

◆ 전체 : 선택형 14문항(70점), 서답형 4문항(30점)

◆ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

◆ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 100, 공차가 -6 일 때, a_{17} 의 값은? [4점]

- ① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

2. $\sum_{k=2}^{25} \frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} = \frac{b}{a}$ 일 때, $b-a$ 의 값은? [4점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

3. 수열 $\{a_n\}$ 의 귀납적 정의가 $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 3a_n$ 일 때, $a_k = 972$ 을 만족시키는 k 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

4. 삼각형 ABC 에서 $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$ 일 때, 삼각형 ABC 의 넓이는? [5점]

- ① $2\sqrt{6}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $6\sqrt{6}$

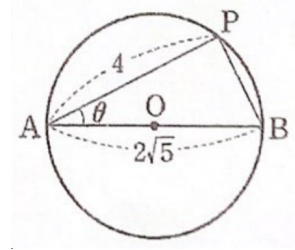
5. 첫째항부터 제5항까지의 합이 5, 첫째항부터 제10항까지의 합이 20인 등비수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은? [5점]

- ① 190 ② 200 ③ 120 ④ 220 ⑤ 30

6. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 $S_n = 3^n - 1$ 일 때, 제4항의 값은? [5점]

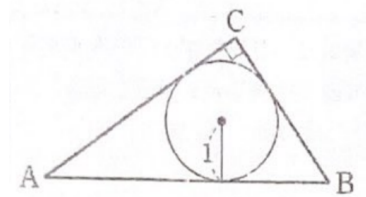
- ① 54 ② 80 ③ 81 ④ 108 ⑤ 162

7. 다음 그림과 같이 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 선분 AB 를 지름으로 하는 원 O 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{AP} = 4$ 이고 $\angle PAB = \theta$ 일 때, $\sin 2\theta$ 의 값은? [5점]



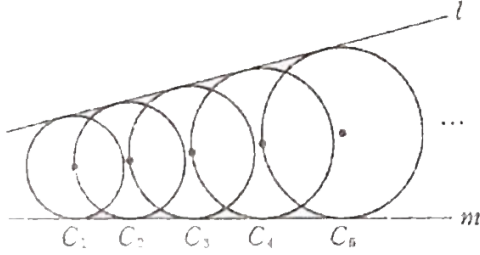
- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

8. 다음 그림과 같이 직각삼각형 ABC 의 넓이가 8이고 내접원의 반지름의 길이가 1일 때, 빗변 c 의 길이는? [5점]



- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

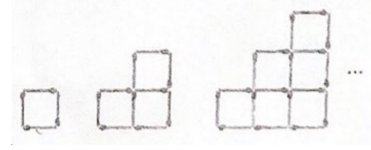
9. 다음 그림과 같이 두 직선 l, m 에 동시에 접하는 원 C_1 이 있다. 원 C_1 의 중심을 지나고 직선 l, m 에 동시에 접하면서 C_1 보다 큰 원을 C_2 라 하자. 이와 같은 방법으로 원 C_k 의 중심을 지나고 직선 l, m 에 동시에 접하면서 C_k 보다 큰 원을 C_{k+1} 이라 하자. 원 C_3 의 넓이를 6, 원 C_9 의 넓이를 48, 원 C_k 의 넓이를 S_k 라 할 때, $\sum_{k=1}^5 S_{2k-1}$ 의 값은? ($k = 1, 2, 3, \dots$) [5점]



- ① 93 ② 139 ③ 156 ④ 186 ⑤ 189

10. 이차함수 $f(x) = \sum_{k=1}^n \left\{ x - \frac{1}{k(k+1)} \right\}^2$ 이 $x = g(n)$ 에서 최솟값을 가질 때, $g(10)$ 의 값은? (n 은 자연수) [5점]
- ① $\frac{1}{101}$ ② $\frac{1}{51}$ ③ $\frac{1}{11}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

11. 그림과 같은 방법으로 성냥개비를 쌓아 완성된 계단 모양 한 개를 만드려고 한다. 전체 성냥개비가 1000개일 때, 만들 수 있는 계단 모양에서 밑면에 놓인 성냥개비의 개수는? [5점]

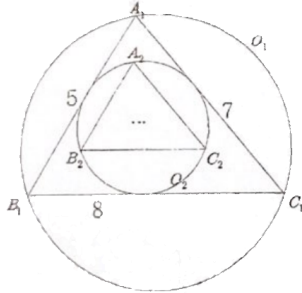


- ① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

12. 양의 실수 x 에 대하여 $x - [x], [x], x$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $x - [x]$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [6점]

- ① $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{-1\sqrt{6}}{2}$

13. 아래 그림과 같이 원 O_1 내부에 각 변의 길이가 5, 7, 8인 삼각형 $A_1B_1C_1$ 이 내접하고, 다시 삼각형 $A_1B_1C_1$ 내부에 원 O_2 가 내접하고 삼각형 $A_1B_1C_1$ 과 닮은 삼각형 $A_2B_2C_2$ 가 내접한다. 이렇게 반복해서 원과 삼각형이 내접하였을 때, 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 둘레의 길이는? [6점]



- ① $\frac{20}{7}$ ② $\frac{40}{7}$ ③ $\frac{60}{7}$ ④ $\frac{80}{7}$ ⑤ $\frac{100}{7}$

14. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = m$ (m 은 정수),

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n : \text{짝수}) \\ 3a_n + 1 & (a_n : \text{홀수}) \end{cases}$$

이 성립한다. $a_6 = 1$ 일 때, m 의 값으로 가능한 모든 정수의 합은? (단, $a_n > 0$) [6점]

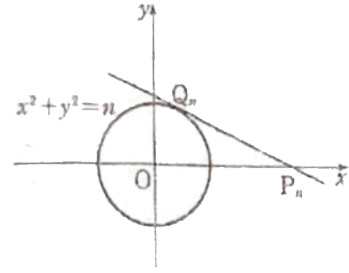
- ① 32 ② 36 ③ 37 ④ 39 ⑤ 41

서답형

단답형 1. 다음 수열의 합을 구하시오. [5점]

$$1 + (1+2) + (1+2+4) + \cdots + (1+2+4+\cdots+2^8)$$

단답형 2. 자연수 n 에 대하여 $P_n(2n, 0)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = n$ 에 접선을 그을 때, 그 접점을 Q_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^5 \overline{P_n Q_n}^2$ 의 값은?
(단, 점 Q_n 은 제 1사분면 위의 점이다.) [5점]



단답형 3. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 부등식 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$ 가 성립함이 알려져 있다. 다음은 이 사실을 이용하여 n 이 6 이상의 자연수일 때, 부등식 $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n!$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. ($n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$) [총 10점]

<증명>

- (1) $n = 6$ 일 때, $3^6 = 729$, $6! = 720$ 이므로 성립한다.
 (2) $n = k$ ($k \geq 6$)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} &= \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{(k+1)^k}{k^k} \cdot \boxed{\text{(가)}} \\ &= \frac{k+1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \cdot \boxed{\text{(나)}} \\ &> \frac{k+1}{2} \cdot \boxed{\text{(다)}} = \boxed{} \end{aligned}$$

이므로 $n = k+1$ 일 때에도 성립한다.

- (1), (2)에 의하여 주어진 부등식은 6 이상의 모든 자연수에 대하여 성립한다.

- (1) 위의 증명 과정에서 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$ 라 할 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [5점]
 (2) (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $g(k)$, $h(k)$ 라 할 때, $g(4) + h(4)$ 의 값을 구하시오. [5점]

단답형 4. 자연수 n 에 대하여 함수 $y = \frac{|x|}{n}$ 의 그래프와 함수 $f(x) = |\sin \pi x|$ 의 그래프의 교점의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 의 값을 구하시오. [총 10점]

- (1) a_1 의 값을 구하시오. [5점]

- (2) $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 의 값을 구하시오.