♦ 문제풀이 및 해설은 오른쪽 qr코드와 같습니다.

♦ 함께 열심히 해 봅시다.

SCAN ME

유형 1. 함수 $f(x) = \log_a(3x+1)+1$ $(a>0,\ a\neq 1)$에 대하여 $f(1)=3$일 때, $f(0)+f(5)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$3 = \log_a 4 + 1$

$2 = \log_a 4$

$a^2 = 4$

$a = 2$ $(\because a>0)$

$\therefore f(0)+f(5) = (\log_2 1+1) + (\log_2 16+1)$

$= 1 + 4+1 = 6$

유형 2. 다음 중 로그함수 $y = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x}$ $(0<a<1)$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 일치한다. O

② 점 $(1,0)$을 반드시 지난다. O

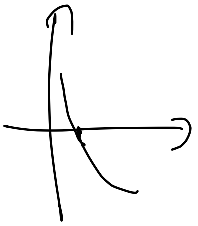
③ 그래프의 점근선은 직선 $x=0$이다. O

④ $x>0$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. X

⑤ 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다. O

$y = \log_{a^{-1}} x^{-1}$

$= \log_a x$



유형 3. 함수 $y=\log_2(2x+4)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다. 이때 $m+n$의 값을 구하시오.

$y = \log_2 2(x+2)$

$= \log_2(x+2)+1 \xleftarrow[y,\,1]{x,\,-2} y = \log_2 x$

$\therefore m+n = -2+1 = -1$

유형 4. 세 수

$$A = -\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}, \quad B = 2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}, \quad C = -3\log_{\frac{1}{2}} 3$$

의 대소 관계는?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$

④ $B<C<A$ ⑤ $C<B<A$

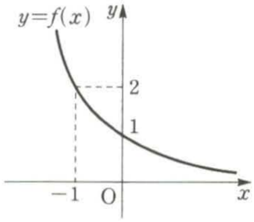
$A = \log_{\frac{1}{2}} 6$ $B = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{25}$ $C = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{27}$

$6 > \frac{1}{25} > \frac{1}{27}$

$\log_{\frac{1}{2}} 6 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{25} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{27}$ $(\because \frac{1}{2}<1)$

$\therefore A < B < C$.

유형 5. 함수 $f(x) = a^x$ $(0 < a < 1)$에 대하여 $y = f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(4)$의 값을 구하시오.



i) $f(-1) = a^{-1} = 2$.

$a = \frac{1}{2}$

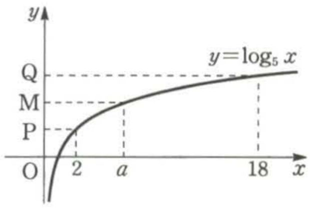
$\therefore f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

ii) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$\therefore g(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4$

$= -2$

유형 6. 오른쪽 그림은 함수 $y = \log_5 x$의 그래프이다. 점 M이 선분 PQ의 중점일 때, a의 값을 구하시오. (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



$M = \dfrac{\log_5 2 + \log_5 18}{2}$

$= \dfrac{\log_5 36}{2}$

$= \log_5 6$ $\therefore a = 6$

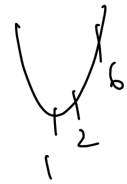
유형 7. 정의역이 $\{x \mid 2 \le x \le 6\}$인 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + 8)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M - m$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

let $g(x) = x^2 - 2x + 8$

$= (x^2 - 2x + 1) - 1 + 8$

$= (x-1)^2 + 7$



$\therefore g(x)_{최대} = (6-1)^2 + 7 = 32$

$g(x)_{최소} = (2-1)^2 + 7 = 8$

밑<1 이므로

$y_{최대} = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

$y_{최소} = \log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$

$\therefore -3 - (-5) = 2$

유형 8. $1 \le x \le 8$에서 함수 $y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 4\log_{\frac{1}{2}} x + 5$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.

let $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ $(-3 \le t \le 0)$

$y = t^2 + 4t + 5$

$= (t^2 + 4t + 4) - 4 + 5$

$= (t+2)^2 + 1$

$\therefore y_{최대} = (0+2)^2 + 1 = 5$

$y_{최소} = (-2+2)^2 + 1 = 1$

$\therefore Mm = 5 \cdot 1 = 5$

유형 9. $x>0$, $y>0$일 때, $\log_2\left(x+\frac{1}{y}\right)+\log_2\left(y+\frac{9}{x}\right)$의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\log_2\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{9}{x}\right)$

$=\log_2\left(xy+\frac{9}{xy}+10\right)$

$\ge\log_2\left(2\sqrt{\cancel{xy}\cdot\frac{9}{\cancel{xy}}}+10\right)$ (∵ 산술·기하)

$=\log_2 16=4$

유형 10. 정의역이 $\{x\,|\,1\le x\le 1000\}$인 함수 $y=x^{2-\log x}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.

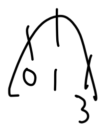
$\log y=(2-\log x)\cdot\log x$

let $\log x=t$ $(0\le t\le 3)$

$\log y=-t^2+2t$

$=-(t^2-2t+1)+1$

$=-(t-1)^2+1$



$\log y_{최대}=-(1-1)^2+1=1$

$\log y_{최소}=-(3-1)^2+1=-3$

$\therefore y_{최대}=10$ $\therefore Mm=10\cdot10^{-3}$

$y_{최소}=10^{-3}$ $=10^{-2}=\frac{1}{100}$

유형 11. 방정식 $\log_4(x-2)+\log_{\frac{1}{4}}(x-5)=\frac{1}{2}$을 풀면?

① $x=2$ ② $x=5$

③ $x=2$ 또는 $x=5$ ④ $x=8$

⑤ $x=5$ 또는 $x=8$

i) $x-2>0$, $x-5>0$ $\Rightarrow$ $x>5$

ii) $\log_4(x-2)-\log_4(x-5)=\log_4 4^{\frac{1}{2}}$

$\log_4\frac{x-2}{x-5}=\log_4 2$

$x-2=2(x-5)$

$8=x$

유형 12. 방정식 $\log_3 x-\log_9 x=2(\log_3 x)(\log_9 x)$의 두 실근을 α,β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ $\sqrt{3}$ ④ 3 ⑤ $3\sqrt{3}$

$\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3 x=2(\log_3 x)\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)$

let $\log_3 x=t$

$t-\frac{1}{2}t=\cancel{2}t\cdot\frac{1}{\cancel{2}}t$

$\frac{t}{2}=t^2$

$0=2t^2-t$

$=t(2t-1)$

$\therefore t=0$ or $\frac{1}{2}$

$\log_3 x=0$ or $\log_3 x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=1$ or $\sqrt{3}$ $\therefore \alpha\beta=1\cdot\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}$

유형 13. 방정식 $x^{\log_3 x} = \frac{1}{3}x^2$을 풀면?

① $x=2$ ② $x=3$ ③ $x=6$ ④ $x=8$ ⑤ $x=9$

i) $x>0$

ii) $(\log_3 x)^2 = \log_3 \frac{1}{3}x^2$

$= \log_3 \frac{1}{3} + 2\log_3 x$

let $\log_3 x = t$

$t^2 = -1 + 2t$

$0 = t^2 - 2t + 1$

$= (t-1)^2$

$\therefore t = 1$

$\log_3 x = 1$

$x = 3$

유형 14. 연립방정식 $\begin{cases} \log_x 4 - \log_y 2 = 2 \\ \log_x 16 + \log_y 8 = -1 \end{cases}$ 의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.

let $\log_x 2 = p$ $\log_y 2 = q$

$\begin{cases} 2p - q = 2 \\ 4p + 3q = -1 \end{cases}$

$4p - 2q = 4$

$5q = -5$

$q = -1$ $p = \frac{1}{2}$

$\therefore \log_x 2 = \frac{1}{2}$ $\log_y 2 = -1$

$x^{\frac{1}{2}} = 2$ $y^{-1} = 2$

$x = 4$ $y = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha\beta = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

유형 15. 방정식 $(\log_2 2x)^2 - 3\log_2 x^2 = 0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

$(1+\log_2 x)^2 - 6\log_2 x = 0$

let $\log_2 x = t$ $(x>0)$

$(1+t)^2 - 6t = 0$

$t^2 - 4t + 1 = 0$

$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 4$

$\log_2 \alpha\beta = 4$

$\therefore \alpha\beta = 2^4 = 16$

유형 16. 부등식 $\log(6-x) + \log(x+5) \le 1$ 의 해가 $a < x \le -4$ 또는 $b \le x < 6$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

i) $6-x>0$, $x+5>0$ $\Rightarrow -5<x<6$

ii) $\log(6-x)(x+5) \le \log 10^1$

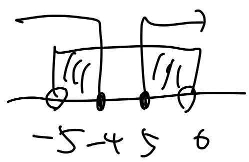
$(6-x)(x+5) \le 10^1$ (∵ 밑>1)

$-x^2+x+30 \le 10$

$0 \le x^2 - x - 20$

4
-5

$x \le -4$ or $x \ge 5$



$\therefore a = -5$ $b = 5$

$\therefore a+b = -5+5 = 0$

유형 17. 부등식 $(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^2 \geq 0$을 푸시오.

let $\log_{\frac{1}{3}} x = t$ $(x>0)$

$t^2 - 2t \geq 0$

$t(t-2) \geq 0$

$t \leq 0$ or $t \geq 2$

i) $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 0$ ii) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2$

$\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^0$ $\log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$x \geq 1$ ($\because$ 밑<1) $x \leq \frac{1}{9}$ ($\because$ 밑<1)

$\boxed{\therefore 0 < x \leq \frac{1}{9} \text{ or } x \geq 1}$

유형 18. 부등식 $x^{\log_3 x} < 9x$를 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

$(\log_3 x)^2 < \log_3 9x$

let $\log_3 x = t$ $(x>0)$

$t^2 < 2 + t$

$t^2 - t - 2 < 0$

$-1 < t < 2$

$-1 < \log_3 x < 2$

$\log_3 3^{-1} < \log_3 x < \log_3 3^2$

$\frac{1}{3} < x < 9$ ($\because$ 밑>1).

$\boxed{\therefore 8\text{개}}$

유형 19. 연립부등식 $\begin{cases} \log_4 (x+4)^2 \geq \log_2 3x \\ \log_{\frac{1}{3}} (x+2) \geq -1 \end{cases}$ 을 만족시키는 자연수 x의 값을 구하시오.

i) $x+4>0$, $x>0$, $x+2>0$ $\Rightarrow$ $x>0$

ii) $\log_2 (x+4) \geq \log_2 3x$

$x+4 \geq 3x$ ($\because$ 밑>1)

$2 \geq x$

iii) $\log_{\frac{1}{3}} (x+2) \geq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$x+2 \leq 3$ ($\because$ 밑<1)

$x \leq 1$

$\therefore 0 < x \leq 1$

$\boxed{1}$

유형 20. 모든 양수 x에 대하여 부등식

$$(\log_2 x)^2 + 8\log_2 x + 8\log_2 k > 0$$

이 성립하도록 하는 양수 k의 값의 범위를 구하시오.

let $\log_2 x = t$ $(x>0)$

$t^2 + 8t + 8\log_2 k > 0$

$D/4 = 16 - 8\log_2 k < 0$

$2 < \log_2 k$

$\log_2 2^2 < \log_2 k$

$4 < k$ ($\because$ 밑>1)

유형 21. x에 대한 이차방정식 $x^2 - x\log a + \log a + 3 = 0$이 실근을 갖지 않도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오.

$D = (\log a)^2 - 4(\log a + 3) < 0$

set $\log a = t$ $(a>0)$

$t^2 - 4t - 12 < 0$

-6
2

$-2 < t < 6$

$\log 10^{-2} < \log a < \log 10^6$

$\boxed{\frac{1}{100} < a < 10^6}$ (∵ 밑>1)

유형 22. 자동차의 소음의 세기가 $P\ \mathrm{W/m^2}$일 때의 소음의 크기를 DdB라 하면 P와 D 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$D = 10(\log P + 12)$$

올해 A사, B사에서 출시한 자동차의 소음의 크기가 각각 40 dB, 60 dB 일 때, B사에서 출시한 자동차의 소음의 세기는 A사에서 출시한 자동차의 소음의 세기의 몇 배인가?

① $\frac{1}{100}$배 ② $\frac{1}{10}$배 ③ 10배
④ 100배 ⑤ $100\sqrt{2}$배

$\begin{cases} 40 = 10(\log P_A + 12) \\ 60 = 10(\log P_B + 12) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \log P_A = -8 \\ \log P_B = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P_A = 10^{-8} \\ P_B = 10^{-6} \end{matrix}$

$\therefore \frac{P_B}{P_A} = \frac{10^{-6}}{10^{-8}} = \frac{10^8}{10^6} = 10^2 = 100$