♦ 교과서 문제 풀이입니다.
♦ 문제풀이 및 해설은 오른쪽 qr코드와 같습니다.
♦ 함께 열심히 해 봅시다.

문제 1. $\triangle ABC$에서 $A:B:C=1:2:3$일 때, $a:b:c$는?

① $1:1:\sqrt{2}$ ② $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ ③ $1:\sqrt{3}:2$ ✓
④ $\sqrt{3}:1:2$ ⑤ $\sqrt{3}:2:1$

삼각형 이므로

$A = 180° \times \frac{1}{1+2+3}$

$= 30°$

$\therefore B = 60°,\ C = 90°$

$\therefore a : b : c$

$= \sin A : \sin B : \sin C$

$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$

$= 1 : \sqrt{3} : 2$

문제 2. 삼각형 ABC에서 $(b-c)\sin A = b\sin B - c\sin C$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형 ② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형 ✓ ④ $B=90°$인 직각삼각형
⑤ $C=90°$인 직각삼각형

사인법칙에 의해

$(b-c)\frac{a}{2R} = b\cdot\frac{b}{2R} - c\cdot\frac{c}{2R}$

$0 = (b-c)(b+c-a)$

$\therefore b = c \quad (\because b+c \neq a)$

V보다

문제 3. $\triangle ABC$에서 $a=6$, ~~b~~ $c=3$, $B=60°$일 때, $\triangle ABC$의 외접원의 넓이는?

① 5π ② 7π ③ 9π ✓ ④ 11π ⑤ 13π

i) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos C$

$= 6^2 + 3^2 - \cancel{2}\cdot 6\cdot 3\cdot \cancel{\cos 60°}$

$= 27$

$\therefore b = 3\sqrt{3} \quad (\because b > 0)$

ii) $\frac{b}{\sin B} = 2R$

$\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$

$R = 3$

$\therefore S = \pi R^2 = 9\pi$

문제 4. 세 변의 길이가 $1, 2\sqrt{2}, \sqrt{13}$인 삼각형 ABC의 최대각의 크기를 구하시오.

$1 < 2\sqrt{2} < \sqrt{13}$ 이므로

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$= \frac{1+8-13}{2\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore C = 135° \quad (\because 90° < C < 180°)$

문제 5. $\triangle ABC$에서 $\sin A : \sin B : \sin C = 3:5:7$일 때, C의 크기는?

① $30°$ ② $60°$ ③ $90°$ ④ $120°$ ✓ ⑤ $150°$

사인법칙에 의해

$a : b : c = 3 : 5 : 7$

Let $a = 3k,\ b = 5k,\ c = 7k$

$\cos C = \frac{9k^2+25k^2-49k^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}$

$= -\frac{1}{2}$

$\therefore C = 120° \quad (\because 90° < C < 180°)$

문제 6. 등식 $a\cos C = c\cos A$를 만족시키는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형 ② $a=b$인 이등변삼각형
③ $a=c$인 이등변삼각형 ✓ ④ $A=90°$인 직각삼각형
⑤ $C=90°$인 직각삼각형

$\cancel{a}\cdot\frac{a^2+\cancel{b^2}-c^2}{\cancel{2}\cancel{a}\cancel{b}} = \cancel{c}\cdot\frac{\cancel{b^2}+c^2-a^2}{\cancel{2}\cancel{b}\cancel{c}}$

$2a^2 = 2c^2$

$a = c \quad (\because a, c > 0)$

교과서 밖 문제

문제 7. 삼각형 ABC에서 $c\cos\frac{A+B-C}{2} = b\cos\frac{A-B+C}{2}$가 성립할 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

$$c\cos\frac{\pi-C-C}{2} = b\cos\frac{\pi-B-B}{2}$$

$$c\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right) = b\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$$

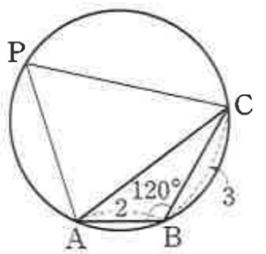
$$c\sin C = b\sin B$$

$$c\cdot\frac{c}{2R} = b\cdot\frac{b}{2R}$$

$\therefore\ c=b$ ($\because\ b, c>0$)

$\boxed{\therefore\ b=c \text{ 인 이등변 삼각형}}$

문제 8. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$, $B=120°$인 삼각형 ABC의 외접원 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{CP}=8$일 때, $\overline{AP}\cdot\overline{CP}$의 값을 구하시오.



i) $\overline{AC}^2 = 2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos120°$

$= 19$

4 9 6

ii) let $\overline{AP}=x$, $\overline{CP}=y$

$\overline{AC}^2 = x^2+y^2-2\cdot xy\cos60°$ ($\because$ 내접사각형)

$19 = (x+y)^2-2xy-xy$

$\therefore\ 3xy = 64-19$

$xy = 15$

$\therefore\ \overline{AP}\cdot\overline{CP} = 15$

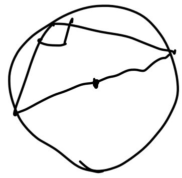
문제 9. 삼각형 ABC에서 $\frac{a^3+b^3+c^3}{\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C} = 64$일 때, a의 최댓값은? (단, $c\le b\le a$)

i) $$\frac{a^3+b^3+c^3}{\left(\frac{a}{2R}\right)^3+\left(\frac{b}{2R}\right)^3+\left(\frac{c}{2R}\right)^3} = 64$$

$8R^3 = 64$

$R=2$ ($\because$ R은 실수)

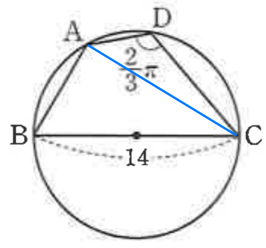
ii)



$a\le 2R$ (지름)

$a\le 4$

문제 10. 오른쪽 그림과 같이 지름 BC의 길이가 14인 원에 내접하는 사각형 $ABCD$가 있다. $2\overline{AD}=\overline{CD}$, $\angle ADC=\frac{2}{3}\pi$일 때, $\overline{AD}^2$의 값을 구하시오.



i) $B=\frac{\pi}{3}$ ($\because$ 내접사각형), $A=\frac{\pi}{2}$ ($\because$ 지름의 원주각)

$\therefore\ \overline{AC} = 14\sin\frac{\pi}{3} = 7\sqrt{3}$

ii) let $\overline{AD}=x$

$(7\sqrt{3})^2 = x^2+(2x)^2-2\cdot x\cdot(2x)\cos\frac{2}{3}\pi$

$49\cdot3 = 7x^2$

$\therefore\ x^2 = 21$

$\therefore\ \overline{AD}^2 = 21$