

선택형

1. 수열 7, 4, 1, -2, -5, ...의 일반항  $a_n$ 은? [4점]

- ①  $a_n = -3n + 10$       ②  $a_n = -3n + 7$   
 ③  $a_n = 3n + 4$       ④  $a_n = 3n + 7$   
 ⑤  $a_n = 3n + 10$

$a = 7 \quad d = -3$

2. 수열  $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ 의 일반항  $a_n$ 은? [4.2점]

- ①  $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$       ②  $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$   
 ③  $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$       ④  $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$   
 ⑤  $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

$a = 1 \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3.  $\sum_{k=1}^5 (a_{2k-1} + a_{2k}) = 30$ 일 때,  $\sum_{k=1}^{10} (2a_k - 1)$ 의 값을 구하면? [4.4점]

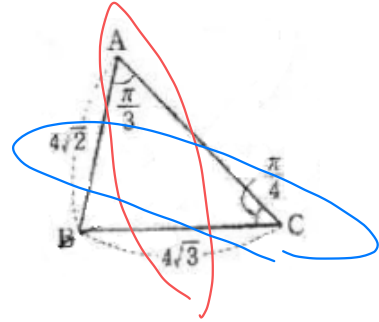
- ① 29      ② 30      ③ 49      ④ 50      ⑤ 59

$(a_1 + a_2) + \dots + (a_9 + a_{10}) = 30$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 1) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 1$

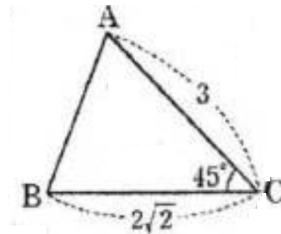
$= 2 \cdot 30 - 10 = 50$

4. 삼각형 ABC에 대하여  $\frac{4\sqrt{3}}{\sin \square} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{4}}$ 의 빈칸에 알맞은 것은? [4.5점]



- ①  $\frac{\pi}{3}$       ②  $\frac{\pi}{4}$       ③  $\frac{\pi}{5}$       ④  $\frac{\pi}{6}$       ⑤  $\frac{\pi}{12}$

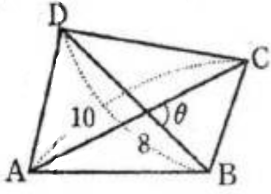
5. 그림과 같이  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $b = 3$ ,  $C = 45^\circ$ 인 삼각형 ABC의 넓이는? [4.7점]



- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ$   
 $= 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $= 3$

6. 넓이가 20인 사각형의 두 대각선의 길이가 각각 8, 10이라고 한다. 두 대각선이 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라고 할 때,  $\theta$ 의 값은? [4.9점]



- ①  $\frac{\pi}{12}$     ②  $\frac{\pi}{6}$     ③  $\frac{\pi}{4}$     ④  $\frac{\pi}{3}$     ⑤  $\frac{5\pi}{12}$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin \theta = 20$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

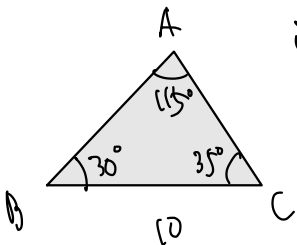
$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

7. 삼각형 ABC에서  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle C = 35^\circ$ ,  $\overline{BC} = 10$ 일 때, 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 구하면? [5.0점]

<삼각함수표>

각	sin	cos
$20^\circ$	0.34	0.93
$25^\circ$	0.42	0.90
$30^\circ$	0.50	0.86
$35^\circ$	0.57	0.81

- ①  $\frac{250}{21}$     ② 10    ③  $\frac{500}{57}$     ④  $\frac{50}{9}$     ⑤ 5



$$\text{i) } \sin 115^\circ = \sin(90^\circ + 25^\circ)$$

$$= \sin 25^\circ$$

$$= 0.42$$

$$\text{ii) } 2R = \frac{10}{\sin 115^\circ} = \frac{10}{0.42}$$

$$\therefore R = \frac{5}{0.42}$$

$$= \frac{250}{21}$$

8. 다음 <보기>는 모든 자연수  $n$ 에 대하여 등식  $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1) \dots \textcircled{7}$  이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<보기>

(1)  $n = 1$ 일 때,

(좌변)=1, (우변)= $\frac{1}{2} \times 2 = 1$  따라서  $\textcircled{7}$ 이 성립한다.

(2)  $n = k$ 일 때,  $\textcircled{7}$ 이 성립한다고 가정하면

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{k-1} = \frac{1}{2} \boxed{f(k)} \quad 3^k - 1$$

위의 식에 양변에  $3^k$ 를 더하면

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{k-1} + 3^k = \frac{1}{2} \boxed{f(k)} + 3^k$$

$$= \frac{1}{2}(3^k - 1) + 3^k = \frac{3}{2} \boxed{g(k)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1)$$

따라서  $n = k + 1$ 일 때도  $\textcircled{7}$ 이 성립한다.

(1), (2)에서 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $\textcircled{7}$ 이 성립한다.

위의 과정에서  $f(k)$ 와  $g(k)$ 에 대하여  $f(2)g(1)$ 의 값을 구하면? [5.1점]

- ① 8    ② 16    ③ 24    ④ 48    ⑤ 144

$$f(2) = 3^2 - 1 = 8$$

$$g(1) = 3^1 - 1 = 2$$

$$\therefore f(2)g(1) = 8 \cdot 2 = 16$$

9. 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항이  $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$  일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [5.2점]

<보기>

ㄱ. 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라고 하면

$$a_n + S_n = 3 \text{이다. } \times$$

ㄴ. 수열  $\{\log_3 a_n\}$ 은 등차수열이다. ○

ㄷ. 수열  $\{b_n = a_{n+1} + a_n\}$ 은 첫째항이  $\frac{5}{3}$ , 공비가  $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이다. ○

① ㄱ    ② ㄴ    ③ ㄷ    ④ ㄱ, ㄴ    ⑤ ㄴ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } S_n = \frac{1 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 3 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{ㄴ. } \log_3 a_n = (n-1) \log_3 \frac{2}{3} \therefore a = 0, d = \log_3 \frac{2}{3}$$

$$\text{ㄷ. } a_{n+1} + a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

10. 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열  $\{a_n\}$ 이

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 1$ 를 만족시킬 때, 자연수  $n$ 의 값을 구하면? [5.4점]

① 4    ② 5    ③ 6    ④ 7    ⑤ 8

$$\left(\frac{2}{3}4\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}}{a_k - a_{k+1}} \quad a_n = 2n + 2$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}) + \dots + (\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} (2 - \sqrt{2n+4}) = 1$$

$$2 - \sqrt{2n+4} = -2$$

$$\sqrt{2n+4} = 4$$

$$2n = 12 \quad (\because n > 0)$$

$$n = 6$$

11. 수열  $\{a_n\}$ 이  $a_8 - a_6 = 4$ 를 만족한다. 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라고 하자.  $S_n = pn^2 + n + 1$ 일 때,  $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은? [5.5점]

① 16    ② 17    ③ 18    ④ 19    ⑤ 20

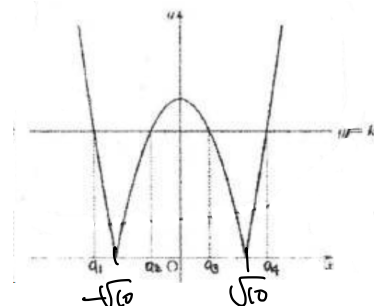
$$\text{ㄱ) } a_1 = S_1 = p(1) + 1 = 3 \quad \leftarrow \text{실수하기 쉬운건 먼저 해결}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ) } a_n &= S_n - S_{n-1} & \therefore a_1 + a_3 + a_5 \\ &= pn^2 + n + 1 & = 3 + 6 + 10 \\ &\quad - (p(n-1)^2 + (n-1) + 1) & = 19 \\ &= 2pn - p + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ) } a_8 - a_6 &= (64p - p + 1) - (36p - p + 1) \\ &= 28p = 4 \quad \therefore p = \frac{1}{7} \quad \therefore a_n = \frac{2n}{7} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

12. 그림과 같이 함수  $y = |x^2 - 10|$ 의 그래프가 직선

$y = k$ 와 서로 다른 네 점에서 만날 때, 네 점의  $x$ 좌표를 각각  $a_1, a_2, a_3, a_4$ 라 하자. 네 수  $a_1, a_2, a_3, a_4$ 가 각각 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수  $k$ 의 값은? [5.6점]



① 6    ②  $\frac{31}{5}$     ③ 7    ④  $\frac{36}{5}$     ⑤ 8

ㄱ) Let  $a_3 = d$ , then

$$a_1 = -3d, a_2 = -d, a_4 = 3d$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ) } f(d) &= 10 - d^2 & \therefore k = f(d) \\ f(3d) &= 10 - 9d^2 & = 10 - 2 = 8 \end{aligned}$$

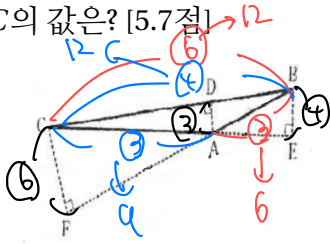
$$f(d) = f(3d)$$

$$10 - d^2 = 9d^2 - 10$$

$$20 = 10d^2$$

$$\sqrt{2} = d \quad (\because d > 0)$$

13. 그림과 같이  $A > 90^\circ$ 인 삼각형  $ABC$ 의 세 꼭짓점  $A, B, C$ 에서 세 직선  $BC, CA, AB$ 에 내린 수선의 발을 각각  $D, E, F$ 라 하자.  $\overline{AD} : \overline{BE} : \overline{CF} = 3 : 4 : 6$ 일 때, 삼각형  $ABC$ 에서  $\cos C$ 의 값은? [5.7점]



- ①  $\frac{5}{8}$     ②  $\frac{11}{16}$     ③  $\frac{3}{4}$     ④  $\frac{13}{16}$     ⑤  $\frac{7}{8}$

$$\therefore \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 6 : 12 : 9 = 2 : 4 : 3 = c : a : b$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{(4k)^2 + (3k)^2 - (2k)^2}{2 \cdot 4k \cdot 3k} \\ &= \frac{25 - 4}{24} \\ &= \frac{21}{24} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

14. 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

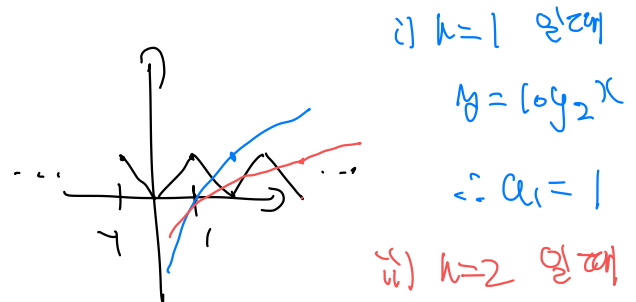
<조건>

(가)  $-1 \leq x < 1$ 에서  $f(x) = |x|$ 이다.

(나) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x+2) = f(x)$ 이다.

자연수  $n$ 에 대하여 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 함수  $y = \log_{2n} x$  그래프가 만나는 점의 개수를  $a_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [5.8점]

- ① 90    ② 100    ③ 132    ④ 156    ⑤ 182



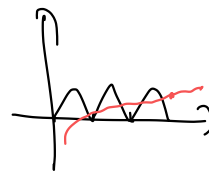
i)  $n=1$  일 때  
 $y = \log_2 x$

$\therefore a_1 = 1$

ii)  $n=2$  일 때  
 $y = \log_4 x$

$\therefore a_2 = 3$

iii)  $y = \log_6 x$



$\therefore a_n = 2n - 1$

$\therefore a_3 = 5$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} (2n-1) &= 2 \sum_{n=1}^{10} n - \sum_{n=1}^{10} 1 \\ &= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 10 \\ &= 100 \end{aligned}$$

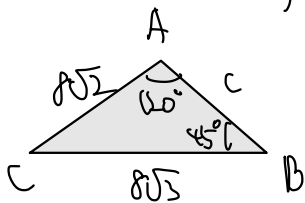
서답형

\*계산수열 풀이로 하지 않는다.

단답형 1. 수열  $\{a_n\}$ 이 0, 2, 6, 12, 20, ... 일 때,  $a_8$ 을 구하시오. [4.5점]

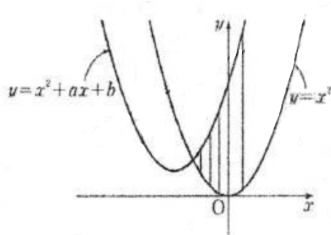
$$a_8 = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56$$

단답형 2. 반지름의 길이가 8인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서  $A = 120^\circ$ ,  $B = 45^\circ$ 일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. [5.5점]



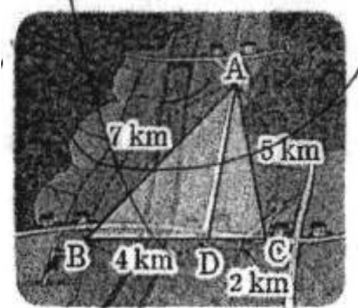
$$\begin{aligned} \text{i)} \frac{a}{\sin 120^\circ} &= 16 & \text{ii)} \cos 120^\circ &= \frac{128 + c^2 - 192}{2 \cdot 8\sqrt{2} \cdot c} \\ a &= 8\sqrt{3} & \frac{1}{r} &= \frac{c^2 - 8^2}{r \cdot 8\sqrt{2} \cdot c} \\ \text{ii)} \frac{b}{\sin 45^\circ} &= 16 & c^2 - 8\sqrt{2}c - 64 &= 0 \\ b &= 8\sqrt{2} & \therefore c &= -4\sqrt{2} + \sqrt{96} \\ & & &= 4(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

서술형 1. 다음 그림은 두 곡선  $y = x^2 + ax + b$ ,  $y = x^2$ 의 교점에서 오른쪽 방향으로 두 곡선 사이에  $y$ 축과 평행한 선분 12개를 일정한 간격으로 그은 것이다. 선분의 길이를 왼쪽부터 차례로  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_{12}$ 이라고 하면  $l_1 = 3$ ,  $l_{12} = 13$ 이다.  $l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{12}$ 의 값을 구하시오. (단,  $a > 0$ 이고  $a, b$ 는 상수) [4점]



$$\begin{aligned} x^2 + ax + b - x^2 &= ax + b \Rightarrow \text{등차수열} \\ \therefore \sum_{k=1}^{12} l_k &= \frac{12(l_1 + l_{12})}{2} = 6(3 + 13) \\ &= 96 \end{aligned}$$

서술형 2. 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D 중 B, C, D가 한 직선 위에 있다.  $\overline{AB} = 7\text{km}$ ,  $\overline{AC} = 5\text{km}$ ,  $\overline{BD} = 4\text{km}$ ,  $\overline{DC} = 2\text{km}$  일 때,  $\cos C$ 의 값을 이용하여 두 지점 A, D사이의 거리를 구한 후, 삼각형 ACD의 내접원의 반지름을 구하시오. [5점]



$$\text{i)} \text{ let } \overline{AD} = x$$

$$\cos C = \frac{6^2 + 5^2 - 1^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{12}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{5}$$

$$\cos C = \frac{2^2 + 5^2 - x^2}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{1}{5}$$

$$4 + 25 = x^2 + 4$$

$$x = 5 (\because x > 0)$$

$$5 \angle \frac{1}{2} 2\sqrt{6}$$

$$\text{ii)} \sin C = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\frac{x}{\sin C} = 2R$$

$$\frac{5}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = 2R$$

$$5 = 2R \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\therefore R = \frac{25}{4\sqrt{6}} = \frac{25\sqrt{6}}{24}$$

서술형 3. 모든 항이 양수인 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  
 $a_1 a_2 = a_{10}$ ,  $a_1 + a_9 = 90$ 일 때,  
 $(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9)(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9)$ 의 값을 구  
 하시오. [6점]

$$\begin{aligned} \text{이)} \quad a \cdot ar &= ar^9 & \text{ㄹ)} \quad a + ar^8 &= 90 \\ a &= r^8 & a^2 + a - 90 &= 0 \\ & & \frac{-9}{10} & \\ a &= 90r^{10} & & \\ & (\because a > 0) & & \\ \therefore r^8 &= 9 & & \\ r^4 &= 3 & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄹ)} \quad \left(\sum_{k=1}^9 a_k\right) &= \frac{a(1-r^{10})}{1-r} \cdot \frac{a(1+r^{10})}{1+r} \\ &= a^2 \frac{1-r^{20}}{1-r^2} \\ &= 81 \cdot \frac{1-3^5}{1-3} \\ &= \boxed{9801} \end{aligned}$$

서술형 4. 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항이  $a_n = \sum_{k=1}^n k^3$ 일 때, 식  
 $\frac{1 \times 2}{a_1} + \frac{2 \times 3}{a_2} + \frac{3 \times 4}{a_3} + \dots + \frac{9 \times 10}{a_9}$ 을  $\Sigma$ 를 이용하여 표현하  
 고, 그 값을 구하시오. [5점]

$$\text{이)} \quad a_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{ㄹ)} \quad \left(\sum_{k=1}^9 \frac{1}{a_k}\right) &= 2^2 \left( \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{9 \times 10} \right) \\ &= 4 \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k(k+1)} \\ &= 4 \left[ \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right. \\ & \quad \left. + \dots + \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \right] \\ &= 4 \cdot \frac{9}{10} \end{aligned}$$

$$= \boxed{\frac{18}{5}}$$