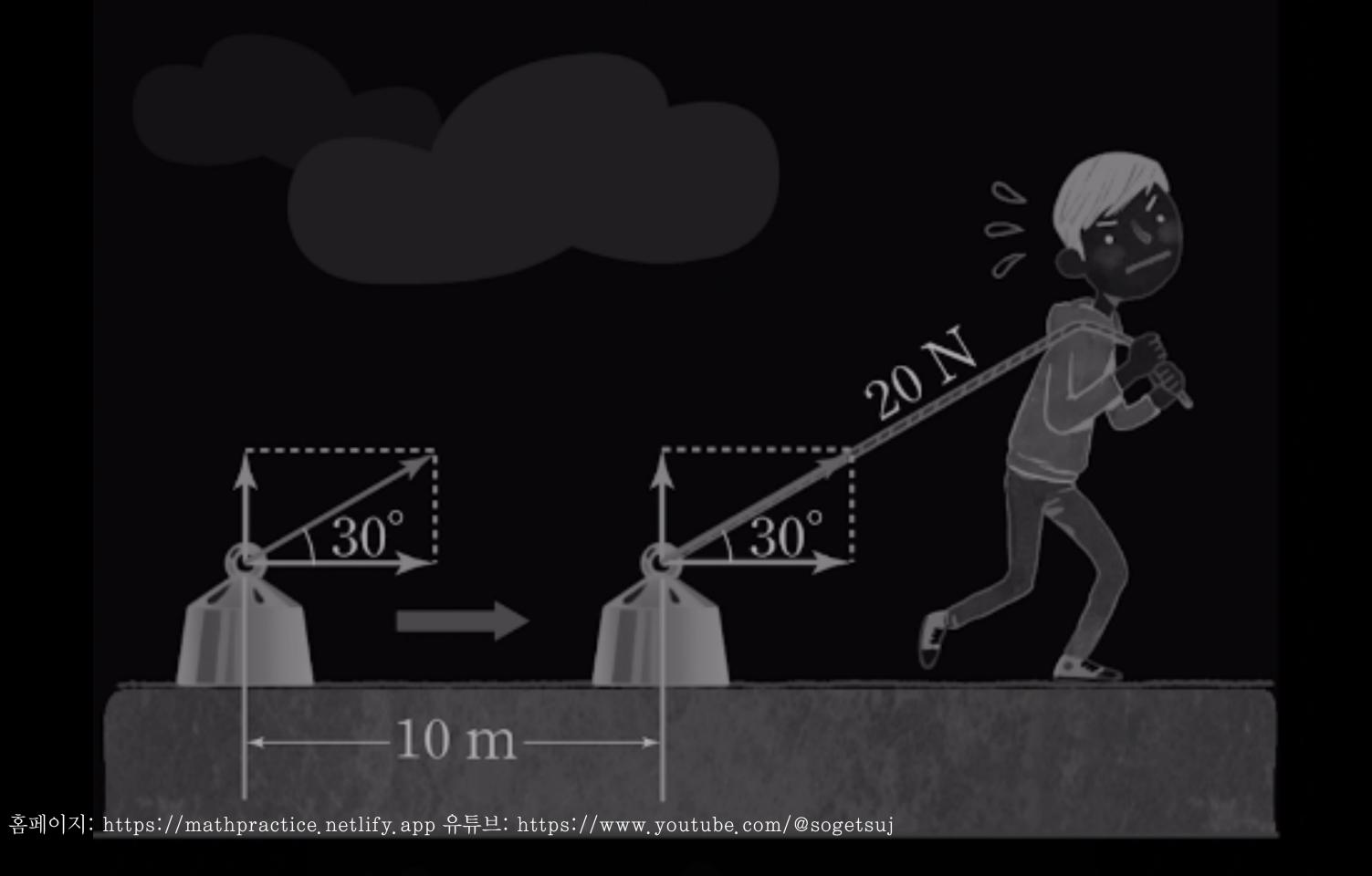
11. 필발

2024 2 17 7 16

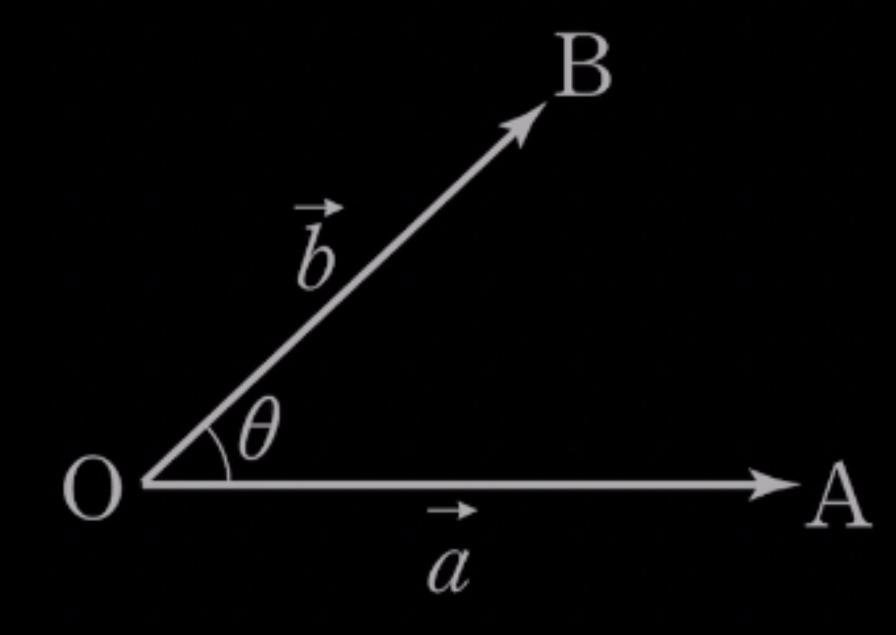
0 10



평면벡터의 내적

두 벡터 \vec{a} 와 \vec{b} 의 내적을 기호로

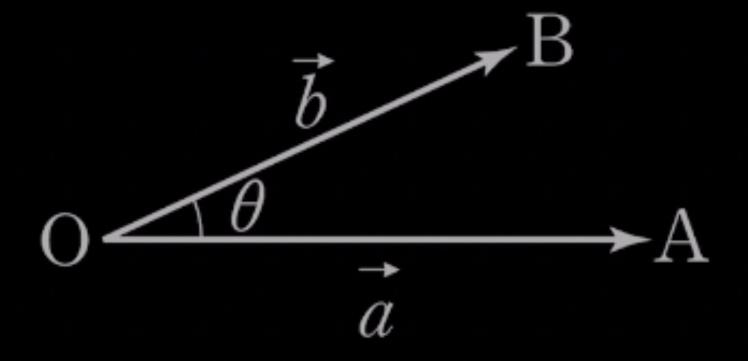
 $ec{a} \cdot ec{b}$ 로 나타낸다.



내적의 정의

(1)
$$0^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$$
일 때,

$$ec{a} \cdot ec{b} = |ec{a}| \, |ec{b}| \cos heta$$



내적의 정의

(1)
$$0^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$$
일 때,

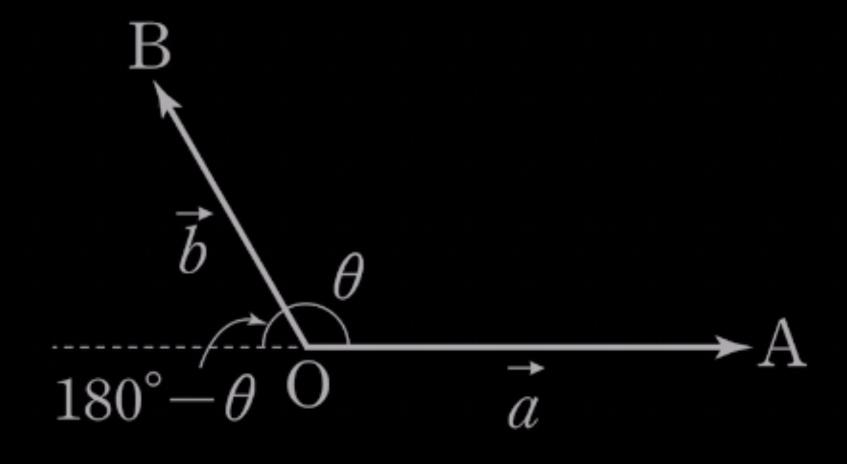
$$ec{a} \cdot ec{b} = |ec{a}| \, |ec{b}| \cos heta$$

(2)
$$90^{\circ} \leq \theta \leq 180^{\circ}$$
일 때,

$$ec{a}\cdotec{b}=-|ec{a}|\ |ec{b}|\cos(180^\circ- heta)$$

(3)
$$\vec{a} = \vec{0}$$
 or $\vec{b} = \vec{0}$ 일 때,

$$ec{a} \cdot ec{b} = 0$$



문제1

 $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=2$ 인 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 를 구하시오. ki

 $(1) 30^{\circ}$

 $(2) 90^{\circ}$

 $(3) 120^{\circ}$

$$egin{align} (1) \ ec{a} \cdot ec{b} &= |ec{a}| \ |ec{b}| \cos 30^\circ \ &= 2\sqrt{3} imes rac{\sqrt{3}}{2} = 3 \ \end{pmatrix}$$

$$egin{aligned} (2) \ ec{a} \cdot ec{b} &= |ec{a}| \ |ec{b}| \cos 90^\circ \ &= 2\sqrt{3} imes 0 \end{aligned}$$

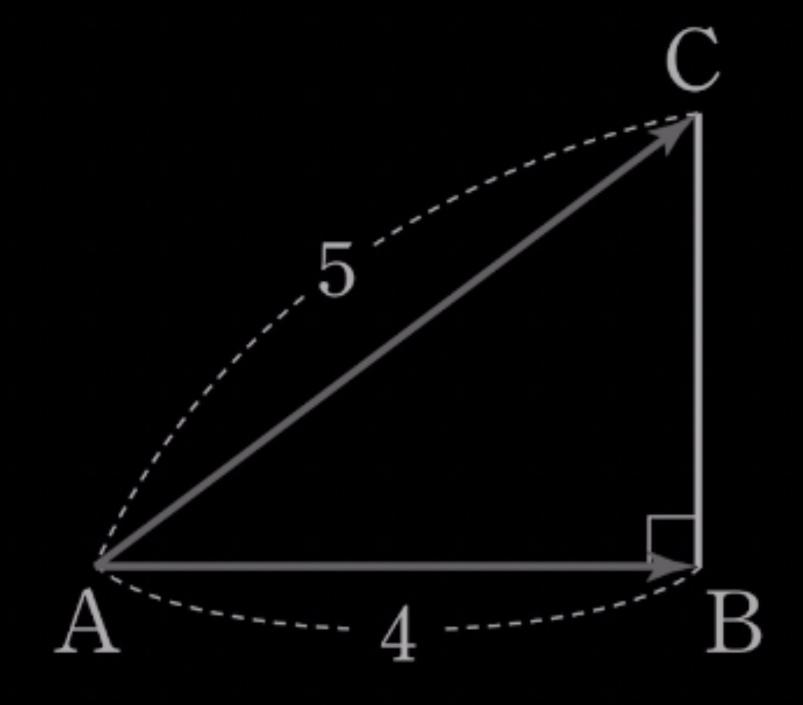
$$egin{align} (3) \ ec{a} \cdot ec{b} &= |ec{a}| \ |ec{b}| \cos 30^\circ \ &= 2\sqrt{3} imes \left(-rac{1}{2}
ight) = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

예제1

구하시오.

오른쪽 그림과 같이

$$\overline{AB}=4, \overline{AC}=5, \angle B=90^\circ$$
인
직각삼각형 \overrightarrow{ABC} 에서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 를



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \theta = 4 imes 5 imes rac{4}{5} = 16$$

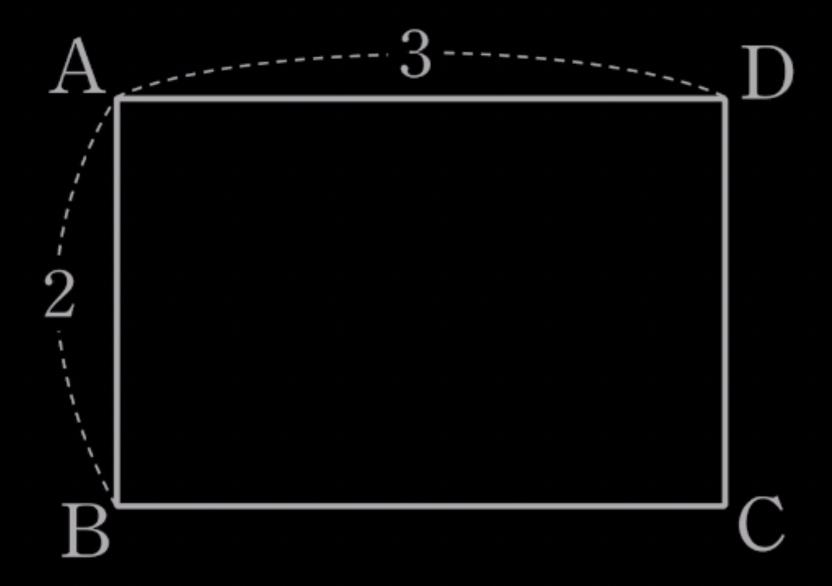
문제2

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=2,\overline{AD}=3$ 인 직 사각형 ABCD에서 다음을 구하시오.

(1)
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 imes 6 imes 0 = 0$$

(2)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 imes \sqrt{11} imes rac{2}{\sqrt{11}} = 4$$



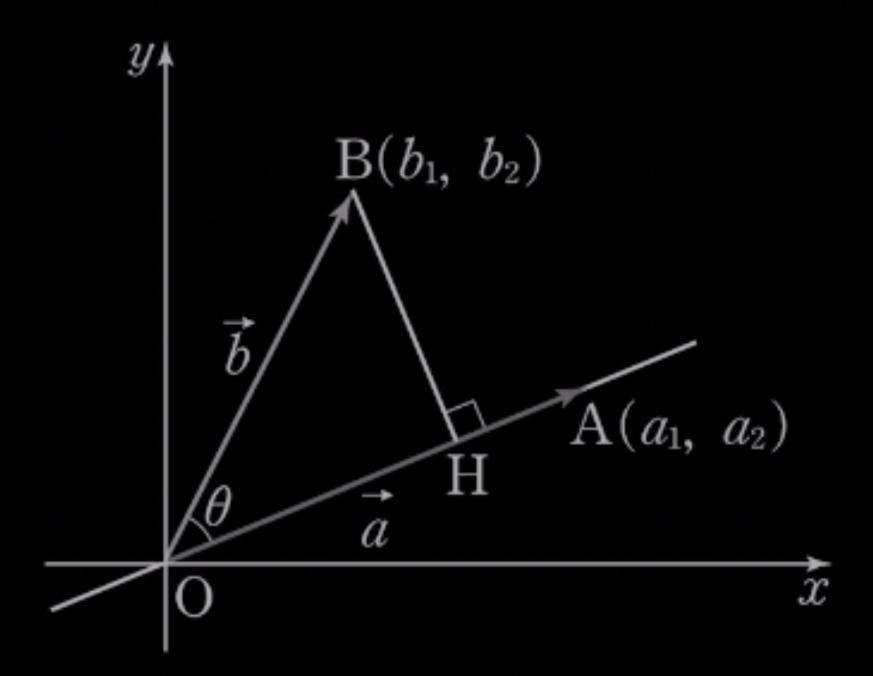
내적은 성분으로 어떻게 나타낼까?

$$\stackrel{
ightarrow}{\operatorname{Cet}} OA = (a_1,a_2) = ec{a}, \stackrel{
ightarrow}{OB} = (b_1,b_2) = ec{b}$$

각의 크기
$$heta$$
 (0° $< heta < 90^\circ$)

$$\stackrel{
ightarrow}{OH}=\stackrel{
ightarrow}{kOA}=\left(ka_1,ka_2
ight)\left(k>0
ight)$$

$$ec{a} \cdot ec{b} = |ec{a}| |ec{b}| \cos heta = |ec{OA}| imes |ec{OB}| \cos heta$$

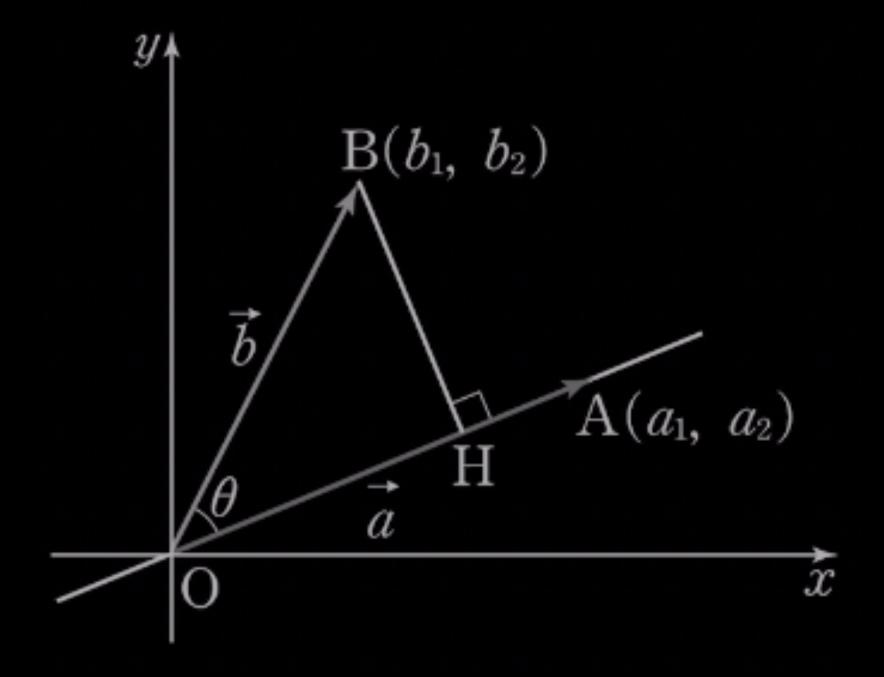


$$=|\overrightarrow{OA}| imes|\overrightarrow{OH}|=|\overrightarrow{OA}| imes k|\overrightarrow{OA}|$$

$$=k|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$=k(a_1^2+a_2^2)\cdots \odot$$

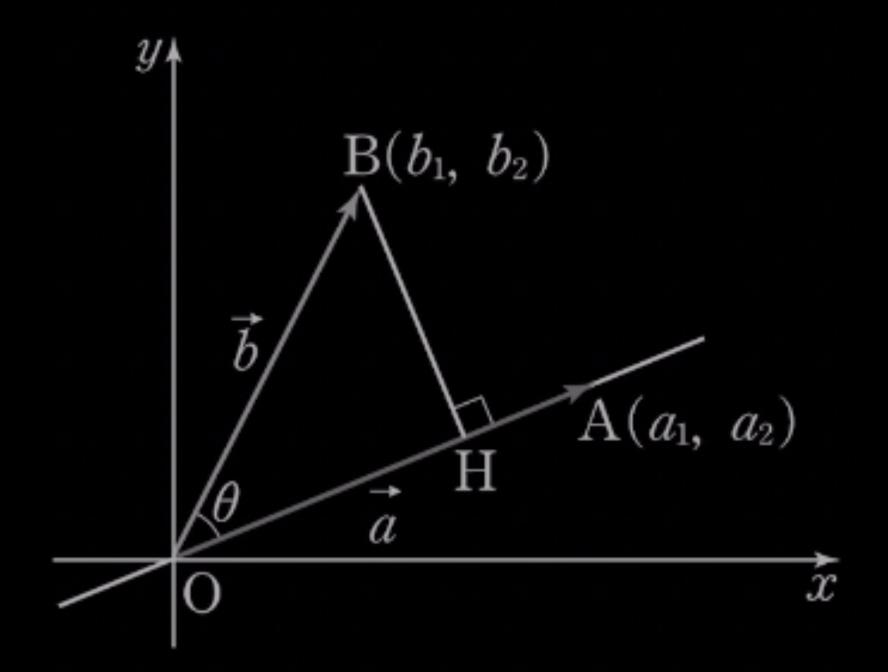
한편 직각삼각형 OHB에서



$$|\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OH}|^2 + |\overrightarrow{HB}|^2$$

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH} = (b_1 - ka_1, b_2 - ka_2)$$

$${b_1}^2 + {b_2}^2 = (k^2{a_1}^2 + k^2{a_2}^2) + \{(b_1 - ka_1)^2 + (b_2 - ka_2)^2\}$$



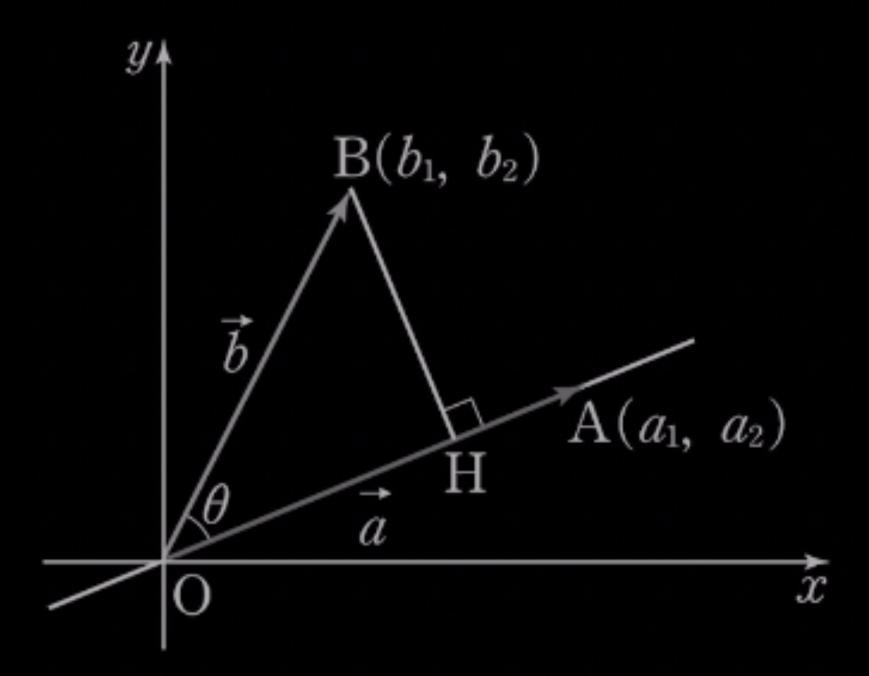
$$(a_1^2 + a_2^2)k^2 = (a_1b_1 + a_2b_2)k$$

$$\therefore k = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{a_1^2 + a_2^2}$$

위 식을 ①에 대입하면

$$ec{a} \cdot ec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 \cdots 2$$

②는
$$\theta = 0$$
일 때, 혹은 $90^{\circ} \leq \theta \leq 180^{\circ}$ 일 때도 성립.



개념. 평면벡터의 내적과 성분

$$ec{a} = (a_1, a_2), ec{b} = (b_1, b_2)$$

$$ec{a}\cdotec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

문제3

다음 두 벡터의 내적을 구하시오.

(1)
$$\vec{a} = (3, -2), \vec{b} = (1, 5)$$

$$ec{a} \cdot ec{b} = 3 imes 1 + (-2) imes 5 = -7$$

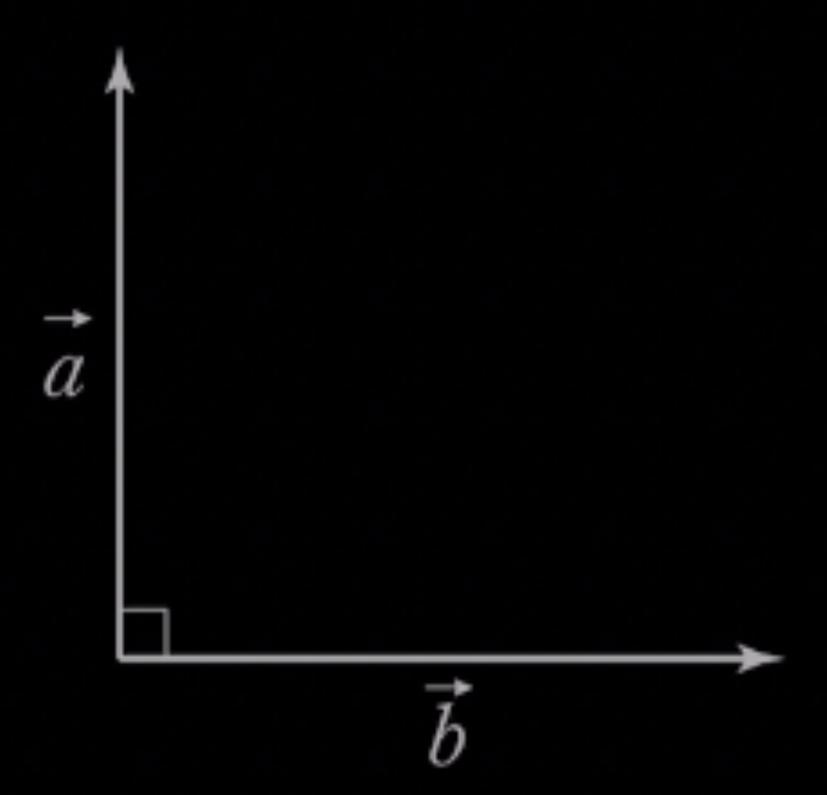
(2)
$$\vec{a} = (\sqrt{2}, -2), \vec{b} = (2\sqrt{2}, -1)$$

$$ec{a}\cdotec{b}=\sqrt{2} imes2\sqrt{2}+(-2) imes(-1)=6$$

두 벡터의 수직 조건

$$ec{a} \perp ec{b}$$
일 때,

$$ec{a}\cdotec{b}=|ec{a}||ec{b}|\cos90^\circ=0$$



문제4(위 문제 3번과 함께 물어보세요~)

두 벡터 $\vec{a}=(2,3), \vec{b}=(k,4)$ 가 서로 수직이 되도록 실수 k의 값을 정하시오.

답: -6

내적의 성질

Let $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{c} = (c_1, c_2)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

1)
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = b_1a_1 + b_2a_2 = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$egin{align} egin{align} egin{align} ec{a} \cdot (ec{b} + ec{c}) &= (a_1, a_2) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 c_1 + a_2 c_2) \end{gathered}$$

내적의 성질

Let $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{c} = (c_1, c_2)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

3)
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \cdot (c_1, c_2)$$

$$= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2$$

$$= (a_1c_1 + a_2c_2) + (b_1c_1 + b_2c_2)$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

내적의 성질

Let
$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{c} = (c_1, c_2)$$
에 대하여 다음이 성립한다.

$$egin{align} 4) \; (kec{a}) \cdot ec{b} &= (ka_1, ka_2) \cdot (b_1, b_2) \ &= ka_1b_1 + ka_2b_2 \ &= k(a_1b_1 + a_2b_2) = k(ec{a} \cdot ec{b}) \ \end{gathered}$$

$$\therefore (k \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k \vec{b}) = k (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

명면벡터의 내적의 성질

세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 에 대하여

1)
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
 (교환법칙)

2)
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(ec{a}+ec{b})\cdotec{c}=ec{a}\cdotec{c}+ec{b}\cdotec{c}$$

3)
$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$
 (단, k는 실수)

예제2. 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$|ec{a} + ec{b}|^2 = |ec{a}|^2 + 2ec{a} \cdot ec{b} + |ec{b}|^2$$

증명)
$$|ec{a} + ec{b}|^2 = (ec{a} + ec{b}) \cdot (ec{a} + ec{b})$$

$$=ec{a}\cdot(ec{a}+ec{b})+ec{b}\cdot(ec{a}+ec{b})$$

$$= ec{a} \cdot ec{a} + ec{a} \cdot ec{b} + ec{b} \cdot ec{a} + ec{b} \cdot ec{b}$$

$$= |ec{a}|^2 + 2 ec{a} \cdot ec{b} + |ec{b}|^2$$

문제5. 다음 등식이 성립함을 보이시오.

(1)
$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

풀이)
$$|ec{a}-ec{b}|^2=(ec{a}-ec{b})\cdot(ec{a}-ec{b})=ec{a}\cdot(ec{a}-ec{b})-ec{b}\cdot(ec{a}-ec{b})$$

$$=ec{a}\cdotec{a}-ec{a}\cdotec{b}-ec{b}\cdotec{a}+ec{b}\cdotec{b}=|ec{a}|^2-2ec{a}\cdotec{b}+|ec{b}|^2$$

문제5. 다음 등식이 성립함을 보이시오

(2)
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

$$(ec{a}+ec{b})\cdot(ec{a}-ec{b})=ec{a}\cdot(ec{a}-ec{b})+ec{b}\cdot(ec{a}-ec{b})$$

$$=ec{a}\cdotec{a}-ec{a}\cdotec{b}+ec{b}\cdotec{a}-ec{b}\cdotec{b}=|ec{a}|^2-|ec{b}|^2$$

예제3.

$$|ec{a}|=2\sqrt{2}, |ec{a}|=3$$
인 두 벡터 $ec{a}, ec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 45° 일 때, $|2ec{a}+3ec{b}|$ 를 구하시오.

$$egin{align} |2ec{a}+3ec{b}|^2 &= (2ec{a}+3ec{b})\cdot(2ec{a}+3ec{b}) = 4|ec{a}|^2 + 12ec{a}\cdotec{b} + 9|ec{b}|^2 \ &= 4 imes 8 + 12 imes 2\sqrt{2} imes 3 imes \cos 45^\circ + 9 imes 9 \ &= 185 \end{split}$$