

- ◆ 전체 : 선택형 16문항(70점), 서답형 5문항(30점)
 ◆ 배점 : 문항 옆에 배점 표시
 ◆ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ 일 때, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x+12)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 N 이라 하자. $M-N$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

i) $2x+12 \geq 0 \Rightarrow x \geq -6$

ii) 감소함수 이므로

$$M_{\text{최대}} = \log_{\frac{1}{2}}(2(-2)+12) = \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$

$$N_{\text{최소}} = \log_{\frac{1}{2}}(2-2+12) = \log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$$

$$\therefore M-N = -3 - (-4) = 1$$

2. 둘레의 길이가 20인 부채꼴의 넓이의 최댓값은?

- ① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

i) $20 = 2r + l \Rightarrow l = 20 - 2r$

ii) $S = \frac{1}{2}rl$

$$= \frac{1}{2}r(20-2r)$$

$$= r(10-r)$$

이차함수의 대칭성에 의해

$$S_{\text{최대}} = 5(10-5) = 25$$

3. $a > 1$ 일 때, 다음을 만족시키는 실수 k 의 값은?

$$\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[5]{a^6} \times \sqrt{a^6} \div \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4} \times a^3} = a^k$$

- ① $\frac{17}{15}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{32}{15}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

$$a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{6}{5}} \times a^{\frac{6}{2}} \div a^{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}} = a^k$$

$$= a^{\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + 1 - (\frac{4}{5} + \frac{3}{5})} = a^k$$

$$\therefore k = \frac{10+6+15-4-9}{15}$$

$$= \frac{18}{15}$$

$$= \frac{6}{5}$$

4. 모든 실수 x 에 대해 $\log_{(a-1)}(7x^2+2ax+a)$ 가 정의되도록 정수 a 를 정할 때, 만족하는 모든 정수 a 의 합은?

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

i) $a-1 \neq 1, a-1 > 0$

ii) $7x^2+2ax+a > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Delta/4 = a^2 - 7a < 0$$

$$a(a-7) < 0$$

$$0 < a < 7$$

$$\therefore a \neq 2, 1 < a < 7$$

$$\therefore a = 3, 4, 5, 6$$

$$\therefore \text{합} = 18$$

5. 자외선이 어느 필름을 한 장 통과할 때마다 통과하기 전 양의 90%가 차단된다고 한다. 자외선이 n 장의 필름을 통과하면 맨 처음 자외선 양의 99.99%가 차단될 때, 자연수 n 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

$$A \left(\frac{10}{100} \right)^n = A \cdot \frac{0.01}{100}$$

$$\left(\frac{1}{10} \right)^n = \left(\frac{1}{10} \right)^4$$

$$\therefore n = 4$$

6. 모든 양의 실수 x 에 대하여 $x^{\log x} \geq kx^2$ 가 성립하도록 k 값을 정할 때, k 의 최댓값은? (단, k 는 양의 실수)

- ① 10^{-4} ② 10^{-3} ③ 10^{-2} ④ 10^{-1} ⑤ 1

$$i) x > 0$$

$$ii) (\log x)^2 \geq \log k + 2 \log x \quad (\because x > 1)$$

$$\text{let } \log x = t \quad (x > 0)$$

$$t^2 \geq \log k + 2t$$

$$t^2 - 2t - \log k \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\therefore b/4 = 1 + \log k \leq 0$$

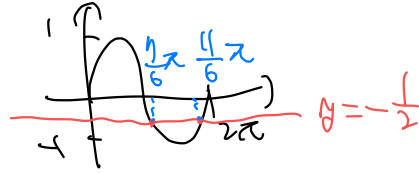
$$\log k \leq \log \frac{1}{10}$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{10} \quad (\because x > 1)$$

7. $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식 $4\sin x + 2 \leq 0$ 의 해가 $\alpha \leq x \leq \beta$ 일 때, $\cos \frac{\alpha + \beta}{3}$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

$$\sin x \leq -\frac{1}{2}$$



$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \cos \frac{\alpha + \beta}{3} = \cos \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}}{3}$$

$$= \cos \pi$$

$$= -1$$

8. 어느 기업의 매출액이 매년 10%씩 늘어난다고 할 때, 이 기업의 매출액이 현재의 4배 이상이 되는 것은 최소 몇 년 후인가? (단, $\log 1.10 = 0.04$, $\log 2 = 0.30$ 으로 계산한다.)

- ① 8년 후 ② 11년 후 ③ 15년 후
④ 19년 후 ⑤ 22년 후

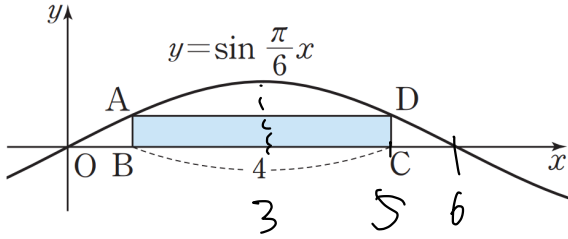
$$A \left(\frac{110}{100} \right)^n \geq 4A$$

$$n \log 1.1 \geq 2 \log 2$$

$$0.04 n \geq 0.6$$

$$n \geq 15$$

9. 다음 그림과 같이 함수 $y = \sin \frac{\pi}{6}x$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 직사각형 $ABCD$ 가 내접한다. $\overline{BC} = 4$ 일 때, 직사각형 $ABCD$ 의 넓이는?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$i) 주기 = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{6}|} = 12$$

$$ii) CD = \sin \frac{\pi}{6} \cdot 5 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

10. 1이 아닌 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 $\log_a b = \log_b a$ 일 때, $4a + 9b$ 의 최솟값은?

- ① 6 ② 12 ③ 13 ④ 36 ⑤ 72

$$\frac{\log b}{\log a} = \frac{\log a}{\log b}$$

$$(\log a)^2 = (\log b)^2$$

$$\log a = \pm \log b$$

$$\therefore a = b \text{ or } b^{-1}$$

$$i) a = b \text{ 일 때}$$

$$2\frac{1}{2} (\because a \neq b)$$

$$ii) a = \frac{1}{b} \text{ 일 때}$$

$$4a + 9b = 4 \cdot \frac{1}{b} + 9b$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{4}{b} \cdot 9b} \quad (\because \text{산술. 기하})$$

$$= 12$$

11. $0 < \theta < \pi$ 이고 각 θ 와 각 4θ 를 나타내는 동경이 일치할 때, 각 θ 의 크기는?

- ① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{5}\pi$ ③ $\frac{3}{5}\pi$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{4}{5}\pi$

$$4\theta - \theta = 0^\circ + 360^\circ \times n$$

$$3\theta = 360^\circ \times n$$

$$\theta = 120^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$$

12. 예각삼각형 ABC 에 대한 다음 <보기>중 옳은 것만을 있는 대로 모두 고른 것은?

<보기>

$$\neg. \cos \frac{A+B}{2} = -\sin \frac{C}{2}$$

$$\neg. \sin(A+B) - \sin C = 0$$

$$\neg. \tan A + \tan(B+C) = 0$$

- ① \neg ② \neg ③ \neg
④ \neg, \neg ⑤ \neg, \neg

$$\neg. A+B+C = 180^\circ$$

$$A+B = 180^\circ - C$$

$$\therefore \cos \frac{A+B}{2} = \cos \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \sin \frac{C}{2}$$

$$\neg. \sin(A+B) - \sin C = \sin C - \sin C = 0$$

$$\neg. \tan A + \tan(B+C) = \tan A + \tan A = 0$$

13. $(n^2 - 20n + 91)$ 의 $(n^2 + n)$ 제곱근 중에서 서로 다른 2개의 실수가 존재하도록 하는 자연수 n 의 개수는? (단, $1 \leq n \leq 50$)

- ① 40 ② 41 ③ 42 ④ 43 ⑤ 44

* 양수인 제곱근 제곱근

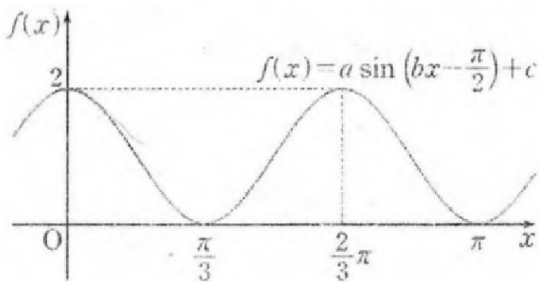
$$n^2 - 20n + 91 > 0$$

$$n < 7 \text{ or } n > 13$$

ii) $n(n+1)$ 은 제곱수

$$\therefore n \text{ or } n+1 = 6 + 3n = 43$$

14. 함수 $f(x) = a \sin\left(bx - \frac{\pi}{2}\right) + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값은? (단, $b > 0$)



- ① 0 ② 1 ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 2

$$i) T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \quad \therefore b = 3 \quad (\because b > 0)$$

$$ii) a = 1 \text{ or } -1$$

$$iii) c = 1$$

$$\therefore f(x) = a \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0$$

$$a = 1$$

$$\therefore f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

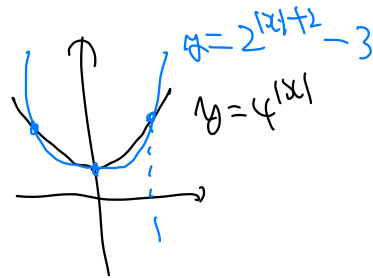
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1$$

15. 방정식 $4^{|x|} = 4 \times 2^{|x|} + k$ 의 서로 다른 실근이 3개가 되도록 실수 k 를 정할 때, 실수 k 의 값은?

- ① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

$$f(x) = 4^{|x|}, \quad g(x) = 4 \cdot 2^{|x|} + k$$

$$= 2^{|x|+2} + k$$



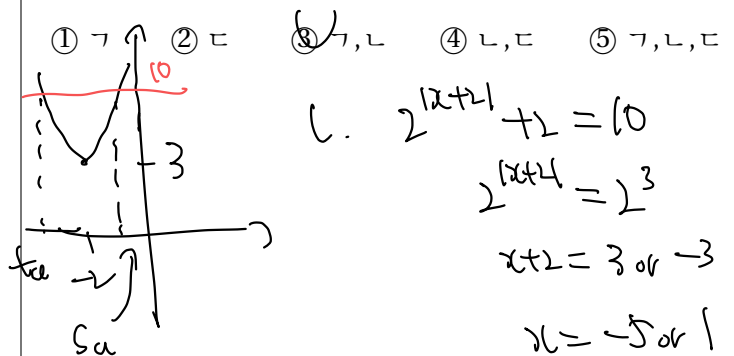
16. 함수 $f(x) = a^{|x+2|} + 2$ 과 $y = 10$ 의 교점 중 x 좌표가 가장 작은 것을 t_a , 가장 큰 것을 s_a 라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것만을 모두 고른 것은? (단, $t_a < s_a, a > 1$)

<보기>

㉠ $f(x) = 10$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

㉡ $a = 2$ 일 때, $s_2 - t_2 = 6$

㉢ $s_{\sqrt{6}} - t_{\sqrt{6}} < s_{\sqrt{7}} - t_{\sqrt{7}}$



$$a^{|x+2|} + 2 = 10$$

$$a^{|x+2|} = 8$$

$$|x+2| = 3 \text{ or } -3$$

$$x = -5 \text{ or } 1$$

$$\therefore s_2 - t_2 = 1 - (-5) = 6$$

㉣ $a = 8$ 일 때,

$$8^{|x+2|} + 2 = 10$$

$$8^{|x+2|} = 8$$

$$|x+2| = 1 \text{ or } -1$$

$$x = -1 \text{ or } -3$$

$$\therefore s_8 - t_8 = -1 - (-3) = 2$$

$\therefore a$ 가 클수록

$s_a - t_a$ 값은 감소한다

$$s_{\sqrt{6}} - t_{\sqrt{6}} > s_{\sqrt{7}} - t_{\sqrt{7}}$$

서답형

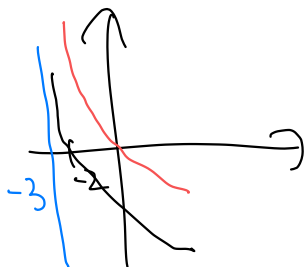
단답형 1. 이차방정식 $x^2 - ax + 8 = 0$ 의 두 근이 $100^{\log 2}, b$ 일 때, $\log_2(a-b)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 실수)

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad 100^{\log 2} \times b &= 8 & 100^{\log 2} &= 2^2 = 4 \\ 4b &= 8 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad 100^{\log 2} + b &= 4 + 2 = 6 = a \\ \therefore \log_2(a-b) &= \log_2(6-2) = \boxed{2} \end{aligned}$$

단답형 2. 함수 $y = \log_{\frac{1}{5}}(kx+3k)$ 가 제 3사분면을 지나지 않을 때, 양수 k 의 최댓값을 구하시오.

$$\begin{aligned} y &= \log_{\frac{1}{5}} k(x+3) \\ &= -\log_5(x+3) - \log_5 k \end{aligned}$$



(0,0) 지남 확인

$$0 \leq -\log_5 3 - \log_5 k$$

$$\log_5 k \leq \log_5 \frac{1}{3}$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{3} \quad (\because \frac{1}{5} > 1)$$

$$\therefore k_{\max} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

서술형 1. 집합 U 를 자연수 전체의 집합이라고 하자. 집합 $A = \{n \in U \mid \sqrt[5]{5^{2n}} \text{과 } (\sqrt[3]{7})^{200} \text{이 모두 자연수}\}$ 에 대하여 $n(A)$ 를 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오.

$$\text{(i)} \quad 5^{\frac{2n}{5}} \text{이 자연수} \Rightarrow n: 5 \text{의 배수}$$

$$\text{(ii)} \quad 7^{\frac{200}{n}} \text{이 자연수} \Rightarrow n: 200 \text{의 약수}$$

$$200 \begin{matrix} \swarrow 20 \swarrow 10 \swarrow 5 \\ \searrow 10 \searrow 5 \end{matrix} \quad 200 = 2^3 \cdot 5^2$$

$$\therefore n = 5^a \times 2^b$$

$$(a=0,1, \quad b=0,1,2,3)$$

$$\therefore n(A) = 2 \times 4 = \boxed{8}$$

서술형 2. 별의 밝기는 지구에서 그 별을 볼 때 밝기인 겉보기 등급과 그 별이 지구에서 10파섹의 거리에 있다고 가정했을 때 밝기인 절대 등급으로 나타낸다. 지구까지 거리가 x 파섹인 별의 겉보기 등급을 m , 절대 등급을 M 이라고 하면

$$m - M = 5 \log x - 5$$

인 관계가 성립한다고 한다. 겉보기 등급이 3, 절대 등급이 -6인 별의 지구까지 거리는 몇 파섹인지 구하시오.

(단, $\log 6.31 = 0.8$ 로 계산한다.)

$$3 - (-6) = 5 \log x - 5$$

$$\frac{14}{5} = \log x$$

$$\log x = 2 + 0.8$$

$$= \log 100 + \log 6.31$$

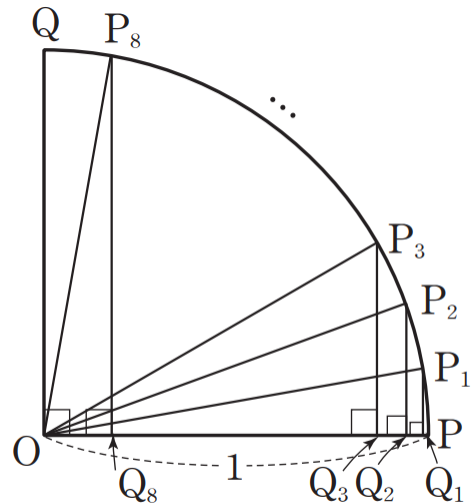
$$= \log 631$$

$$\therefore x = 631 \text{ 파섹}$$

서술형 3. 다음 그림과 같이 중심이 O , 반지름의 길이가 1인 사분원의 호 PQ 를 9등분하는 점을 차례로 P_1, P_2, \dots, P_8 이라고 하자. 점 P_1, P_2, \dots, P_8 에서 선분 OP 에 내린 수선의 발을 각각 Q_1, Q_2, \dots, Q_8 이라고 할 때,

$$\overline{OQ_1}^2 + \overline{OQ_2}^2 + \overline{OQ_3}^2 + \dots + \overline{OQ_8}^2$$

의 값을 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오.



$$\cos \theta_1 = \frac{\overline{OQ_1}}{1}$$

$$\therefore \overline{OQ_1}^2 = \cos^2 \theta_1 \quad \left(\theta_1 = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{9} \right)$$

$$\begin{aligned} \theta_8 &= \frac{\pi}{2} \times \left(1 - \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} \end{aligned}$$

같은 방법으로

$$\overline{OQ_1}^2 + \overline{OQ_2}^2 + \dots + \overline{OQ_8}^2$$

$$= \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \dots + \cos^2 \theta_8$$

$$= \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \dots + \sin^2 \theta_1$$

$$= 4$$