

◆ 전체 : 선택형 16문항(70점), 서답형 6문항(30점)

◆ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

◆ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같이 주어질 때, 1~2번 물음에 답하시오.

<보기>

2, 4, 8, 16, , 64, ...

1. 빈 칸에 들어갈 수를 올바르게 고르면?

- ① 20 ② 28 ☒ ③ 32 ④ 36 ⑤ 44

$$a=2 \quad r=2$$

$$a_n = 2^n$$

2. 128은 수열 $\{a_n\}$ 의 제 몇 항인가?

- ① 제6항 ☒ ② 제7항 ③ 제8항 ④ 제9항 ⑤ 제10항

$$a_n = 2^n = 128$$

$$= 2^7$$

$$\therefore n = 7$$

3. $\triangle ABC$ 에서 $a=4$, $A=45^\circ$ 일 때, 외접원의 넓이는?

- ① 4π ② 6π ☒ ③ 8π ④ 10π ⑤ 12π

$$\frac{4}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2R$$

$$R = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore S = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2$$

$$= 8\pi$$

4. $\triangle ABC$ 에서 $C = 120^\circ$, $a = 6$, $b = 10$ 일 때, c 의 값은?

- ① 15 ☒ ② 14 ③ 13 ④ 12 ⑤ 11

$$c^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ$$

$$= 36 + 100 - 120 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 146$$

$$= 14^2$$

$$\therefore c = 14 \quad (\because c > 0)$$

V 24.

5. 다음 중 합 $1+3+5+7+9$ 과 다른 것은?

① $\sum_{k=1}^5 (2k-1)$

② $\sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^5 2k$

③ $\sum_{k=1}^5 2k-5$

☒ ④ $\sum_{k=3}^7 (2k-5)$

⑤ $2 \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 1$

$$(\text{정답}) = 25$$

① $2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 5 = 25$

② $\frac{10 \cdot 11}{2} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} = 25$

③ $2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 5 = 25$

④ $2 \cdot \frac{1 \cdot 8}{2} - 2 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} - 5 \cdot 5 = 29$

⑤ $2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 5 = 25$

6. 자연수 k 에 대해 세 수 a_k, b_k, c_k 가 순서대로 등차수열을 이룬다. a_k, c_k 가 이차방정식 $x^2 - 2x - k = 0$ 의 서로 다른 두 근일 때, $\sum_{k=2}^{13} (a_k + b_k + c_k)$ 의 값을 구하면?

- ① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

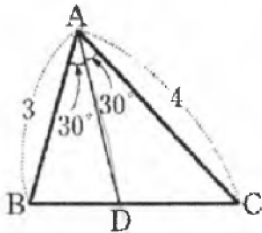
i) $2b_k = a_k + c_k = 2 \Rightarrow b_k = 1$

ii) $a_k + c_k = 2, a_k c_k = -k$

$\therefore a_k + b_k + c_k = 3$

$\sum_{k=2}^{13} (a_k + b_k + c_k) = 12 \cdot 3 = 36$

7. 다음 그림과 같은 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 3, \overline{AC} = 4, \angle BAD = \angle DAC = 30^\circ$ 일 때, \overline{AD} 의 길이는?



- ① $\frac{12\sqrt{3}}{7}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\frac{16\sqrt{3}}{7}$
④ $\frac{18\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{20\sqrt{3}}{7}$

$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot AD \cdot \sin 30^\circ$

$12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7 \cdot AD \cdot \frac{1}{2}$
 $\therefore AD = \frac{12\sqrt{3}}{7}$

8. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) = \frac{n^2}{7}$$

이 성립할 때, $\sum_{k=10}^{30} a_k$ 의 값은?

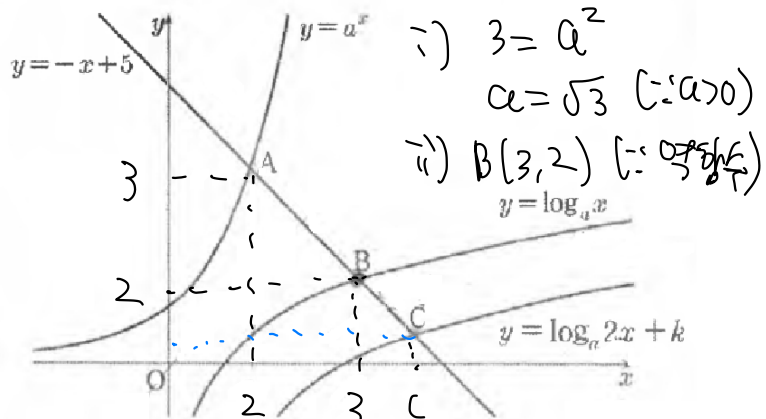
- ① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

i) $(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) = \sum_{k=1}^{3n} a_k = \frac{n^2}{7}$

ii) $n=10, n=3$ 각각 대입

$\sum_{k=10}^{30} a_k = \sum_{k=1}^{30} a_k - \sum_{k=1}^9 a_k$
 $= \frac{10^2}{7} - \frac{3^2}{7} = \frac{91}{7} = 13$

9. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 그림과 같이 직선 $y = -x + 5$ 가 세 곡선 $y = a^x, y = \log_a x, y = \log_a 2x + k$ 와 만나는 점을 각각 A, B, C 라 하자. 점 A 의 좌표가 $(2, 3)$ 이고, 세 점 A, B, C 의 x 좌표가 차례대로 등비수열을 이룰 때, k 의 값은?



- ① -4 ② $-\frac{7}{2}$ ③ -3 ④ $-\frac{5}{2}$ ⑤ -2

i) $3^2 = 2c \Rightarrow c = \frac{9}{2}$ ii) $y = \log_a 2x + k$ $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$ on the curve

Let (c, d)

$d = -c + 5$

$d = -\frac{9}{2} + 5$

$= \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{\frac{1}{2}} + k$

$\therefore k = -\frac{9}{2}$

10. 수열 $\{a_n\}$ 에 대해 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_n = -3n^2 + 52n + 5$ 일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

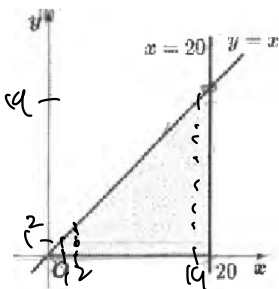
- ㉠ $a_5 = 25$ ㉡ $a_{n+1} - a_n = -6$
 ㉢ S_n 은 $n=9$ 에서 최댓값을 갖는다.

- ① ㉠ ② ㉡
 ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢
 ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

㉠) $a_1 = -3 + 52 + 5 = 54$ $= 25$

㉡) $a_n = S_n - S_{n-1}$ ㉢) $a_{n+1} - a_n = -6$
 $= -3n^2 + 52n + 5 - (-3(n-1)^2 + 52(n-1) + 5)$ ㉢) $55 > 6n$
 $= -6n + 55$ $\frac{55}{6} > n$
 $= -6n + 55 \geq 0$ $9.16 > n$
 \therefore 제 9항

11. 다음 그림과 같이 두 직선 $y=x$ 와 $x=20$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분에 속한 점 중에서 x, y 좌표가 모두 자연수인 점의 x 좌표를 모두 더한 값은? (정답 포함이 아니고 반대로)



- ① 2180 ② 2370 ③ 2580
 ④ 2870 ⑤ 2880

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 20 \cdot 20$
 $= \sum_{k=1}^{20} k^2$
 $= \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = 2870$

12. 첫째항과 공차가 모두 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. a_{10} 과 a_{11} 은 절댓값이 같고 부호가 반대일 때, $|S_n| > |S_{n+1}|$ 을 만족하는 자연수 n 의 개수를 구하면?

- ㉠ 10 ㉡ 11 ㉢ 13 ㉣ 14 ㉤ 15

㉠) $a + 9d = -(a + 10d)$

$2a = -19d$

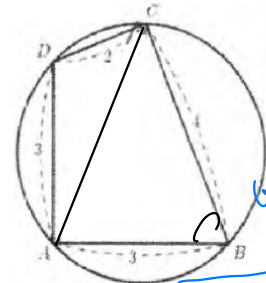
㉡) $S_{10} = \frac{10(a + a + 9d)}{2} = 10a + 45d$

$S_n = \frac{n(a + a + (n-1)d)}{2} = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$
 $= \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

$\therefore S_{20} = 0 \quad \therefore n = 10, 11, \dots, 19 \quad \therefore 10$ 개

13. 다음 그림과 같이 원에 내접하는 $\square ABCD$ 에서

$\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = 2$ 이고 $\overline{DA} = 3$ 일 때, $\square ABCD$ 의 넓이는? (단, B 는 예각이다.)



※ 참고:
 브레타공식

but $s = \frac{a+b+c+d}{2}$

$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

- ① $4\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$
 ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $8\sqrt{2}$

$AC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos B = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos B$

$4 + 12 \cos B = 16 - 24 \cos B$ (\therefore 4점짜리)

$36 \cos B = 12$

$\cos B = \frac{1}{3} \quad \therefore \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sin B + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sin B$

$= 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (\therefore 4점짜리)

$= 6\sqrt{2}$

수학 2차 고2

14. $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \dots \textcircled{7}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n=2$ 일 때, $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
(좌변) = (가), (우변) = (나)

따라서 $n=2$ 일 때, $\textcircled{7}$ 이 성립한다. (ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때,

$\textcircled{7}$ 이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

$n=k+1$ 일 때,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

이때 $k \geq 2$ 이므로

$$\left\{ 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \right\} - \left(2 - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{k(k+1)^2} > 0$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $\textcircled{7}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{7}$ 이 성립한다.

(가)= p , (나)= q , (다)= $f(k)$, (라)= $g(k)$ 라 할 때, $-\frac{f(p+q)}{g(p+q)}$ 의 값은?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{13}{4}$

$$i) f - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} - f + \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{-(k+1)+k}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{-(k+1)+k}{k(k+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{k(k+1)^2} < 0$$

$$\therefore g(k) = \frac{-1}{k(k+1)^2} = k$$

$$\therefore \frac{f}{g} = \frac{1}{k}$$

15. $\sum_{k=1}^{29} \log_{25} \{ \log_{k+1} (k+3) \} - \sum_{k=3}^{30} \log_{25} \{ \log_k (k+1) \}$ 의 값은?
① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

$$\log_{25} \left(\frac{\log 4}{\log 2} \times \frac{\log 5}{\log 3} - \dots - \frac{\log 31}{\log 29} \times \frac{\log 32}{\log 30} \right)$$

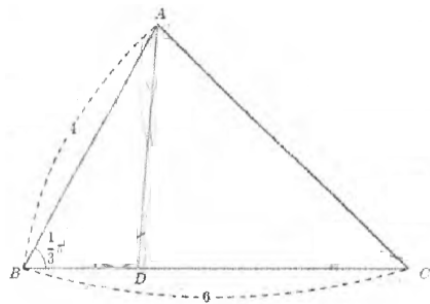
$$- \log_{25} \left(\frac{\log 4}{\log 3} \cdot \dots \cdot \frac{\log 31}{\log 30} \right)$$

$$= \log_{25} \left(\frac{\log 31}{\log 2} \cdot \frac{\log 32}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 31} \right)$$

$$= \log_{25} 5$$

$$= \frac{1}{2}$$

16. $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 6$ 인 $\triangle ABC$ 가 있다. \overline{BC} 위에 점 B 와 점 C 가 아닌 점 D 를 잡고, $\triangle ACD$ 의 외접원의 반지름의 길이를 r 라 하자. $r = \frac{3\sqrt{21}}{5}$ 일 때, $\overline{AD} = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값은? (단, p 와 q 는 서로소)



- ① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

$$i) \overline{AC}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 28$$

$$ii) \frac{\overline{AC}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{4}{\sin C}$$

$$\sin C = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$iii) \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{21}}{5}$$

$$\overline{AB} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{18}{5}$$

$$\therefore p+q = 5+18 = 23$$

서답형

단답형 1. $\sin A = 2 \cos B \sin C$ 를 만족시키는 $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 쓰시오.

사인법칙, 코사인법칙에 의해

$$\frac{a}{2R} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2ab} \cdot \frac{c}{2R}$$

$$(c+b)(c-b) = 0$$

$$\therefore c = b \quad (\because c+b \neq 0)$$

$$\boxed{\therefore b = c \text{ 인 이등변삼각형}}$$

단답형 2. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 + a_7 = 26$, $a_6 - a_4 = -12$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하시오.

$$(a+2d) + (a+6d) = 26$$

$$(a+5d) - (a+3d) = -12$$

$$2d = -12$$

$$d = -6, a = 39$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{10} &= a + 9d \\ &= 39 + 9(-6) \\ &= (-19) \end{aligned}$$

단답형 3. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 15$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = -7$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (4a_k - 2b_k - 5)$ 의 값을 구하시오.

$$4 \cdot 15 - 2 \cdot (-7) - 5 \cdot 10$$

$$= 60 + 14 - 50$$

$$= (24)$$

서답형인 경우 가급적 해답의 공식은 쓰지 말 것

서술형 1. $\triangle ABC$ 에서 $a = 8$, $b = 13$, $c = 7$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 풀이과정과 함께 구하시오.

$$i) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$= \frac{11}{13}$$

$$\sin A = \frac{4\sqrt{3}}{13}$$

$$ii) S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{13}$$

$$= (14\sqrt{3})$$

서술형 2. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = 9 \times 2^n - 9$ 일 때, $a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{13}$ 의 값을 풀이과정과 함께 구하시오.

i) let $a_n = ar^{n-1}$

$$a_{2n} = ar \cdot r^{2(n-1)} \quad (\because \text{공비} = r^2)$$

$$= ar^{2n-1}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} = \frac{ar(r^2)^n - 1}{r^2 - 1} = 9(2^n - 1)$$

$$\therefore r^2 = 2$$

$$r = \sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore \frac{ar}{r^2 - 1} = 9$$

$$a = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore a_n = \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$$

ii) $a_{2n+1} = 9\sqrt{2} \cdot 2^{n-1}$

$$\sum_{k=1}^6 a_{2k+1} = \frac{9\sqrt{2}(2^6 - 1)}{2 - 1}$$

$$= 567\sqrt{2}$$

서술형 3. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열일 때, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = 3$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값을 풀이과정과 함께 구하시오.

let $a_n = 3n - 2$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{3k+1} + \sqrt{3k-2}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{3k+1} - \sqrt{3k-2}}{3k+1 - (3k-2)}$$

$$= \frac{1}{3} [(\cancel{\sqrt{4}} - \sqrt{1}) + (\cancel{\sqrt{7}} - \cancel{\sqrt{4}}) + \dots + (\sqrt{3n+1} - \cancel{\sqrt{3n-2}})]$$

$$= \frac{1}{3} (\sqrt{3n+1} - 1) = 3$$

$$\sqrt{3n+1} = 10$$

$$3n+1 = 100$$

$$n = 33$$