

- ◆ 전체 : 선택형 20문항(80점) 서답형 5문항(20점)
- ◆ 총점 : 100점
- ◆ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

선택형

1. 첫째항이 3이고 공차가 $-\frac{1}{2}$ 인 등차수열의 제 5항은?
[3.0점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2. 빈 칸에 들어갈 말로 알맞은 것은? [2.5점]

첫째항에 차례로 일정한 수를 곱하여 얻어진 수열을 이라 하고, 그 일정한 수를 이라 한다.

따라서 인 수열 3, 6, 12, 24, 48 ... 는 가 이다.

- | | ㉠ | ㉡ | ㉢ |
|--------|----|---|---|
| ① 등비수열 | 공비 | 3 | |
| ② 등비수열 | 공비 | 2 | |
| ③ 등비수열 | 공차 | 2 | |
| ④ 등차수열 | 공차 | 2 | |
| ⑤ 등차수열 | 공차 | 3 | |

3. 첫째항이 a , 공비가 r ($\neq 0$)인 등비수열 $\{a_n\}$ 을 이용하여 만든 <보기>의 수열 중 등비수열의 개수는? [4.1점]

<보 기>

- ㄱ. a_1, a_3, a_5, \dots
 ㄴ. a_2, a_4, a_6, \dots
 ㄷ. $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, \dots$
 ㄹ. $a_1 - a_2, a_3 - a_4, a_5 - a_6, \dots$
 ㅁ. $a_1 \times a_2, a_3 \times a_4, a_5 \times a_6, \dots$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

4. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하자. $S_n = -\frac{3}{2}n^2 + \frac{53}{2}n + 3$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?
[4.0점]

- ① 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 ② 공차가 -3이다.
 ③ 일반항은 $a_n = -3n + 28$ 이다.
 ④ 첫째항은 25이다.
 ⑤ $n = 9$ 일 때, S_n 은 최댓값을 갖는다.

5. $\sum_{k=1}^{10} a_{2k} = 30$, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = 40$ 일 때, $\sum_{k=1}^{20} (-1)^k a_k$ 의 값을 구하면? [3.0점]

- ① -70 ② -10 ③ 10 ④ 70 ⑤ 1200

6. 세 변의 길이가 각각 6, 10, 14인 삼각형의 각 중 가장 큰 각의 크기는? [4.1점]

- ① $\frac{1}{2}\pi$ ② $\frac{7}{12}\pi$ ③ $\frac{2}{3}\pi$ ④ $\frac{3}{4}\pi$ ⑤ $\frac{5}{6}\pi$

7. 삼각형 ABC 가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 BC 의 길이를 구하면? [4.2점]

<조 건>

(가) $\sin A \times \cos\left(B + C - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{25}{36}$

(나) 지름의 길이가 12인 원에 내접한다.

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

8. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 제 6항을 구하면? [3.6점]

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

9. 서로 다른 세 수 $3, x, y$ 에 대하여 $x, 3, y$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고, $3, y, x$ 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다고 할 때, $x - y$ 를 구하면? [4.0점]

- ① -18 ② -6 ③ $-\frac{5}{4}$ ④ 6 ⑤ 18

10. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} = 2n^2 - n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 이 성립할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}$ 의 값은? [4.3점]

- ① 225 ② 435 ③ 450 ④ 625 ⑤ 870

11. 아래 식의 값을 바르게 구한 것은? [4.0점]

$$1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + \cdots + n(2n-1)$$

- ① $\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ ② $\frac{n(n-1)(4n-1)}{6}$
 ③ $\frac{n(n+1)(3n-1)}{6}$ ④ $\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$
 ⑤ $\frac{n(n+1)(2n-1)}{3}$

12. 삼각형 ABC 가 $\frac{\sin A}{\sin C} + 2 \cos(A+C) = 0$ 을 만족시킬 때, 다음 중 삼각형 ABC 의 모양으로 항상 옳은 것은? [4.1점]

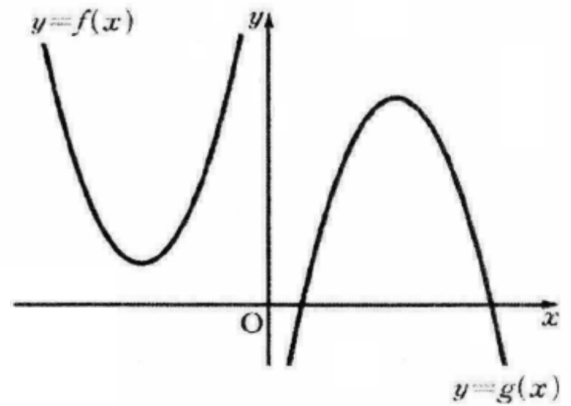
- ① 정삼각형
 ② $a = c$ 인 이등변삼각형
 ③ $b = c$ 인 이등변삼각형
 ④ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형
 ⑤ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

13. 다음 식을 바르게 계산한 것은? [4.3점]

$$\sum_{k=1}^{24} \log_3 \{ \log_{k+2}(k+3) \}$$

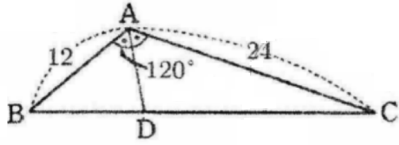
- ① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

14. 다음 그림은 두 함수 $f(x) = (x+3)^2 + 1$ 과 $g(x) = -(x-3)^2 + k$ 의 그래프이다. 직선 $y = k$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점을 A, B 라 하고, 함수 $y = g(x)$ 의 꼭짓점을 C 라 하자. 세 점 A, B, C 의 x 좌표가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k 의 값은? (단, A 는 제 2사분면 위의 점이고, $k > 1$ 이다.) [4.3점]



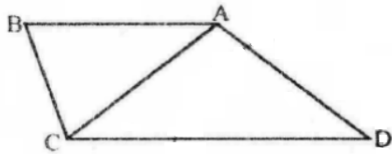
- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

15. $\overline{AB} = 12$, $\overline{AC} = 24$, $A = 120^\circ$ 인 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라고 할 때, 선분 AD 의 길이를 구하면? [4.2점]



- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

16. 사각형 $ABCD$ 에서 변 AB 와 변 DC 는 평행이고 $\overline{BC} = 4$, $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 5$ 일 때, 대각선 BD 의 길이는? [4.5점]



- ① $6\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{19}$ ③ $4\sqrt{5}$
 ④ $2\sqrt{21}$ ⑤ $2\sqrt{22}$

17. 월 이율이 0.6%이고 1개월마다 복리로 매월 초에 10만 원 씩 24 개월 동안 적립할 때, 24 개월 말까지 적립금의 원리합계를 구하면? (단, $1.006^{24} = 1.15$ 으로 계산한다.) [4.3점]

- ① 2500000 원 ② 2501500 원
 ③ 2515000 원 ④ 2650000 원
 ⑤ 2875000 원

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 조건 ㉠, ㉡을 만족시킬 때, a_2 의 값은? [4.5점]

<조 건>

㉠ $\sum_{k=1}^4 a_k = 26$
 ㉡ $\sum_{k=1}^8 \frac{a_3 \times a_7}{a_k} = 442$

- ① $\frac{49}{15}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{17}{5}$ ④ $\frac{52}{15}$ ⑤ $\frac{53}{15}$

19. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 아래 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \cdots \star$$

빈칸에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [4.3점]

<증명>

(i) $n = 2$ 일 때, (좌변) = $\boxed{\text{㉠}}$ $< \frac{3}{2}$ = (우변)

이므로 $n = 2$ 일때 부등식 \star 가 성립한다.

(ii) $n = k$ ($n \geq 2$) 일 때, 부등식 \star 가 성립한다고

가정하면 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$ 이다.

양변에 $\boxed{\text{㉡}}$ 를 더하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \boxed{\text{㉡}} < 2 - \frac{1}{k} + \boxed{\text{㉡}}$$

이다. 그런데 $k \geq 2$ 이므로

$$\left(2 - \frac{1}{k} + \boxed{\text{㉡}}\right) - \left(\boxed{\text{㉢}}\right) = -\frac{1}{k(k+1)^2} < 0$$

이다. 즉 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$

이므로 $n = k+1$ 일 때도 부등식 \star 이 성립한다.

(i), (ii) 에서 부등식 \star 는 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

	㉠	㉡	㉢
①	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{(k+1)^2}$	$2 - \frac{1}{k+1}$
②	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{(k+1)^2}$	$2 - \frac{1}{k}$
③	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{k^2+1}$	$2 - \frac{1}{k+1}$
④	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{k^2+1}$	$2 - \frac{1}{k+1}$
⑤	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{k^2+1}$	$2 - \frac{1}{k}$

20. $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 원주를 $2n$ 등분한 점을 각각 P_1, P_2, \dots, P_{2n} 이라 하자. 이 중에서 세 점을 꼭짓점으로 하여 만들 수 있는 둔각삼각형의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{11} \frac{n}{a_n}$ 의 값은? [4.7점]

- ① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{9}{10}$ ③ $\frac{10}{11}$ ④ $\frac{11}{12}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

서답형

단답형 1. 첫째항이 $\frac{1}{8}$, 공비가 2인 등비수열의 제 5항을 구하시오. [3.0점]

단답형 2. 다음 수열의 일반항을 $a_n = A^n + B$ 라 할 때, $A - B$ 를 구하시오. [3.0점]

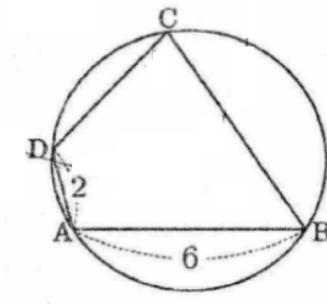
9, 99, 999, 9999, 99999, ...

단답형 3. 다음 식의 값을 구하시오. [3.0점]

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 10)^2$$

단답형 4. 원에 내접하는 사각형 ABCD 가

$\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 2$, $\cos(\angle BCD) = \frac{1}{3}$ 을 만족시킨다. 이 원의 넓이를 구하면? [5.0점]



단답형 5. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n} > 1 + \frac{n}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ 이 성립함을 수학적}$$

귀납법으로 증명하는 과정이다.

<증명>

(i) $n = 2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \frac{25}{12} > 2 = (\text{우변})$$

이므로 부등식 ①이 성립한다.

(ii) $n = k$ ($k \geq 2$) 일 때, 부등식 ①이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$$

이다. 양변에

$$\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+\textcircled{7}}}$$
 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+\textcircled{7}}} > 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+\textcircled{7}}}$$

즉

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} > 1 + \textcircled{9}$$

따라서 $n = k + 1$ 일 때도 부등식 ①이 성립한다.

(i), (ii) 에서 부등식 ① 은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

⑦에 들어갈 식을 $f(k)$, ⑨에 들어갈 식을 $g(k)$ 라 하자.

$f(3) + g(3)$ 의 값을 구하면? [6.0점]