

- ◆ 교과서 문제 풀이입니다.
- ◆ 문제풀이 및 해설은 오른쪽 qr코드와 같습니다.
- ◆ 함께 열심히 해 봅시다.



개념 1.

로그의 정의

$a > 0, a \neq 1, N > 0$ 일 때,
 $a^x = N \iff x = \log_a N$

문제 1. 다음 빈칸에 알맞은 것을 써넣으시오.

(단, $a > 0, a \neq 1, N > 0$)

	$a^x = N$	\iff	$x = \log_a N$
(1)	$5^3 = 125$	\iff	$3 = \log_5 125$
(2)	$3^4 = 81$	\iff	$4 = \log_3 81$
(3)	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	\iff	$-3 = \log_2 \frac{1}{8}$
(4)	$\left(\frac{1}{9}\right)^{-1} = 9$	\iff	$-1 = \log_{\frac{1}{9}} 9$

예제 1. 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_2 16 = x$

$$\begin{aligned} 2^x &= 16 \\ 2^x &= 2^4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

(2) $\log_{\frac{1}{5}} 25 = y$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5}\right)^y &= 25 \\ 5^{-y} &= 5^2 \\ -y &= 2 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

문제 2. 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_2 8$

(2) $\log_4 1$

(3) $\log_{\frac{1}{3}} 9$

(4) $\log_{0.1} \frac{1}{100}$

$$\begin{aligned} (1) \log_2 8 &= a \\ 2^a &= 8 \\ 2^a &= 2^3 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \log_4 1 &= b \\ 4^b &= 1 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \log_{\frac{1}{3}} 9 &= c \\ \left(\frac{1}{3}\right)^c &= 9 \\ 3^{-c} &= 3^2 \\ -c &= 2 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \log_{0.1} \frac{1}{100} &= d \\ 0.1^d &= \frac{1}{100} \\ \left(\frac{1}{10}\right)^d &= \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

문제 3. 다음은 $a > 0, a \neq 1, M > 0$ 이고 k 는 실수일 때, $\log_a M^k = k \log_a M$ 이 성립함을 보이는 과정이다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣으시오.

$\log_a M = m$ 으로 놓으면 로그의 정의에 따라 $M = \boxed{a^m}$ 이므로 $M^k = a^{mk}$ 이다.
 따라서 로그의 정의를 이용하면 $\log_a M^k = \boxed{mk}$ 이므로 $\log_a M^k = k \log_a M$ 이다.

개념 2.

로그의 성질

 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ 일 때

① $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

④ $\log_a M^k = k \log_a M$ (단, k 는 실수)

문제 4. 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\log_4 2 + \log_4 8$

(2) $\log_5 45 - \log_5 9$

(3) $\log_2 \frac{1}{32}$

(4) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{81}$

$$\begin{aligned} (1) \log_4 2 \times 8 \\ &= \log_4 4^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \log_5 \frac{45}{9} \\ &= \log_5 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \log_2 2^{-5} \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \log_{\frac{1}{3}} 9 \\ &= \log_{\frac{1}{3}} 3^2 \\ &= \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

예제 2. 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\log_2 \frac{4}{3} + 2 \log_2 \sqrt{12}$

(2) $\frac{1}{3} \log_3 8 - \log_3 \sqrt[3]{24}$

$$\begin{aligned} (1) \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 \sqrt{12}^2 &= \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 12 \\ &= \log_2 \frac{4}{3} \times 12 \\ &= \log_2 16 \\ &= \log_2 2^4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \log_3 8^{\frac{1}{3}} - \log_3 24^{\frac{1}{3}} &= \log_3 \frac{8^{\frac{1}{3}}}{24^{\frac{1}{3}}} \\ &= \log_3 \left(\frac{8}{24}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \log_3 3^{-\frac{1}{3}} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

문제 5. 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\log_3 5 + 2 \log_3 \frac{1}{\sqrt{15}}$

(2) $\log_2 \sqrt[5]{6} - \frac{1}{5} \log_2 \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \log_3 5 + \log_3 \left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2 &= \log_3 5 + \log_3 \frac{1}{15} \\ &= \log_3 5 \times \frac{1}{15} \\ &= \log_3 \frac{1}{3} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \log_2 6^{\frac{1}{5}} - \log_2 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{5}} &= \log_2 \frac{6^{\frac{1}{5}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{5}}} \\ &= \log_2 6^{\frac{1}{5}} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= \log_2 \left(6 \times \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= \log_2 4^{\frac{1}{5}} \\ &= \log_2 2^{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

예제 3. $\log_{10} 2 = a, \log_{10} 3 = b$ 일 때, $\log_{10} 15$ 를 a, b 로 나타내시오.

$$\begin{aligned} \log_{10} 15 &= \log_{10} 3 \times 5 \\ &= \log_{10} 3 + \log_{10} 5 \\ &= b + \log_{10} \frac{10}{2} \\ &= b + \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\ &= b + 1 - a \\ &= -a + b + 1 \end{aligned}$$

문제 6. $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ 일 때, 다음을 a, b 로 나타내시오.

(1) $\log_{10} \sqrt{0.72}$

(2) $\log_{10} \frac{12}{5}$

(1) $\log_{10} \left(\frac{12}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \log_{10} \frac{12}{100}$

$= \frac{1}{2} (\log_{10} 12 - \log_{10} 100)$

$= \frac{1}{2} (\log_{10} 2^2 \cdot 3^2 - 2)$

$= \frac{1}{2} (2\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 - 2)$

$= \frac{1}{2} (2a + 2b - 2)$

$= a + b - 1$

(2) $\log_{10} 12 - \log_{10} 5$

$= \log_{10} 2^2 \cdot 3 - \log_{10} \frac{10}{2}$

$= 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - (\log_{10} 10 - \log_{10} 2)$

$= 2a + b - 1 + a$

$= 3a + b$

개념 3.

로그의 밑의 변환

$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$ 일 때,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

문제 7. 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\log_{25} 125$

(2) $\log_2 9 \times \log_{\sqrt{3}} 4$

(1) $\frac{\log_5 125}{\log_5 25}$

$= \frac{\log_5 5^3}{\log_5 5^2}$

$= \frac{3}{2}$

(2) $\log_2 9 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 \sqrt{3}}$

$= \frac{\log_2 9}{\log_2 \sqrt{3}} \times \log_2 2^2$

$= \frac{\log_2 3^2}{\log_2 3^{\frac{1}{2}}} \times 2$

$= \frac{2 \log_2 3}{\frac{1}{2} \log_2 3} \times 2$

$= 4 \times 2 = 8$

문제 8. a, b, c 가 1이 아닌 양수일 때, 다음이 성립함을 보이시오.

(1) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

(2) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$

(1) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (\because 밑변환 공식)
 $\downarrow c=b$ 때
 $= \frac{\log_b b}{\log_b a}$
 $= \frac{1}{\log_b a}$

(2) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a$

$= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} \times \frac{\log_2 c}{\log_2 b} \times \frac{\log_2 a}{\log_2 c}$ (\because 밑변환 공식)

$= 1$