♦ 전체 : 선택형 14문항(70점) 서답형 7문항(30점)

♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. $3x^2 + 11y^2 = 15$에서 $\frac{dy}{dx}$는? (단, $y \neq 0$) [4.3점]

① $-\frac{3x}{11y}$ ② $-\frac{11x}{3y}$ ③ $-\frac{x}{5y}$ ④ $\frac{3x}{11y}$ ⑤ $\frac{11x}{3y}$

$6x + 22y\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{11y}$

2. 부정적분 $\int (\csc\theta\cot\theta - \csc^2\theta)d\theta$를 옳게 구한 것은? [4.4점]

① $\frac{-\sin\theta + 1}{\cos\theta} + C$ ② $\frac{-\cos\theta - 1}{\sin\theta} + C$

③ $\frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta} C$ ④ $\frac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} + C$

⑤ $\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} + C$

* $[\csc\theta]' = -\csc\theta\cot\theta$

$[\cot\theta]' = -\csc^2\theta$

$-\csc\theta + \cot\theta + C$

$= \frac{-1 + \cos\theta}{\sin\theta} + C$

3. $\int_1^2 xe^x dx = ae^2 + be + c$ (a, b, c는 상수) 일 때, $a+b+c$의 값은? [4.6점]

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

	D	I
+	x	e^x
−	1	e^x
+	0	e^x

$\int_1^2 xe^x dx = [xe^x]_1^2 - [e^x]_1^2$

$= 2e^2 - \cancel{e} - (e^2 - \cancel{e})$

$= e^2$

$\therefore a+b+c = 1$

4. 함수 $f(x) = (2 - ax + x^2)^2$의 $x = 1$에서의 미분계수가 4를 만족하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4.7점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 2(2 - ax + x^2)(-a + 2x)$

$f'(1) = 2(3-a)(2-a) = 4$

$a^2 - 5a + 6 = 2$

$a^2 - 5a + 4 = 0$

$D > 0$ 이므로

$\therefore \alpha + \beta = 5$

5. 함수 $y = \frac{x}{\cos x}$를 미분한 것은? [4.8점]

① $\sec x(1 - x\tan x)$

② $\sec x(1 + x\tan x)$

③ $\sec x(1 + x\cot x)$

④ $1 - x\tan x$

⑤ $1 + x\tan x$

$y' = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$

$= \sec x + x\sec x\tan x$

6. 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$가 $x=3$에서 극솟값 1을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4.8점]

① -10 ② -7 ③ -4 ④ -1 ⑤ 2

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x-1)-(x^2+ax+b)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}$$

i) $f'(3)=\dfrac{9-6-a-b}{2^2}=0$

$\therefore a+b=3$

ii) $f(3)=\dfrac{9+3a+b}{2}=1$

$\therefore 3a+b=-7$

$\therefore 2a=-10$

$a=-5$

$b=8$

iii) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+8}{x-1}$

$f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\therefore f(x)_{극대}=f(-1)=\dfrac{1+5+8}{-2}=-7$

7. 매개변수로 나타낸 함수 $x=t^2e^{-t},\ y=t\ln\dfrac{1}{t}$ 에서 $t=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [4.9점]

① $-e$ ② $-e^2$ ③ 0 ④ e^2 ⑤ e

$\dfrac{dy}{dt}=\ln\dfrac{1}{t}+t\cdot\dfrac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}}=\ln\dfrac{1}{t}-1$

$\dfrac{dx}{dt}=2te^{-t}+t^2(-e^{-t})$

$\therefore \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\dfrac{\ln 1-1}{\frac{2}{e}-\frac{1}{e}}=-1\cdot e=-e$

8. $\displaystyle\int_1^7\frac{4}{(2x-1)(2x+1)}dx+\int_1^{15}\frac{1}{x}dx$의 값은 $\ln a$이다. a의 값은? [5점]

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

i) $\dfrac{4}{(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{A}{2x-1}+\dfrac{B}{2x+1}=\dfrac{(2A+2B)x+A-B}{(2x-1)(2x+1)}$

$A+B=0$

$A-B=4$

$2A=4$

$A=2\quad B=-2$

$\therefore \displaystyle\int_1^7\left(\frac{2}{2x-1}+\frac{-2}{2x+1}\right)dx=\Big[\ln|2x-1|\Big]_1^7-\Big[\ln|2x+1|\Big]_1^7$

$=\ln 13-(\ln 15-\ln 3)$

$=\ln\dfrac{13}{5}$

ii) $\displaystyle\int_1^{15}\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^{15}$

$=\ln 15$

$\therefore$ (준식) $=\ln\dfrac{13}{5}+\ln 15$

$=\ln 39\quad \therefore 39$

9. 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)g(e)=\dfrac{b}{a}$이다. $a+b$의 값은? [5.1점]

(단, a,b는 서로소인 자연수)

<조 건>

(가) $f'(x)=3x^2\ln x$

(나) $g(x)=\displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$

(다) $f(3)=27\ln 3$

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

i) $f(x)=x^3\ln x-\displaystyle\int x^2dx$

$=x^3\left(\ln x-\dfrac{1}{3}\right)+C$

	D	I
$+$	$\ln x$	$3x^2$
$-$	$\dfrac{1}{x}$	x^3

$f(3)=27\left(\ln 3-\dfrac{1}{3}\right)+C=27\ln 3$

$C=9$

$\therefore f(1)=-\dfrac{1}{3}+9=\dfrac{26}{3}$

ii) $g(e)=\Big[x\ln x-x\Big]_1^e=e-e-(-1)=1$

$\therefore f(1)g(e)=\dfrac{26}{3}\cdot 1=\dfrac{b}{a}$

$\therefore a+b=3+26=29$

10. 함수 $f(x) = x + \sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x) = (f \circ f)(x)$로 정의할 때, ~~함수~~ $g(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는? [5.2점]

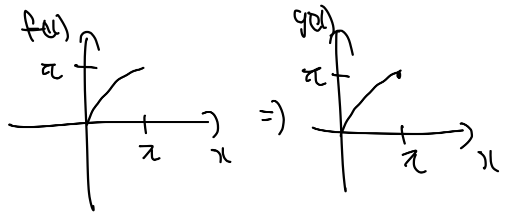
방정식 (원본 오류)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

i) $g'(x) = f'(f(x))f'(x)$ $f'(x) = 1 + \cos x$

$= (1 + \cos(x + \sin x))(1 + \cos x) > 0 \quad (x \in (0, \pi))$

ii)



※ $x > \pi$ 일 때 $x > 2$ 이므로 $g(x) > 0$

∴ $g(x) = 0$ 일 때는 $x = 0$ 으로 유일.

11. 곡선 $y = \ln \frac{1}{x}$ 위의 점 A에서의 접선과 x축, y으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최댓값은? [5.5점]

(단, 점 A는 제1사분면 위에 있다.)

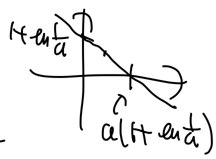
① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{2}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e}$ ④ $\frac{2}{e}$ ⑤ $\frac{3}{e}$

$y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x} < 0 \quad (\because x > 0)$

ℓ: $(a, \ln \frac{1}{a})$ $m = -\frac{1}{a}$

$y - \ln \frac{1}{a} = -\frac{1}{a}(x - a)$

$y = -\frac{1}{a}x + 1 + \ln \frac{1}{a}$



$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{a}x_2 = 1 + \ln\frac{1}{a} \\ x_2 = a + a\ln\frac{1}{a} \end{array}\right)$

∴ $S = \frac{1}{2}a\left(1 + \ln\frac{1}{a}\right)^2$

$S' = \frac{1}{2}\left(1 + \ln\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{\cancel{2}}a \cdot \cancel{2}\left(1 + \ln\frac{1}{a}\right) \cdot \frac{-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a}}$

$= \left(1 + \ln\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{a} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{a} + 1\right)\left(\ln\frac{1}{a} - 1\right) = 0$

∴ $\ln\frac{1}{a} = 1$ or -1

$\frac{1}{a} = e$ or $\frac{1}{e}$

$a = \frac{1}{e}$ or e

∴ $S_{max} = \frac{1}{2e} \cdot 2^2$ or $\frac{e}{\cancel{2}} \cdot 0$ $= \frac{2}{e}$

12. 열린 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x) = \tan^2 x + \cos^2 x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'\left(\frac{3}{2}\right)$의 값은? [5.5점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ 5

i) $\frac{3}{2} = \tan^2 x + \cos^2 x$

$x = \frac{\pi}{4}$

ii) $g'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \frac{1}{5}$

$\left(\begin{array}{l} f'(x) = 2\tan x \sec^2 x + 2\cos x(-\sin x) \\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot 1 \cdot 2 + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 5 \end{array}\right)$

13. 함수 $f(x) = \frac{3\{\ln(x+1)\}^2}{x+1}$에 대하여 $F(x) = \int_0^x tf(x-t)\,dt$ $(x \geq 0)$일 때, $F'(a) = 8$을 만족시키는 실수 a의 값은? [5.6점]

① $e - 1$ ② $e + 1$ ③ $e^2 - 1$ ④ $e^2 + 1$ ⑤ $2e^2$

let $x - t = s$

$-dt = ds$

$F(x) = \int_x^0 (x - s)f(s)(-ds)$

$= x\int_0^x f(s)\,ds - \int_0^x sf(s)\,ds$

$F'(x) = \int_0^x f(s)\,ds + \cancel{xf(x)} - \cancel{xf(x)}$

$F'(a) = \int_0^a f(s)\,ds$

$8 = \int_0^{\ln(a+1)} 3t^2\,dt$

$= \left[t^3\right]_0^{\ln(a+1)}$

∴ $2 = \ln(a+1)$

let $\ln(x+1) = t$

$\frac{1}{x+1}dx = dt$

∴ $a + 1 = e^2$

$a = e^2 - 1$

14. 함수 $f(x)=(x^2-3)e^x$의 그래프에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.6점]

<보 기>

ㄱ. $x=-3$에서 극솟값 $\frac{6}{e^3}$을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-2e$이다.
ㄷ. 방정식 $x^2e^x=3e^x-e$의 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f'(x)=2xe^x+(x^2-3)e^x$

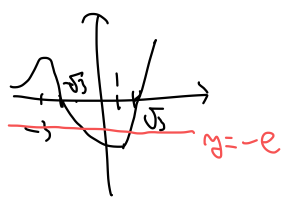
$=(x-1)(x+3)e^x$

x		-3		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore f(x)_{극소}=f(1)=-2e$

ㄴ. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ $\lim_{x\to\infty}=\infty$ $\therefore f(x)_{최소}=f(2)=-2e$

ㄷ. $(x^2-3)e^x=-e$ $\therefore$ 2개.



서답형

단답형 1. 함수 $y=\sin 3x$의 이계도함수를 구하시오. [3점]

$y'=3\cos 3x$

$y''=-9\sin 3x$

단답형 2. $y=(\ln 5x)^2$의 변곡점의 좌표를 구하시오. [3점]

$y'=2(\ln 5x)\cdot\frac{1}{5x}\cdot 5$

$=\frac{2}{x}\ln 5x$

$y''=-\frac{2}{x^2}\ln 5x+\frac{2}{x}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}x}$

$=-\frac{2}{x^2}(\ln 5x+1)=0$

$\therefore \ln 5x=-1$

$5x=\frac{1}{e}$

$x=\frac{1}{5e}$

$\therefore\left(\frac{1}{5e},1\right)$

단답형 3. 정적분 $\int_1^3\left(-\frac{1}{x^2}+3^x\right)dx$의 값을 구하시오. [4점]

$-\frac{x^{-1}}{-1}=x^{-1}$

$\left[\frac{1}{x}+\frac{3^x}{\ln 3}\right]_1^3$

$=\frac{1}{3}+\frac{27}{\ln 3}-\left(1+\frac{3}{\ln 3}\right)$

$=-\frac{2}{3}+\frac{24}{\ln 3}$

서술형 1. $x > 0$일 때, 부등식 $x \ln x \geq 3x + k$이 성립하도록 하는 실수 k의 범위를 구하는 과정을 서술하시오. [5점]

let $f(x) = x\ln x - 3x$

$f'(x) = \ln x + 1 - 3$

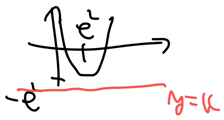
$= \ln x - 2 = 0$

$x = e^2$

x		e^2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$

$f(e^2) = 2e^2 - 3e^2$

$= -e^2$



$\therefore$ $k \leq -e^2$

서술형 2. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$의 시각 t에서의 위치가 $x = 2\sin\frac{\pi}{2}t$, $y = 4\cos\frac{\pi}{2}t$이다. 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도를 구하는 과정을 서술하시오. [4점]

i) $\frac{dy}{dt} = -2\pi \sin \frac{\pi}{2}t$

$\frac{dx}{dt} = \pi \cos \frac{\pi}{2}t$

$\therefore$ $v(t) = \left(-2\pi \sin\frac{\pi}{2}t, \pi\cos\frac{\pi}{2}t\right)$

ii) $\frac{d^2y}{dt^2} = -\pi^2\cos\frac{\pi}{2}t$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}t$

$\therefore$ $a(t) = \left(-\pi^2\cos\frac{\pi}{2}t, -\frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}t\right)$

서술형 3. 미분가능한 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(x)=xf(x)+xe^x-e^x-3x^2+2$, $f(2)=-e^2+5$일 때, $f(1)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. [5점]

$\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + xf'(x) + \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} - 6x$

$f'(x) = -e^x + 6$

$f(x) = -e^x + 6x + C$

$f(2) = -e^2 + 12 + C = -e^2 + 5$

$\therefore C = -7$

$\therefore f(1) = -e + 6 - 7 = -e - 1$

서술형 4. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x,y)에서의 접선의 기울기가 $4xe^{x^2-4}$이고 $f(2)=3$일 때, $f(-1)$의 값을 치환적분법을 이용하여 구하는 과정을 서술하시오. [6점]

$f(x) = \int 4x e^{x^2-4}\,dx$

let $x^2 - 4 = t$

$2x\,dx = dt$

$= 2\int e^t\,dt$

$= 2e^t + C$

$f(2) = 2e^0 + C = 3$ ($x=2$ 일때 $t=0$)

$\therefore C = 1$

$\therefore f(x) = 2e^{x^2-4} + 1$

$f(-1) = 2e^{-3} + 1$

$= \dfrac{2}{e^3} + 1$