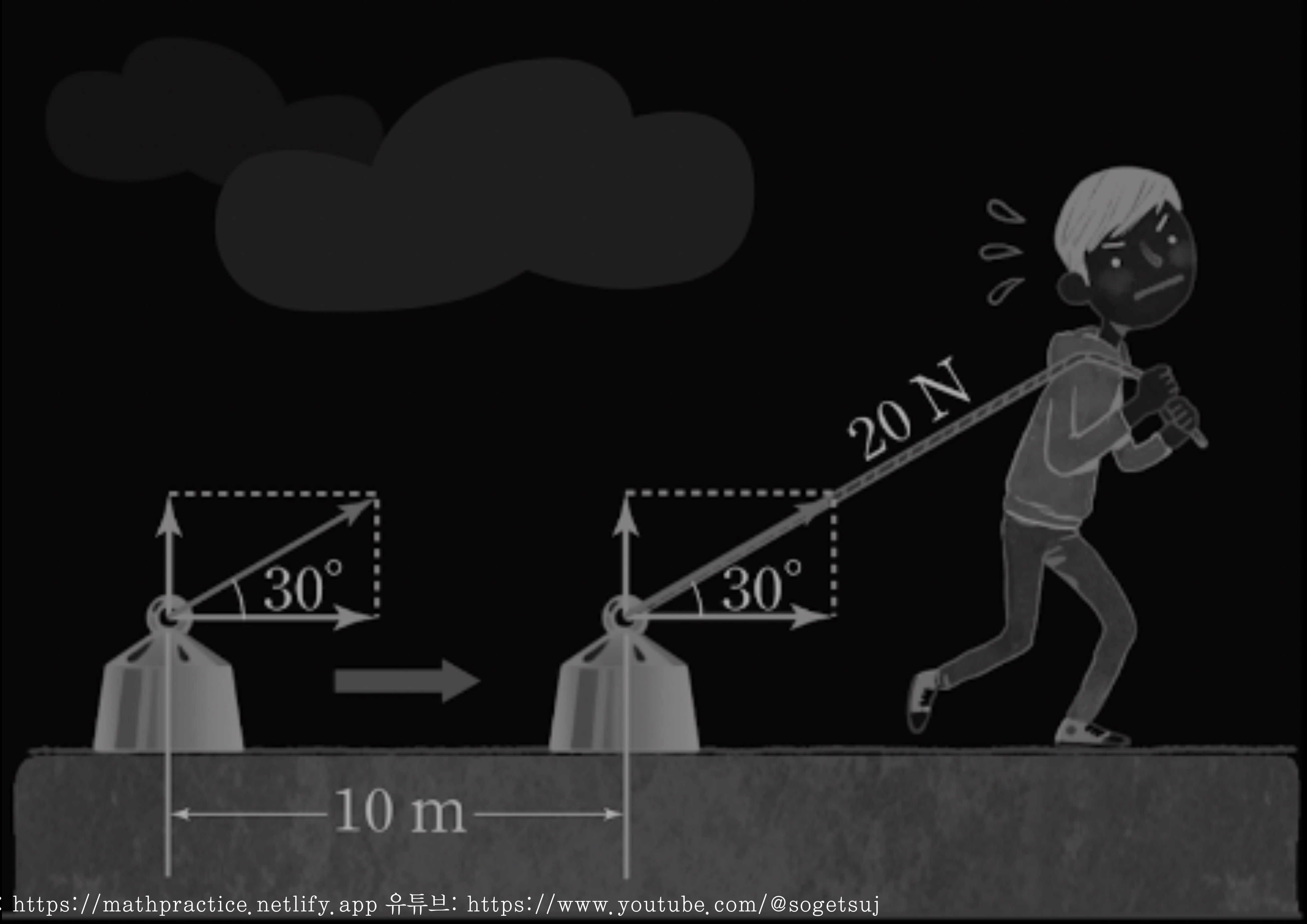
11. 평면벡터

2024 2학기 기하

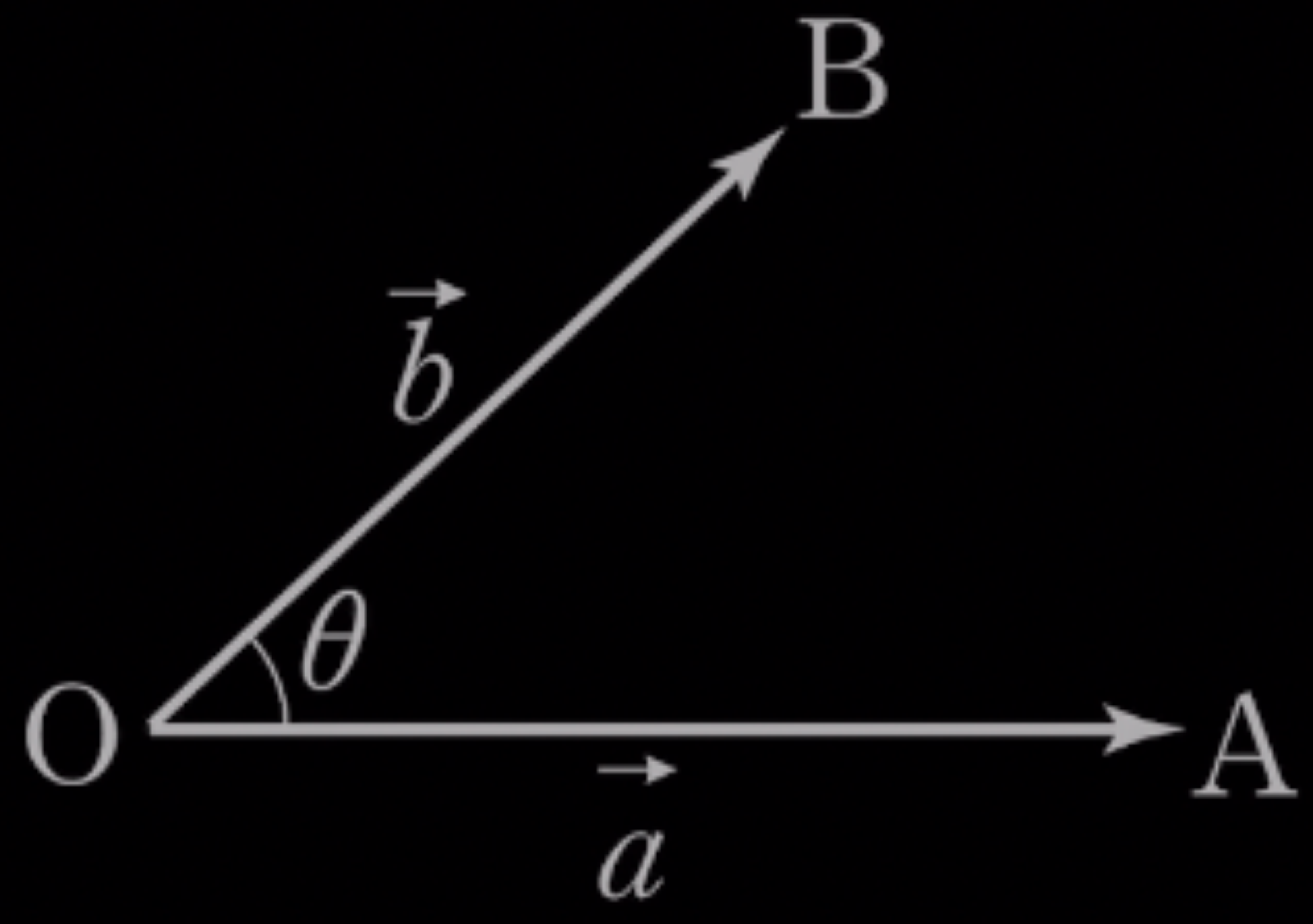
이한희


20 N
30°
30°
10 m

평면벡터의 내적

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적을 기호로

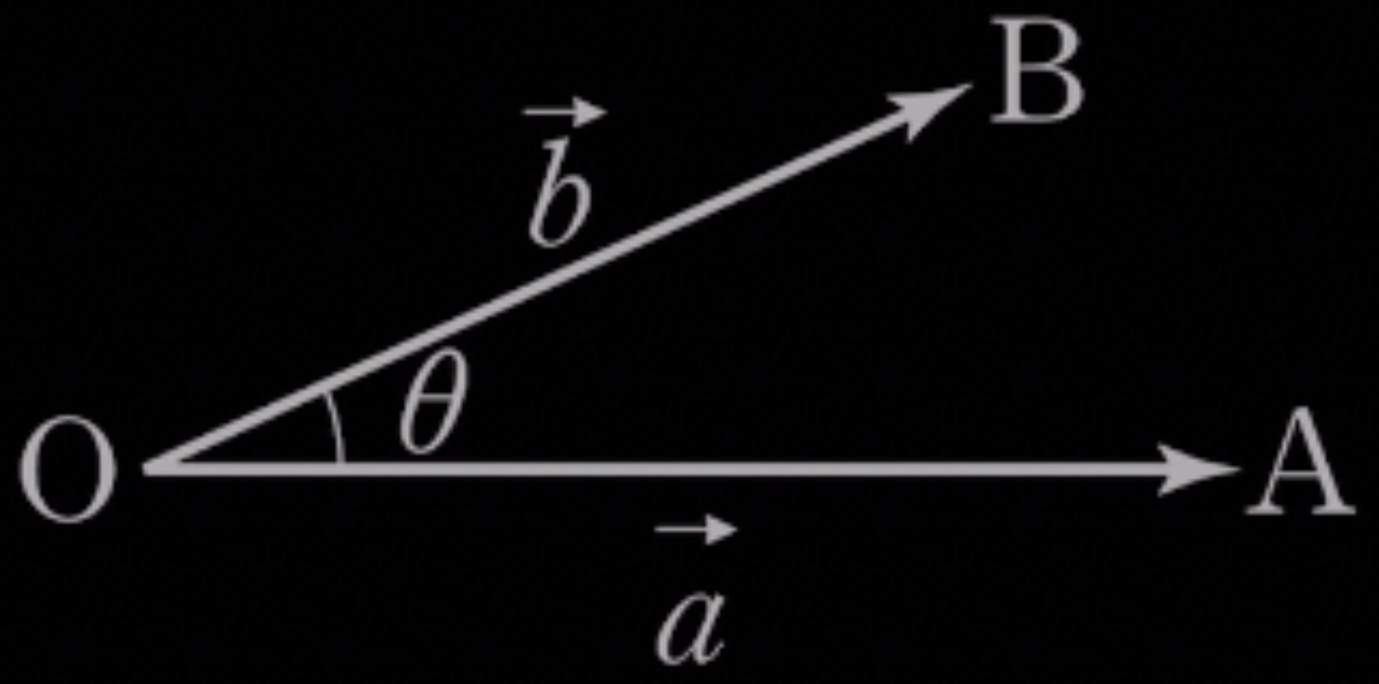
$\vec{a} \cdot \vec{b}$로 나타낸다.



내적의 정의

(1) $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ 일 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$



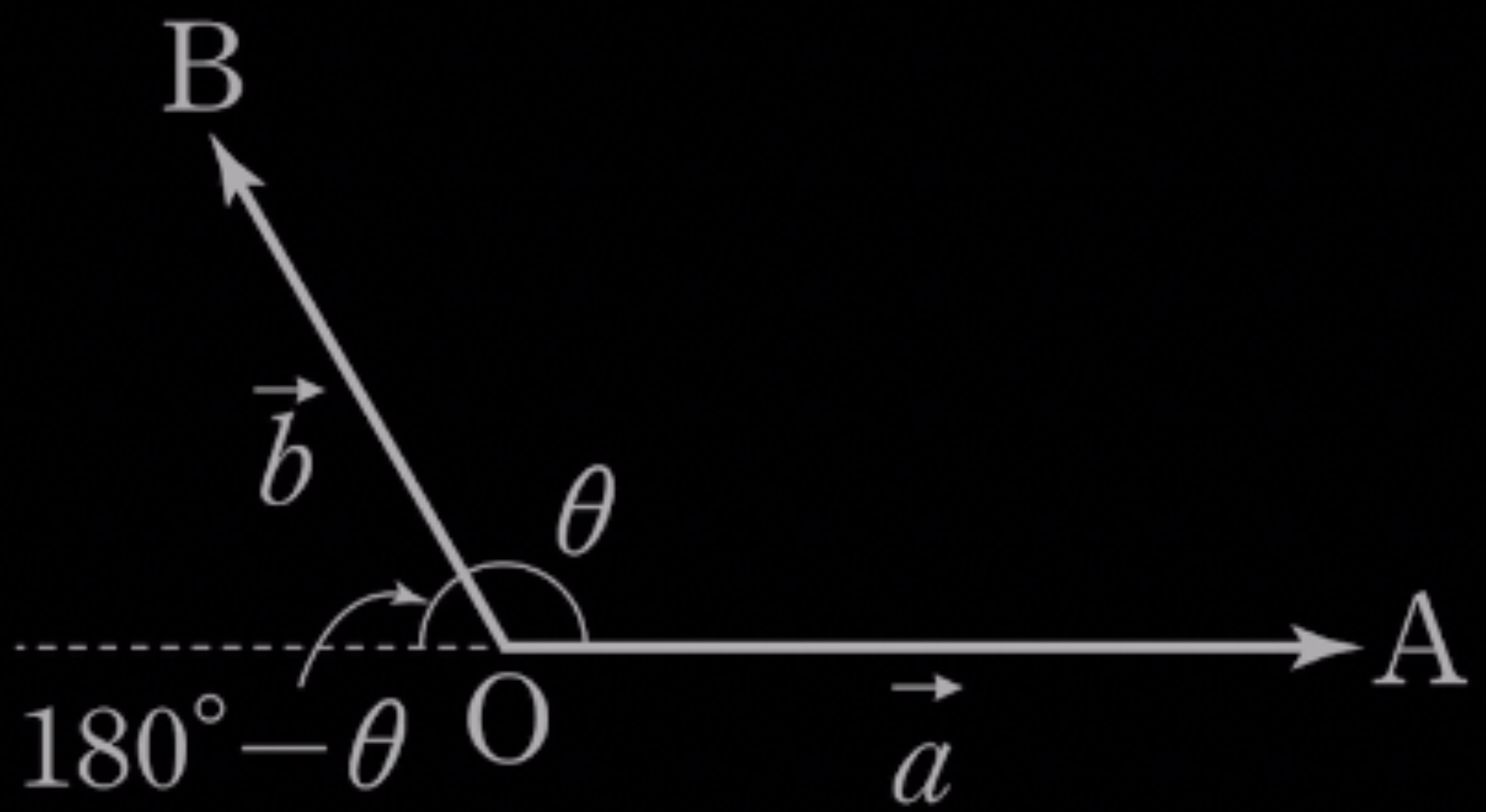
내적의 정의

(1) $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ 일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

(2) $90^\circ \le \theta \le 180^\circ$ 일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(180^\circ - \theta)$$



(3) $\vec{a} = \vec{0}$ or $\vec{b} = \vec{0}$일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

문제1

$|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 2$인 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}$를 구하시오. ki

(1) 30° (2) 90° (3) 120°

$$
\begin{aligned}
(1)\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 30^\circ \\
&= 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 90^\circ \\
&= 2\sqrt{3}\times 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 30^\circ \\
&= 2\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

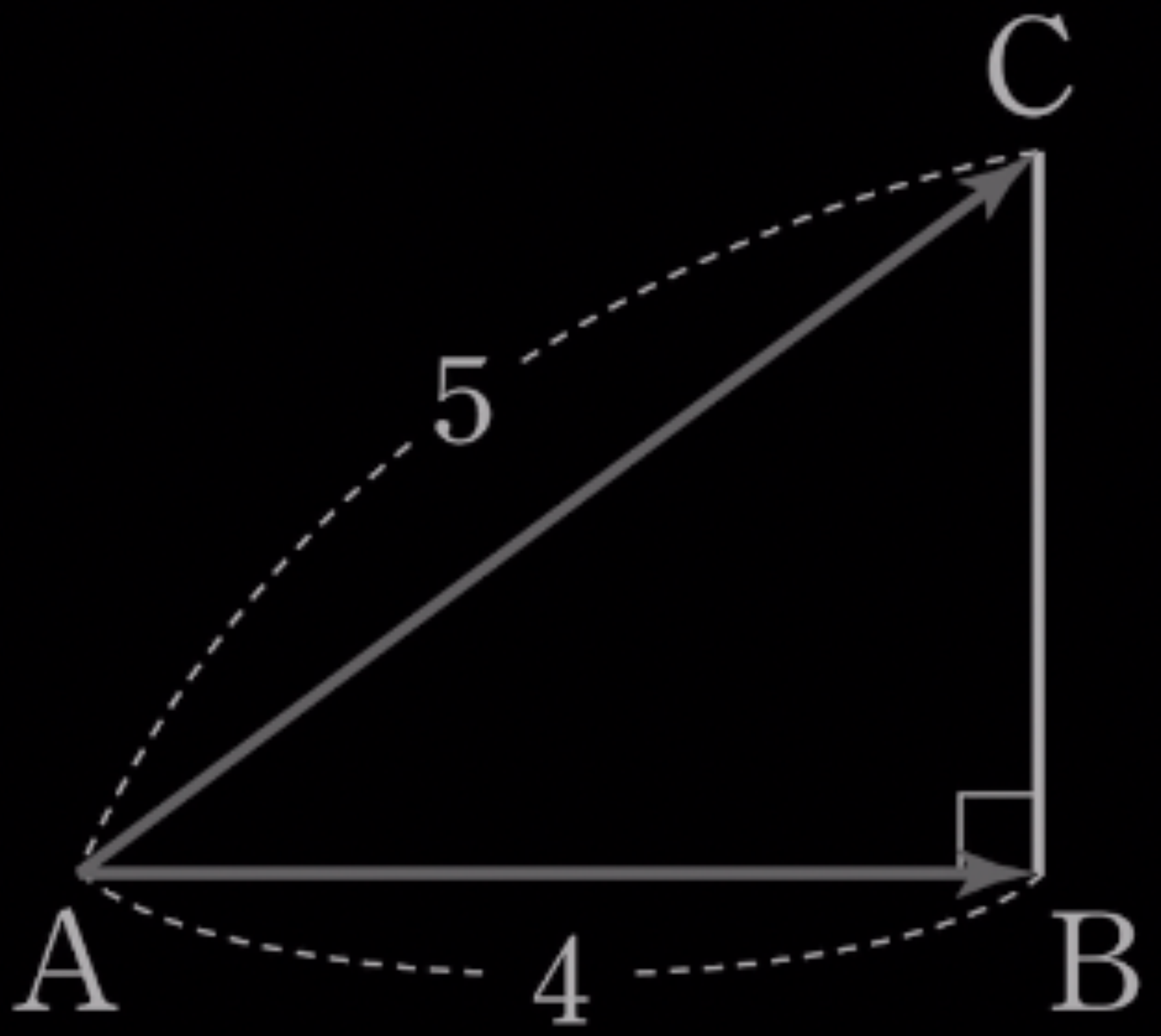
예제1

오른쪽 그림과 같이

$\overline{AB} = 4, \overline{AC} = 5, \angle B = 90^\circ$ 인

직각삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$를

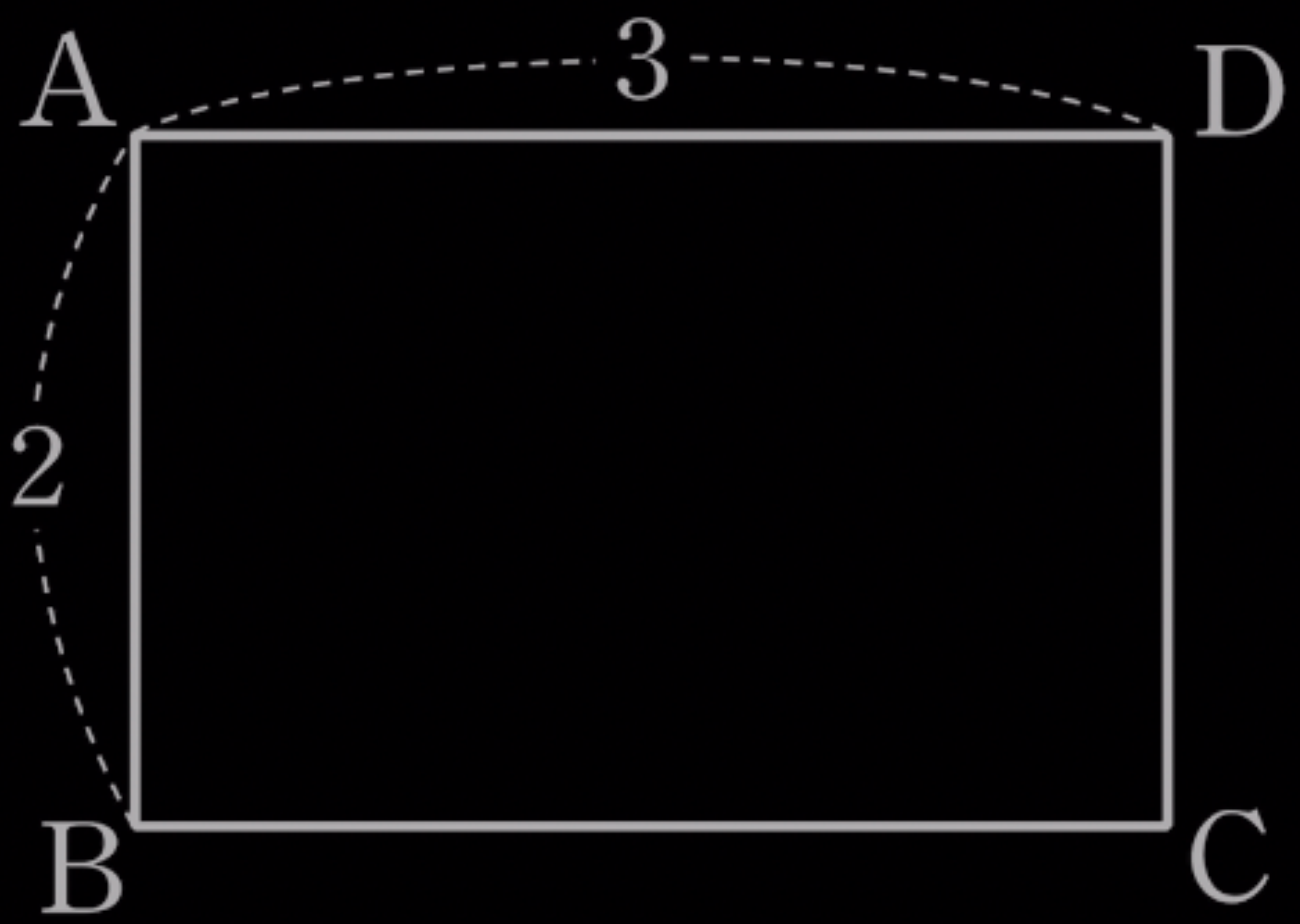
구하시오.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos\theta = 4 \times 5 \times \frac{4}{5} = 16$$

문제2

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB} = 2, \overline{AD} = 3$인 직사각형 $ABCD$에서 다음을 구하시오.



(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \times 6 \times 0 = 0$

(2)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times \sqrt{11} \times \frac{2}{\sqrt{11}} = 4$$

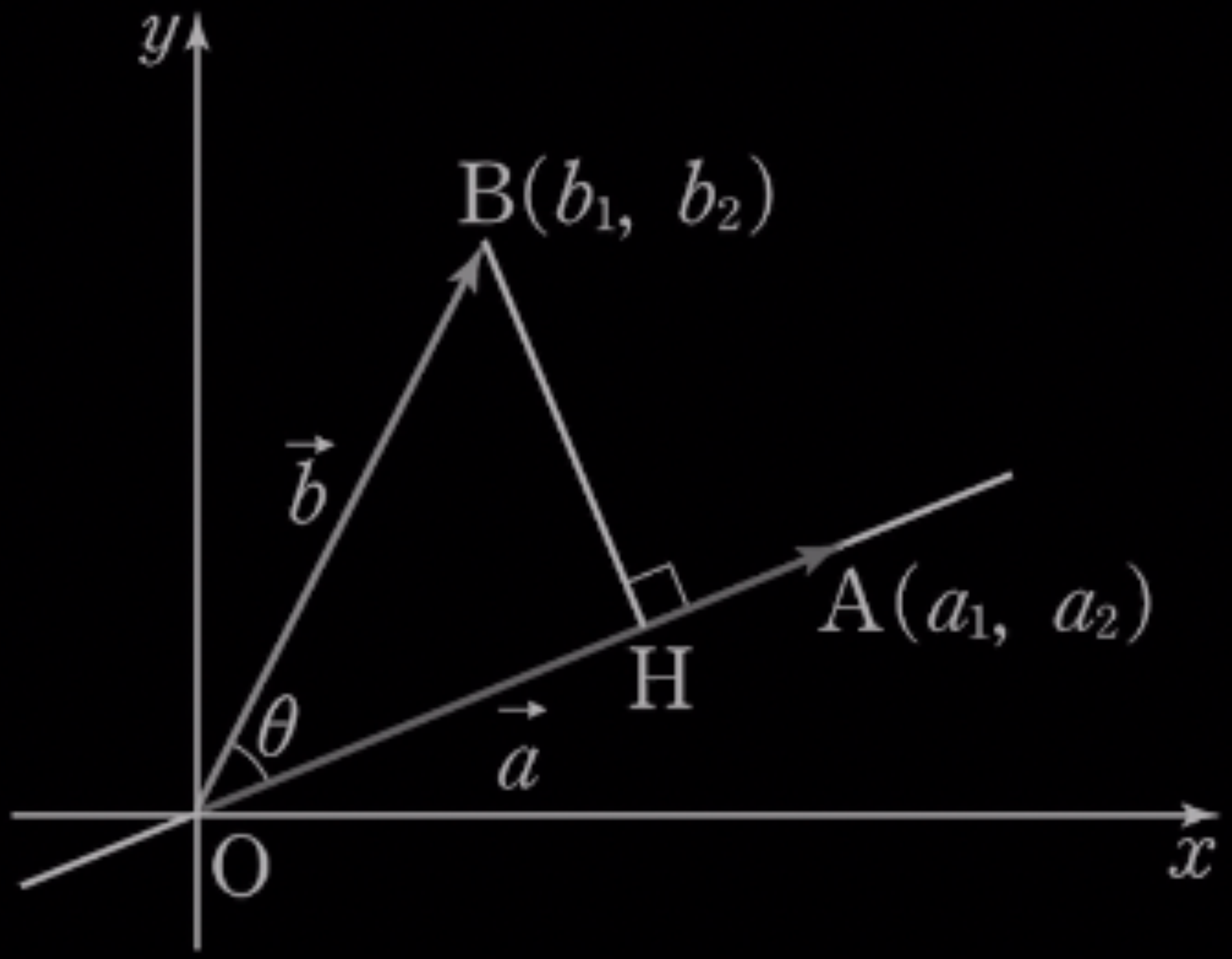
내적은 성분으로 어떻게 나타낼까?

Let $\quad \overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)=\vec{b}$

각의 크기 $\theta\ (0^\circ < \theta < 90^\circ)$

$$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OA}=(ka_1,ka_2)\ (k>0)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$

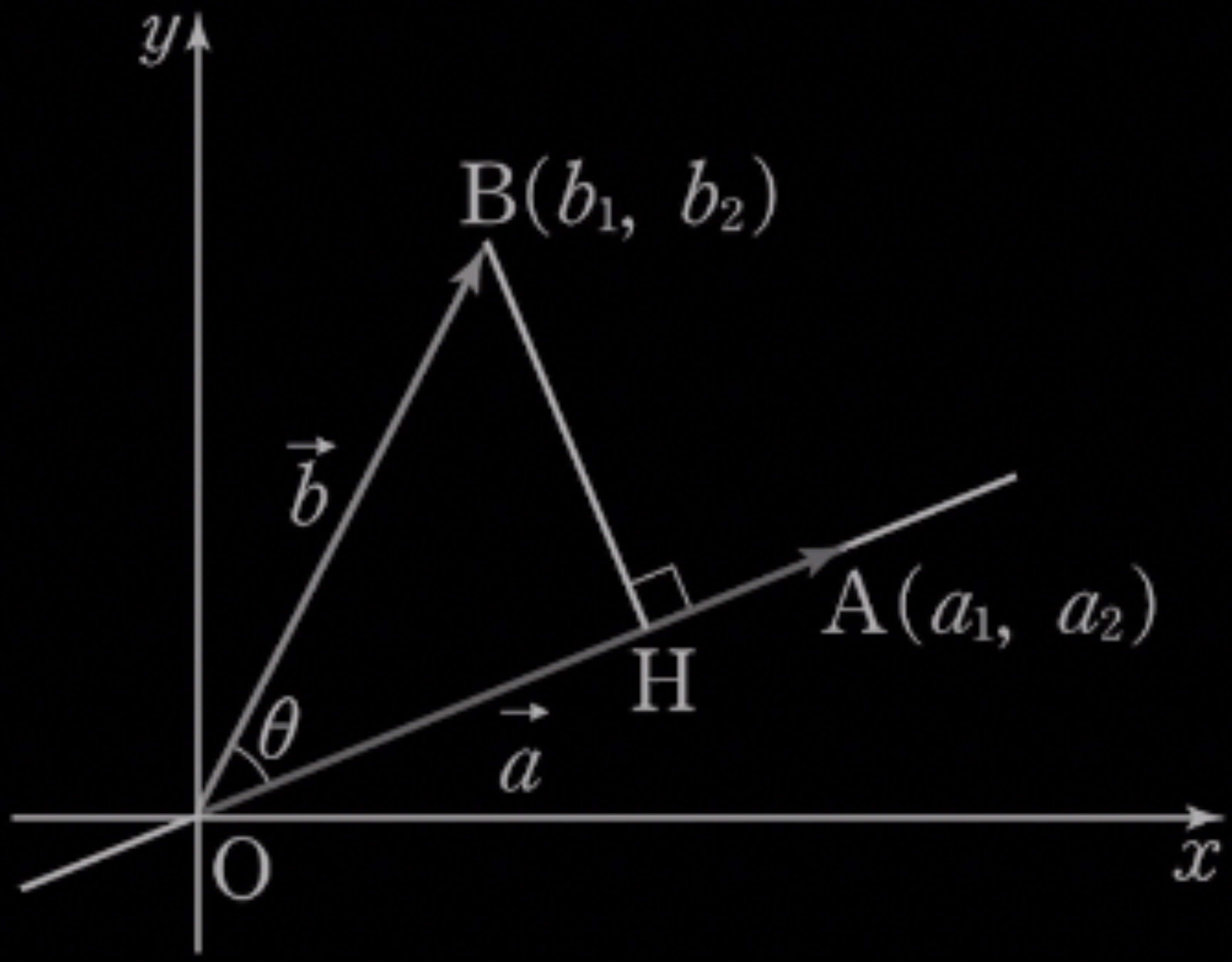


$$= |\overrightarrow{OA}| \times |\overrightarrow{OH}| = |\overrightarrow{OA}| \times k|\overrightarrow{OA}|$$

$$= k|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$= k({a_1}^2 + {a_2}^2) \cdots\cdots ①$$

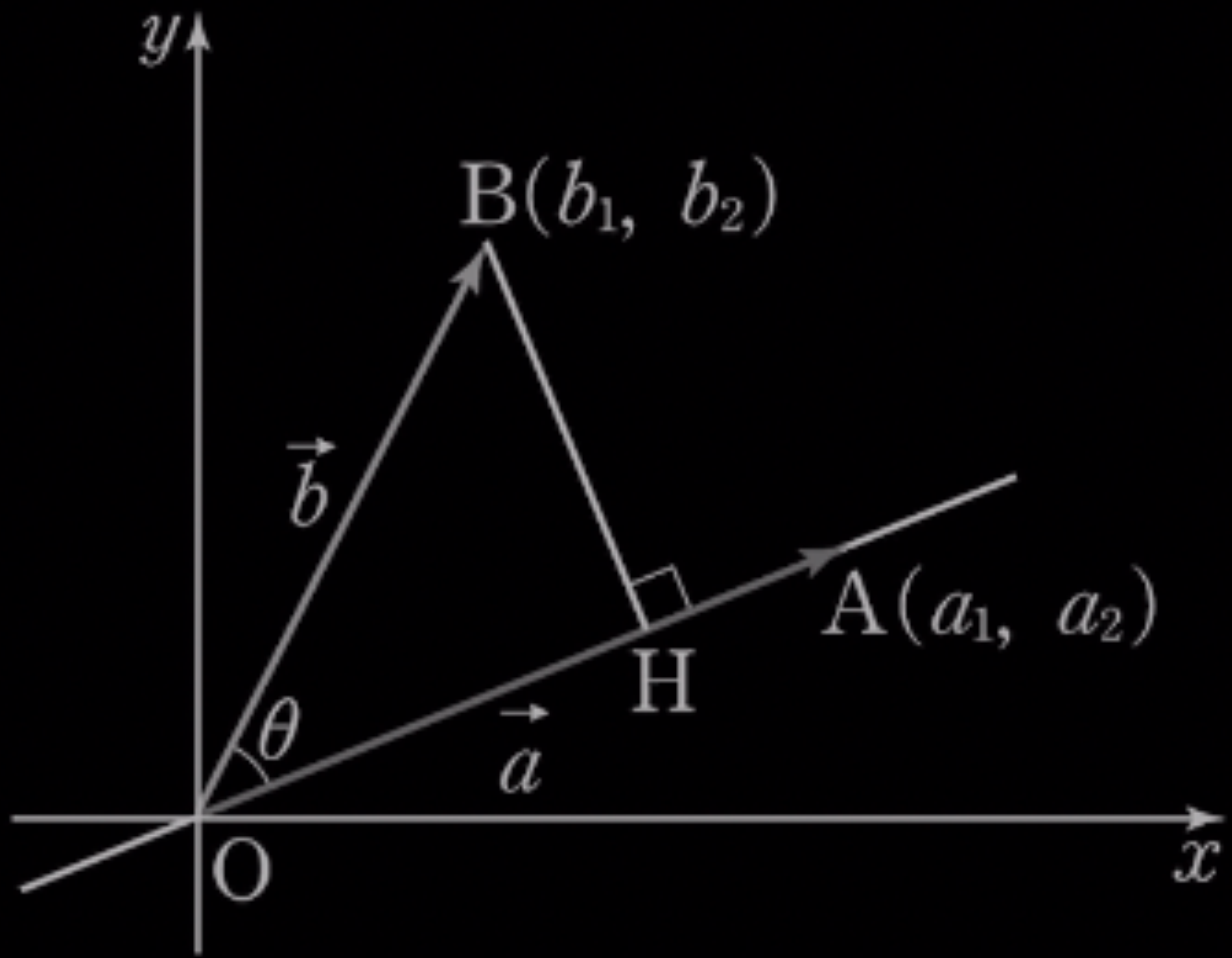
한편 직각삼각형 OHB에서



$$|\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OH}|^2 + |\overrightarrow{HB}|^2$$

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH} = (b_1 - ka_1, b_2 - ka_2)$$

$$b_1{}^2 + b_2{}^2 = (k^2 a_1{}^2 + k^2 a_2{}^2) + \{(b_1 - ka_1)^2 + (b_2 - ka_2)^2\}$$



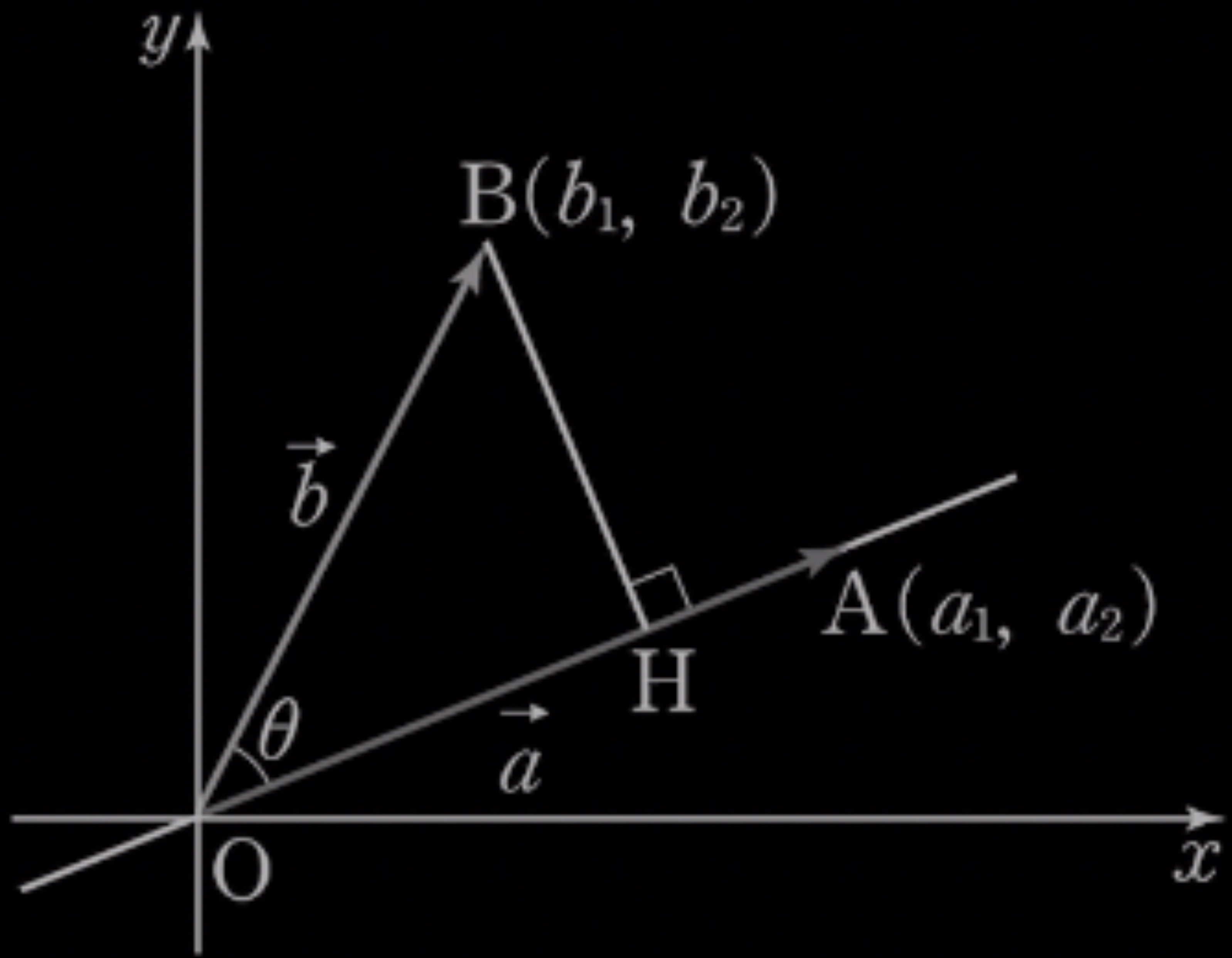
$$({a_1}^2 + {a_2}^2)k^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2)k$$

$$\therefore\ k = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

위 식을 ①에 대입하면

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \ \cdots\cdots ②$$

②는 $\theta = 0$일 때, 혹은
$90^\circ \le \theta \le 180^\circ$일 때도 성립.



개념. 평면벡터의 내적과 성분

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

문제3

다음 두 벡터의 내적을 구하시오.

(1) $\vec{a} = (3, -2), \vec{b} = (1, 5)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 1 + (-2) \times 5 = -7$$

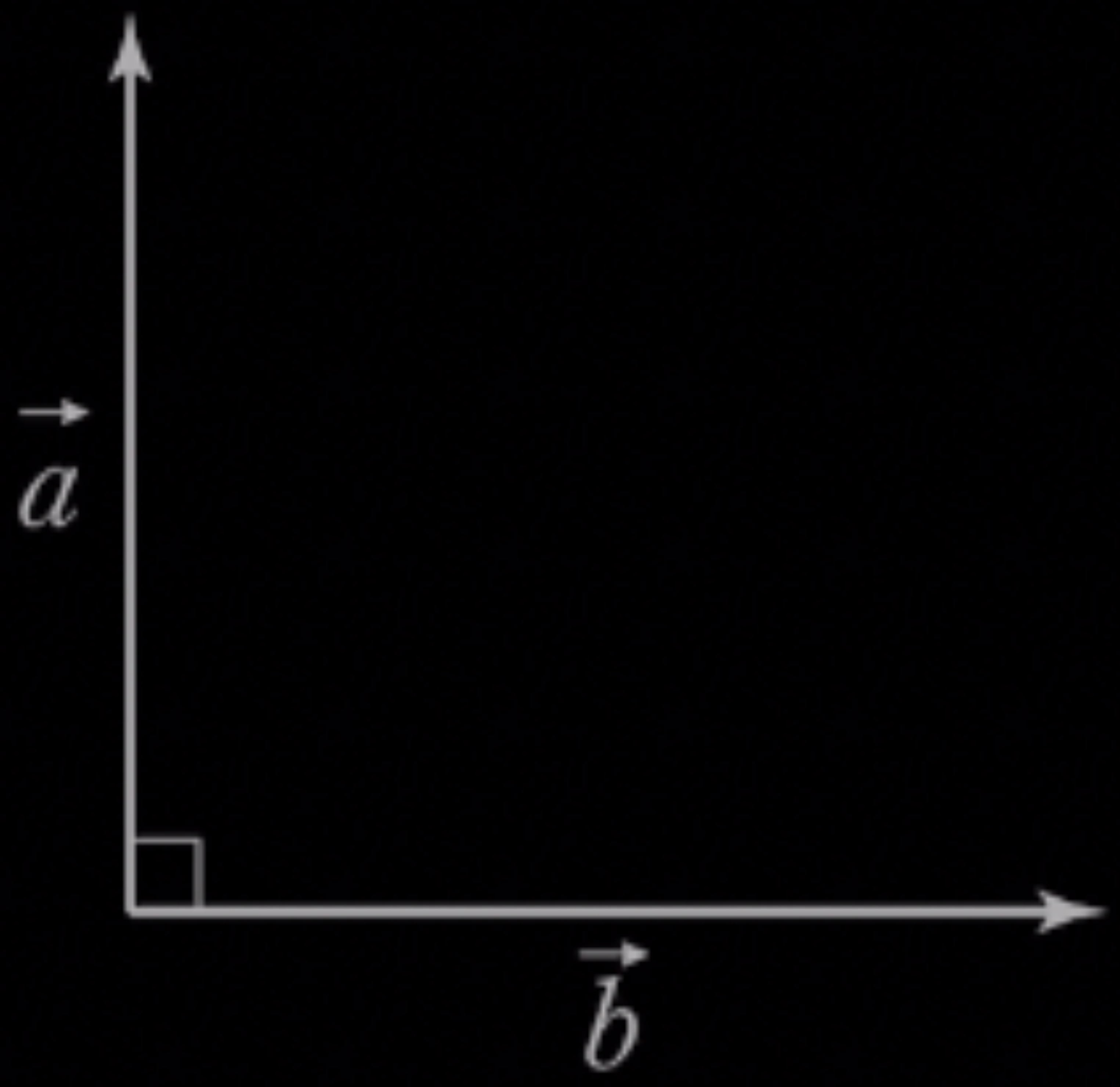
(2) $\vec{a} = (\sqrt{2}, -2), \vec{b} = (2\sqrt{2}, -1)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + (-2) \times (-1) = 6$$

두 벡터의 수직 조건

$\vec{a} \perp \vec{b}$일 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$



문제4(위 문제 3번과 함께 풀어보세요~)

두 벡터 $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (k, 4)$가 서로 수직이 되도록 실수 k의 값을 정하시오.

답: -6

내적의 성질

Let $\vec{a}=(a_1,a_2), \vec{b}=(b_1,b_2), \vec{c}=(c_1,c_2)$에 대하여 다음이 성립한다.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=b_1a_1+b_2a_2=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(a_1,a_2)\cdot(b_1+c_1,b_2+c_2)$

$$=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)$$

$$(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)$$

내적의 성질

Let $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{c} = (c_1, c_2)$에 대하여 다음이 성립한다.

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \cdot (c_1, c_2)$

$$= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2$$

$$= (a_1 c_1 + a_2 c_2) + (b_1 c_1 + b_2 c_2)$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

내적의 성질

Let $\vec{a}=(a_1,a_2), \vec{b}=(b_1,b_2), \vec{c}=(c_1,c_2)$에 대하여 다음이 성립한다.

4) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=(ka_1,ka_2)\cdot(b_1,b_2)$

$$=ka_1b_1+ka_2b_2$$

$$=k(a_1b_1+a_2b_2)=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\therefore\ (k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

평면벡터의 내적의 성질

세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$에 대하여

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (교환법칙)

2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

3) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (단, k는 실수)

예제2. 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

증명) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$$= \vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

문제5. 다음 등식이 성립함을 보이시오.

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

풀이) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) - \vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

문제5. 다음 등식이 성립함을 보이시오

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) + \vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

예제3.

$|\vec{a}| = 2\sqrt{2}, |\vec{a}| = 3$인 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $45°$ 일 때,

$|2\vec{a} + 3\vec{b}|$를 구하시오.

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$$

$$= 4 \times 8 + 12 \times 2\sqrt{2} \times 3 \times \cos 45^\circ + 9 \times 9$$

$$= 185$$