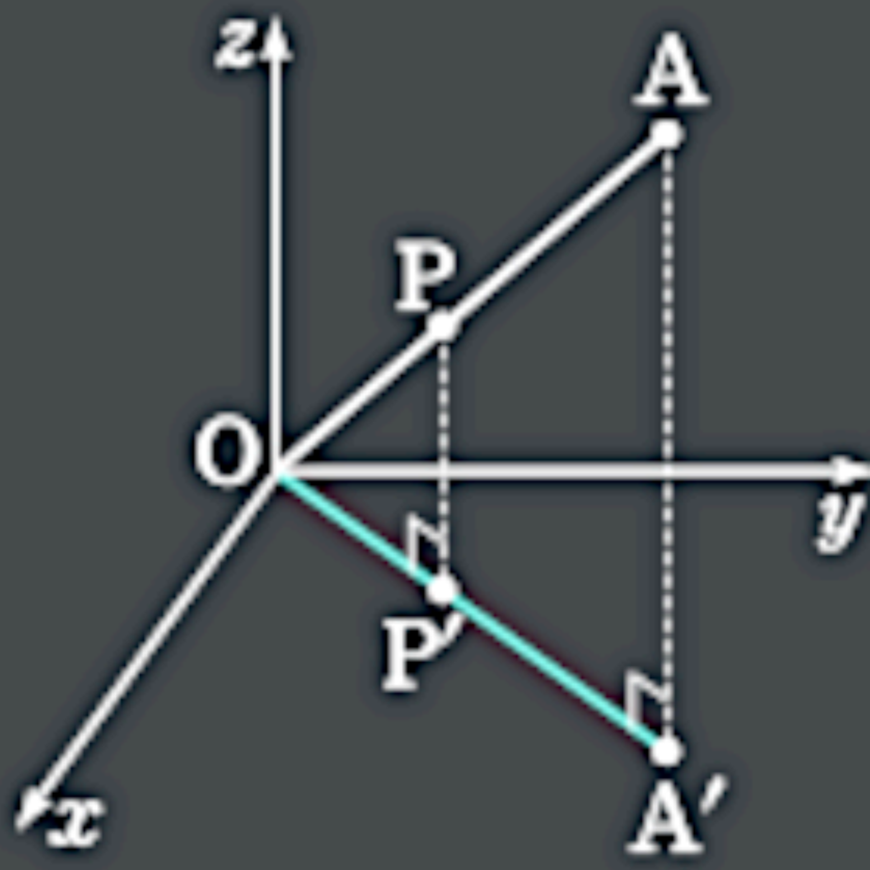
18. 선분의 내분점 외분점

2024 2학기 기하

이한희

오른쪽 그림과 같이 점 A에 대하여 선분 OA를 2 : 3으로 내분하는 점을 P라 하고, 두 점 A, P의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, P′이라고 할 때, $\overline{\mathrm{OP'}} : \overline{\mathrm{P'A'}}$을 구하시오.

2 : 3



오른쪽 그림과 같이 세 점

A, P, B의 xy평면 위로의

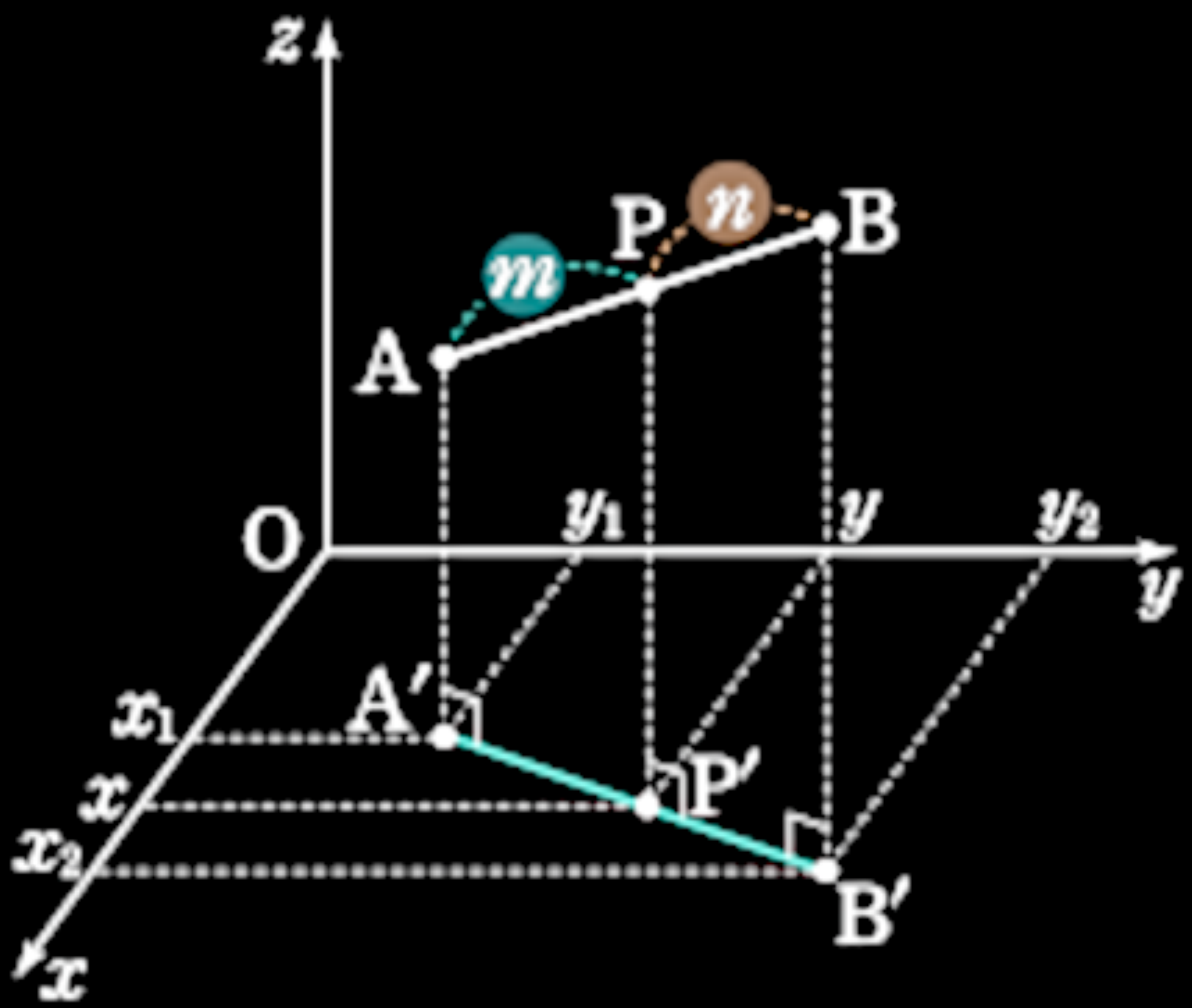
정사영을 각각 A', B', C' 이

라 하면

$A'(x_1, y_1, 0), P'(x, y, 0), B'(x_2, y_2, 0)$

$$\overline{A'P'} : \overline{P'B'}$$

$$= \overline{AP} : \overline{PB} = m : n$$



따라서, 점 P' 는 선분 $A'B'$ 을 내분하는 점이므로

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

같은 방법으로

$$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

$$\therefore\ P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

특히 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}, \frac{z_2+z_1}{2}\right)$$

좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

내분점

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

외분점

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

스스로 확인하기

두 점 $A(1, 4, -2), B(-1, 2, -3)$에 대하여, 1: 2 로 내분, 외분하는 점은

내분: $\left(\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{7}{3}\right)$, 외분: $(3, 6, -1)$

예제2

세 점

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$

을 꼭짓점으로 하는 삼각형

ABC의 무게중심 G의 좌표

를 구하시오.

$$M\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$

$$x = \frac{2 \times \frac{x_2+x_3}{2} + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

마찬가지 방법으로
무게중심

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

문제8

세 점

$A(2,-1,4)wB(1,-5,-3),C(-1,3,1)$을

꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표

를 구하시오.

$G\left(\frac{2}{3},-1,\frac{2}{3}\right)$

19. 구의 방정식

2024 2학기 기하

이한희

오른쪽 그림은 반지름의 길이가 6400 km인 지구를 좌표 공간에 나타낸 것이다. 지구의 중심을 원점 O로 생각하고 지표면 위의 한 점을 P(x, y, z)라고 할 때, 원점 O에서 점 P까지의 거리를 x, y, z에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣으시오.

(단, 지구는 구 모양으로 생각한다.)

$\boxed{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=6400$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=6400 \qquad x^2+y^2+z^2=6400^2$$

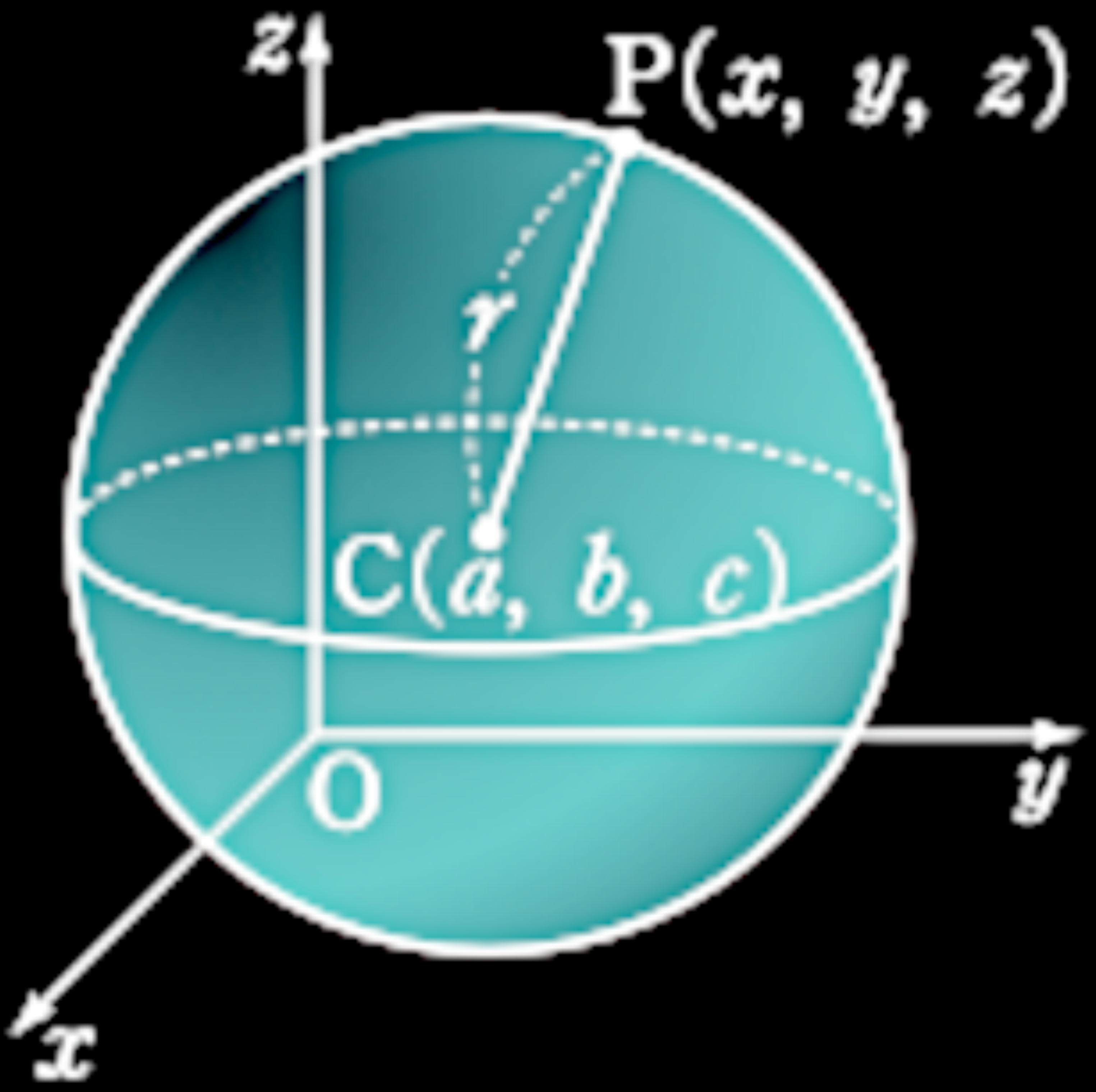
좌표평면에서 점 $C(a, b, c)$

를 중심으로 하고 반지름의 길이가

r인 구의 방정식

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$



구의 방정식

중심이 $C(a, b, c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

스스로 확인하기

점 $(1, 2, 3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$$

문제1

다음 구의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(-2, 1, 4)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구

(2) 점 $(4, -1, 3)$을 중심으로 하고 원점을 지나는 구

(3) 두 점 $(4, 3, 1), (0, -1, 5)$를 지름의 양 끝 점으

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=9$$

$$(x-4)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=26$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=12$$

구의 방정식

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0$$

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$$

$A^2+B^2+C^2-4D>0$이면 구

스스로 확인하기

방정식

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z + 5 = 0$$

을 변형하면

$$(x+3)^2(y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

따라서 주어진 방정식은 점 $(-3, 1, 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구를 나타낸다.

문제2(한 번 해보세요~)

방정식

$x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z-5=0$이 나타내는 구의 중심과 반지름의 길이를 구하시오.

중심: $(3,-1,1)$, 반지름의 길이: 4

예제1

네 점 $(0,0,0),(1,0,1),(0,-1,0),(2,2,1)$

을 지나는 구의 방정식을 구하시오.

$$\text{Let} \quad x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

두 점 $(0,0,0),(0,-1,0)$을 지나므로

$$D = 0, B = 1$$

따라서 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + y + Cz = 0$$

또, 두 점 $(1, 0, 1), (2, 2, 1)$을 지나므로

$$A + C = -2, 2A + C = -11$$

연립하면 $A=-9, C=7$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2-9x+y+7z=0$$

문제3(한 번 해보세요~)

네 점

$$(0,0,0),(-1,1,0),(0,0,-1),(1,1,-7)$$을

지나는 구의 방정식을 구하시오.

$$x^2+y^2+z^2-21x-23y+z=0$$