

◆ 전체 : 선택형 14문항(70점), 서답형 5문항(30점)

◆ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

◆ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 다항식 $(x^2+2x+4)(3x^2+x-3)$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$$\begin{aligned} & x^2 \times x + 2x \times 3x^2 \\ & = 1x^3 \end{aligned}$$

2. 다항식 $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$P(x) = (x+2)(Q(x)) + R$$

$$\begin{aligned} R &= P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - (-2) + 1 \\ &= -8 + 8 + 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

3. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^3 + x^2 - x + 5$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\begin{array}{r} x \\ x^2+x-1 \overline{) x^3+x^2-x+5} \\ \underline{x^3+x^2-x} \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3+x^2-x+5 &= (x^2+x-1)x + 5 \\ &= 0 + 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

4. 다항식 $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ 의 인수가 아닌 것은?

- ① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$ ⑤ $x-3$

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & 1 & 0 & -7 & -6 \end{array} \right. \\ -1 \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \\ & -1 & 1 & 6 & \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & -6 & 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} x^3 - 7x - 6 \\ x^2 - x - 6 \\ \end{array}$$

$$(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$$

반복조립제법

5. x 에 관계없이 등식 $(x-2)^3 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 가 성립할 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $b-a+c$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\begin{aligned}(x-2)^3 &= x^3 - 3x^2 + 2 + 3x - 2^2 - 2^3 \\ &= x^3 - 6x^2 + (2x - 8)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 12 & -8 \\ & & 1 & -5 & 7 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 7 & -1 = c \\ & & 1 & -4 & \\ \hline 1 & 1 & -4 & 3 & = b \\ & & 1 & & \\ \hline & & & -3 & = a \end{array}$$

$$\therefore b-a+c = 3 - (-3) - 1 = 5$$

6. 다항식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + a$ 가 x 에 대한 이차식의 완전제곱꼴로 인수분해 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + a$$

$$\text{let } x^2 + 5x = t$$

$$(t+4)(t+6) + a$$

$$= t^2 + 10t + 24 + a$$

$$\therefore 24 + a = \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$$

$$a = 1$$

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(m-a)x + (a^2 + 4a + n) = 0$ 이 실수 a 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 m, n 에 대하여 $m+n$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$= a(-2m-4) + m^2 - n = 0$$

a 에 대한 항등식이므로

$$-2m-4=0, \quad m^2-n=0$$

$$m=-2, \quad n=4$$

$$\therefore m+n = -2+4 = 2$$

8. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2+k)x + k^2 - 5k + 3 = 0$ 의 서로 다른 두 근을 α, β 라 할 때, $|\alpha - \beta| = 1$ 이 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합을 구하면?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$$i) \alpha + \beta = -2-k$$

$$\alpha\beta = k^2 - 5k + 3$$

$$ii) (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$1 = (-2-k)^2 - 4(k^2 - 5k + 3)$$

$$1 = -3k^2 + 24k - 8$$

$$\therefore 3k^2 - 24k - 9 = 0$$

$b_k > 0$ 이므로 k 는 두 실근을 가지므로

$$k_1 + k_2 = -\frac{-24}{3} = 8$$

9. 이차방정식 $x^2 + ax + 5 = 0$ 이 두 실근 α, β 를 가질 때, 두 실수 $\alpha - 1, \beta - 1$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2 + 4x + 8 = 0$ 이다. 이때, 상수 a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

i) $\alpha + \beta = -a$

$\alpha\beta = 5$

ii) $\alpha - 1 + \beta - 1 = -4 \rightarrow \alpha + \beta = -2 = -a$

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 8 \quad \therefore a = 2$

7) n 이 홀수인 경우 $W^{2n} < 0$ 이다.

8) n 이 짝수인 경우 $W^{2n} > 0 \therefore n$ 은 6의 배수

10. 이차방정식 $(x - 2)(x + 3) = 3x$ 의 서로 다른 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{(\alpha - 2)(\beta - 2)(\alpha + 3)(\beta + 3)}{-6}$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

i) $(\alpha - 2)(\alpha + 3) = 3\alpha$ ii) $x^2 + x - 6 = 3x$

$(\beta - 2)(\beta + 3) = 3\beta$ $x^2 - 2x - 6 = 0$

$\therefore \alpha\beta = -6$

$\therefore \left(\frac{3\alpha}{4}\right) = \frac{3\alpha \cdot 3\beta}{-6}$

$= \frac{9 \cdot (-6)}{(-6)}$

$= 9$

11. 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 ω 라 하자. n 이 세 자리 자연수일 때, $(\omega^2 + 1)^{3n} \times (\omega - 1)^n$ 의 값이 양의 실수가 되도록 하는 n 의 개수는?

- ① 30 ② 60 ③ 90 ④ 120 ⑤ 150

i) $\omega^2 - \omega + 1 = 0$

ii) $3\omega^2 - 3\omega + 3 = 0$

$0 = (\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1) \quad \therefore 3\omega^2 - 3\omega = -3$

$= \omega^3 + 1$

iii) $1 - \omega = -\omega^2$

$\therefore \omega^3 = -1 \Rightarrow \omega^6 = 1$

iv) $\left(\frac{3\alpha}{4}\right) = \left[(\omega^6 + 3\omega^4 + 3\omega^2 + 1)(\omega - 1)\right]^n$

$= \left[(1 - 3\omega + 3\omega^2 + 1)(\omega - 1)\right]^n$

$= (1 - \omega)^n$ $6 \sqrt[6]{102} \quad 6 \sqrt[6]{996}$
 $= (-\omega^2)^n$ $\frac{6}{6} \quad \frac{6}{39}$

$\therefore 102 \sim 996$ 까지 6의 배수 개수
 $= 166 - 17 + 1 = 150$

12. 약수의 개수가 5개인 100이하의 서로 다른 자연수 α, β 에 대하여 x^2 의 계수가 1인 이차함수 $y = f(x)$ 의 x 축과의 교점의 x 좌표가 $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}$ 일 때, $f(0)$ 의 값은?

- ① 4 ② 9 ③ 25 ④ 36 ⑤ 49

i) $5 = 4 + 1$

$\alpha, \beta = a^4, b^4$

$2^4 = 16 \quad 3^4 = 81 \quad 4^4 > 100$

ii) $f(x) = (x - \sqrt{\alpha})(x - \sqrt{\beta})$

$f(0) = \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{2^4} \sqrt{3^4}$

$= 4 \cdot 9$

$= 36$

13. 자연수 a, b, c 에 대하여 $(a+b+c)^3 - (-a+b+c)^3 - (a-b+c)^3 - (a+b-c)^3 = 48$ 이 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

let $b+c = m$ $b-c = n$

$$(a+m)^3 - (m-a)^3 = a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3 - (m^3 - 3m^2a + 3ma^2 - a^3)$$

$$= 2a^3 + 6am^2$$

$$-(a-n)^3 - (a+n)^3 = -(a^3 - 3a^2n + 3an^2 - n^3) - (a^3 + 3a^2n + 3an^2 + n^3)$$

$$= -2a^3 - 6an^2$$

$$\therefore \binom{2}{2} = 6a(m^2 - n^2) = 48 \quad \therefore a, b, c \text{ 중}$$

$$a(m+n)(m-n) = 8 \quad \text{or } a+b+c = 2$$

$$a \cdot 2b \cdot 2c = 8 \quad \therefore a+b+c$$

$$abc = 2 \quad = 1+1+2 = 4$$

14. 자연수 $n^3 - 4n^2 + 7n - 6$ 가 $(n-2)(n-3)$ 의 배수가 되도록 하는 자연수 n 의 최댓값을 구하면?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 7 & -6 \\ & & 2 & -4 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & 6 & \end{array}$$

$$\therefore n^3 - 4n^2 + 7n - 6 = (n-2)(n-3)(n+1) + 6$$

$$\therefore 6 \mid n-3 \text{ or } n+1$$

i) $n-3 = 6$ 일때 $n=9$ ii) $n-3 = 3$ 일때 $n=6$ iii) $n-3 = 2$ 일때 $n=5$

$$\therefore n_{\max} = 9$$

서답형

단답형 1. 다항식 $x^2 - 2x + 2$ 를 복소수 범위에서 인수분해하시오.

$$x = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

$$\therefore (x - (1+i))(x - (1-i))$$

$$= (x-1-i)(x-1+i)$$

단답형 2. $x = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 일 때, $x^{2018} + x^{2020} + x^{2022}$ 의 값을 구하시오.

$$x^2 = \frac{1+2i+i^2}{2} = i$$

$$\binom{2}{2} = i^{1009} + i^{1010} + i^{1011}$$

$$= i^9 + i^2 + i^3$$

$$= (-1)$$

서술형 1. 다항식 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 8이고 $x-3$ 로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이때 $P(x)$ 를 x^2-5x+6 으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(2a) + 8 \\ P(x) &= (x-3)(2a) + 11 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} P(2) &= 8 \\ P(3) &= 11 \end{aligned}$$

$$P(x) = (x-2)(x-3)(2a) + cx + b$$

$$\therefore P(2) = 2a + b = 8$$

$$P(3) = 3a + b = 11$$

$$a = 3 \quad b = 2$$

$$\therefore \text{답} \boxed{3x+2}$$

$$\text{iii)} \quad \ell: y = x + \frac{13}{2}$$

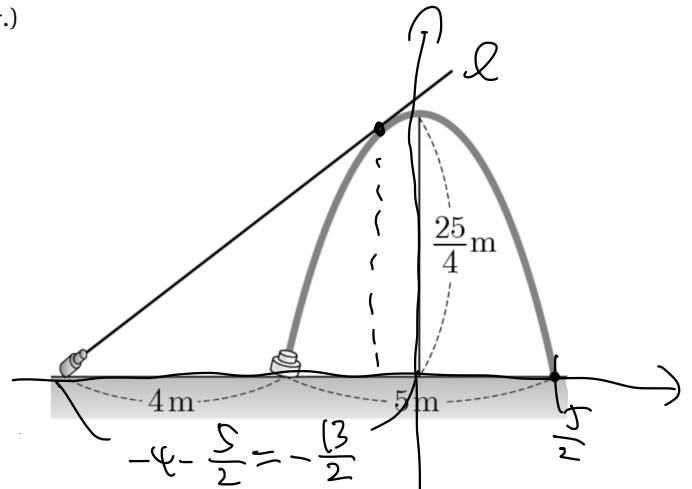
$$f(x) = -x^2 + \frac{25}{4}$$

$$x + \frac{13}{2} = -x^2 + \frac{25}{4}$$

$$0 = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \quad y = -\frac{1}{2} + \frac{13}{2} = \boxed{6}$$

서술형 2. 다음 그림과 같이 어느 호수에 설치된 분수의 한 물줄기는 포물선 모양으로 나타나고, 이 물줄기의 시작 지점과 끝 지점 사이의 거리는 5m, 수면으로부터의 최고 높이는 $\frac{25}{4}$ m이다. 물줄기의 시작 지점으로부터 뒤쪽으로 4m 떨어진 지점에서 쏘아 올린 레이저가 이 물줄기와 맞닿을 때, 레이저와 물줄기가 만나는 지점의 수면으로부터의 높이를 구하시오. (단, 물줄기의 시작 지점과 끝 지점, 레이저는 한 직선 위에 있다.)



$$\text{i)} \quad \text{let } f(x) = a\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$f(0) = a \cdot \left(-\frac{25}{4}\right) = \frac{25}{4} \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore f(x) = -x^2 + \frac{25}{4} \quad \dots (1)$$

$$\text{ii)} \quad \text{let } \ell: \left(-\frac{13}{2}, 0\right), m$$

$$y = m\left(x + \frac{13}{2}\right) \quad \dots (2)$$

①, ② 를 연립하고 판별식 이용

$$-x^2 + \frac{25}{4} = mx + \frac{13}{2}m$$

$$0 = x^2 + mx + \frac{13}{2}m - \frac{25}{4}$$

$$D = m^2 - 4\left(\frac{13}{2}m - \frac{25}{4}\right)$$

$$= m^2 - 26m + 25 = 0$$

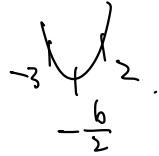
$$\therefore m = 1 \text{ or } 25 \quad (\because m \in \mathbb{R})$$

서술형 3. $-3 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 + bx - 3$ 의 최솟값이 -4 , 최댓값이 M 이다. 상수 b, M 에 대하여 $b^2 + M$ 의 최솟값을 구하시오.

$$y = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} - 3$$

$$= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 3$$

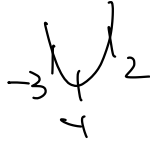
i) $-3 \leq -\frac{b}{2} \leq 2$ 일 때



$$y_{\min} = \left(-\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} - 3 = -4$$

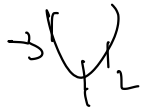
$$b^2 = 4$$

7) $b = 2$ 일 때



$$y_{\max} = f(2) = 2^2 + 4 - 3 = 5$$

8) $b = -2$ 일 때



$$y_{\max} = f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) - 3 = 12$$

$$\therefore M_{\max} = 5$$

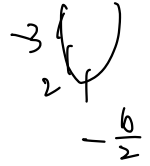
ii) $-\frac{b}{2} \leq -3$ 일 때



$$y_{\min} = f(2) = 2^2 - 3b - 3 = -4$$

$$b = \frac{10}{3} \quad \text{일 때} \quad (\because b \geq 6)$$

iii) $2 \leq -\frac{b}{2}$ 일 때



$$y_{\min} = f(2) = 2^2 + 2b - 3 = -4$$

$$b = -\frac{5}{2} \quad \text{일 때} \quad (\because b \leq -4)$$

$$\therefore b^2 + M_{\max} = 4 + 5 = 9$$