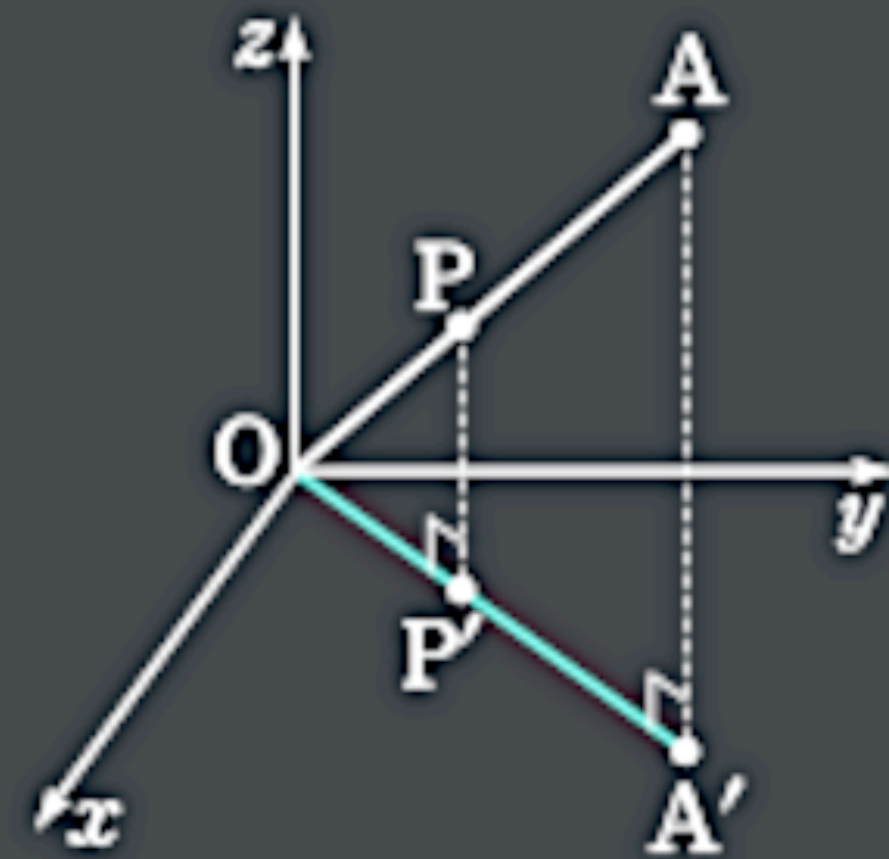


18. 선분의 내분점 외분점

2024 2학기 기하

이한희

오른쪽 그림과 같이 점 A 에 대하여 선분 OA 를 $2 : 3$ 으로
 내분하는 점을 P 라 하고, 두 점 A, P 의 xy 평면 위로의 정
 사영을 각각 A', P' 이라고 할 때, $\overline{OP'} : \overline{P'A'}$ 을 구하시오.
2 : 3



오른쪽 그림과 같이 세 점

A, P, B 의 xy 평면 위로의

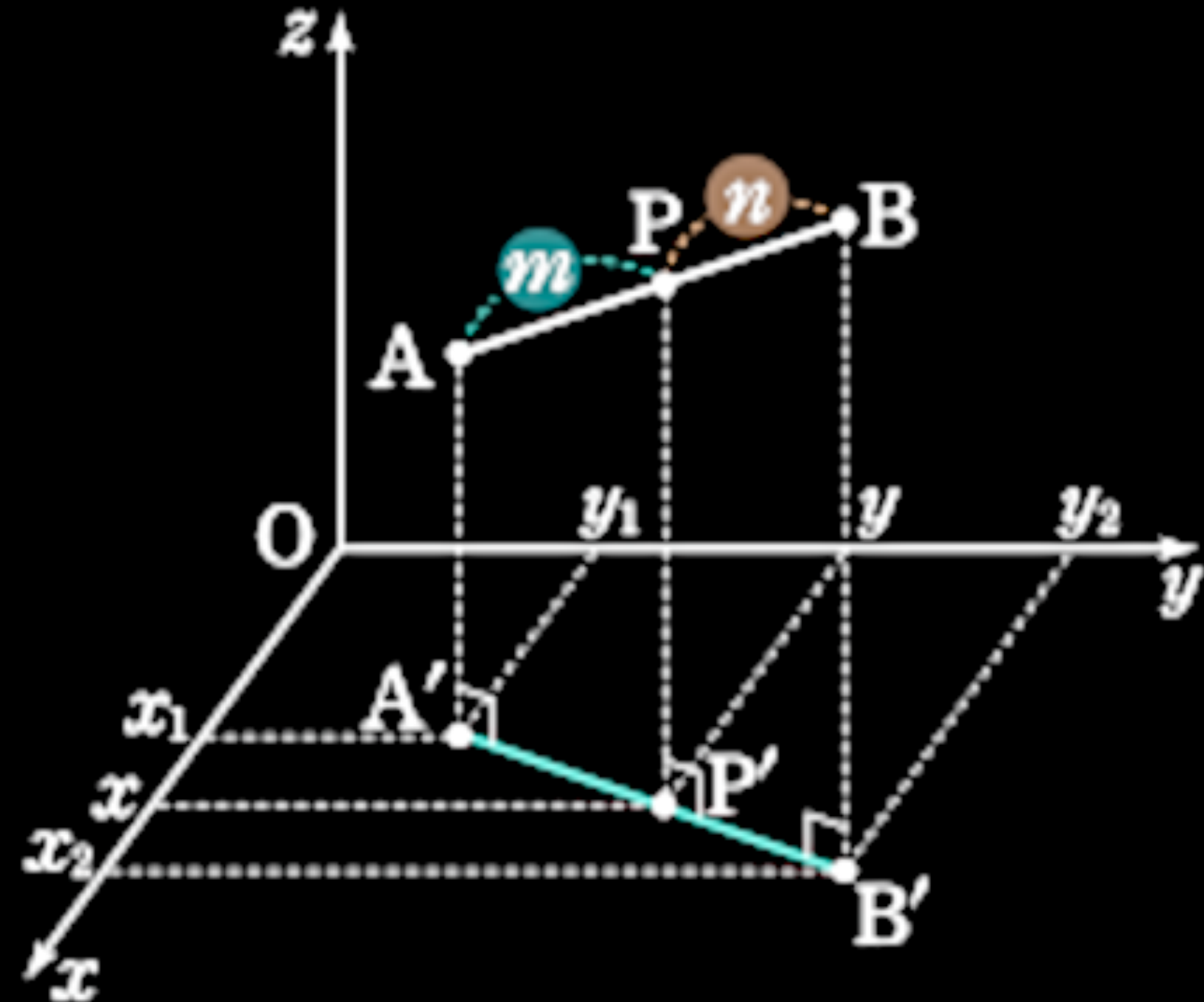
정사영을 각각 A', B', C' 이

라 하면

$A'(x_1, y_1, 0), P'(x, y, 0), B'(x_2, y_2, 0)$

$$\overline{A'P'} : \overline{P'B'}$$

$$= \overline{AP} : \overline{PB} = m : n$$



따라서, 점 P' 는 선분 $A'B'$ 을 내분하는 점이므로

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

같은 방법으로

$$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}$$

$$\therefore P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$$

특히 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{z_2 + z_1}{2}\right)$$

좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

내분점

$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}\right)$$

외분점

$$Q\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m - n}\right)$$

스스로 확인하기

두 점 $A(1, 4, -2)$, $B(-1, 2, -3)$ 에 대하여, 1: 2
로 내분, 외분하는 점은

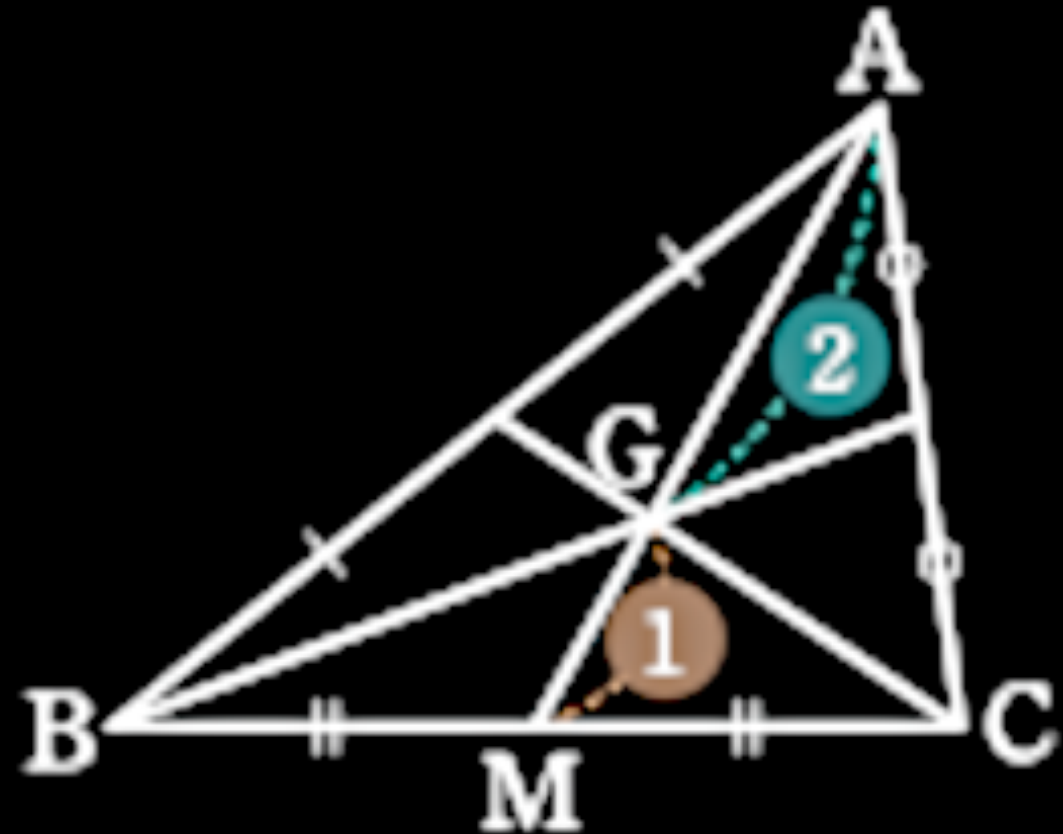
예제2

세 점

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$$

을 꼭짓점으로 하는 삼각형

ABC 의 무게중심 G 의 좌표를 구하시오.



$$M\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}\right)$$

$$x = \frac{2 \times \frac{x_2 + x_3}{2} + 1 \times x_1}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

마찬가지 방법으로
무게중심

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

문제8

세 점

$A(2, -1, 4)$, $B(1, -5, -3)$, $C(-1, 3, 1)$ 을
꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심 G 의 좌표를
구하시오.

$$G\left(\frac{2}{3}, -1, \frac{2}{3}\right)$$

19. 구의 방정식

2024 2학기 기하

이한희

오른쪽 그림은 반지름의 길이가 6400 km인 지구를 좌표 공간에 나타낸 것이다. 지구의 중심을 원점 O로 생각하고 지표면 위의 한 점을 $P(x, y, z)$ 라고 할 때, 원점 O에서 점 P까지의 거리를 x, y, z 에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣으시오.

(단, 지구는 구 모양으로 생각한다.)

$$\boxed{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 6400$$

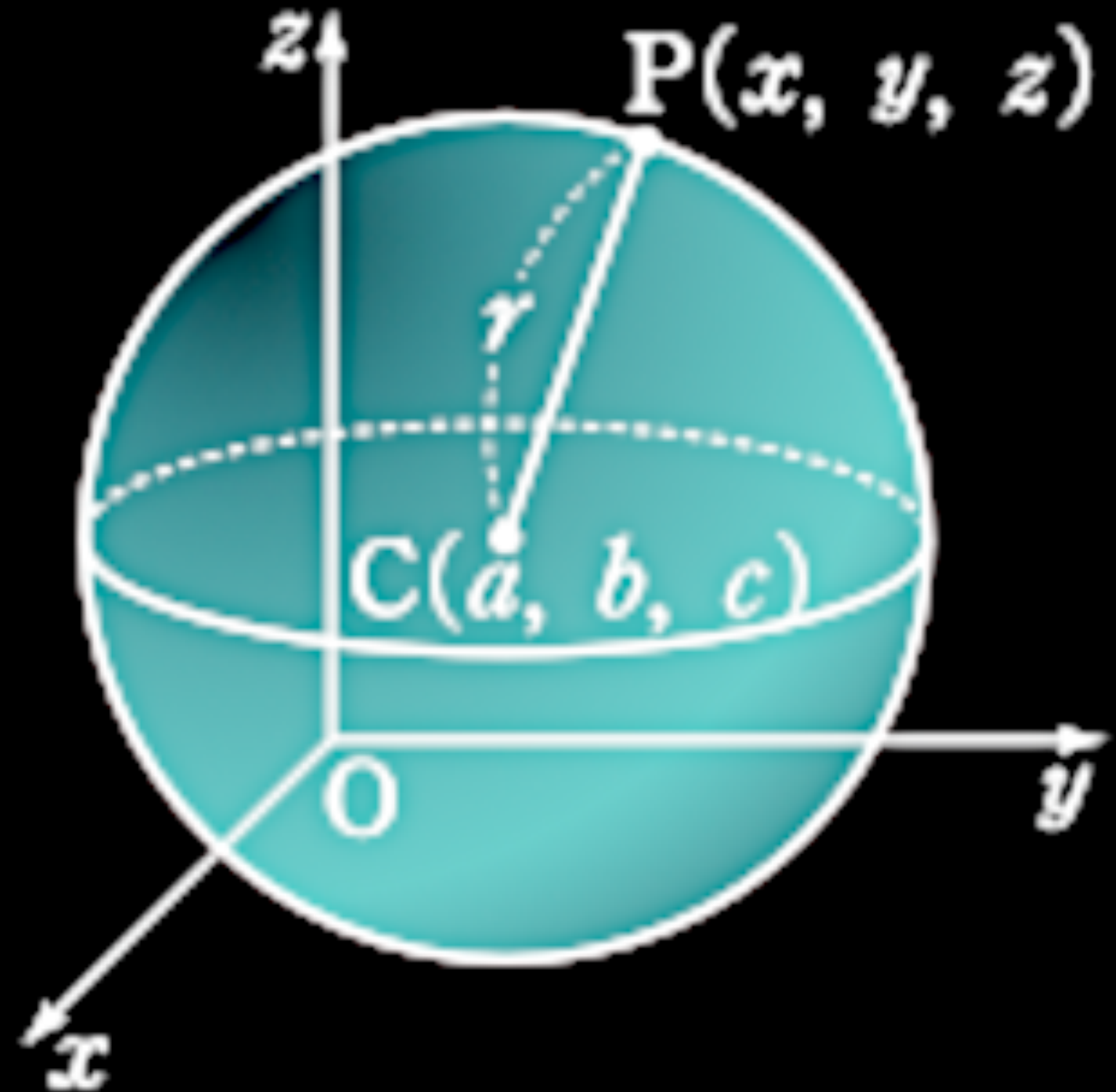


$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 6400 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6400^2$$

좌표평면에서 점 $C(a, b, c)$
를 중심으로 하고 반지름의 길이가
 r 인 구의 방정식

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$



구의 방정식

중심이 $C(a, b, c)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

스스로 확인하기

점 $(1, 2, 3)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구의 방정식은

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$$

문제1(한 번 해보세요~)

다음 구의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(-2, 1, 4)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3
인 구

(2) 점 $(4, -1, 3)$ 을 중심으로 하고 원점을 지나는 구

(3) 두 점 $(4, 3, 1), (0, -1, 5)$ 를 지름의 양 끝 점으

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 9$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 26$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 12$$

구의 방정식

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}{4}$$

$A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$ 이면 구

스스로 확인하기

방정식

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z + 5 = 0$$

을 변형하면

$$(x + 3)^2 (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$$

따라서 주어진 방정식은 점 $(-3, 1, 2)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구를 나타낸다.

문제2(한 번 해보세요~)

방정식

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 5 = 0 \text{ 이 나}$$

타내는 구의 중심과 반지름의 길이를 구하시오.

중심: $(3, -1, 1)$, 반지름의 길이: 4

예제1

네 점 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, -1, 0)$, $(2, 2, 1)$
을 지나는 구의 방정식을 구하시오.

Let $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

두 점 $(0, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ 을 지나므로

$$D = 0, B = 1$$

따라서 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + y + Cz = 0$$

또, 두 점 $(1, 0, 1), (2, 2, 1)$ 을 지나므로

$$A + C = -2, 2A + C = -11$$

연립하면 $A = -9, C = 7$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 - 9x + y + 7z = 0$$

문제3(한 번 해보세요~)

네 점

$(0, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, -1), (1, 1, -7)$ 을

지나는 구의 방정식을 구하시오.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 21x - 23y + z = 0$$