

8. 이차곡선과 접선

개념열기

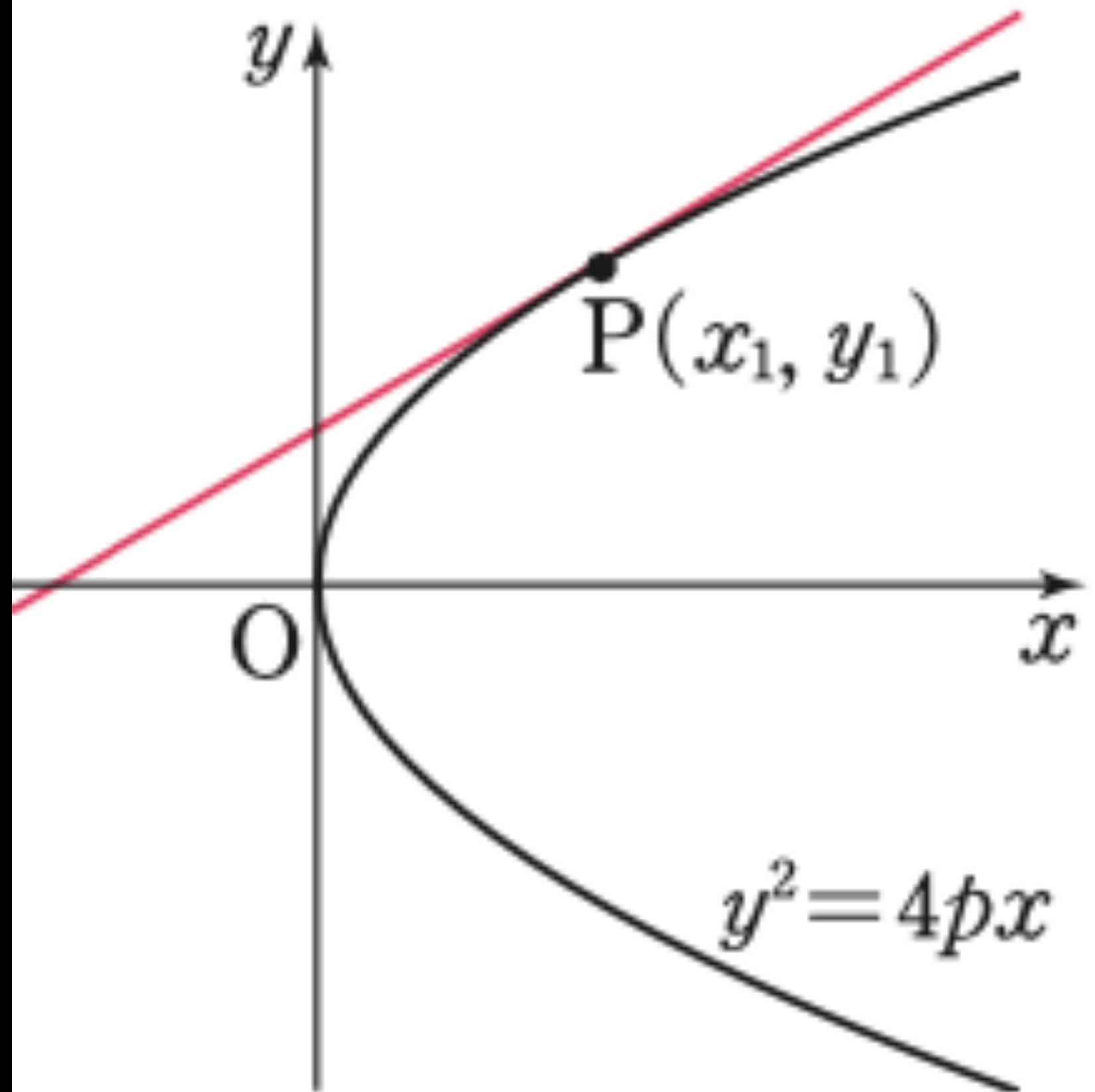
포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식

(1) $x_1 \neq 0$ 일 때, 접선의 기울기를 $m (\neq 0)$ 이라 하자.

구하는 접선의 방정식은

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = m(x - x_1) + y_1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$



예제3.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은
 $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ 임을 보이시오.

이 문제도 설명할 것

(1) $y_1 \neq 0$ 일 때, 접선의 기울기를 m 이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = m(x - x_1) + y_1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식

문제5. 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{a^2 x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ 임을 보이시오.

이 문제도 설명할 것

(1) $y_1 \neq 0$ 일 때, 접선의 기울기를 m 이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = m(x - x_1) + y_1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

개념2. 이차곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식

(1) 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

(2) 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

(3) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식

문제6. 다음 이차곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 $(3, 6)$ $y = x + 3$

(2) 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 점 $(2, \sqrt{3})$ $x + \sqrt{3}y - 5 = 0$

(3) 쌍곡선 $2x^2 - y^2 = -4$ 위의 점 $(0, 2)$ $y = 2$

문제 7. 타원 $3x^2 + y^2 = 12$ 위의 점 $(-1, 3)$ 에서의 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

예제4. (이차곡선의 밖에서 그은 접선) 점 $(-4, 2)$ 에서 타원 $3x^2 + 4y^2 = 16$ 에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

그림

Let \quad 접점을 $P(x_1, y_1)$

접선의 방정식

$$3x_1x + 4y_1y = 16$$

이 직선이 점 $(-4, 2)$ 를 지나므로

$$-12x_1 + 8y_1 = 16 \quad (1)$$

문제8. 점 $(0, 2)$ 에서 쌍곡선 $2x^2 - 3y^2 = 6$ 에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

$$\sqrt{2}x + y - 2 = 0 \text{ 또는 } -\sqrt{2}x + y - 2 = 0$$

수역기. 오른쪽 그림과 같이 자동차 전조등의 단면은 포물선 모양이고, 포물선의 초점의 위치에 전구가 있다. 포물선의 방정식을 $y^2 = 2x$, 초점을 F 라고 할 때, 전구에서 나온 빛이 포물선 위의 점 $P(2, 2)$ 에서 반사되어 나아가는 방향을 알아보려고 한다.

그림

- (1) 점 $P(2, 2)$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오.
- (2) (1)의 접선이 x 축과 만나는 점을 A 라고 할 때, 삼각형 FPA 가 어떤 삼각형인지 설명해보자
- (3) 포물선 위의 점 P 에서 반사된 빛이 나아가는 방향을 설명해보자.