♦ 전체 : 선택형 17문항(70점) 서답형 6문항(30점)

♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 다음 중에서 극한값이 나머지 넷과 다른 것은? [3.5점]

① $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x$ ② $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}$ ③ $\lim_{x\to0} \cos x$

④ $\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x}$ ⑤ $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

$$⑤ = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

2. $\lim_{x\to0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{3\tan x}$의 값은? [3.6점]

① 0 ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

$$\frac{5}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\because \lim_{x\to0} \frac{x}{3\tan x} \cdot \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 - \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \right) \right)$$

3. 함수 $f(x) = x\sin x$에 대하여 $f'(\pi)$의 값은? [3.6점]

① $-\pi$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ π

$$f'(x) = \sin x + x\cos x$$
$$f'(\pi) = 0 + \pi(-1)$$
$$= -\pi$$

4. 함수 $f(x) = \frac{x^2-1}{e^{x-1}+1}$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3.7점]

① 0 ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ e

$$f'(x) = \frac{2x(e^{x-1}+1) - (x^2-1)e^{x-1}}{(e^{x-1}+1)^2}$$
$$f'(1) = \frac{4}{4} = 1$$
$$f'(x) = \frac{2x(e^{x-1}+1) - (x^2-1)e^{x-1}}{(e^{x-1}+1)^2}$$
$$f'(1) = \frac{4}{4} = 1$$

5. 실수 전체에서 미분가능한 두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to1} \frac{\ln|f(x)|}{x-1} = 5$ 이고 $g(x) = \{f(x)\}^2$ 일 때, ~~$g1(1)$~~ $g'(1)$의 값은?[4.4점]

① ~~10~~ 0 ② 1 ③ 5 ④ 10 ⑤ 20

i) $\lim_{x\to1} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(1)}{f(1)} = 5$, $\ln f(1) = 0$

$f(1) = 1$

$\therefore f'(1) = 5$

ii) $g'(x) = 2f(x)\, f'(x)$

$g'(1) = 2f(1) \cdot f'(1)$

$= 2 \cdot 1 \cdot 5$

$= 10$

6. $y = \ln|3\csc x|$의 도함수는? [3.7점]

① $y' = 3\csc x$ ② $y' = \frac{1}{3\csc x}$ ③ $y' = -\frac{\cot x}{3}$

④ $y' = \cot x$ ⑤ $y' = -\cot x$

$$y' = \frac{-\cancel{\csc x}\cot x}{3\cancel{\csc x}}$$
$$= -\frac{\cot x}{3}$$

7. 매개변수로 나타낸 함수 $x = e^{2t-6}$, $y = (2t+3)^{\frac{3}{2}}$에서 $t = 3$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3.8점]

① 3 ② $\frac{9}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{27}{2}$ ⑤ 27

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=3} = 2e^{2t-6} = 2$ $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=3} = \frac{3}{\cancel{2}}(2t+3)^{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}\Big|_{t=3}$

$= 9$

$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=3} = \frac{9}{2}$

8. 방정식 $\frac{1}{x} - xy + y^2 = 3$ 위의 점 $(a, 2)$에서 $\frac{dy}{dx}$ 의 값을 b라 할 때, $a+b$의 값은? (단, $a > 0$) [4.3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

i) $\frac{1}{a} - 2a + 4 = 3$

$\frac{1}{a} - 2a + 1 = 0$

$a^2 + a - 2 = 0$

2
−1

$a = \cancel{2}$ or 1 (∵ $a > 0$)

ii) $-\frac{1}{x^2} - y - x\frac{dy}{dx} + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$(-a+4)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^2} + 2$

$3b = 1 + 2$

$b = 1$

$\therefore a + b = 1 + 1 = 2$

9. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3.8점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$f(a) = a^3 - 3a^2 + 3a + 1 = 3$,

$a^3 - 3a^2 + 3a - 2 = 0$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & 3 & -2 \\ & & 2 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$\therefore a = 2$ (∵ $a^2 - a + 1 > 0$)

$\therefore g'(3) = \frac{1}{f'(2)}$

$= \frac{1}{3}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$f'(2) = 12 - 12 + 3$

$= 3$

10. 상수 a에 대하여 함수 $f(x) = x\sin ax$가 $f''(0) = 4$를 만족시킬 때, a의 값은? [4.2점]

① −2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$f'(x) = \sin ax + ax\cos ax$

$f''(x) = a\cos ax + a\cos ax - a^2 x\sin ax$

$f''(0) = 2a = 4$

$a = 2$

11. 함수 $f(x) = xe^{x+2}$의 변곡점에서의 접선의 방정식을 $y = ax + b$라 할 때, ab의 값은? [4.1점]

① 1 ② 2 ③ e ④ 4 ⑤ $2e$

$f'(x) = e^{x+2} + xe^{x+2}$

$f''(x) = e^{x+2} + e^{x+2} + xe^{x+2}$

$= (x+2)e^{x+2}$

∴ 변곡점 $(-2, -2)$

l: $(-2, -2)$ $f'(-2) = -1$

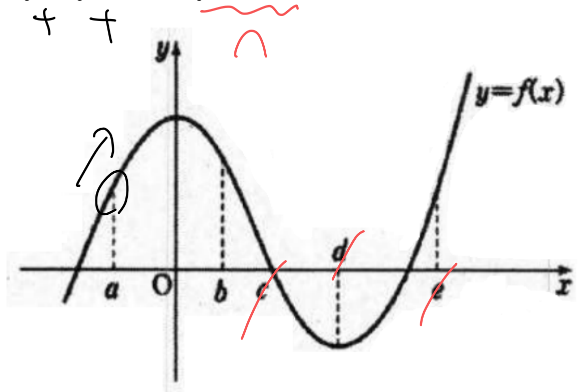
$y + 2 = -(x+2)$

$y = -x - 4$

$\therefore ab = -1 \cdot (-4) = 4$

12. 삼차함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, a, b, c, d, e 중에서 $f(x)f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ 을 만족하는 것은? [4점]

$+$ $+$ $\cap$



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

13. 함수 $f(x) = (x^2 - ax + a)e^x$의 극댓값이 3일 때, 극솟값은? (단, $a > 2$) [4.5점]

① 0 ② 1 ③ e ④ 3 ⑤ $3e^3$

$f'(x) = (2x-a)e^x + (x^2-ax+a)e^x$

$= (x^2+(2-a)x)e^x$

$= x(x+2-a)e^x$

$(\because a>2)$

x		0		$a-2$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

i) $f(0) = a = 3$

ii) $f(a-2) = f(1) = (1-3+3)e^1$

$= e$

14. 구간 $[0, 2\pi]$에서 방정식 $x\cos x - \sin x + k = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 2개가 되도록 하는 정수 k의 개수는? [4.5점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

$f'(x) = \cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x}$

$= -x\sin x$

x	0		π		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	k	$\searrow$	$-\pi+k$	$\nearrow$	$2\pi+k$

$\therefore f(\pi) = -\pi + k < 0$

$0 < k < \pi$

$\therefore k = 1, 2, 3.$ (3개)

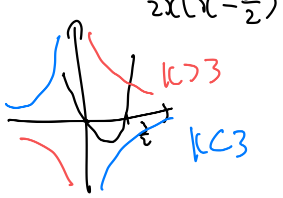
15. 함수 $f(x) = 2x^2 - 3x - \dfrac{3}{x}$, $g(x) = -\dfrac{k}{x}$에 대하여 $x > 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq g(x)$가 성립할 때, 상수 k의 최솟값은? [4.6점]

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

let $h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - 3x - \dfrac{3}{x} + \dfrac{k}{x}$

$\therefore y = 2x^2 - 3x,\ y = \dfrac{k-3}{x}$

이 $x=t$ 에서 공통 접선을 가질 때 구함



i) $y = 2t^2 - 3t = \dfrac{k-3}{t}$

ii) $y' = 4t - 3 = -\dfrac{k-3}{t^2}$

$4t - 3 = -\dfrac{1}{t}(2t^2 - 3t)$

$4t^2 - 3t = -2t^2 + 3t$

$6t^2 - 6t = 0$

$6t(t-1) = 0$

$\therefore t = \cancel{0}$ or 1 ($\because t=0$ 일때 $\frac{1}{t}$ 정의 안됨)

$y(1) = 2 - 3 = \dfrac{k-3}{1}$

$2 = k$

$\therefore k=2$ 일때 접함

$k>2$ 일때 안만남.

$\therefore f(x) \geq g(x)$

$\therefore k_{최소} = 2$

16. 함수 $f(x) = e^{2x} - e^{-2x} - 4\sin x$에 대하여 방정식 $f(x) = 0$의 실근의 개수는? [4.7점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

$f'(x) = 2e^{2x} + 2e^{-2x} - 4\cos x$

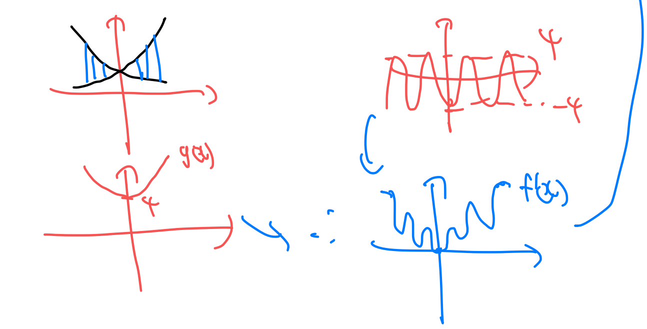
$f'(0) = 4 - 4 = 0$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
	$\nearrow$		$\nearrow$

지수함수 > 삼각함수.

$\therefore x=0$ 일때 실근 1개

i) $g(x) = 2e^{2x} + 2e^{-2x}$ ii) $y = -4\cos x$



17. 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x = f(t)$가 $f(t) = \ln(t^2+2) - \ln 2$라 하자. $t = a$에서 점 P의 속도가 최대가 될 때, $f(a)$의 값은? [5점]

① 0 ② $\ln 2$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $\ln 4$

$f'(t) = \frac{2t}{t^2+2}$

$f''(t) = \frac{2(t^2+2) - 2t \cdot 2t}{(t^2+2)^2}$ $\quad -2t^2+4$

$= \frac{-2(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})}{(t^2+2)^2}$

t		$\sqrt{2}$	
$f''(t)$	$+$	0	$-$
$f'(t)$	$\nearrow$		$\searrow$

$\therefore a = \sqrt{2}$

$\therefore f(a) = \ln 4 - \ln 2$
$= \ln 2$

서답형

단답형 1. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x = t^2+1,\ y = 2\ln t$이다. $t = a$에서 점 P의 속력이 $2\sqrt{2}$일 때, a의 값을 구하시오. (단, $t > 0$) [4점]

$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}$

속력 $= \sqrt{4t^2 + \frac{4}{t^2}} = 2\sqrt{2}$

$\cancel{4}\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) = \cancel{8}\ 2$

$t^4 - 2t^2 + 1 = 0$

$\therefore t^2 = 1,\ t = 1$ or $\cancel{-1}$ $(\because t > 0)$

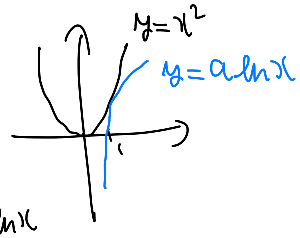
$\therefore a = 1$

단답형 2. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x) = a(\ln x)^2 - x^2$라 하자. 방정식 $f'(x) = 0$의 실근이 1개 존재할 때, 다음 물음에 답하시오. [6점]

(1) $f'(x)$를 a를 이용하여 나타내시오. [6점]

(2) a의 값을 구하시오. [4점]

(1) $f'(x) = 2a(\ln x) \cdot \frac{1}{x} - 2x$



(2) $\frac{2a}{x}\ln x = 2x$

$a\ln x = x^2$

let $g(x) = x^2,\ h(x) = a\ln x$

$g'(x) = 2x,\ h'(x) = \frac{a}{x}$

g, h는 공통접선을 가지므로

i) $2x = \frac{a}{x}$ $\quad$ ii) $\frac{a}{2} = a\ln\frac{a}{2}$

$x = \sqrt{\frac{a}{2}}$ $\quad$ $\frac{1}{2} = \ln\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} = e^{\frac{1}{2}}$

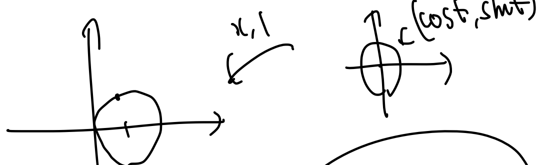
$\therefore a = 2\sqrt{e}$

서술형 1. 중심이 $A(1,0)$이고 반지름이 1인 원 위의 임의의 점 $P(x,y)$에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 t라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, O는 원점) [4점]

(1) 점 P의 좌표를 매개변수 t에 대한 식으로 나타내시오. [2점]

(2) $t=\frac{\pi}{6}$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값을 구하시오. [2점]

(1)



$\therefore (x,y) = (\cos t+1, \sin t)$

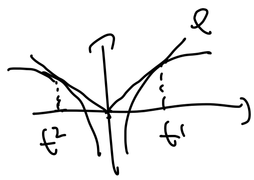
(2) $\frac{dx}{dt} = -\sin t \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$

$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{6}} = -\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{3}$

서술형 2. 원점에서 곡선 $y=\ln|x|$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하고 두 접점의 x좌표를 각각 t_1, t_2 $(t_1 > t_2)$라 할때, 다음 물음에 답하시오. [5점]

(1) t_1, t_2를 각각 구하시오. [2점]

(2) $\tan\theta$를 구하시오. [3점]



(1) let $t_1 = a$

$e : (a, \ln a) \quad m = \frac{1}{a}$

$y - \ln a = \frac{1}{a}(x-a)$ ↲ $(0,0)$ 대입

$-\ln a = -1$

$a = e$

$\therefore t_1 = e \quad t_2 = -e$

(2) $\tan\alpha = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \quad \tan\beta = \frac{\ln e}{-e} = -\frac{1}{e}$

$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{1}{e}+\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e^2}} = \frac{\frac{2}{e}}{\frac{e^2-1}{e^2}} = \frac{2e}{e^2-1}$

$\tan(\alpha-\beta) > 0$ 이므로 ($\tan(\alpha-\beta) < 0$ 이면 틀림)

$\tan\theta = \frac{2e}{e^2-1}$

서술형 3. 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x) = \cos^n x (n = 2, 3, 4, \cdots)$의 변곡점의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [5점]

(1) $\sin a_n$을 n에 관한 식으로 나타내시오. [2점]

(2) $\lim_{n\to\infty} b_n$을 구하시오. [3점]

(1) $f'(x) = n\cos^{n-1}x(-\sin x)$

$f''(x) = n(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2 x - n\cos^n x = 0$

$n\cos^{n-2}x\left((n-1)\sin^2 x - \cos^2 x\right) = 0$

$n\sin^2 x - 1 = 0$

$\sin^2 x = \frac{1}{n}$

$\sin x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\left(\because \sin x > 0\ \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\therefore \sin a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

(2) $b_n = \cos^n a_n$ $\quad \cos a_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n \cdot \frac{1}{2}}$

$= e^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{e}}$

서술형 4. 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2a}\right)$에서 정의된 함수 $f(x) = \tan(ax)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g\left(\frac{1}{x}\right)$의 교점 (m, n)에서 두 곡선에 각각 접하는 직선이 서로 수직일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $0 < a < \frac{\pi}{2}$) [6점]

(1) $\tan(am)$을 n에 관한 식으로 나타내시오. [1점]

(2) $\tan(an)$을 m에 관한 식으로 나타내시오. [1점]

(3) 교점 (m, n)의 좌표를 구하시오. [2점]

(4) 상수 a의 값을 구하시오. [2점]

(1) $f(m) = \tan am = n$

(2) $x = \tan(a\,g(x))$

$\frac{1}{x} = \tan\left(a\,g\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$\frac{1}{m} = \tan an$

$f(m) = \tan am$

$f'(m) = a\sec^2 am$

$g'(\tan am) = \frac{1}{a\sec^2 am}$

(3) $\left(\cancel{\frac{1}{\tan an}}, \tan am\right)$

(4) i) $f'(m) = a\sec^2 am$

$g'(m) = g'\left(\cancel{\frac{1}{\tan an}}\right) =$