♦ 전체 : 선택형 16문항(70점), 서답형 5문항(30점)

♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 삼각형 ABC에서 $a=2,\ b=3,\ c=4$일 때, $\dfrac{\sin A}{\sin C}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ 2

$$\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\frac{a}{2R}}{\frac{c}{2R}}=\frac{a}{c}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

오타.

2. ~~$\sum k=1^{20}$~~ $(-1)^{k+1}a_k = 15,\ \sum_{k=1}^{20} a_k = 25$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$의 값은? $\sum_{k=1}^{20}$

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

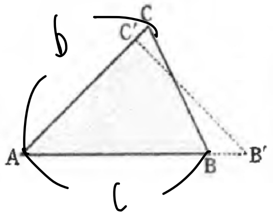
$$a_1-a_2+\cdots+a_{19}-a_{20}=15$$
$$+\ \ a_1+a_2+\cdots+a_{19}+a_{20}=25$$
$$2(a_1+a_3+\cdots+a_{19})=40$$
$$a_1+a_3+\cdots+a_{19}=20$$

3. $\sum_{k=1}^{6} 2(k+4)^2$의 값을 구하면?

① 355 ② 400 ③ 455 ④ 710 ⑤ 800

$$2(5^2+6^2+\cdots+10^2)$$
$$=2\left(\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{4}k^2\right)$$
$$=2\left(\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-\frac{4\cdot5\cdot9}{6}\right)$$
$$=2(385-30)$$
$$=710$$

4. 다음 그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 AB의 길이를 x% 늘이고 변 AC의 길이를 x% 줄여서 삼각형 $AB'C'$를 만들려고 한다. 삼각형 $AB'C'$의 넓이가 삼각형 ABC 넓이의 $\frac{3}{4}$가 되기 위한 자연수 x를 구하면?



① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

let $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$

$S_{\triangle AB'C'}=\frac{1}{2}b\left(1-\frac{x}{100}\right)c\left(1+\frac{x}{100}\right)\sin A$

$\therefore \frac{3}{4}=\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)$

let $\frac{x}{100}=t$

$\frac{3}{4}=1-t^2$

$t^2=\frac{1}{4}$

$t=\frac{1}{2}\ (\because t>0)$

$\therefore \frac{x}{100}=\frac{1}{2}$

$x=50$

5. $\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{(k+2)(k+4)} = \frac{p}{q}$일 때, $p+q$의 값을 구하면? (단, p, q는 서로소인 자연수)

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+4}\right)$

대칭으로 남는다

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{9}}-\frac{1}{11}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{10}}-\frac{1}{12}\right)\right]$

① ③ ③ ①

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{11}\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{22}$

$= \frac{9}{44}$

$\therefore p+q = 9+44 = 53$

6. 제6항이 -45, 제14항이 -33인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, S_n의 최솟값은?

① -942 ② -945 ③ -948 ④ -951 ⑤ -954

i) $a+5d=-45$

$a+13d=-33$

$8d=12$

$d=\frac{3}{2}$, $a=-\frac{105}{2}$

$-\frac{90}{2}-\frac{15}{2}=-\frac{105}{2}$

ii) $a_n = -\frac{105}{2}+(n-1)\cdot\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{2}n-54<0$

$n<36$

$\therefore a_{35}<0,\ a_{36}=0,\ a_{37}>0$

$\therefore S_{n최소} = S_{36} = \frac{36\left(-\frac{105}{2}+0\right)}{2} = -945$

or

S_{35} $(\because S_{35}=S_{36})$

7. 삼각형 ABC 에서 $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{6}$일 때, $\cos C$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$\sin A : \sin B : \sin C = 4:5:6 = a:b:c$

let $a=4k,\ b=5k,\ c=6k$

$\cos C = \frac{16k^2+25k^2-36k^2}{2\cdot 4k\cdot 5k}$

$=\frac{1}{8}$

8. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 T_n이라 할 때, $\frac{S_n}{T_n}=\frac{3}{4}$이고 $a_1+a_2=\frac{2}{3}$이다. a_4를 구하면?

① $\frac{1}{53}$ ② $\frac{1}{54}$ ③ $\frac{1}{55}$ ④ $\frac{1}{56}$ ⑤ $\frac{1}{57}$

i) $a_1+a_2 = a(1+r)$

$a_2+a_3 = ar(1+r)$

$\vdots$

초째항 $= a(1+r)$

공비 $= r$

$\therefore T_n = \frac{a(1+r)(r^n-1)}{r-1}$

ii) $\frac{S_n}{T_n} = \frac{\frac{a(r^n-1)}{r-1}}{\frac{a(1+r)(r^n-1)}{r-1}} = \frac{1}{1+r} = \frac{3}{4}$

$4=3+3r$

$\therefore r=\frac{1}{3}$

iii) $a+ar=\frac{2}{3}$

$a(1+r)=\frac{2}{3}$

$\frac{4}{3}a=\frac{2}{3}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

iv) $a_4 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$=\frac{1}{54}$

9. 반지름의 길이가 8인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $A=45°$, $B=30°$일 때, 선분 AB의 길이를 구하면?

① $3\sqrt{2}+3\sqrt{6}$
② $4\sqrt{2}+3\sqrt{6}$
③ $3\sqrt{2}+4\sqrt{6}$
④ $4\sqrt{2}+4\sqrt{6}$
⑤ $4\sqrt{2}+6\sqrt{6}$

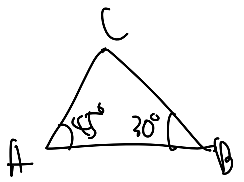
i) $\frac{a}{\sin 45°}=2\cdot 8$

$a=16\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=8\sqrt{2}$

ii) $\frac{b}{\sin 30°}=2\cdot 8$

$b=8$



제1코사인 법칙에 의해

$\overline{AB}=b\cos 45°+c\cos 30°$

$=8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+8\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=4\sqrt{2}+4\sqrt{6}$

10. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\left\{\sum_{k=3n-2}^{3n} a_k\right\}$은 공차가 36인 등차수열이고 $a_{10}=38$이다. a_{20}의 값은?

① 72 ② 74 ③ 76 ④ 78 ⑤ 80

i) $a_1+a_2+a_3=3a+3d$

$a_4+a_5+a_6=3a+12d$

$\therefore 12d-3d=36$

$d=4$

ii) $a+9d=38$

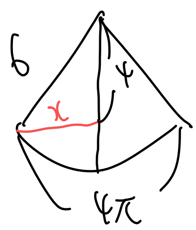
$a=2$

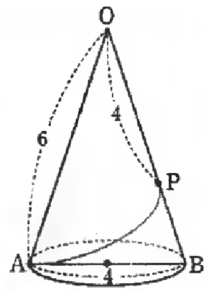
$\therefore a_{20}=a+19d$

$=2+19\cdot 4$

$=78$

11. 다음 그림은 모선 OA의 길이가 6이고, 밑면의 지름 AB의 길이가 4인 원뿔이다. 모선 OB 위에 점 P에 대하여 $\overline{OP}=4$일 때, 점 A에서 원뿔의 옆면을 따라 점 P까지 가는 최단거리를 구하면?





① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{7}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{7}$

i) $l=r\theta$

$\frac{4\pi}{2}=6\theta$

$\theta=\frac{\pi}{3}$

ii) $\overline{AP}^2=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cos\frac{\pi}{3}$

$=28$

$\therefore \overline{AP}=2\sqrt{7}$

12. 연이율 5%이고 1년마다 복리로 매년 초에 100만 원씩 9년 동안 적립할 때, 9년 말까지 적립금의 원리합계를 구하면? (단, $1.05^9=1.55$로 계산한다.)

① 1100만원
② 1110만원
③ 1130만원
④ 1145만원
⑤ 1155만원

1회	2회	…	9회	9말
A	A(1+r)	…	A(1+r)^8	A(1+r)^9
	A			⋮
			A	A(1+r)

$S=\frac{A(1+r)((1+r)^9-1)}{1+r-1}$

$=\frac{100\times 1.05\,(1.55-1)}{0.05}$

$=105\times 11=1155$

13. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 조건이 성립할 때, a_{127}의 값을 구하면?

<조 건>

(가) $a_1 = 1$

(나) 모든 자연수 n에 대해 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \log_{n+1}(n+2)$

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{\log 3}{\log 2}$

$\dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{\log 4}{\log 3}$

$\vdots$

$\dfrac{a_{127}}{a_{126}} = \dfrac{\log 128}{\log 127}$

$\times$

$\dfrac{a_{127}}{1} = \dfrac{\log 128}{\log 2} = \log_2 2^7 = 7$

14. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 양수 k의 값은?

<조 건>

(가) $a_1 = 1$

(나) 모든 자연수 n에 대해 $a_{n+1} = kS_n$

(다) $\log_2 \dfrac{S_{20}}{S_{10}} = 20$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

i) $a_2 = ka_1 = k$

ii) $a_{n+1} = kS_n$
$-\ a_n = kS_{n-1}$

$a_{n+1} - a_n = ka_n$

$a_{n+1} = (k+1)a_n \ (n \geq 2)$

$\therefore a_n = k(k+1)^{n-2}$

iii) $\log_2 \dfrac{S_{20}}{S_{10}} = \log_2 \dfrac{\frac{a_{21}}{k}}{\frac{a_{11}}{k}}$

$= \log_2 \dfrac{k(k+1)^{19}}{k(k+1)^9}$

$= 10\log_2(k+1) = 20$

$\therefore k+1 = 4$

$k = 3.$

u모름.

양수인지 음수인지 모른다.

15. 수열 $\{a_n\}$가 <조건>을 만족할 때, $|a_{11} + a_{12}| + a_{13}$의 양의 약수 개수를 구하면?

(가) $a_n = (-1)^{t} \cdot 2^{n-1}$

<조 건>

(가) $a_1 = 1$, 모든 자연수 n에 대해 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2$

(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} |a_k| = \sum_{k=1}^{10} a_k,\ \sum_{k=1}^{12} |a_k| > \sum_{k=1}^{12} a_k$

(다) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$의 최솟값은 -1

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

i) $|a_{11}| + |a_{12}| > a_{11} + a_{12}$

$\therefore a_{11} < 0$ or $a_{12} < 0$

ii) $S_{10} = \dfrac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1} = 1023$

ㄱ) $a_{11} < 0$ 일때

$a_{11} = -2^{10} = -1024$

$\therefore$ (다) 성립 $(a_{12} = 2048)$

ㄷ) $a_{11} > 0$ 일때

$a_{11} = 1024$

$a_{12} = -2048$

$\therefore$ (다) 성립.

ㄴ) $a_{11} < 0$ and $a_{12} < 0$ 이면 (다)에 모순.

ㄱ, ㄷ에 의해

$|a_{11} + a_{12}| + a_{13}$

$= 2^{10} + 2^{11}$

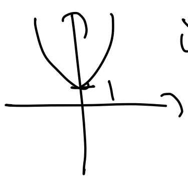
$= 3 \cdot 2^{11}$

$\therefore$ 양약수 개수 2×12

$= 24$

16. 곡선 $y = a^{|x|}$와 직선 $y = b_n$의 두 교점 사이의 거리를 m_n이라 하자. 수열 m_n은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다. 수열 $\{\log_a b_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하면? (단, $a > 1$, a는 상수, $1 < b_1 < b_2 < b_3 < \cdots$)

① $\dfrac{137}{2}$ ② $\dfrac{139}{2}$ ③ $\dfrac{141}{2}$ ④ $\dfrac{143}{2}$ ⑤ $\dfrac{145}{2}$



i) let $a^{t_n} = b_n$

$t_n = \dfrac{m_n}{2} = \dfrac{3n-2}{2}$

ii) $\log_a b_n = \log_a a^{t_n} = t_n = \dfrac{3n-2}{2}$

$\therefore S_{10} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{10(1+28)}{2}$

$= \dfrac{145}{2}$

서답형

단답형 1. 삼각형 ABC가 $b=5,\ c=8,\ A=60°$을 만족한다. 삼각형 ABC 내접원의 반지름의 길이를 r, 외접원의 반지름의 길이를 R이라고 할 때, rR을 구하시오.

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{abc}{4R}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

i) $a^2=5^2+8^2-\cancel{2}\cdot 5\cdot 8\cdot \cancel{\cos 60°}$

$=25+64-40$

$=49$

$\therefore a=7\ (\because a>0)$

ii) $S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot \sin 60°$

$=\frac{abc}{4R}$

$20\sqrt{3}=\frac{5\cdot \cancel{8}^{2}\cdot 7}{\cancel{4}R}$, $R=\frac{7}{2\sqrt{3}}$

iii) $S=20\sqrt{3}$

$=\frac{1}{2}r(5+8+7)$

$r=2\sqrt{3}$

$\therefore rR=2\sqrt{3}\cdot\frac{7}{2\sqrt{3}}$

$=7$

단답형 2. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$을 만족할 때, a_6의 값을 구하시오. (단, $a_1=1$)

i) $a_1-a_2=2a_1a_2$

$1-a_2=2a_2$

$a_2=\frac{1}{3}$

ii) $a_2-a_3=2a_2a_3$

$\frac{1}{3}-a_3=\frac{2}{3}a_3$

$a_3=\frac{1}{5}$

iii) $a_3-a_4=2a_3a_4$

$\frac{1}{5}-a_4=\frac{2}{5}a_4$

$a_4=\frac{1}{7}$

$\therefore a_n=\frac{1}{2n-1}$

$a_6=\frac{1}{11}$

* (이전 교육과정)

조화수열

$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$

$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+2$

역수가 등차수열

서술형 1. 두 자리 자연수 중에서 5의 배수 또는 7의 배수인 수의 합을 풀이과정과 함께 서술하시오.

i) 5의 배수

~~5~~ 10 15 ⋯ 95

$10=5\times2$, $15=5\times3$, $95=5\times19$

$\therefore S_{5의 배수}=\frac{18(10+95)}{2}=945$

ii) 7의 배수

~~7~~ 14 21 ⋯ 91

$14=7\times2$, $21=7\times3$, ⋯, $91=7\times13$

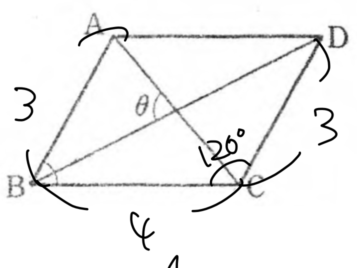
$\therefore S_{7의 배수}=\frac{12(14+91)}{2}=630$

iii) 35의 배수

$35+70=105$

$\therefore 945+630+105=1675$

서술형 2. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $B=60°$이 평행사변형 $ABCD$의 두 대각선이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\sin\theta = \dfrac{12\sqrt{3}}{\sqrt{m}\sqrt{n}}$이다. $m+n$의 값을 풀이과정과 함께 서술하시오. (단, 자연수 m, n은 소수)



i) $S_{ABCD} = 3\cdot 4\cdot \sin 60° = 6\sqrt{3}$

ii) $\overline{AC}^2 = 3^2+4^2-\cancel{2}\cdot 3\cdot 4\,\cancel{\cos 60°}$

$= 13$

iii) $\overline{BD}^2 = 3^2+4^2\cancel{-}\,\cancel{2}\cdot 3\cdot 4\,\cancel{\cos 120°}$ (+)

$= 37$

$\therefore S = \frac{1}{2}\sqrt{13}\sqrt{37}\sin\theta = 6\sqrt{3}$

$\sin\theta = \dfrac{12\sqrt{3}}{\sqrt{13}\sqrt{37}}$

$\therefore m+n = 13+37 = 50$

수학적 귀납법

서술형 3. <명제>가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

<명 제>

모든 자연수 n에 대하여 $7^{4n}-1$은 12의 배수이다.

i) $n=1$ 일때

$7^4-1 = 2401-1 = 2400$

2+4 는 3의 배수이고

100 은 4의 배수이므로 성립.

ii) $n=k$ 일때 성립 가정

$7^{4k}-1 = 12t$ (t는 정수)

$7^{4k} = 12t+1$

$n=k+1$ 일때

$7^{4(k+1)}-1 = 7^{4k}\cdot 7^4-1$

$= (12t+1)\cdot 7^4-1$

$= 12t\cdot 7^4+7^4-1$

$12t\cdot 7^4$ 는 12의 배수이고

7^4-1 은 i) 에 의해 성립.

$\therefore$ 수학적 귀납법에 의하여

주어진 명제는 참이다.