♦ 전체 : 선택형 14문항(70점), 서답형 5문항(30점)

♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 다항식 $(x^2+2x+4)(3x^2+x-3)$의 전개식에서 x^3의 계수는?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$x^2 \times x + 2x \times 3x^2$

$= 1x^2$

2. 다항식 $P(x) = x^3+2x^2-x+1$을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$P(x) = (x+2)Q(x)+R$

$R = P(-2) = (-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 - (-2) + 1$

$= -8+8+2+1$

$= 3$

3. $x^2+x-1=0$일 때, x^3+x^2-x+5의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^2+x-1 & x^3+x^2-x+5 \\ & x^3+x^2-x \\ \hline & 5 \end{array}$$

$x^3+x^2-x+5 = (x^2+x-1)x+5$

$= 0+5$

$= 5$

4. 다항식 $x^4-x^3-7x^2+x+6$의 인수가 아닌 것은?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$ ⑤ $x-3$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline -1 & 1 & 0 & -7 & -6 & \boxed{0} \\ & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

x^3-7x-6

x^2-x-6

2

-3

$(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$

반복조립제법

5. x에 관계없이 등식 $(x-2)^3=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$가 성립할 때, 상수 a,b,c에 대하여 $b-a+c$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$(x-2)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3$$
$$=x^3-6x^2+12x-8$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -6 & 12 & -8 \\ & & 1 & -5 & 7 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 7 & \boxed{-1}=c \\ & & 1 & -4 & \\ \hline 1 & 1 & -4 & \boxed{3}=b & \\ & & 1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{-3}=a & & \end{array}$$

$$\therefore b-a+c=3-(-3)-1$$
$$=5$$

6. 다항식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a$가 x에 대한 이차식의 완전제곱꼴로 인수분해 되도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+a$$
set $x^2+5x=t$
$$(t+4)(t+6)+a$$
$$=t^2+10t+24+a$$
$$\therefore 24+a=\left(\frac{10}{2}\right)^2=25$$
$$a=1$$

7. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(m-a)x+(a^2+4a+n)=0$이 실수 a의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 m,n에 대하여 $m+n$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$D/4=(m-a)^2-(a^2+4a+n)$$
($m^2-2ma+a^2$)
$$=a(-2m-4)+m^2-n=0$$

a 에 대한 항등식이므로

$-2m-4=0$, $m^2-n=0$

$m=-2$ $n=4$

$$\therefore m+n=-2+4=2$$

8. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2+k)x+k^2-5k+3=0$의 서로 다른 두 근을 α,β라 할 때, $|\alpha-\beta|=1$이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

i) $\alpha+\beta=-2-k$

$\alpha\beta=k^2-5k+3$

ii) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$1=(-2-k)^2-4(k^2-5k+3)$

$1=-3k^2+24k-8$

$\therefore 3k^2-24k+9=0$

$D_k>0$ 이므로 k 는 두 실근을 가지므로

k값의 합 $=-\frac{-24}{3}=8$

9. 이차방정식 $x^2+ax+5=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, 두 실수 $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+4x+8=0$이다. 이때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

i) $\alpha+\beta=-a$

$\alpha\beta=5$

ii) $\alpha-1+\beta-1=-4 \rightarrow \alpha+\beta=-2=-a$

$(\alpha-1)(\beta-1)=8$ ∴ $a=2$

ㄱ) n이 홀수인 3의 배수이면 $-w^{2n}<0$ 모순.

ㄴ) n이 짝수인 3의 배수이면 $w^{2n}>0$ ∴ n은 6의 배수

10. 이차방정식 $(x-2)(x+3)=3x$의 서로 다른 두 근을 α, β라 할 때, $\dfrac{(\alpha-2)(\beta-2)(\alpha+3)(\beta+3)}{-6}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

i) $(\alpha-2)(\alpha+3)=3\alpha$

$(\beta-2)(\beta+3)=3\beta$

ii) $x^2+x-6=3x$

$x^2-2x-6=0$

∴ $\alpha\beta=-6$.

∴ (준식) $=\dfrac{3\alpha\cdot3\beta}{-6}$

$=\dfrac{9\cdot(-6)}{(-6)}$

$=9$

11. 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근을 ω라 하자. n이 세 자리 자연수일 때, $(\omega^2+1)^{3n}\times(\omega-1)^n$의 값이 양의 실수가 되도록 하는 n의 개수는?

① 30 ② 60 ③ 90 ④ 120 ⑤ 150

i) $w^2-w+1=0$

$0=(w+1)(w^2-w+1)$

$=w^3+1$

∴ $w^3=-1 \Rightarrow w^6=1$

ii) $3w^2-3w+3=0$

∴ $3w^2-3w=-3$

iii) $1-w=-w^2$

iv) (준식) $=[(w^6+3w^4+3w^2+1)(w-1)]^n$

$=[(1-3w+3w^2+1)(w-1)]^n$

$=(1-w)^n$

$=(-w^2)^n$

$6\,\overline{)102}=17$, $6\,\overline{)996}=166$

∴ 102 ~ 996 까지 6의 배수 개수

$=166-17+1=150$

12. 약수의 개수가 5개인 100이하의 서로 다른 자연수 α, β에 대하여 x^2의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 x축과의 교점의 x좌표가 $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$일 때, $f(0)$의 값은?

① 4 ② 9 ③ 25 ④ 36 ⑤ 49

i) $5=4+1$

$\alpha, \beta=a^4$ 꼴

$2^4=16$ $3^4=81$ $4^4>100$

ii) $f(x)=(x-\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\beta})$

$f(0)=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{2^4}\sqrt{3^4}$

$=4\cdot9$

$=36$

13. 자연수 a, b, c에 대하여 $(a+b+c)^3-(-a+b+c)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3=48$이 성립할 때, $a+b+c$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

let $b+c=m$ $b-c=n$

$(a+m)^3-(m-a)^3 = a^3+3a^2m+3am^2+m^3$
$-(m^3-3m^2a+3ma^2-a^3)$
$=2a^3+6am^2$

$-(a-n)^3-(a+n)^3 = -(a^3-3a^2n+3an^2-n^3)$
$-(a^3+3a^2n+3an^2+n^3)$
$=-2a^3-6an^2$

$\therefore$ (준식) $=6a(m^2-n^2)=48$ $\therefore a, b, c$ 중
$a(m+n)(m-n)=8$ 어느 하나만 2
$a\cdot 2b\cdot 2c=8$ $\therefore a+b+c$
$abc=2$ $=1+1+2=4$

14. 자연수 n^3-4n^2+7n-6가 $(n-2)(n-3)$의 배수가 되도록 하는 자연수 n의 최댓값을 구하면?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 7 & -6 \\ & & 2 & -4 & 6 \\ \hline 3 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ & & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & 6 & \end{array}$$

$\therefore n^3-4n^2+7n-6=(n-2)\left((n-3)(n+1)+6\right)$

$\therefore$ 6이 $n-3$의 배수.

i) $n-3=6$ 일때 $n=9$
ii) $n-3=3$ 일때 $n=6$
iii) $n-3=2, 1$ 일때 필요X.

$\therefore n_{최대}=9$

서답형

단답형 1. 다항식 x^2-2x+2를 복소수 범위에서 인수분해하시오.

$x=1\pm\sqrt{1-2}=1\pm i$

$\therefore (x-(1+i))(x-(1-i))$
$\boxed{=(x-1-i)(x-1+i)}$

단답형 2. $x=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$일 때, $x^{2018}+x^{2020}+x^{2022}$의 값을 구하시오.

$x^2=\dfrac{\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}}{2}$
$=i$

(준식) $=i^{1009}+i^{1010}+i^{1011}$
$=\cancel{i}+i^2+\cancel{i^3}$
$=-1$

서술형 1. 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 8이고 $x-3$로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이때 $P(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

$=2$ $=3$

$P(x)=(x-2)Q(x)+8 \Rightarrow P(2)=8$

$P(x)=(x-3)Q'(x)+11 \Rightarrow P(3)=11$

$P(x)=(x-2)(x-3)Q''(x)+ax+b$

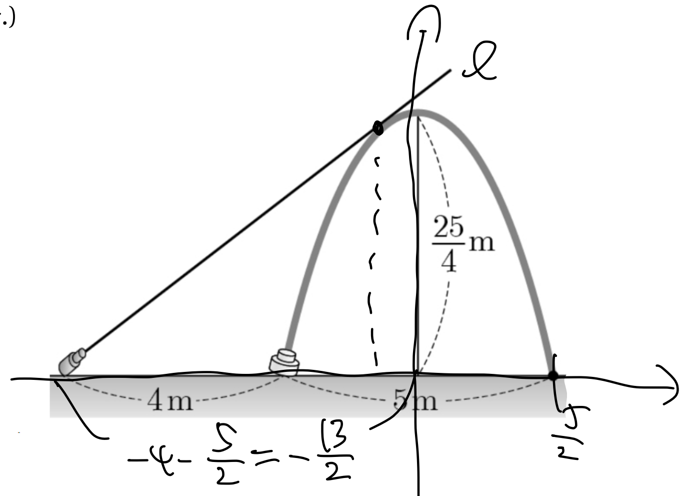
$\therefore P(2)=2a+b=8$

$P(3)=3a+b=11$

$a=3 \quad b=2$

$\therefore$ 나머지 $\boxed{3x+2}$

서술형 2. 다음 그림과 같이 어느 호수에 설치된 분수의 한 물줄기는 포물선 모양으로 나타나고, 이 물줄기의 시작 지점과 끝 지점 사이의 거리는 5m, 수면으로부터의 최고 높이는 $\frac{25}{4}$m 이다. 물줄기의 시작 지점으로부터 뒤쪽으로 4m 떨어진 지점에서 쏘아 올린 레이저가 이 물줄기와 맞닿을 때, 레이저와 물줄기가 만나는 지점의 수면으로부터의 높이를 구하시오. (단, 물줄기의 시작 지점과 끝 지점, 레이저는 한 직선 위에 있다.)



i) let $f(x)=a\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$

$f(0)=a\cdot\left(-\frac{25}{4}\right)=\frac{25}{4} \quad \therefore a=-1$

$\therefore f(x)=-x^2+\frac{25}{4} \quad \cdots ①$

ii) let $l: \left(-\frac{13}{2}, 0\right),\ m$

$y=m\left(x+\frac{13}{2}\right) \quad \cdots ②$

①, ② 를 연립하고 판별식 이용

$-x^2+\frac{25}{4}=mx+\frac{13}{2}m$

$0=x^2+mx+\frac{13}{2}m-\frac{25}{4}$

$D=m^2-4\left(\frac{13}{2}m-\frac{25}{4}\right)$

$=m^2-26m+25=0$

$\therefore m=1$ or $\cancel{25}$ ($\because m$은 1근처 값)

iii) $l: y=x+\frac{13}{2}$

$f(x)=-x^2+\frac{25}{4}$

$x+\frac{13}{2}=-x^2+\frac{25}{4}$

$0=x^2+x+\frac{1}{4}$

$\therefore x=-\frac{1}{2} \quad y=-\frac{1}{2}+\frac{13}{2}$

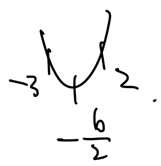
$=6$

서술형 3. $-3 \le x \le 2$일 때, 이차함수 $y = x^2 + bx - 3$의 최솟값이 -4, 최댓값이 M이다. 상수 b, M에 대하여 $b^2 + M$의 최솟값을 구하시오.

$y = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} - 3$

$= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 3$

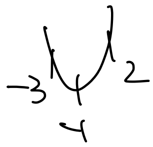
i) $-3 \le -\frac{b}{2} \le 2$ 일 때



$y_{최소} = \left(-\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 3 = -4$

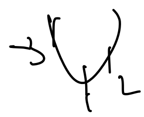
$b^2 = 4$

ㄱ) $b = 2$ 일 때



$y_{최대} = f(2) = 2^2 + 4 - 3 = 5$

ㄴ) $b = -2$ 일 때



$y_{최대} = f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) - 3 = 12$

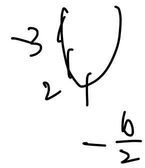
$\therefore M_{최소} = 5$

ii) $-\frac{b}{2} \le -3$ 일 때

$y_{최소} = f(-3) = (-3)^2 - 3b - 3 = -4$

$b = \frac{10}{3}$ 모순 ($\because b \ge 6$)

iii) $2 \le -\frac{b}{2}$ 일 때



$y_{최소} = f(2) = 2^2 + 2b - 3 = -4$

$b = -\frac{5}{2}$ 모순 ($\because b \le -4$)

$\therefore b^2 + M_{최소} = 4 + 5 = 9$