♦ 전체 : 선택형 15문항(70점) 서답형 4문항(30점)

♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 동전 1개를 3번 던질 때, 적어도 1번은 뒷면이 나올 확률은? [3.7점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{15}{16}$ ⑤ $\frac{31}{32}$

$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$

2. 다음은 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 A와 B^c도 서로 독립임을 증명하는 과정이다.

<증 명>

두 사건 A와 B에 대하여 $A = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$이고, 사건 $(A\cap B)$와 $(A\cap B^c)$는 서로 $\boxed{\text{(가)}}$ 사건이므로

배반

$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c)$

$\therefore P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B)$ $= P(A) - P(A)\cdot P(B)$

A, B: 독립

$= P(A)\times \boxed{\text{(나)}}$

$1-P(B)$

$= P(A)P(B^c)$

위의 증명에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은? (단, $P(A)>0,\ P(B)>0$) [4점]

① 배반, $1-P(B)$ ② 배반, $1+P(B)$

③ 종속, $1-P(B)$ ④ 종속, $1+P(B)$

⑤ 독립, $1-P(B)$

3. 크기와 모양이 같은 사탕 13개를 상자 A, B, C에 나누어 담으려고 할 때, 모든 상자에 적어도 2개 이상의 사탕이 들어갈 확률은? [4.7점]

① $\frac{3}{35}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{7}{35}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{12}{35}$

$x+y+z=13$ $x, y, z \ge 2$

$x'+y'+z'=7$ $x', y', z' \ge 0$

$\therefore \frac{_3H_7}{_3H_{13}} = \frac{_9C_7}{_{15}C_{13}} = \frac{9\cdot 8}{15\cdot 14} = \frac{12}{35}$

4. 먼저 4승을 거둔 팀이 최종 우승을 하게 되는 경기에서 지난 3차전까지 A팀이 2승, B팀이 1승을 거두었다. 7차전에서 B팀이 최종 우승할 확률은? (단, 매 경기에 무승부는 없고, 두 팀이 이길 확률은 서로 같다.) [4.7점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{5}{16}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

AAB | ABBB

$_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{16}$

2021 복가 단답 14번 중 일부

5. 한 개의 동전을 7번 던질 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4.9점]

<조 건>

(가) 앞면이 4번 나온다.

(나) 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있다.

① $\frac{13}{64}$ ② $\frac{17}{64}$ ③ $\frac{25}{64}$ ④ $\frac{29}{64}$ ⑤ $\frac{35}{64}$

$n=7 \quad p=\frac{1}{2}$

${}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$=\frac{765}{321}\cdot\frac{1}{2^7}-\frac{1}{2^7}=\frac{34}{128}=\frac{17}{64}$

6. 부등식 $0<b<3-\frac{a^2}{4}$을 만족시키는 좌표평면 위의 점 (a,b) 중에서 임의로 서로 다른 두점을 선택한다. 선택 된 두 점의 y좌표가 같을 때, 이 두 점의 y좌표가 1일 확률은? (단, a,b는 정수이다.) [5.3점]

① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{13}$ ④ $\frac{10}{13}$ ⑤ $\frac{11}{18}$

$-4(b-3)>a^2$

$12-4b>a^2$

i) $b=1$ 일때

$a=0,\pm1,\pm2 \rightarrow 5$가지

ii) $b=2$ 일때

$a=0,\pm1 \rightarrow 3$가지

iii) $b\geq3$ 일때

불가능

$\frac{{}_5C_2}{{}_5C_2+{}_3C_2}=\frac{10}{13}$

7. 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a,b라 하자. $a>b$일 때, 곡선 $y=x^2+ax+b$와 직선 $y=x-1$가 만날 확률은? [5.3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$x^2+ax+b=x-1$

$x^2+(a-1)x+b+1=0$

$D=(a-1)^2-4(b+1)\geq0$

$(a-1)^2\geq4(b+1)$

vi) $a>b$ 인 경우

$1+2+3+4+5$

$=15$가지

i) $a=1,2$ 일때

$b<0$ 불가능

ii) $a=3$ 일때

$4\geq4(b+1)$

$b=0$ 불가능

iii) $a=4$ 일때

$\frac{9}{4}\geq b+1 \quad \therefore b=1$

iv) $a=5$ 일때

$4\geq b+1 \quad \therefore b=1,2,3$

v) $a=6$ 일때

$\frac{25}{4}\geq b+1 \quad \therefore b=1,2,3,4,5$

$\therefore \frac{1+3+5}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

8. 좌표평면 위의 점 P는 주사위 한 개를 한 번 던져서 나오는 눈의 수가 3이하 이면 x축의 양의 방향으로 1만큼, 4 또는 5의 눈이 나오면 x축의 음의 방향으로 1만큼, 6의 눈이 나오면 y축 양의 방향으로 1만큼 이동한다. 주사위 1개를 6번 던질 때, 원점 O에서 출발한 점 P가 점 $(2,2)$에 도착할 확률은? [5.5점]

① $\frac{1}{72}$ ② $\frac{1}{36}$ ③ $\frac{1}{24}$ ④ $\frac{1}{18}$ ⑤ $\frac{5}{72}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6}$

$\rightarrow \quad \leftarrow \quad \uparrow$

$\rightarrow\rightarrow\rightarrow\leftarrow\uparrow\uparrow$

V O V O V O V O V O V

${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\times6\cdot\frac{1}{3}$

$=10\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}$

$=\frac{5}{72}$

9. 확률변수 X에 대하여 $E(2X+1)=7$, V $\cancel{X}(-3X+1)=18$ 을 만족할 때, $E(X)+V(X)$의 값은? [3.9점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

i) $E(2X+1)=2E(X)+1=7$

$E(X)=3$

ii) $V(-3X+1)=9V(X)=18$

$V(X)=2$

$\therefore E(X)+V(X)=3+2=5$

V 오타.

10. 이산확률변수 X가 갖는 값이 $-2,-1,0,1,2$이고 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)=\frac{x^2+ax+a}{15}\quad(x=-2,-1,0,1,2)$$

일 때, $P(X^2>1)$의 값은? [4.3점]

~~① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{3}{4}$~~

i) $\frac{1}{15}(4-2a+a+1-a+a+a+1+a+a+4+2a+a)$

$=\frac{a+2}{3}=1$

$\therefore a=1$

ii) $P(X^2>1)=P(X>1)+P(X<-1)$

$=P(X=2)+P(X=-2)$

$=\frac{1}{15}(5+5)=\frac{2}{3}$

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{8}{15}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{4}{15}$

[11~13] 다음은 표준정규분포표이다. 표를 활용하여 물음에 답하시오.

z	$P(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

σ^2 주의!

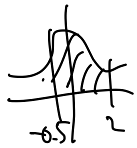
11. 확률변수 X가 정규분포 $N(50,36)$을 따를 때, $P(47<X<62)$의 값은? [3.7점]

① 0.1359　② 0.2417　③ 0.2857　④ 0.6247　⑤ 0.6687

$P(47<X<62)=P(-0.5<Z<2)$

$=0.1915+0.4772$

$=0.6687$

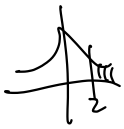


12. 어느 공장에서 생산된 초콜릿 1개의 열량은 평균이 290kcal, 표준편차가 20kcal인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 초콜릿 중 임의추출한 16개의 초콜릿의 열량의 평균이 300kcal 이상일 확률은? [4.3점]

① 0.0228　② 0.0668　③ 0.1587　④ 0.1915　⑤ 0.3085

$X\sim N(290,20^2)$

$\bar{X}\sim N(290,5^2)$

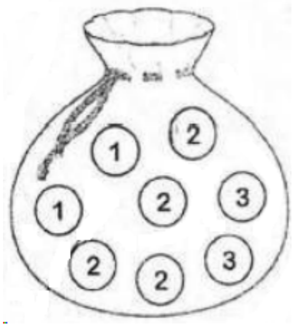


$P(\bar{X}\ge 300)=P(Z\ge 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

13. 그림과 같이 주머니에 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 8개의 공이 들어 있다.



이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 주머니에 넣는 시행을 980회 반복할 때, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 최솟값이 2인 횟수를 확률변수 X라 하자. $P(X \geq 320)$의 값은? [5.3점]

① 0.0228 ② 0.1587 ③ 0.1915 ④ 0.8413 ⑤ 0.9772

$p = \frac{{}_6C_3}{{}_8C_3}$ ← 1번 안뽑으면 됨.

$= \frac{10}{\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{5}{14}$

$\therefore X \sim B(980, \frac{5}{14})$

$X \sim N(350, 15^2)$

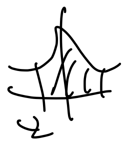
$\cancel{350}^{25} \times \frac{9}{\cancel{14}}$

$=$

$\therefore P(X \geq 320) = P(Z \geq -2)$

$= 0.5 + 0.4772$

$= 0.9772$



14. 확률변수 X가 평균이 10, 표준편차가 3인 정규분포를 따를 때, 양의 상수 c가 $P(X < c) = 0.1234$ 을 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.9점]

<보 기>

ㄱ. $c > 10$

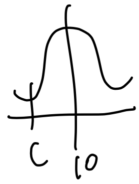
ㄴ. $P(X > c) = 0.8766$

ㄷ. $P(X > \alpha) = 0.1$ 일 때, $\alpha + c < 20$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

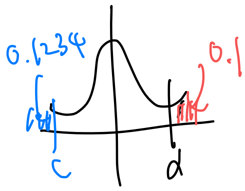
$X \sim N(10, 3^2)$

ㄱ.



ㄴ. $P(X>c) = 1 - 0.1234$

$= 0.8766$



ㄷ. If $\alpha = -c$, then

$\frac{\alpha + c}{2} = 10$

$\alpha + c = 20$

에서 $c > -\alpha$ 이므로

$\alpha + c < 20$

15. 어느 모집단의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a	b	1

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 복원추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $P(\overline{X}=2)=\frac{13}{36}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값은? [5.5점]

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

i) $a+b=\frac{1}{2}$ (1,3), (3,1), (2,2) 3가지.

ii)

$\overline{X}$	1	1.5	2	2.5	3

$\therefore P(\overline{X}=2)=\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+a^2$

$=a^2+b=\frac{13}{36}$

$a^2+\frac{1}{2}-a=\frac{13}{36}$

$a^2-a+\frac{5}{36}=0$

$36a^2-36a+5=0$

6   -1

6   -5

$\therefore a=\frac{1}{6}$ or $\cancel{\frac{5}{6}}$ $(\because a<\frac{1}{2})$

$\therefore b=\frac{1}{3}$

$\therefore ab=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

서답형

서술형 1. 어느 학급에서 번호가 1번부터 7번까지의 7명의 학생이 모두 임의로 일렬로 설 때, 3번 학생이 1번 학생과 7번 학생보다 뒤에 설 확률을 구하시오. (단, 1번, 7번 학생과 3번 학생 사이에 다른 학생이 있어도 된다.)[3점]

1번, 7번 자리배열

$\frac{\frac{7!}{3!}\times 2}{7!}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

서술형 2. 다음 표는 어느 회사에서 30명의 직원을 대상으로 선호하는 야유회 장소를 조사한 것이다.

(단위: 명)

	강화도	설악산	합계
남자	a	b	20
여자	c	d	10
합계	18	12	30

직원 중에서 임의로 1명을 뽑을 때, 여자인 사건과 설악산을 선호하는 사람인 사건이 서로 독립이다. 이 회사의 여자 중에서 한 명을 선택하였을 때, 그 여자가 설악산을 선호한 직원이었을 확률을 구하시오. (단, a, b, c, d는 상수) [3점]

(독립의 성질)

$P(설|여)=\frac{P(설\cap 여)}{P(여)}=\frac{P(설)\cdot \cancel{P(여)}}{\cancel{P(여)}}$ ($\because$ 여, 설 : 독립)

독립이므로 바로 적용가능 (독립의 정의)

$=P(설)$

$=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$

서술형 3. 확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

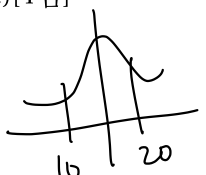
<보 기>

(가) $P(X \geq 10) = 1 - P(X \geq 20)$

(나) $P(12 \geq X \geq 18) = 2P(0 \geq Z \geq 1)$

$m + 5\sigma$의 값을 구하시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]

(가)



10 20 대칭

$\therefore m = \frac{10+20}{2} = 15$

(나) $P(12 \leq X \leq 18) = P\left(-\frac{3}{\sigma} \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right)$

$= 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right)$

$= 2P(0 \leq Z \leq 1)$ (나)

$\therefore \frac{3}{\sigma} = 1$

$\sigma = 3$

$\therefore m + 5\sigma = 15 + 15 = 30$

서술형 4. 한 개의 주사위를 6번 던져 4의 약수가 나오는 횟수를 m, 4의 약수가 아닌 숫자가 나오는 횟수를 n이라 할 때, $i^{|m-n|} = -1$일 확률을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$) [5점]

i) $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ii) $|m-n| = 4k+2 \quad (k = 0, 1, \cdots)$

$= 2$ or 6

$\therefore (m, n) = (4,2), (2,4), (6,0), (0,6)$

${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0 + {}_6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$= 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2}$

$i^1 = i$ $\quad \boxed{i^2 = -1}$ $\quad i^3 = -i$ $\quad i^4 = 1$

$i^5 = i$ $\quad i^6 = -1$