♦ 문제풀이 및 해설은 오른쪽 qr코드와 같습니다.
♦ 함께 열심히 해 봅시다.

SCAN ME

유형 1. 다음 중 지수함수 $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 그래프의 점근선은 x축이다. O

② 그래프는 점 $(0, 1)$을 지난다. O

③ 그래프는 제 1, 2사분면을 지난다. O

④ x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. X

$a>1$ 증가
$0<a<1$ 감소

⑤ 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. O

유형 2. 함수 $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프가 점 $(2, 11)$을 지난다. 이때 a의 값을 구하시오.

$y = a^x \xrightarrow{y축\ 대칭} y = a^{-x}$

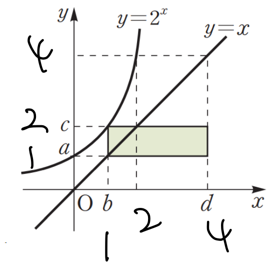
$\xrightarrow[y,\ -5]{x,\ 4} y = a^{-(x-4)} - 5$

$11 = a^2 - 5$ ← $(2, 11)$ 대입

$16 = a^2$

$\therefore a = 4$ $(\because a > 0)$

유형 3. 오른쪽 그림은 함수 $y = 2^x$의 그래프와 직선 $y = x$를 나타낸 것이다. 색칠한 부분의 넓이를 구하시오. (단, 점선은 x축 또는 y축과 평행하다.)



$S = (4-1)(2-1)$

$= 3$

유형 4. 세 수 $A = 8^{\frac{1}{4}},\ B = \sqrt[3]{16},\ C = \sqrt[5]{32}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　　② $A < C < B$　　③ $B < A < C$

④ $B < C < A$　　⑤ $C < B < A$

$A = 2^{\frac{3}{4}}$　　$B = 2^{\frac{4}{3}}$　　$C = 2^{\frac{5}{5}} = 2$

$\frac{3}{4} < 1 < \frac{4}{3}$

$A < C < B$ $(\because 밑 > 1)$

유형 5. 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+3$의 역함수 $g(x)$가 $g(a)=2,\ g(12)=b$를 만족시킬 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

i) $f(2)=a,\ f(b)=12$

ii) $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{2-2}+3$

$=1+3$

$a=4$

iii) $12=\left(\frac{1}{3}\right)^{b-2}+3$

$9=3^{2-b}$

$3^2=3^{2-b}$

$\therefore b=0$

$\therefore a+b=4+0$

$=4$

유형 6. 정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 1\}$인 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-2$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -2　② $-\frac{7}{4}$　③ $-\frac{3}{2}$　④ $-\frac{5}{4}$　⑤ -1

$y_{최대}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2+1}-2$ (∵ 밑<1)

$=2-2=0$

$y_{최소}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}-2$ (∵ 밑<1)

$=\frac{1}{4}-2$

$=-\frac{7}{4}$

$\therefore y_{최대}+y_{최소}=0+\left(-\frac{7}{4}\right)=-\frac{7}{4}$

유형 7. 정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 1\}$인 함수 $y=3^{x+1}-9^x$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

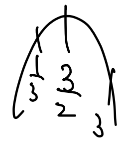
① $\frac{1}{4}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{5}{4}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ $\frac{9}{4}$

let $3^x=t$ $(t>0)$

$y=3t-t^2$ $\left(\frac{1}{3}\le t\le 3\ \because 밑>1\right)$

$=-\left(t^2-3t+\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{4}$

$=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$



$\therefore y_{최대}=-\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$

$y_{최소}=-\left(3-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}$

$=0$

$\therefore M+m=\frac{9}{4}+0=\frac{9}{4}$

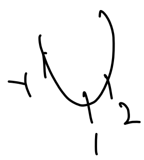
유형 8. 정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 2\}$이 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+3}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\frac{m}{M}$의 값은?

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$　④ 4　⑤ 16

let $g(x)=x^2-2x+3$ $(-1\le x\le 2)$

$=(x^2-2x+1)-1+3$

$=(x-1)^2+2$



$\therefore g(x)_{최소}=(1-1)^2+2=2$

$g(x)_{최대}=(-1-1)^2+2=6$

$\therefore y_{최대}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (∵ 밑<1)

$=\frac{1}{4}$

$y_{최소}=\left(\frac{1}{2}\right)^6$ (∵ 밑<1)

$=\frac{1}{64}$

$\therefore \frac{m}{M}=\frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{4}}$

$=\frac{1}{16}$

유형 9. 두 함수 $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$에 대하여 함수 $h(x)$가 $h(x) = f(x) + g(x) + 4$일 때, $h(x)$의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$h(x) = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$

$\geq 2\sqrt{2^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x} + 4$ ($\because$ 산술·기하)

$= 2 + 4 = 6$

유형 10. 함수 $y = 6(3^x + 3^{-x}) - (9^x + 9^{-x})$의 최댓값은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

let $3^x + 3^{-x} = t$ $(t > 0)$

$t^2 = (3^x + 3^{-x})^2$

$= 9^x + 2 + 9^{-x}$

$\therefore y = 6t - (t^2 - 2)$

$= -t^2 + 6t + 2$

$= -(t^2 - 6t + 9) + 9 + 2$

$= -(t-3)^2 + 11$

$\therefore y_{최대} = -(3-3)^2 + 11 = 11$

유형 11. 방정식 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2} \cdot 27^x = \sqrt{3}$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$3^{-2x^2} \cdot 3^{3x} = 3^{\frac{1}{2}}$

$3^{-2x^2+3x} = 3^{\frac{1}{2}}$

$-2x^2 + 3x = \frac{1}{2}$

$-4x^2 + 6x - 1 = 0$

$\therefore \alpha + \beta = -\frac{6}{-4} = \frac{3}{2}$

유형 12. 방정식 $9^x + 27^x = 10 \cdot 3^{x+2}$의 실근을 a라 할 때, 2^a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

let $3^x = t$ $(t > 0)$

$t^2 + t^3 = 90t$

$t + t^2 = 90$ ($\because t \neq 0$)

$t^2 + t - 90 = 0$

-9

10

$t = 9$ or $\cancel{-10}$ ($\because t > 0$)

$\therefore 3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2$

$\therefore a = 2$

$\therefore 2^a = 2^2 = 4$

유형 13. 방정식 $9^x - 4\cdot 3^{x+1} + 27 = 0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

let $3^x = t$ $(t>0)$

$t^2 - 12t + 27 = 0$

$\begin{matrix} -3 \\ -9 \end{matrix}$

$t = 3$ or 9

i) $t=3$ 일때

$3^x = 3$

$x = 1$

ii) $t=9$ 일때

$3^x = 3^2$

$x = 2$

$\therefore \alpha+\beta = 1+2 = 3$

유형 14. 방정식 $(x+7)^{x+1} = 4^{x+1}$의 모든 근의 합을 구하시오. (단, $x > -7$)

i) $x+7 = 4$

$x = -3$

ii) $x+1 = 0$

$x = -1$

$\therefore -3-1 = -4$

유형 15. 연립방정식 $\begin{cases} 2^x + 2\cdot 3^y = 26 \\ 2^{x+1} - 3^y = 7 \end{cases}$ 의 근을 $x=\alpha,\ y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

let $2^\alpha = a$, $3^\beta = b$

$\begin{cases} a+2b = 26 \\ 2a - b = 7 \end{cases}$

$4a - 2b = 14$

$5a = 40$

$a = 8$, $b = 9$

$\therefore 2^\alpha = 8$, $3^\beta = 9$

$2^\alpha = 2^3$, $3^\beta = 3^2$

$\therefore \alpha = 3$, $\beta = 2$

$\therefore$ 답: $\alpha+\beta = 3+2 = 5$

유형 16. 부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-x}$을 풀면?

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}}$

$2x+1 > -\frac{x}{2}$ $(\because$ 밑$<1)$

$\frac{5}{2}x > -1$

$x > -\frac{2}{5}$

유형 17. 부등식 $4^{-x}-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+16<0$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

let $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t \quad (t>0)$

$t^2-10t+16<0$

-2
-8

$2<t<8$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$-1>x>-3$ (∵ 밑<1)

$\therefore \alpha+\beta=-3-1=-4$

유형 18. 부등식 $x^{x-1}\geq x^{-x+5}$을 풀면? (단, $x>0$)

① $0<x\leq 1$ 또는 $x>3$　② $0<x<1$ 또는 $x\geq 3$

③ $0<x\leq 1$ 또는 $x\geq 3$　④ $0<x\leq 3$

⑤ $0<x\leq 1$ 또는 $x>2$

i) $0<x<1$ 일 때

$x-1\leq -x+5$ (∵ 밑<1)

$2x\leq 6$

$x\leq 3$

$\therefore 0<x<1$

ii) $1<x$ 일 때

$x-1\geq -x+5$ (∵ 밑>1)

$2x\geq 6$

$x\geq 3$

$\therefore x\geq 3$

iii) $x=1$ 일 때 성립.

$\boxed{\therefore 0<x\leq 1 \text{ or } x\geq 3}$

유형 19. 부등식 $2^{-x-1}\leq 2^x\leq 8\cdot 2^{-2x}$의 해를 구하시오.

$\frac{2^{-x}}{2}\leq 2^x\leq 8\cdot(2^{-x})^2$

i) $\frac{2^{-x}}{2}\leq 2^x$

$\frac{1}{2}\leq 2^{2x}$

$2^{-1}\leq 2^{2x}$

$-1\leq 2x$ (∵ 밑>1)

$-\frac{1}{2}\leq x$

ii) $2^x\leq 8(2^{-x})^2$

$2^{3x}\leq 8$

$2^{3x}\leq 2^3$

$3x\leq 3$ (∵ 밑>1)

$x\leq 1$

$\boxed{\therefore -\frac{1}{2}\leq x\leq 1}$

유형 20. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2^{2x}-2^{x+1}+k>0$을 만족시키는 정수 k의 최솟값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

let $2^x=t \quad (t>0)$

$t^2-2t+k>0$

$(t^2-2t+1)-1+k>0$

$(t-1)^2-1+k>0$

$\therefore t=1$ 일 때 $-1+k>0$

$k>1$

$\therefore k_{최소}=2$

유형 21. 어느 방사성 물질은 일정한 비율로 붕괴되어 50년이 지날 때마다 그 양이 절반으로 감소한다고 한다. 이 방사성 물질의 양이 1024 g 에서 $\frac{1}{4}$ g 으로 감소하는 데에는 몇 년이 걸리는지 구하시오.

$$1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4}$$

$$2^{10} \times 2^{-n} = 2^{-2}$$

$$2^{10-n} = 2^{-2}$$

$$10-n = -2$$

$$n = 12$$

∴ 답: $12 \times 50 =$ 600 년