♦ 전체 : 선택형 20문항(80점) 서답형 5문항(20점)

♦ 총점 : 100점

♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

선택형

1. 첫째항이 3이고 공차가 $-\frac{1}{2}$인 등차수열의 제 5항은? [3.0점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2. 빈 칸에 들어갈 말로 알맞은 것은? [2.5점]

첫째항에 차례로 일정한 수를 곱하여 얻어진 수열을 ㉠ 이라 하고, 그 일정한 수를 ㉡ 이라 한다.
따라서 ㉠ 인 수열 3, 6, 12, 24, 48 ⋯ 는 ㉡ 가 ㉢ 이다.

	㉠	㉡	㉢
①	등비수열	공비	3
②	등비수열	공비	2
③	등비수열	공차	2
④	등차수열	공차	2
⑤	등차수열	공차	3

3. 첫째항이 a, 공비가 $r\ (\neq 0)$인 등비수열 $\{a_n\}$을 이용하여 만든 <보기>의 수열 중 등비수열의 개수는? [4.1점]

<보 기>

ㄱ. $a_1,\ a_3,\ a_5, \cdots$

ㄴ. $a_2,\ a_4,\ a_6, \cdots$

ㄷ. $a_1+a_2,\ a_3+a_4,\ a_5+a_6, \cdots$

ㄹ. $a_1-a_2,\ a_3-a_4,\ a_5-a_6, \cdots$

ㅁ. $a_1\times a_2,\ a_3\times a_4,\ a_5\times a_6, \cdots$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

4. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하자. $S_n=-\frac{3}{2}n^2+\frac{53}{2}n+3$ 일 때, 다음 중 옳은 것은? [4.0점]

① 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

② 공차가 -3이다.

③ 일반항은 $a_n=-3n+28$이다.

④ 첫째항은 25이다.

⑤ $n=9$일 때, S_n은 최댓값을 갖는다.

5. $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}=30$, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}=40$ 일 때, $\sum_{k=1}^{20}(-1)^k a_k$의 값을 구하면? [3.0점]

① -70 ② -10 ③ 10 ④ 70 ⑤ 1200

6. 세 변의 길이가 각각 6, 10, 14인 삼각형의 각 중 가장 큰 각의 크기는? [4.1점]

① $\frac{1}{2}\pi$ ② $\frac{7}{12}\pi$ ③ $\frac{2}{3}\pi$ ④ $\frac{3}{4}\pi$ ⑤ $\frac{5}{6}\pi$

7. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 BC의 길이를 구하면? [4.2점]

<조 건>

(가) $\sin A \times \cos\left(B+C-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{25}{36}$

(나) 지름의 길이가 12인 원에 내접한다.

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

8. $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제 6항을 구하면? [3.6점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

9. 서로 다른 세 수 $3, x, y$에 대하여 $x, 3, y$는 이 순서대로 등차수열을 이루고, $3, y, x$는 이 순서대로 등비수열을 이룬다고 할 때, $x-y$ 를 구하면? [4.0점]

① -18 ② -6 ③ $-\frac{5}{4}$ ④ 6 ⑤ 18

10. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=2n^2-n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 이 성립할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}$ 의 값은? [4.3점]

① 225 ② 435 ③ 450 ④ 625 ⑤ 870

11. 아래 식의 값을 바르게 구한 것은? [4.0점]

$$1\times 1+2\times 3+3\times 5+\cdots+n(2n-1)$$

① $\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ ② $\dfrac{n(n-1)(4n-1)}{6}$
③ $\dfrac{n(n+1)(3n-1)}{6}$ ④ $\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{3}$
⑤ $\dfrac{n(n+1)(2n-1)}{3}$

12. 삼각형 ABC가 $\dfrac{\sin A}{\sin C}+2\cos(A+C)=0$ 을 만족시킬 때, 다음 중 삼각형 ABC의 모양으로 항상 옳은 것은? [4.1점]

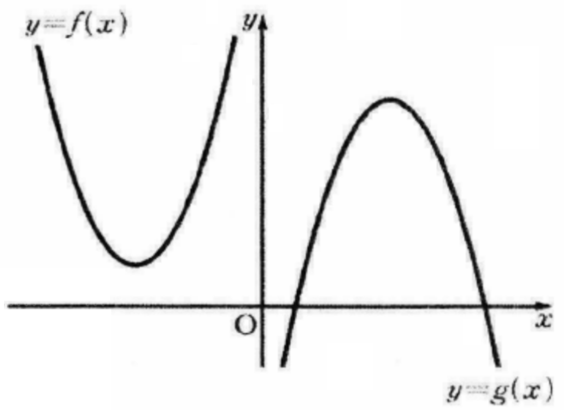
① 정삼각형
② $a=c$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ $\angle A=90°$ 인 직각삼각형
⑤ $\angle B=90°$ 인 직각삼각형

13. 다음 식을 바르게 계산한 것은? [4.3점]

$$\sum_{k=1}^{24}\log_3\{\log_{k+2}(k+3)\}$$

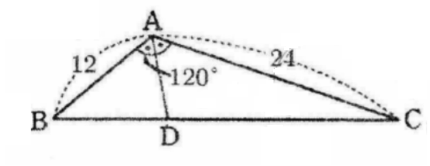
① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

14. 다음 그림은 두 함수 $f(x)=(x+3)^2+1$ 과 $g(x)=-(x-3)^2+k$ 의 그래프이다. 직선 $y=k$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점을 A, B라 하고, 함수 $y=g(x)$ 의 꼭짓점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은? (단, A는 제 2사분면 위의 점이고, $k>1$이다.) [4.3점]



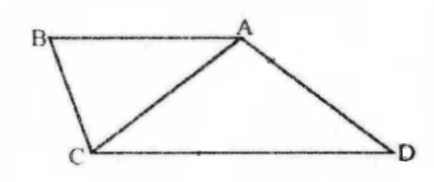
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

15. $\overline{AB}=12$, $\overline{AC}=24$, $A=120°$ 인 삼각형 ABC에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 선분 AD의 길이를 구하면? [4.2점]



① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

16. 사각형 $ABCD$에서 변 AB와 변 DC는 평행이고 $\overline{BC}=4$, $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=5$ 일 때, 대각선 BD의 길이는? [4.5점]



① $6\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{19}$ ③ $4\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{21}$ ⑤ $2\sqrt{22}$

17. 월 이율이 0.6%이고 1개월마다 복리로 매월 초에 10만 원 씩 24 개월 동안 적립할 때, 24 개월 말까지 적립금의 원리합계를 구하면? (단, $1.006^{24}=1.15$으로 계산한다.) [4.3점]

① 2500000 원 ② 2501500 원
③ 2515000 원 ④ 2650000 원
⑤ 2875000 원

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 조건 ㉠, ㉡ 을 만족시킬 때, a_2의 값은? [4.5점]

<조 건>

㉠ $\sum_{k=1}^{4} a_k = 26$

㉡ $\sum_{k=1}^{8} \frac{a_3 \times a_7}{a_k} = 442$

① $\frac{49}{15}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{17}{5}$ ④ $\frac{52}{15}$ ⑤ $\frac{53}{15}$

19. 다음은 $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 아래 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots \star$$

빈칸에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [4.3점]

<증 명>

(i) $n=2$ 일 때, (좌변) = $\boxed{㉠} < \frac{3}{2}$ = (우변)

이므로 $n=2$ 일때 부등식 $\star$ 가 성립한다.

(ii) $n=k$ $(n \ge 2)$ 일 때, 부등식 $\star$ 가 성립한다고

가정하면 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$이다.

양변에 $\boxed{㉡}$를 더하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\boxed{㉡}<2-\frac{1}{k}+\boxed{㉡}$

이다. 그런데 $k \ge 2$ 이므로

$\left(2-\frac{1}{k}+\boxed{㉡}\right)-\left(\boxed{㉢}\right)=-\frac{1}{k(k+1)^2}<0$

이다. 즉 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 부등식 $\star$ 이 성립한다.

(i), (ii) 에서 부등식 $\star$ 는 $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

	㉠	㉡	㉢
①	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{(k+1)^2}$	$2-\frac{1}{k+1}$
②	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{(k+1)^2}$	$2-\frac{1}{k}$
③	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{k^2+1}$	$2-\frac{1}{k+1}$
④	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{k^2+1}$	$2-\frac{1}{k+1}$
⑤	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{k^2+1}$	$2-\frac{1}{k}$

20. $n \ge 3$ 인 모든 자연수 n에 대하여 원주를 $2n$등분한 점을 각각 $P_1, P_2, \cdots P_{2n}$ 이라 하자. 이 중에서 세 점을 꼭짓점으로 하여 만들 수 있는 둔각삼각형의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{11}\frac{n}{a_n}$ 의 값은? [4.7점]

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{9}{10}$ ③ $\frac{10}{11}$ ④ $\frac{11}{12}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

서답형

단답형 1. 첫째항이 $\frac{1}{8}$, 공비가 2인 등비수열의 제 5항을 구하시오. [3.0점]

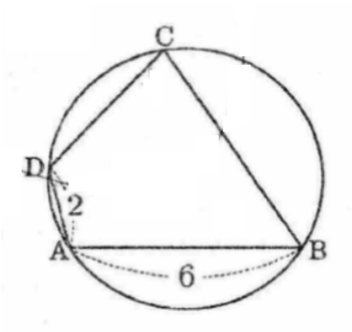
단답형 2. 다음 수열의 일반항을 $a_n = A^n + B$라 할 때, $A-B$ 를 구하시오. [3.0점]

$$9, 99, 999, 9999, 99999, \cdots$$

단답형 3. 다음 식의 값을 구하시오. [3.0점]

$$(1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3)-(1+2+3+\cdots+10)^2$$

단답형 4. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$ 가 $\overline{AB}=6,\ \overline{AD}=2,\ \cos(\angle BCD)=\dfrac{1}{3}$ 을 만족시킨다. 이 원의 넓이를 구하면? [5.0점]



단답형 5. 다음은 $n\ge 2$ 인 모든 자연수 n에 대하여 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}>1+\dfrac{n}{2}$ ……① 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

<증 명>

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변})=\frac{25}{12}>2=(\text{우변})$$

이므로 부등식 ①이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge 2)$ 일 때, 부등식 ①이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{k}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}>1+\frac{k}{2}$$

이다. 양변에

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+\boxed{\text{㉠}}}$$ 을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k+\boxed{\text{㉠}}}$$
$$>1+\frac{k}{2}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k+\boxed{\text{㉠}}}$$

즉

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}>1+\boxed{\text{㉡}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ①이 성립한다.

(i), (ii) 에서 부등식 ① 은 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

㉠에 들어갈 식을 $f(k)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(k)$라 하자. $f(3)+g(3)$ 의 값을 구하면? [6.0점]