①  $a^r a^s = a^{r+s}$  ②  $a^r \div a^s = a^{r-s}$   
③  $(a^r)^s = a^{rs}$  ④  $(ab)^r = a^r b^r$

문제 8.  $a > 0, b > 0$  일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

$$(1) \sqrt[3]{a^2 b^4} \times \sqrt{\sqrt[3]{a^4 b^2}} \div \sqrt[6]{a^8 b^4}$$

$$(2) (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$$

$$\begin{aligned} (1) & a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}} \\ &= a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}} \\ &= a^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}} b^{\frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}} = a^0 b^1 = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & a^{\frac{1}{3} \cdot 3} + b^{\frac{1}{3} \cdot 3} \\ &= a^1 + b^1 \\ &= a + b \end{aligned}$$

문제 9. 공룡은 오래전에 멸종했지만 발자국과 뼈의 화석으로 달리는 속력을 추측할 수 있다. 공룡이 달릴 때 보폭을  $s$  m, 공룡의 다리 길이를  $h$  m 라고 하면 공룡이 달리는 속력은

$$0.25 \times 9.8^{0.5} \times s^{1.67} \times h^{-1.17} \text{ m/s}$$

라고 한다. 두 공룡 A, B의 화석에서 공룡 A의 달릴 때 보폭은 8 m, 다리 길이는 4 m이고, 공룡 B의 달릴 때 보폭은 4 m, 다리 길이는 2 m일 때, 공룡 A가 달리는 속력은 공룡 B가 달리는 속력의 몇 배인지 구하시오.

$$\text{속력}_A = 0.25 \times 9.8^{0.5} \times 8^{1.67} \times 4^{-1.17}$$

$$\text{속력}_B = 0.25 \times 9.8^{0.5} \times 4^{1.67} \times 2^{-1.17}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\text{속력}_A}{\text{속력}_B} &= \frac{8^{1.67}}{4^{1.67}} \times \frac{4^{-1.17}}{2^{-1.17}} \\ &= \left(\frac{8}{4}\right)^{1.67} \times \left(\frac{4}{2}\right)^{1.17} \\ &= 2^{1.67} \times 2^{1.17} = 2^{1.67+1.17} \\ &= 2^{2.84} = 2^{\frac{14}{5}} = \sqrt[5]{2^{14}} \end{aligned}$$

개념 5.

지수법칙 (4)

$a > 0, b > 0$ 이고  $x, y$ 가 실수일 때

①  $a^x a^y = a^{x+y}$

②  $a^x \div a^y = a^{x-y}$

③  $(a^x)^y = a^{xy}$

④  $(ab)^x = a^x b^x$

문제 10. 다음 식을 간단히 하시오. (단,  $a > 0, b > 0$ )

$$(1) 5^{\sqrt{18}} \times 5^{\sqrt{50}}$$

$$(2) (3^{\sqrt{8}})^{\frac{1}{\sqrt{32}}}$$

$$(3) a^{\pi+2} \div a^{\pi-2}$$

$$(4) (a^{2\sqrt{2}} b^{-\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} (1) & 5^{\sqrt{18} + \sqrt{50}} \\ &= 5^{3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}} \\ &= 5^{8\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & 3^{\sqrt{8} \times \frac{1}{\sqrt{32}}} \\ &= 3^{\frac{1}{\sqrt{4}}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & a^{\pi+2 - (\pi-2)} \\ &= a^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) & a^{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} b^{-\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\ &= a^4 b^{-2} \\ &= a^4 \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^2 \\ &= \frac{a^4}{b^2} \end{aligned}$$