

- ◆ 교과서 문제 풀이입니다.
 ◆ 문제풀이 및 해설은 오른쪽 qr코드와
 같습니다.
 ◆ 함께 열심히 해 봅시다.



개념 1. 등차수열

1. 일반항

$$a_n = a + (n-1)d \text{ (첫째항 + 한개 부족한 공차 곱)}$$

2. 등차중항

$$a, b, c \text{ 이 순서대로 등차수열} \Rightarrow 2b = a + c$$

3. 등차수열의 부분합

$$S_n = \frac{n(a + a_n)}{2} \text{ (갯수} \times \text{(첫째항+끝항) 나누기 2)}$$

개념 2. 등비수열

1. 일반항

$$a_n = ar^{(n-1)} \text{ (첫째항} \times \text{한개 부족한 공비 제곱)}$$

2. 등비중항

$$a, b, c \text{ 이 순서대로 등비수열} \Rightarrow b^2 = ac$$

3. 등비수열의 부분합

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

개념 3. 합의 기호 Σ 의 성질

- (1) $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$ (합차는 분배된다.)
 (2) $\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k$ (상수곱은 밖으로 나온다.)

유의

- (3) $\sum_{k=1}^n c = cn$ ex) $\sum_{k=1}^2 3 = 3 + 3 = 3 \times 2$
 (4) $\sum_{k=1}^n a_k b_k \neq \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k$ k=1 k=2

$$\text{ex) } \sum_{k=1}^2 a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\sum_{k=1}^2 a_k \times \sum_{k=1}^2 b_k = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$$

예제 1. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 7, \sum_{k=1}^{10} b_k = 9$ 일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3b_k)$

(2) $\sum_{k=1}^{10} (-2a_k + 3)$

$$\textcircled{1} \quad 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 3 \sum_{k=1}^{10} b_k$$

$$= 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9$$

$$= \textcircled{41}$$

$$\textcircled{2} \quad -2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 3$$

$$= -2 \cdot 7 + 3 \cdot 10$$

$$= \textcircled{16}$$

문제 1. $\sum_{k=1}^{10} a_{2k} = 30, \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = 40$ 일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{20} a_k$

(2) $\sum_{k=1}^{20} (-1)^k a_k$

$$\sum_{k=1}^{10} a_{2k} = a_2 + a_4 + \dots + a_{20} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + \dots + a_{19} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=1}^{20} a_k = \textcircled{1} + \textcircled{2} = 30 + 40 = \textcircled{70}$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{k=1}^{20} (-1)^k a_k = -\textcircled{1} + \textcircled{2} = -30 + 40 = \textcircled{10}$$

개념 4. 시그마 공식

$$1+2+\cdots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

문제 2. 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $1+2+3+\cdots+10$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$

$$(1) \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

$$(2) \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$$

$$(3) \sum_{k=1}^{10} k^3 = \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 = 3025$$

예제 2. 다음 식의 값을 구하시오.

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6} (2n+1+3)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

예제 3. 다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 1 \times \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n-1}{2(n+1)}$$

문제 3. 다음 식의 값을 구하시오.

$$\text{문제 8 (2)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1 - k}$$

$$= (\cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1}) + (\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \cancel{\sqrt{n}})$$

$$= \sqrt{n+1} - 1$$