♦ 전체 : 선택형 16문항(70점), 서답형 5문항(30점)
♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시
♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. $\sum_{k=1}^{20} a_k = 20,\ \sum_{k=1}^{20} b_k = 10$ 일 때, $\sum_{k=1}^{20} (7a_k - b_k - 2)$ 의 값은? [3.2점]

① 50 ② 60 ③ 70 ④ 80 ⑤ 90

2. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 일반항이 $a_n = n+1,\ b_n = n-3$ 일 때, 수열 $\{a_n + b_n\}$의 제 5항은? [3.4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

3. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하자. $S_n = 2n^2 + n$일 때, $a_7 - a_3$의 값은? [3.6점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

4. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 BC의 길이는? [3.7점]

<조 건>

(가) $\sin A \times \sin(B+C) = \frac{9}{25}$
(나) 반지름의 길이가 10인 원에 내접한다.

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

5. $0 \le x \le \pi$에서 부등식 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\beta-\alpha$ 의 값은? [3.9점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{6}\pi$

6. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ 일 때, 다음 식의 값은? [4.0점]

$$\frac{1\times 2}{a_1}+\frac{2\times 3}{a_2}+\frac{3\times 4}{a_3}+\cdots+\frac{10\times 11}{a_{10}}$$

① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{10}{11}$ ③ $\frac{11}{12}$ ④ $\frac{18}{5}$ ⑤ $\frac{40}{11}$

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, $a_{n+1} = a_n+4n\ (n = 1,2,3,\cdots)$을 만족시킨다. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다.

<보 기>

$a_{n+1} = a_n + 4n\ (n = 1,2,3,\cdots)$ 의 양변의 n에 $1,2,3,\cdots,n-1$ 을 차례로 대입하면

$a_2 = a_1+4\times 1$

$a_3 = a_2+4\times 2$

$a_4 = a_3+4\times 3$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1}+4\times\boxed{(가)}$ 이다.

이때, 위의 등식을 변끼리 더하여 정리하면

$$a_n = 1+4\sum_{k=1}^{\boxed{(가)}} k = 1+4\times\frac{n\times\boxed{(가)}}{2} = \boxed{(나)}$$

따라서, $a_n = \boxed{(나)}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$라 할 때, $f(10)+g(10)$ 의 값은? [4.1점]

① 188 ② 189 ③ 190 ④ 191 ⑤ 192

8. 다음은 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 아래 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots \star$$

<증 명>

(i) $n=2$ 일 때, (좌변) $=\boxed{㉠} < \frac{3}{2} =$ (우변)

이므로 $n=2$ 일때 부등식 $\star$ 가 성립한다.

(ii) $n=k$ $(n \geq 2)$ 일 때, 부등식 $\star$ 가 성립한다고

가정하면 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$이다.

양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$를 더하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$

이다. 그런데 $k \geq 2$ 이므로

$\left(2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right)-\left(\boxed{㉡}\right)=-\frac{1}{k(k+1)^2}<0$

이다. 즉 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 부등식 $\star$ 이 성립한다.

(i), (ii) 에서 부등식 $\star$ 는 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 ㉠에 알맞은 수를 a, ㉡에 알맞은 식을 $f(k)$이라 할 때, $a+f(3)$의 값은? [4.2점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

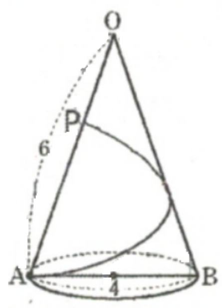
9. 연이율이 2.5%이고 1년마다 복리로 매년 초에 a만 원씩 10년 동안 적립하여 10년 말까지 적립금의 원리합계가 287만 원이 되도록 하려고 한다. a의 값은? (단, $1.025^{10}=1.28$로 계산한다.) [4.5점]

① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

10. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_4 a_5 = a_6 a_7$이고, $a_{11}=-121$일 때, S_n의 최댓값은? [4.5점]

① 225 ② 235 ③ 240 ④ 265 ⑤ 275

11. 오른쪽 그림과 같이 모선 OA의 길이가 6이고, 밑면의 지름 AB의 길이가 4인 원뿔에서 모선 OA를 $1:2$로 내분하는 점을 P라고 하자. 점 A에서 출발하여 원뿔의 옆면을 따라 점 P까지 가는 최단 거리는? [4.7점]



① $2\sqrt{13}$ ② $\sqrt{53}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{55}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

12. 첫째항이 a, 공비가 r이 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_3=48$이고 $a_2:a_5=8:1$이다. 이때 $f(n)=a_1a_2a_3\cdots a_n$ 이라 하자. $f(n)$의 값이 최대가 될 때, 자연수 n의 값은? [4.7점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

13. 다음 주문서대로 가능한 한 많은 상자에 귤을 담으려고 할 때, 필요한 상자의 개수는? [5.2점]

<주 문 서>

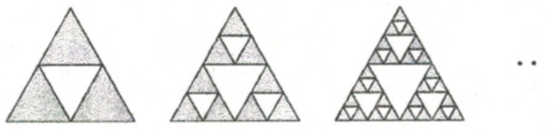
- 귤 2800개를 여러 개의 상자에 나누어 담는다.
- 모든 상자에는 적어도 귤 100개가 들어 있게 한다.
- 상자에 들어 있는 귤의 개수는 모두 다르게 한다.

① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

14. 반지름의 길이가 2인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $A:B:C=5:3:4$ 일 때, $\sin A$의 값은? [5.3점]

① $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6}$ ③ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{6}$ ④ $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

15. 한 변의 길이가 1인 정삼각형에서 각 변의 중점을 선분으로 이으면 4개의 작은 정삼각형이 생긴다. 이때, 가운데 정삼각형 하나를 잘따라내면 3개의 정삼각형이 남는다. 남은 3개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 반복하면 모두 9개의 정삼각형이 남고, 다시 9개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 반복하면 모두 27개의 정삼각형이 남는다. 그림은 이와 같은 과정을 계속하여 만들어지는 도형을 나타낸 것이다.



n번째 도형에서 남은 정삼각형들의 둘레의 길이의 합을 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1 = \dfrac{9}{2}$, $a_2 = \dfrac{27}{4}$ 이다. a_5의 값은? [5.4점]

① $\dfrac{81}{16}$ ② $\dfrac{243}{16}$ ③ $\dfrac{243}{32}$ ④ $\dfrac{729}{32}$ ⑤ $\dfrac{729}{64}$

16. $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 3 : \sqrt{2} : \sqrt{5}$ 인 삼각형 ABC의 넓이 가 15일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.6점]

<보 기>

ㄱ. $\angle ABC = 45°$

ㄴ. $\overline{CA}^2 = 20$

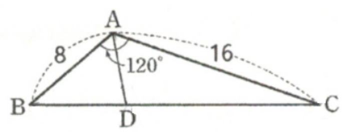
ㄷ. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 25π이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

서답형

단답형 1. 세 수 $a, 7, b$가 이 순서대로 등차수열이고, 세 수 $a, 6, b$가 이 순서대로 등비수열일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

단답형 2. 삼각형 ABC에서 $A = 120°$, $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 16$ 이고, 선분 BC를 1:2로 내분하는 점을 D라고 할 때, 선분 AD의 길이를 구하시오. [6점]



서술형 1. $0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $2\cos^2 x - \sin(\pi + x) - 2 = 0$ 의 실근을 구하시오. [6점]

서술형 2. 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열에서 첫째항부터 제 5항까지의 합이 5, 첫째항부터 제 10항까지의 합이 25일 때, 첫째항부터 제 15항까지의 합을 구하시오. [7점]

서술형 3. x에 대한 이차방정식 $nx^2-1200x+n(n+2)=0$ (단, $n<70$) 의 두 근을 α_n, β_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{23}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$ 의 값을 구하시오. [7점]