

◆ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

◆ 전체 : 선택형 25문항(100점)

◆ 총점 : 100점

선택형

1. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 1$, $a_4 = 7$ 일 때, $a_2 + a_3$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2. 첫째항이 $\frac{1}{9}$, 공비가 3인 등비수열의 제5항을 구하면? [3점]

- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$

($n = 1, 2, 3, \dots$) 일 때, a_6 의 값은? [3.5점]

- ① 27 ② 29 ③ 31 ④ 33 ⑤ 35

4. 삼각형 ABC 에서 $\sin A = 2 \cos B \sin C$ 가 성립할 때, 삼각형 ABC 는 어떤 삼각형인가? [4.3점]

- ① $a = b$ 인 이등변삼각형 ② $b = c$ 인 이등변삼각형
③ $A = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ④ $B = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형
⑤ $C = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형

5. 두 수 2와 80 사이에 n 개의 수를 넣어 만든 수열

$$2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 80$$

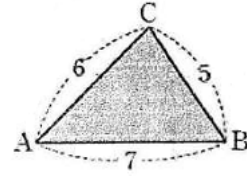
이 공차가 2인 등차수열일 때, n 의 값은? [3.3점]

- ① 38 ② 42 ③ 46 ④ 50 ⑤ 54

6. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_n = pn^2 + 3n$ 일 때, $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은? (단, p 는 상수) [3.7점]

- ① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

7. 그림과 같이 $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$ 인 삼각형 ABC 의 넓이를 구하면? [4.1점]



- ① $4\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $5\sqrt{6}$ ④ $6\sqrt{6}$ ⑤ $7\sqrt{6}$

8. 첫째항부터 제3항까지의 합이 5, 첫째항부터 제6항까지의 합이 20인 등비수열의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4.2점]

- ① 45 ② 55 ③ 65 ④ 75 ⑤ 85

9. 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음을 만족시킬 때, 자연수 n 의 값은? [5점]

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{5}{3}$$

- ① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

10. 삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 3$, $\cos A = \frac{2}{3}$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 내접원의 반지름의 길이는? [4.4점]

- ① $\frac{\sqrt{11}}{15}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{15}$ ③ $\frac{\sqrt{13}}{5}$ ④ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

11. 연이율 2%이고 1년마다 복리로 매년 초에 100만원 씩 10년동안 적립할 때, 10년 말까지 적립금의 원리합계를 구하면? (단, $1.02^{10} = 1.22$ 로 계산한다.) [5점]

- ① 1122만원 ② 1124만원 ③ 2222만원
④ 2211만원 ⑤ 10000만원

12. 다음 주문서대로 가능한 한 많은 상자에 꿀을 담으려고 할 때, 필요한 상자의 개수는? [5.4점]

<주문서>

- (1) 꿀 300개를 여러 개의 상자에 나누어 담는다.
(2) 모든 상자에는 적어도 꿀 한 개가 들어있게 한다.
(3) 상자에 들어 있는 꿀의 개수는 모두 다르게 한다.

- ① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

13. $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

1. $n = 2$ 일 때, (좌변) $= \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ = (우변)
따라서 $n = 2$ 일 때 문제의 부등식이 성립한다.

2. $n = k (k \geq 2)$ 일 때, 문제의 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

양변에 $\boxed{(가)}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \boxed{(가)} < 2 - \frac{1}{k} + \boxed{(가)}$$

그런데 $k \geq 2$ 이므로

$$\left\{ 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \right\} - \boxed{(나)} = -\frac{1}{k(k+1)^2} < 0$$

$$\text{즉, } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 문제의 부등식이 성립한다.

- 1, 2에 의하여 문제의 부등식은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 $f(k), g(k)$ 라 할 때, $f(1) + g(3)$ 의 값은? [4.1점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

14. $\overline{AB} = \overline{AC} = 8, \overline{BC} = 6$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 변 AB 위의 점 D 와 변 BC 위의 점 E 를 잇는 선분 DE 에 의하여 삼각형 ABC 의 넓이가 이등분될 때, 선분 DE 의 길이의 최솟값은? [5.5점]

- ① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $2\sqrt{10}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

15. 0이 아닌 서로 다른 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루고 세 양수 p, q, r 가 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 m 이라 하고, 이차방정식 $px^2 + qx + r = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 n 이라 할 때, $m + n$ 의 값은? [5.5점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

16. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 2$ 이고 $n \geq 1$ 일 때, a_{n+1} 은

$$\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$$

을 만족시키는 자연수 k 의 개수이다. a_6 의 값은? [6점]

- ① 9 ② 17 ③ 33 ④ 49 ⑤ 65

서답형

단답형 1. $\sum_{k=1}^7 a_k = 10$, $\sum_{k=1}^7 b_k = 20$ 일 때,

$\sum_{k=1}^7 (-2a_k + 5b_k + 2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

단답형 2. 자연수 $n(n \geq 2)$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n 이라 하자. 예를 들어 5로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 6, 12, 18, 24 이므로 $a_5 = 6 + 12 + 18 + 24 = 60$ 이다. $a_n > 1000$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오. [6점]

서술형 1. 제3항이 11, 제7항이 23인 등차수열의 $\{a_n\}$ 의 제 10항을 구하시오. [4점, 부분점수 있음]

서술형 2. 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 이차방정식 $nx^2 - x + n(n+1) = 0$ 의 두 근을 α_n, β_n 이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값을 구하시오. [5점, 부분점수 있음]

서술형 3. $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ 인 삼각형 ABC 에서 $c^2 = ab$ 가 성립할 때, C 의 최댓값을 구하시오. [5점, 부분점수 있음]

서술형 4. 첫째항이 a 이고 공차가 p 인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 첫째항이 54이고 공비가 p 인 등비수열 $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, 자연수 a 의 값을 구하시오. [6점, 부분점수 있음]

<조 건>

$$(가) \left(\sum_{n=1}^{32} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{33} a_n \right) < 0$$

(나) b_n 은 $n \leq 4$ 이면 정수이고,

$n > 4$ 이면 정수가 아니다.

$$(다) \sum_{n=1}^4 b_n = -50$$