

◆ 전체 : 선택형 14문항(70점) 서답형 7문항(30점)

◆ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

◆ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. $3x^2 + 11y^2 = 15$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 는? (단, $y \neq 0$) [4.3점]

- ① ☒ $-\frac{3x}{11y}$ ② $-\frac{11x}{3y}$ ③ $-\frac{x}{5y}$ ④ $\frac{3x}{11y}$ ⑤ $\frac{11x}{3y}$

$$6x + 22y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{11y}$$

2. 부정적분 $\int (\csc \theta \cot \theta - \csc^2 \theta) d\theta$ 를 옳게 구한 것은? [4.4점]

- ① $\frac{-\sin \theta + 1}{\cos \theta} + C$ ② $\frac{-\cos \theta - 1}{\sin \theta} + C$
 ③ $\frac{\sin \theta - 1}{\cos \theta} + C$ ④ $\frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} + C$
 ⑤ ☒ $\frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} + C$

$$\begin{aligned} * [\csc \theta]' &= -\csc \theta \cot \theta \\ [\cot \theta]' &= -\csc^2 \theta \end{aligned}$$

$$-\csc \theta + \cot \theta + C$$

$$= \frac{-1 + \cos \theta}{\sin \theta} + C$$

3. $\int_1^2 x e^x dx = a e^2 + b e + c$ (a, b, c 는 상수) 일 때, $a + b + c$ 의 값은? [4.6점]

- ① 4 ② 3 ③ 2 ④ ☒ 1 ⑤ 0

$$\begin{aligned} \int_1^2 x e^x dx &= [x e^x]_1^2 - [e^x]_1^2 \\ &= 2e^2 - e - (e^2 - e) \\ &= e^2 \end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c = 1$$

4. 함수 $f(x) = (2 - ax + x^2)^2$ 의 $x = 1$ 에서의 미분계수가 4를 만족하는 모든 실수 a 의 값의 합은? [4.7점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ ☒ 5

$$f(x) = 2(2 - ax + x^2)(-a + 2x)$$

$$f'(1) = 2(3 - a)(2 - a) = 4$$

$$a^2 - 5a + 6 = 2$$

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$a > 0 \text{ 이므로}$$

$$\therefore a + b = 5$$

5. 함수 $y = \frac{x}{\cos x}$ 를 미분한 것은? [4.8점]

- ① $\sec x(1 - x \tan x)$
 ② ☒ $\sec x(1 + x \tan x)$
 ③ $\sec x(1 + x \cot x)$

$$y' = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$④ 1 - x \tan x$$

$$= \sec x + x \sec x \tan x$$

$$⑤ 1 + x \tan x$$

6. 함수 $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$ 가 $x=3$ 에서 극솟값 $1\frac{1}{2}$ 가질 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은? [4.8점]

- ① -10 ② -7 ③ -4 ④ -1 ⑤ 2

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x-1) - (x^2+ax+b)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - a - b}{(x-1)^2}$$

i) $f'(3) = \frac{9-6-a-b}{2^2} = 0$ ii) $f(x) = \frac{x^2-5x+8}{x-1}$

$\therefore a+b=3$ $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

iii) $f(3) = \frac{9+3a+b}{2} = 1$ $= \frac{(x-3)(x+4)}{(x-1)^2}$

$\therefore 3a+b=-7$

$\therefore 2a = -10$ $\frac{x-1-3}{f(x)+0-0+}$

$a = -5$ $\therefore f(x)_{3-4} = f(4)$

$b = 8$ $= \frac{1+5+8}{2} = -7$

7. 매개변수로 나타낸 함수 $x = t^2 e^{-t}$, $y = t \ln \frac{1}{t}$ 에서 $t=1$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [4.9점]

- ① -e ② -e² ③ 0 ④ e² ⑤ e

$$\frac{dy}{dt} = \ln \frac{1}{t} + t \cdot \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \ln \frac{1}{t} - 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 2te^{-t} + t^2(-e^{-t})$$

$$\therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \frac{\ln 1 - 1}{\frac{2}{e} - \frac{1}{e}} = -1 \cdot e = -e$$

8. $\int_1^7 \frac{4}{(2x-1)(2x+1)} dx + \int_1^{15} \frac{1}{x} dx$ 의 값은 $\ln a$ 이다. a 의 값은? [5점]

- ① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

i) $\frac{4}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1}$ $A+B=0$

$= \frac{(2A+2B)x + A-B}{(2x-1)(2x+1)}$ $A+B=4$

$2A=4$ $A=2$ $B=-2$

$$\therefore \int_1^7 \left(\frac{2}{2x-1} + \frac{-2}{2x+1} \right) dx = \left[\ln|2x-1| \right]_1^7 - \left[\ln|2x+1| \right]_1^7$$

$$= \ln 13 - (\ln 15 - \ln 3)$$

$$= \ln \frac{13}{5}$$

ii) $\int_1^{15} \frac{1}{x} dx = \left[\ln(x) \right]_1^{15}$ $\therefore \ln 15 = \ln \frac{13}{5} + \ln 15$

$= \ln 15$ $= \ln 39$ $\therefore (39)$

9. 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)g(e) = \frac{b}{a}$ 이다. $a+b$ 의 값은? [5.1점]

(단, a, b 는 서로소인 자연수)

<조건>

(가) $f'(x) = 3x^2 \ln x$

(나) $g(x) = \int_1^x \ln t dt$

(다) $f(3) = 27 \ln 3$

- ① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

i) $f(x) = x^3 \ln x - \int x^2 dx$ $D \quad I$

$= x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C$ $+ \ln x \quad 3x^2$

$f(3) = 27 \left(\ln 3 - \frac{1}{3} \right) + C = 27 \ln 3$ $- \frac{1}{x} \quad x^3$

$C = 9$

$$\therefore f(1) = -\frac{1}{3} + 9 = \frac{26}{3}$$

ii) $g(e) = \left[x \ln x - x \right]_1^e = e - e - (-1) = 1$

$$\therefore f(1)g(e) = \frac{26}{3} \cdot 1 = \frac{b}{a}$$

$$\therefore a+b = 3+26 = 29$$

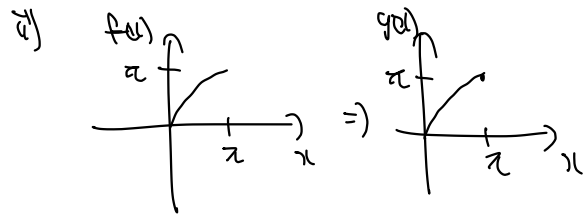


10. 함수 $f(x) = x + \sin x$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = (f \circ f)(x)$ 로 정의할 때, ~~함수~~ $g(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [5.2점]

방정식 (원본 보기)

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

i) $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$ $f'(x) = 1 + \cos x$
 $= (1 + \cos(x + \sin x))(1 + \cos x) > 0 \quad (x \in (0, \pi))$



* $x > \pi$ 일때 $x > 2$ 이므로 $g(x) > 0$

$\therefore g(x) = 0$ 일 때는 $x = 0$ 으로부터 1개.

11. 곡선 $y = \ln \frac{1}{x}$ 위의 점 A에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최댓값은? [5.5점]

(단, 점 A는 제1사분면 위에 있다.)

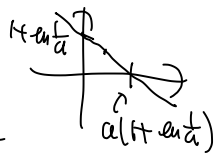
- ① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{2}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e}$ ④ $\frac{2}{e}$ ⑤ $\frac{3}{e}$

$y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x} < 0 \quad (\because x > 0)$

i. $(a, \ln \frac{1}{a})$ $m = -\frac{1}{a}$

$y - \ln \frac{1}{a} = -\frac{1}{a}(x - a)$

$y = -\frac{1}{a}x + 1 + \ln \frac{1}{a}$



$\begin{cases} \frac{1}{a}x_2 = 1 + \ln \frac{1}{a} \\ x_2 = a + a \ln \frac{1}{a} \end{cases}$

$\therefore \ln \frac{1}{a} = 1 \text{ or } -1$
 $\frac{1}{a} = e \text{ or } \frac{1}{e}$
 $a = \frac{1}{e} \text{ or } e$

$\therefore S = \frac{1}{2} a (1 + \ln \frac{1}{a})^2$

$S' = \frac{1}{2} (1 + \ln \frac{1}{a})^2 + \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{a} (1 + \ln \frac{1}{a}) \cdot \frac{-1}{a}$

$= (1 + \ln \frac{1}{a}) (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} (\ln \frac{1}{a} + 1) (\ln \frac{1}{a} - 1) = 0$

$\therefore S_{\max} = \frac{1}{2e} \cdot 2^2 \text{ or } \frac{e}{2} \cdot 0 = \left(\frac{2}{e}\right)$

12. 열린 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \tan^2 x + \cos^2 x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(\frac{3}{2})$ 의 값은? [5.5점]

- ① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ 5

i) $\frac{3}{2} = \tan^2 x + \cos^2 x$

$x = \frac{\pi}{4}$

ii) $g'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})}$

$= \frac{1}{5}$

$\begin{pmatrix} f(x) = 2 \tan x \sec^2 x + 2 \cos x (-\sin x) \\ f'(\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5 \end{pmatrix}$

13. 함수 $f(x) = \frac{3\{\ln(x+1)\}^2}{x+1}$ 에 대하여

$F(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$ ($x \geq 0$)일 때, $F'(a) = 8$ 을 만족시키는 실수 a 의 값은? [5.6점]

- ① $e-1$ ② $e+1$ ③ e^2-1 ④ e^2+1 ⑤ $2e^2$

let $x-t = s$
 $-dt = ds$

$F(x) = \int_0^x (x-s) f(s) (-ds)$

$= x \int_0^x f(s) ds - \int_0^x s f(s) ds$

$F'(x) = \int_0^x f(s) ds + x f(x) - x f(x)$

$F'(a) = \int_0^a f(s) ds$

$8 = \int_0^{e^{a+1}} 3t^2 dt$

$= [t^3]_0^{e^{a+1}}$

$\therefore 2 = \ln(a+1)$

let $\ln(a+1) = t$
 $\frac{1}{a+1} da = dt$

$\therefore a+1 = e^2$
 $a = e^2 - 1$

14. 함수 $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ 의 그래프에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.6점]

<보기>

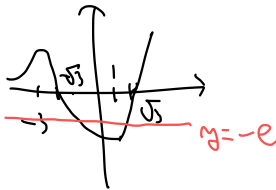
- ㄱ. $x = -3$ 에서 극솟값 $\frac{6}{e^3}$ 을 갖는다.
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-2e$ 이다.
 ㄷ. 방정식 $x^2 e^x = 3e^x - e$ 의 실근의 개수는 2이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x$
 $= (x-1)(x+3)e^x$
 $\therefore f(x)_{\min} = f(1) = -2e$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\therefore f(x)_{\min} = f(1) = -2e$

ㄷ. $(x^2 - 3)e^x = -e$ $\therefore 2\eta$



서답형

단답형 1. 함수 $y = \sin 3x$ 의 이계도함수를 구하시오. [3점]

$y' = 3(\cos 3x)$

$y'' = -9 \sin 3x$

단답형 2. $y = (\ln 5x)^2$ 의 변곡점의 좌표를 구하시오. [3점]

$y' = 2(\ln 5x) \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5$
 $= \frac{2}{x} \ln 5x$

$y'' = -\frac{2}{x^2} \ln 5x + \frac{2}{x} \cdot \frac{5}{5x}$
 $= -\frac{2}{x^2} (\ln 5x + 1) = 0$

$\therefore \ln 5x = -1$
 $5x = \frac{1}{e}$
 $x = \frac{1}{5e}$

$\therefore \left(\frac{1}{5e}, 1 \right)$

단답형 3. 정적분 $\int_1^3 \left(-\frac{1}{x^2} + 3^x \right) dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

$-\frac{x^{-1}}{-1} = x^{-1}$

$\left[\frac{1}{x} + \frac{3^x}{\ln 3} \right]_1^3$

$= \frac{1}{3} + \frac{27}{\ln 3} - \left(1 + \frac{3}{\ln 3} \right)$

$= -\frac{2}{3} + \frac{24}{\ln 3}$

서술형 1. $x > 0$ 일 때, 부등식 $x \ln x \geq 3x + k$ 이 성립하도록 하는 실수 k 의 범위를 구하는 과정을 서술하시오. [5점]

$$\text{let } f(x) = x \ln x - 3x$$

$$f'(x) = \ln x + 1 - 3$$

$$= \ln x - 2 = 0$$

$$x = e^2$$

$$\begin{array}{r} x \quad e^2 \\ f(x) - 0 + \\ \hline f(x) \searrow -e^2 \end{array}$$

$$f(e^2) = 2e^2 - 3e^2 = -e^2$$



$$\therefore k \leq -e^2$$

서술형 2. 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가 $x = 2 \sin \frac{\pi}{2} t$, $y = 4 \cos \frac{\pi}{2} t$ 이다. 시각 t 에서의 점 P 의 속도와 가속도를 구하는 과정을 서술하시오. [4점]

$$\text{ii) } \frac{dy}{dt} = -2\pi \sin \frac{\pi}{2} t$$

$$\frac{dx}{dt} = \pi \cos \frac{\pi}{2} t$$

$$\therefore v(t) = \left(-2\pi \sin \frac{\pi}{2} t, \pi \cos \frac{\pi}{2} t \right)$$

$$\text{iii) } \frac{d^2 y}{dt^2} = -\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{2} \sin \frac{\pi}{2} t$$

$$\therefore a(t) = \left(-\frac{\pi^2}{2} \sin \frac{\pi}{2} t, -\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} t \right)$$

서술형 3. 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분 $F(x)$ 에 대하여 $F(x) = xf(x) + xe^x - e^x - 3x^2 + 2$, $f(2) = -e^2 + 5$ 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. [5점]

$$f(x) = f(x) + x f'(x) + e^x + x e^x - e^x - 6x$$

$$f'(x) = -e^x + 6$$

$$f(x) = -e^x + 6x + C$$

$$f(2) = -e^2 + 12 + C = -e^2 + 5$$

$$\therefore C = -7$$

$$\therefore f(1) = -e + 6 - 7 = -e - 1$$

서술형 4. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $4xe^{x^2-4}$ 이고 $f(2) = 3$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 치환적분법을 이용하여 구하는 과정을 서술하시오. [6점]

$$f'(x) = \int 4x e^{x^2-4} dx$$

$$= 2 \int e^t dt$$

$$= 2e^t + C$$

$$f(2) = 2e^0 + C = 3 \quad (x=2 \text{ when } t=0)$$

$$\therefore C = 1$$

$$\therefore f(x) = 2e^{x^2-4} + 1$$

$$f(-1) = 2e^{-3} + 1$$

$$= \frac{2}{e^3} + 1$$