♦ 전체 : 선택형 16문항(70점), 서답형 5문항(30점)

♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$일 때, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x+12)$의 최댓값을 M, 최솟값을 N이라 하자. $M-N$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

i) $2x+12>0 \Rightarrow x>-6$

ii) 감소함수 이므로

$y_{최대} = \log_{\frac{1}{2}}(2(-2)+12) = \log_{\frac{1}{2}}8 = -3$

$y_{최소} = \log_{\frac{1}{2}}(2\cdot 2+12) = \log_{\frac{1}{2}}16 = -4$

$\therefore M-N = -3-(-4) = 1$

2. 둘레의 길이가 20인 부채꼴의 넓이의 최댓값은?

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

i) $20 = 2r+l \Rightarrow l = 20-2r$

ii) $S = \frac{1}{2}rl$

$= \frac{1}{2}r(20-2r)$

$= r(10-r)$

이차함수의 대칭성에 의해

$S_{최대} = 5(10-5) = 25$

3. $a>1$일 때, 다음을 만족시키는 실수 k의 값은?

$$\sqrt[3]{a^2 \times \sqrt[5]{a^6} \times \sqrt{a^6}} \div \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4} \times a^3} = a^k$$

① $\frac{17}{15}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{32}{15}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

$a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{6}{15}} \times a^{\frac{6}{6}} \div a^{\frac{4}{15}} \times a^{\frac{3}{5}}$

$= a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+1-\left(\frac{4}{15}+\frac{3}{5}\right)} = a^k$

$\therefore k = \frac{10+6+15-4-9}{15}$

$= \frac{18}{15}$

$= \frac{6}{5}$

4. 모든 실수 x에 대해 $\log_{(a-1)}(7x^2+2ax+a)$가 정의되도록 정수 a를 정할 때, 만족하는 모든 정수 a의 합은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

i) $a-1 \ne 1$, $a-1>0$

ii) $7x^2+2ax+a>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$D/4 = a^2-7a<0$

$a(a-7)<0$

$0<a<7$

$\therefore a \ne 2$, $1<a<7$

$\therefore a = 3, 4, 5, 6$

$\therefore$ 합 $= 18$

5. 자외선이 어느 필름을 한 장 통과할 때마다 통과하기 전 양의 90%가 차단된다고 한다. 자외선이 n장의 필름을 통과하면 맨 처음 자외선 양의 99.99%가 차단될 때, 자연수 n의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

$A\left(\frac{10}{100}\right)^n = A\cdot\frac{0.01}{100}$

$\left(\frac{1}{10}\right)^n = \left(\frac{1}{10}\right)^4$

$\therefore n=4$

6. 모든 양의 실수 x에 대하여 $x^{\log x} \geq kx^2$가 성립하도록 k 값을 정할 때, k의 최댓값은? (단, k는 양의 실수)

① 10^{-4} ② 10^{-3} ③ 10^{-2} ④ 10^{-1} ⑤ 1

i) $x>0$

ii) $(\log x)^2 \geq \log k + 2\log x$ (∵ 밑>1)

let $\log x = t$ $(x>0)$

$t^2 \geq \log k + 2t$

$t^2 - 2t - \log k \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$\therefore D/4 = 1 + \log k \leq 0$

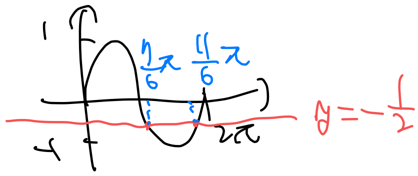
$\log k \leq \log \frac{1}{10}$

$\therefore k \leq \frac{1}{10}$ (∵ 밑>1)

7. $0 \leq x < 2\pi$에서 부등식 $4\sin x + 2 \leq 0$의 해가 $\alpha \leq x \leq \beta$일 때, $\cos\frac{\alpha+\beta}{3}$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ 1

$\sin x \leq -\frac{1}{2}$



$\therefore \frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi$

$\therefore \cos\frac{\alpha+\beta}{3} = \cos\frac{\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi}{3}$

$= \cos\pi$

$= -1$

8. 어느 기업의 매출액이 매년 10%씩 늘어난다고 할 때, 이 기업의 매출액이 현재의 4배 이상이 되는 것은 최소 몇 년 후인가? (단, $\log 1.10 = 0.04$, $\log 2 = 0.30$으로 계산한다.)

① 8년 후 ② 11년 후 ③ 15년 후
④ 19년 후 ⑤ 22년 후

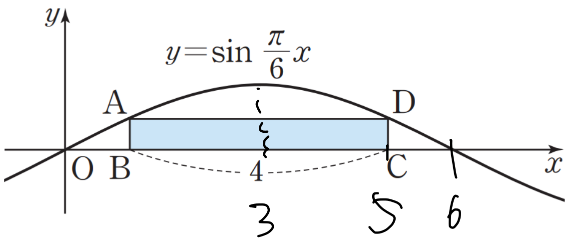
$A\left(\frac{110}{100}\right)^n \geq 4A$

$n\log 1.1 \geq 2\log 2$

$0.04n \geq 0.6$

$n \geq 15$

9. 다음 그림과 같이 함수 $y=\sin\frac{\pi}{6}x$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형에 직사각형 $ABCD$가 내접한다. $\overline{BC}=4$일 때, 직사각형 $ABCD$의 넓이는?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

i) 주기 $= \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = 12$

ii) $\overline{CD} = \sin\frac{\pi}{6}\cdot 5 = \frac{1}{2}$

$\therefore S = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$

10. 1이 아닌 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 $\log_a b = \log_b a$일 때, $4a+9b$의 최솟값은?

① 6 ② 12 ③ 13 ④ 36 ⑤ 72

$\frac{\log b}{\log a} = \frac{\log a}{\log b}$

$(\log a)^2 = (\log b)^2$

$\log a = \pm \log b$

$\therefore a = b$ or b^{-1}

i) $a=b$ 일 때

모순 ($\because a \neq b$)

ii) $a = \frac{1}{b}$ 일 때

$4a+9b$

$= 4\cdot\frac{1}{b} + 9b$

$\geq 2\sqrt{\frac{4}{b}\cdot 9b}$ ($\because$ 산술기하)

$= 12$

11. $0<\theta<\pi$이고 각 θ와 각 4θ를 나타내는 동경이 일치할 때, 각 θ의 크기는?

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{5}\pi$ ③ $\frac{3}{5}\pi$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{4}{5}\pi$

$4\theta - \theta = 0° + 360° \times n$

$3\theta = 360° \times n$

$\theta = 120° \times n$

$\therefore \theta = 120° = \frac{2}{3}\pi$

12. 예각삼각형 ABC에 대한 다음 <보기>중 옳은 것만을 있는 대로 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\cos\frac{A+B}{2} = -\sin\frac{C}{2}$

ㄴ. $\sin(A+B) - \sin C = 0$

ㄷ. $\tan A + \tan(B+C) = 0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

~~ㄱ.~~ $A+B+C = 180°$

$A+B = 180° - C$

$\therefore \cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(90° - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

ㄴ. $\sin(A+B) - \sin C = \sin C - \sin C$

$= 0$

ㄷ. $\tan A + \tan(B+C) = \tan A + \tan(-A)$

$= 0$

-7
-13

13. $(n^2-20n+91)$의 (n^2+n)제곱근 중에서 서로 다른 2개의 실수가 존재하도록 하는 자연수 n의 개수는? (단, $1 \le n \le 50$)

① 40 ② 41 ③ 42 ④ 43 ⑤ 44

* 양수의 짝수 제곱근

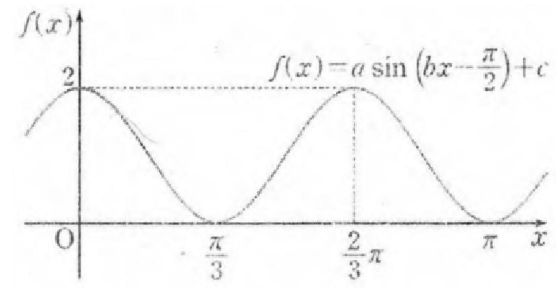
i) $n^2-20n+91>0$
-7
-13

$n<7$ or $n>13$

ii) $n(n+1)$은 무조건 짝수

$\therefore$ n의 개수 $=6+37=43$

14. 함수 $f(x)=a\sin\left(bx-\frac{\pi}{2}\right)+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값은? (단, $b>0$)



① 0 ② 1 ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 2

i) 주기 $=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3}$ $\therefore b=3$ ($\because b>0$)

ii) $a=1$ or -1

iii) $c=1$

$\therefore f(x)=a\sin\left(0-\frac{\pi}{2}\right)+1=0$

$a=1$

$\therefore f(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+1$

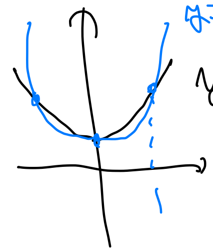
$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+1=1$

15. 방정식 $4^{|x|}=4\times 2^{|x|}+k$의 서로 다른 실근이 3개가 되도록 실수 k를 정할 때, 실수 k의 값은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

let $f(x)=4^{|x|}$, $g(x)=4\cdot 2^{|x|}+k$

$=2^{|x|+2}+k$



16. 함수 $f(x)=a^{|x+2|}+2$과 $y=10$의 교점 중 x좌표가 가장 작은 것을 t_a, 가장 큰 것을 s_a라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것만을 모두 고른 것은? (단, $t_a<s_a$, $a>1$)

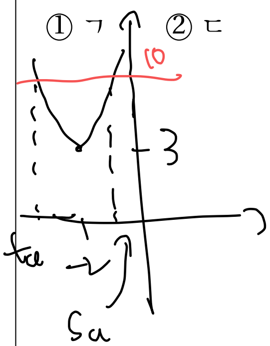
<보 기>

ㄱ. $f(x)=10$의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

ㄴ. $a=2$일 때, $s_2-t_2=6$

ㄷ. $s_{\sqrt{6}}-t_{\sqrt{6}}<s_{\sqrt{7}}-t_{\sqrt{7}}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄴ. $2^{|x+2|}+2=10$

$2^{|x+2|}=2^3$

$x+2=3$ or -3

$x=-5$ or 1

$\therefore s_2-t_2=1-(-5)=6$

ㄷ. $a=8$ 대입,

$8^{|x+2|}+2=10$

$8^{|x+2|}=8$

$x+2=1$ or -1

$x=-1$ or -3

$\therefore s_8-t_8=-1-(-3)=2$

$\therefore$ a가 증가하면 s_a-t_a 값은 감소하므로

$s_{\sqrt{6}}-t_{\sqrt{6}}>s_{\sqrt{7}}-t_{\sqrt{7}}$

서답형

단답형 1. 이차방정식 $x^2 - ax + 8 = 0$의 두 근이 $100^{\log 2}, b$일 때, $\log_2(a-b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수)

i) $100^{\log 2} \times b = 8$ $\qquad 100^{\log 2} = 2^2 = 4$

$4b = 8$

$b = 2$

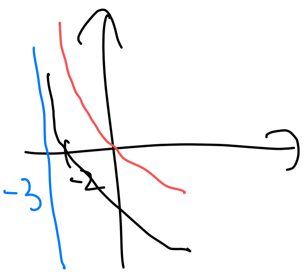
ii) $100^{\log 2} + b = 4 + 2 = 6 = a$

$\therefore \log_2(a-b) = \log_2(6-2) = 2$

단답형 2. 함수 $y = \log_{\frac{1}{5}}(kx + 3k)$가 제 3사분면을 지나지 않을 때, 양수 k의 최댓값을 구하시오.

$y = \log_{\frac{1}{5}} k(x+3)$

$= -\log_5(x+3) - \log_5 k$



(0,0) 대입하면

$0 \le -\log_5 3 - \log_5 k$

$\log_5 k \le \log_5 \frac{1}{3}$

$\therefore k \le \frac{1}{3}$ (∵ 밑>1)

$\therefore k_{최대} = \frac{1}{3}$

서술형 1. 집합 U를 자연수 전체의 집합이라고 하자. 집합 $A = \{n \in U \mid \sqrt[5]{5^{2n}}$과 $(\sqrt[n]{7})^{200}$이 모두 자연수$\}$에 대하여 $n(A)$를 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오.

i) $5^{\frac{2n}{5}}$ 이 자연수 ⇒ n: 5의 배수

ii) $7^{\frac{200}{n}}$ 이 자연수 ⇒ n: 200의 약수

200 < 20 < 2, 10 < 2, 5 ; 10 < 2, 5 $\qquad 200 = 2^3 \cdot 5^2$

$\therefore n = 5 \times 5^a \times 2^b$

$(a = 0, 1 \; , \; b = 0, 1, 2, 3)$

$\therefore n(A) = 2 \times 4 = 8$

서술형 2. 별의 밝기는 지구에서 그 별을 볼 때 밝기인 겉보기 등급과 그 별이 지구에서 10파섹의 거리에 있다고 가정했을 때 밝기인 절대 등급으로 나타낸다. 지구까지 거리가 x파섹인 별의 겉보기 등급을 m, 절대 등급을 M이라고 하면

$$m - M = 5\log x - 5$$

인 관계가 성립한다고 한다. 겉보기 등급이 3, 절대 등급이 -6인 별의 지구까지 거리는 몇 파섹인지 구하시오.

(단, $\log 6.31 = 0.8$로 계산한다.)

$$3-(-6) = 5\log x - 5$$

$$\frac{14}{5} = \log x$$

$$\log x = 2 + 0.8$$

$$= \log 100 + \log 6.31$$

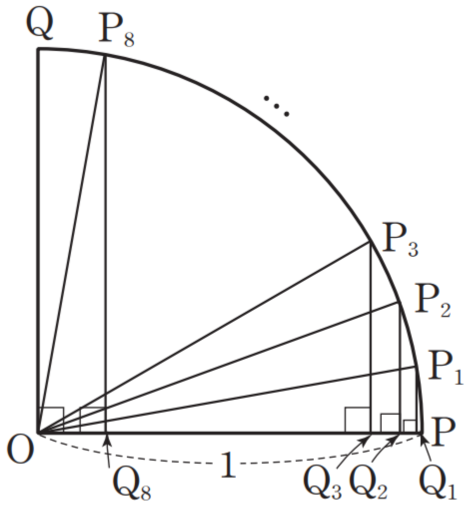
$$= \log 631$$

$\therefore$ $x =$ 631 파섹

서술형 3. 다음 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1인 사분원의 호 PQ를 9등분하는 점을 차례로 $P_1, P_2, \cdots, P_8$이라고 하자. 점 $P_1, P_2, \cdots, P_8$에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 각각 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_8$이라고 할 때,

$$\overline{OQ_1}^2 + \overline{OQ_2}^2 + \overline{OQ_3}^2 + \cdots + \overline{OQ_8}^2$$

의 값을 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오.



$$\cos\theta_1 = \frac{\overline{OQ_1}}{1}$$

$\therefore \overline{OQ_1}^2 = \cos^2\theta_1$ $\left(\theta_1 = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{9}\right)$

$$\theta_8 = \frac{\pi}{2} \times \left(1 - \frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18}$$

같은 방법으로

$$\overline{OQ_1}^2 + \overline{OQ_2}^2 + \cdots + \overline{OQ_8}^2$$

$$= \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cdots + \cos^2\theta_8$$

$$= \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cdots + \sin^2\theta_1$$

$$= 4$$