♦ 전체 : 선택형 15문항(70점), 서답형 7문항(30점)

♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 다음 수열이 등비수열일 때, $x+y$의 값은? (단, $x>0,\ y>0$) [3.6점]

$\frac{1}{3}, x, 3, y, 27$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

i) $\frac{1}{3}r^2=3$

$r=3$

ii) $x=\frac{1}{3}\cdot 3=1$

$y=3\cdot 3=9$

$\therefore x+y=1+9=10$

2. $\sum_{k=1}^{7} a_k=-10,\ \sum_{k=1}^{7} b_k=20$일 때, $\sum_{k=1}^{7}(a_k+2b_k+3)$의 값은? [3.7점]

① 13 ② 33 ③ 51 ④ 73 ⑤ 91

(준식) $=\sum_{k=1}^{7} a_k+2\sum_{k=1}^{7} b_k+\sum_{k=1}^{7} 3$

$=-10+2\cdot 20+21$

$=51$

3. 삼각형 ABC에서 $a=8,\ b=7,\ c=5$일 때, B의 크기는? [3.9점]

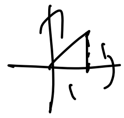
① 45° ② 60° ③ 120° ④ 135° ⑤ 150°

$\cos B=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 5}$

$=\frac{40}{80}$

$=\frac{1}{2}$

$\therefore B=60^\circ\ (\because 0^\circ<B<90^\circ)$



4. $\cos\frac{3}{2}\pi-2\sin\frac{4}{3}\pi+\tan\left(-\frac{7}{4}\pi\right)$의 값은? [4.1점]

① $1-\sqrt{3}$ ② -1 ③ 1

④ $\sqrt{3}$ $-\sqrt{3}/2$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

(준식) $=0-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1$

$=1+\sqrt{3}$

5. 다음 중 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+3) = f(x)$를 만족시키는 함수는? [4.2점]

주기 = 3

① $f(x) = \sin x$ ② $f(x) = \cos 3x$

③ $f(x) = \sin(x+3)$ ④ $f(x) = \tan \frac{\pi}{3}x$

⑤ $f(x) = \cos \pi x$

① 주기 = 2π ② 주기 = $\frac{2\pi}{|3|}$

③ 주기 = 2π ④ 주기 = $\frac{\pi}{\left|\frac{\pi}{3}\right|} = 3$

⑤ 주기 = $\frac{2\pi}{|\pi|} = 2$

6. 두 수 23과 74 사이에 16개의 수를 넣어 만든 수열 23, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{16}, 74가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 이 수열의 공차는? [4.5점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$74 = 23 + 17d$

$51 = 17d$

$d = 3$

7. 함수 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$의 점근선의 방정식으로 옳은 것은? (단, n은 정수) [4.6점]

① $x = n\pi + \frac{3}{4}\pi$ ② $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

③ $y = n\pi + \frac{3}{4}\pi$ ④ $y = n\pi + \frac{\pi}{2}$

⑤ $y = n\pi + \frac{\pi}{4}$

i) 주기 = π

주기반 주기×n

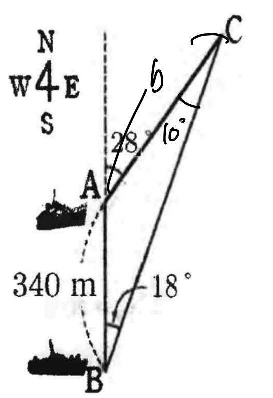
ii) 점근선 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n은 정수)

↓ x, $\frac{\pi}{4}$ 평행이동

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi$

$x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$

8. 아래 그림과 같이 배 A는 배 B에서 정북 방향으로 340 m 떨어져 있다. 두 배 A, B가 동시에 정북에서 동쪽으로 각각 28°, 18° 방향으로 이동하여 지점 C에서 조업했을 때, 배 A가 지점 C까지 이동한 거리는? (단, $\sin 10° = 0.17$, $\sin 18° = 0.31$, $\sin 28° = 0.47$로 계산한다.) [4.7점]



① 400 m ② 510 m ③ 620 m

④ 730 m ⑤ 840 m

$\frac{340}{\sin 10°} = \frac{b}{\sin 18°}$

$\frac{340}{0.17} = \frac{b}{0.31}$

$2000 \times 0.31 = b$

$b = 620$

9. 다음 식을 간단히 하면? [4.8점]

$3\times4+4\times5+5\times6+\cdots+(n+2)(n+3)$

① $\frac{1}{2}(n^2+11n+12)$

② $\frac{n}{12}(3n^2+23n+46)$

③ $\frac{n}{3}(n^2+9n+26)$

④ $\frac{1}{4}n^2(n+5)(n+7)$

⑤ $\frac{1}{3}(n^3+9n^2+8n+18)$

$\sum_{k=1}^{n}(k+2)(k+3)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+5k+6)$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+5\cdot\frac{n(n+1)}{2}+6n$

$=\frac{n}{6}(2n^2+3n+1+15n+15+36)$

$=\frac{n}{6}(2n^2+18n+52)$

$=\frac{n}{3}(n^2+9n+26)$

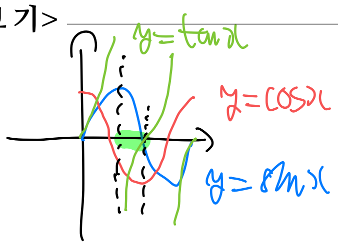
10. $\frac{\pi}{2}<x<\pi$이 모든 x에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5점]

<보 기>

ㄱ. $\sin x>\cos x$

ㄴ. $\tan x>\cos x$

ㄷ. $\sin x>\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄷ. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$

$\sin x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$=\sin x-(-\sin x)>0$

$\therefore \sin x>\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

11. $3+3^3+5\cdot3^3+7\cdot3^4+3^7+11\cdot3^6+13\cdot3^7$의 값은? [5.1점]

① $2(3^9-11)$ ② $3(2\times3^8+1)$

③ $21(5\times3^7-4)$ ④ $27(2+5\times3^5)$

⑤ $63(3^7-1)$

$S=\sum_{k=1}^{7}(2k-1)3^k$ 의 멱급수

$S=1\cdot3+3\cdot3^2+\cdots+13\cdot3^7$

$3S=\quad 1\cdot3^2+\cdots+11\cdot3^7+13\cdot3^8$

$-2S=3+2(3^2+3^3+\cdots+3^7)-13\cdot3^8$

$=3+\cancel{2}\cdot\frac{3^2(3^6-1)}{\cancel{3-1}}-13\cdot3^8$

$=-6-12\cdot3^8$

$\therefore S=3+6\cdot3^8=3(1+2\cdot3^8)$

12. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 S_n이라 할 때, $a_1<0$이고 $S_{10}=S_{20}$이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.3점]

<보 기>

ㄱ. $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}=0$

ㄴ. $|a_{13}|=|a_{18}|$

ㄷ. $n=16$일 때, S_n은 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

i) $S_{10}=\frac{10(a+a+9d)}{2}=S_{20}=\frac{20(a+a+19d)}{2}$

$2a+9d=4a+38d$

$-2a=29d$

ㄴ) $a_{13}<0,\ a_{18}>0$

$|a_{13}|=-a-12d$

$|a_{18}|=a+17d$

$-2a=29d\ (\because i)$

이므로 ㄴ 참

ㄱ) $S_{20}-S_{10}=a_{11}+\cdots+a_{20}=0$

ㄷ) $a_n=a+(n-1)\cdot d$

$=-\frac{29}{2}d+(n-1)d$

$=nd-\frac{31}{2}d>0$

$n>\frac{31}{2}\quad(\because d>0)$

$\therefore a_{15}<0,\ a_{16}>0\quad \therefore n=15$일 때 S_n 최소

피보나치 수열

13. 철수는 계단을 오를 때 한번에 한 계단, 두 계단, 세 계단까지 오를 수 있다. n번째 계단까지 올라갈 수 있는 경우의 수를 a_n이라고 할 때, a_3의 값과 a_{n+3}, a_{n+2}, a_{n+1}, a_n 사이의 관계식을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$) [5.4점]

① $a_3 = 5, \quad a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$

② $a_3 = 4, \quad a_{n+3} = a_n + 2a_{n+1} + a_{n+2}$

③ $a_3 = 3, \quad a_{n+3} = 4a_n + 2a_{n+1} + a_{n+2}$

④ $a_3 = 5, \quad a_{n+3} = a_n + 2a_{n+1} + a_{n+2}$

⑤ $a_3 = 4, \quad a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$

$a_1 = 1, \quad a_2 = a_1 + 1 = 2$

$a_3 = a_2 + a_1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$

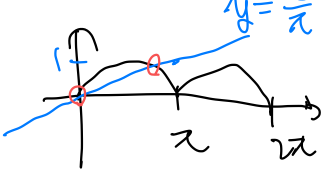
$\vdots$

$a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$

14. 방정식 $|\sin nx| = \dfrac{x}{n\pi}$의 서로 다른 실근의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1) + f(2)$의 값은? (단, n은 자연수) [5.5점]

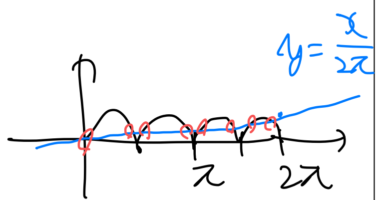
① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

i) $n=1$ 일때



$f(1) = 2$

ii) $n=2$ 일때



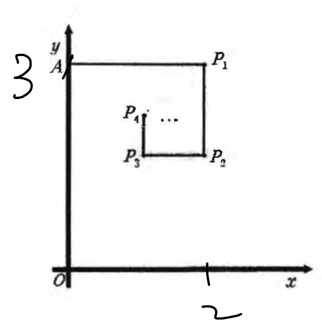
$f(2) = 8$

$\therefore f(1) + f(2) = 2 + 8 = 10$

15. 점 $A(0,3)$을 기준으로 점 $P_n(n = 1, 2, 3, \cdots)$이 아래와 같은 규칙을 따른다고 하자.

$\overline{AP_1} = \frac{2}{3}\overline{OA}$, $\overline{P_1P_2} = \frac{2}{3}\overline{AP_1}$, $\overline{P_2P_3} = \frac{2}{3}\overline{P_1P_2}, \cdots$

점 P_{11}의 좌표를 (a, b)라고 할 때, $a + b$의 값은? [5.6점]



① $\frac{1}{13}\left\{8 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right\}$ ② $\frac{3}{13}\left\{7 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

③ $\frac{4}{13}\left\{5 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right\}$ ④ $\frac{5}{13}\left\{9 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

⑤ $\frac{7}{13}\left\{6 - 11\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

let $P_n(a_n, b_n)$

i) x좌표

$a_1 = 2 \quad a_3 = 2 - 2 \times \frac{4}{9}$

$a_5 = 2 - 2 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{4}{9} \times \frac{4}{9}$

$\therefore a_{11} = \dfrac{2\left(1 - \left(-\frac{4}{9}\right)^6\right)}{1 - \left(-\frac{4}{9}\right)} = \frac{18}{13}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{12}\right)$

ii) y좌표

$b_2 = 3 - 3 \times \frac{4}{9}$

$b_4 = 3 - 3 \times \frac{4}{9} + 3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2$

$\therefore b_{10} = \dfrac{3\left(1 - \left(-\frac{4}{9}\right)^6\right)}{1 - \left(-\frac{4}{9}\right)} = \frac{27}{13}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{12}\right)$

$\therefore a + b = \frac{45}{13}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{12}\right)$

서답형

단답형 1. $a_1 = 3,\ a_5 = 48$인 등비수열에서 공비를 구하시오. (단, 공비는 양수이다.) [2점]

$ar^4 = 48$

$3 \cdot r^4 = 48$

$r^4 = 16$

$r = 2$ or $\cancel{-2}$ (∵ $r>0$, r은 실수)

단답형 2. 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하시오. [3점]

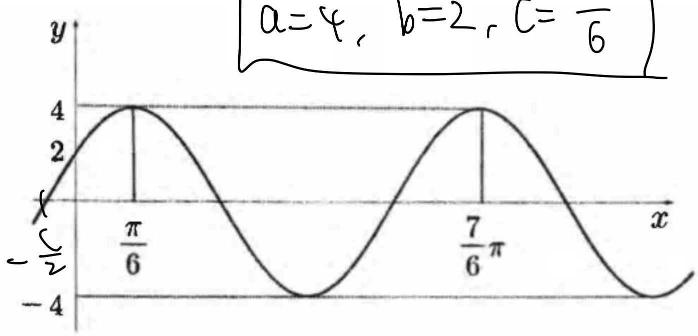
$S_{10} = \frac{10(1+1+9\cdot 2)}{2}$

$= 10 \cdot 10$

$= 100$

단답형 3. 함수 $y = a\sin(bx+c)$의 그래프가 아래 그림과같을 때, 상수 a, b, c의 값을 순서대로 쓰시오. (단, $a>0,\ b>0,\ 0<c<\frac{\pi}{2}$) [4점]

$\boxed{a=4,\ b=2,\ c=\frac{\pi}{6}}$



i) 주기 $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \pi$

$b = 2$ (∵ $b>0$)

ii) 최댓값 $= a \cdot 1 = 4$ (∵ $a>0$)

$a = 4$

iii) $y = 4\sin(2x+c)$

$= 4\sin 2(x + \frac{c}{2})$

$4 = 4\sin 2(\frac{\pi}{6} + \frac{c}{2})$

$1 = \sin 2(\frac{\pi}{6} + \frac{c}{2})$

∴ $c = \frac{\pi}{6}$ (∵ $0<c<\frac{\pi}{2}$)

서술형 1. 다음 식의 값을 <조건>을 참고하여 구하시오. (<조건>을 이용하지 않을 시 감점) [4점]

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+3} + \frac{1}{3+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{15}}$$

<조 건>

합의 기호 $\sum$을 이용하여 위 식을 표현할 것

(준식) $= \sum_{k=1}^{11} \frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+4}}$

$= \sum_{k=1}^{11} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+4}}{k+2-(k+4)}$

$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{11}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+4})$

$= -\frac{1}{2}[(\sqrt{3}-\cancel{\sqrt{5}}) + (\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{7}}) + \cdots + (\cancel{\sqrt{13}}-\sqrt{15})]$

$= -\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{15})$

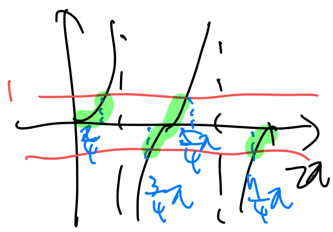
$= \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}$

서술형 2. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2 - 2x\tan\theta + 1 \geq 0$이 항상 성립하도록 하는 θ의 범위를 구하시오. (단, $0 \leq \theta < 2\pi$) [5점]

i) $D/4 = \tan^2\theta - 1 \leq 0$

$(\tan\theta+1)(\tan\theta-1) \leq 0$

$-1 \leq \tan\theta \leq 1$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

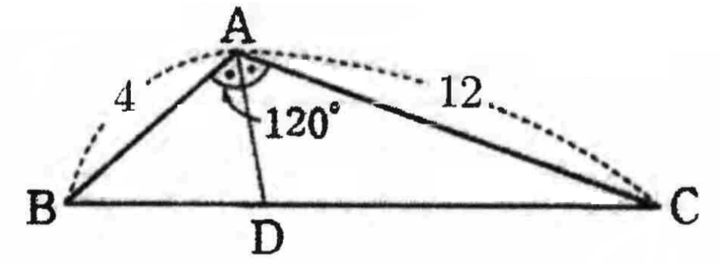
or

$\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$

or

$\frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi$

서술형 3. $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=12$, $A=120°$인 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 선분 BD의 길이를 <조건>을 참고하여 구하시오. (<조건>을 이용하지 않을 시 감점) [5점]



<조 건>

(가) 삼각형 ABC의 넓이를 구할 것

(나) 삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 선분 AD의 길이를 구할 것

(다) 코사인법칙을 이용하여 선분 BD의 길이를 구할 것

i) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 12\cdot \sin 120°$

$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 12\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 12\sqrt{3}$

ii) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC}$ $\quad 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$12\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot \overline{AD}\cdot \sin 60° + \frac{1}{2}\cdot 12\cdot \overline{AD}\cdot \sin 60°$

$= 4\sqrt{3}\,\overline{AD}$

$\therefore \overline{AD} = 3$

iii) 코사인 법칙에 의해

$\overline{BD}^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cos 60°$

$= 9 + 16 - 12$

$= 13$

$\therefore \overline{BD} = \sqrt{13}$ $\quad (\because \overline{BD} > 0)$

수학적 귀납법

서술형 4. 모든 자연수 n에 대하여 아래 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.
(단, $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\times 2\times 1$) [7점]

$$(1^2+1)\cdot 1! + (2^2+1)\cdot 2! + \cdots + (n^2+1)\cdot n! = n\cdot(n+1)!$$

i) $n=1$ 일때

(좌변) $= (1^2+1)\cdot 1 = 2$

(우변) $= 1\cdot(1+1)! = 2$ $\quad \therefore$ 성립

ii) $n=k$ 일때 성립 가정

$(1^2+1)\cdot 1! + (2^2+1)\cdot 2! + \cdots + (k^2+1)\cdot k! = k\cdot(k+1)!$ $\cdots ①$

$n=k+1$ 일때

(좌변) $= (1^2+1)1! + \cdots + (k^2+1)\cdot k! + ((k+1)^2+1)\cdot(k+1)!$

$= k(k+1)! + ((k+1)^2+1)(k+1)!$ $\quad (\because ①)$

$= (k^2+3k+2)(k+1)!$

$= (k+2)\cdot(k+1)(k+1)!$

$= (k+1)(k+2)! =$ 우변

i, ii 를 만족하므로 수학적 귀납법에 의해 주어진 등식이 성립한다.