♦ 전체 : 선택형 14문항(70점) 서답형 6문항(30점)

♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 이산확률변수 X의 확률분포표가 다음과 같을 때, $a+b$의 값은? [4.2점]

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	a	$\frac{2}{5}$	b 1

$\frac{2}{10}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{4}{10}$

① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{13}{10}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{17}{10}$ ⑤ $\frac{19}{10}$

$a+b=\frac{3}{10}+1=\frac{13}{10}$

2. 다음 <보기>의 통계조사 중 전수조사인 것의 개수는? [4.3점]

<보 기>

ㄱ. OO 지역의 수질오염도 조사

ㄴ. 전국에 등록된 고등학교의 개수 조사

ㄷ. 인구 주택 총조사

ㄹ. 사과의 당도 조사

ㅁ. TV 시청률 조사

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

3. 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{1}{4}$	d

i) $a+b=\frac{3}{4}$, $d=1$

X의 평균 $E(X)=2$일 때, $P(X=1)$의 값은? [4.5점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

ii) $E(X)=1\cdot a+2\cdot b+3\cdot\frac{1}{4}=2$

$$\begin{array}{rl} & a+2b=\frac{5}{4} \\ - & a+b=\frac{3}{4} \\ \hline & b=\frac{1}{2},\ a=\frac{1}{4} \end{array}$$

$\therefore P(X=1)=a=\frac{1}{4}$

4. 확률변수 X가 이항분포 $X\left(18, \frac{2}{3}\right)$을 따를 때, X의 평균과 표준편차의 합의 값은? [4.6점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$E(X)=18\cdot\frac{2}{3}=12$

$V(X)=18\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=4$

$\sigma(X)=2$

$\therefore E(X)+\sigma(X)=12+2=14$

5. 확률변수 X의 평균이 3, 분산이 2일 때, 확률변수 $Y=2X+1$에 대하여 $E(Y)+V(Y)$의 값은? [4.7점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$E(Y)=E(2X+1)=2E(X)+1=7$

$V(Y)=V(2X+1)=4V(X)=8$

$\therefore E(Y)+V(Y)=7+8=15$

6. 모평균이 20, 모표준편차가 10인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\dfrac{E(\overline{X})}{V(\overline{X})}$의 값은? [4.8점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\overline{X} \sim N(20, 2^2)$ $\qquad \frac{10^2}{5^2} = 2^2$

$\frac{E(\overline{X})}{V(\overline{X})} = \frac{20}{4} = 5$

7. 어느 과일 도매점에서 파는 수박 한 개의 무게는 모표준편차가 0.5kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 수박 중에서 100개를 임의추출하여 무게를 측정하였더니 평균이 3kg이었다. 이 도매점에서 파는 수박 한 개의 무게의 평균 m에 대하여 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구한 것은? [4.9점]

(단, 단위는 kg 이며 Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$로 계산한다.)

① $2.902 \le m \le 3.098$
② $2.084 \le m \le 3.196$
③ $2.608 \le m \le 3.392$
④ $2.216 \le m \le 3.784$
⑤ $2.02 \le m \le 3.98$

$X \sim N(m, 0.5^2)$

신뢰구간은 요기 쓰지 않고 공식으로 바로 해결

$3 - 1.96 \times \frac{0.5}{10} \le m \le 3 + 1.96 \times \frac{0.5}{10}$

$\le m \le 3.098$

$\frac{196 \times 5}{10000} = \frac{980}{10000}$

196
5
5,45,30

a>0 이 있어야 성립

8. 확률변수 X에 대하여 $E(X) = 2$, $E(X^2) = 5$이고, 확률변수 $Y = aX + b$에 대하여 $E(Y) = 21$, $V(Y) = 100$일 때, 상수 $a + b$의 값은? [5점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

i) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5 - 4 = 1$

ii) $E(Y) = E(aX+b) = aE(X) + b$
$= 2a + b = 21$

$V(Y) = V(aX+b) = a^2 V(X)$
$= a^2 = 100$

$\therefore a = 10 \quad (\because a > 0)$
$b = 1$

$\therefore a + b = 10 + 1 = 11$

9. 모집인원이 25명인 어느 대학의 수시 논술전형에 1000명이 지원하였다. 시험 결과 지원자의 논술 점수가 평균은 75점, 표준편차는 8점이었다. 응시자 전체의 성적이 정규분포를 따를 때, 합격하려면 최소한 몇 점 이상 얻어야 하는가? [5.1점] (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \le Z \le 2) = 0.475$로 계산한다.)

① 90 ② 91 ③ 92 ④ 93 ⑤ 94

$X \sim N(75, 8^2)$

$P(X \ge k) = \frac{25}{1000}$

$P\left(Z \ge \frac{k-75}{8}\right) = 0.025$

$\frac{k-75}{8} = 2$

$k = 91$

10. 모평균 m이고 모표준편차가 2인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$와 모평균의 차가 0.4 이하일 확률이 0.97이상이 되기 위한 n의 최솟값은? [5.3점] (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \le Z \le 2.2) = 0.485$로 계산한다.)

① 11 ② 44 ③ 99 ④ 121 ⑤ 144

$|\bar{x} - m| = k \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \le 0.4$

$2.2 \times \frac{2}{\sqrt{n}} \le 0.4$

$11 \le \sqrt{n}$

$121 \le n$

11. 주사위 1개를 던져서 3의 배수가 나오면 5점을 얻고, 3의 배수가 나오지 않으면 3점을 잃는 게임을 하였다. 주사위 1개를 162번 던진 후, 최종 점수가 66점 이상이 될 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [5.4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668 ④ 0.1587 ⑤ 0.3085

$X \sim B(162, \frac{1}{3})$

$X \sim N(54, 6^2)$

let $Y = 5X + (-3)(162 - X)$

$= 8X - 486$

$E(Y) = 8 \cdot 54 - 486 = -54$

$V(Y) = 8^2 \cdot 6^2 = 48^2$

$\therefore P(Y \ge 66) = P\left(Z \ge \frac{66-(-54)}{48}\right) = P(Z \ge 2.5)$

$\therefore 0.5 - 0.4938$

$= 0.0062$

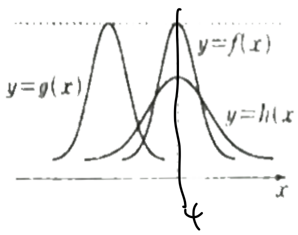
12. 정규분포를 따르는 세 확률변수 X_1, X_2, X_3의 확률밀도 함수가 각각 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$이고, 다음 조건을 만족시킬 때, 세 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = g(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은? [5.6점]

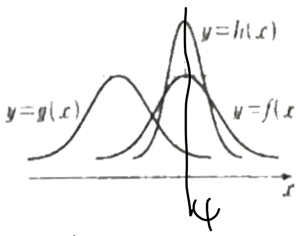
<조 건>

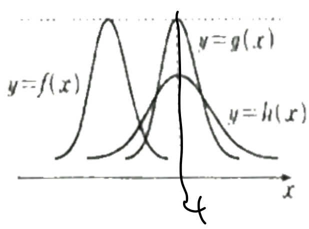
(가) 모든 실수 x에 대하여

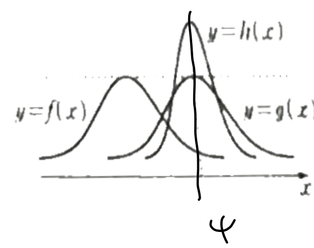
$f(x) = g(x+2)$, $g(4-x) = g(4+x)$

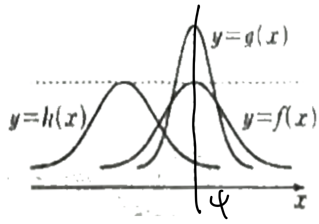
(나) $E(X_2) = E(3X_3 - 8)$, $\sigma(X_2) = 2\sigma(X_3)$

①


②


③


④


⑤


(가)


(나) i) $E(X_2) = E(3X_3 - 8)$

$4 = 3E(X_3) - 8$

$E(X_3) = 4$

ii) $\sigma(X_2) > \sigma(X_3)$

13. 어느 공장에서 생산된 물건 1개의 무게는 평균이 200g, 표준편차가 50g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 제품 중 무게가 158g 이하인 경우 C등급을 받는다고 한다. 생산된 400개 제품 중 C등급을 받는 제품의 수가 88개 이상 92개 이하일 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [5.7점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.64	0.24
0.84	0.30
1.00	0.34
1.28	0.40
1.50	0.43
2.00	0.48

① 0.03 ② 0.05 ③ 0.08 ④ 0.09 ⑤ 0.14

i) $X \sim N(200, 50^2)$

$P(X \le 158) = P\left(Z \le \frac{158-200}{50}\right)$

$= P(Z \le -0.84)$

$= 0.5 - 0.3 = 0.2$

ii) $Y \sim B(400, 0.2)$

$Y \sim N(80, 8^2)$

$P(88 \le Y \le 92) = P\left(\frac{88-80}{8} \le Z \le \frac{92-80}{8}\right)$

$= P(1 \le Z \le 1.5)$

$= 0.43 - 0.34$

$= 0.09$

V오타.

14. 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따른다. 이 모집단에서 크기가 n_1인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X_1}$, 크기가 n_2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X_2}$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.9점] (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(\le Z \le 1.5) = 0.43,\ P(0 \le Z \le 2) = 0.48$로 계산한다.)

0

<보 기>

ㄱ. $E(\overline{X_1}) = E(\overline{X_2})$

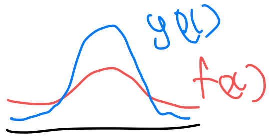
ㄴ. 확률변수 $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$의 확률밀도함수를 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, $n_1 < n_2$이면 $f(x)$의 최댓값이 $g(x)$의 최댓값보다 작다. X 크다.

ㄷ. 크기가 n_1인 표본을 임의추출하여 신뢰도 86%로 추정할 때의 신뢰구간의 길이가 l_1, 크기가 n_2인 표본을 임의추출하여 신뢰도 96%로 추정할 때의 신뢰구간의 길이가 l_2라 할 때, $l_1 > l_2$이면 $16n_1 < 9n_2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄴ. $\sigma(\overline{X_1}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$ $\sigma(\overline{X_2}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

$n_1 < n_2 \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} > \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$



ㄷ. $l_1 = 2 \times 1.5 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$

$l_2 = 2 \times 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

$\frac{1.5}{\sqrt{n_1}} > \frac{2}{\sqrt{n_2}}$

$\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} > \frac{4}{3}$

$9n_2 > 16n_1$

서답형

단답형 1. 어느 공장에서 생산된 초콜릿 1개의 열량은 모표준편차가 2kcal인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 초콜릿 n개를 임의추출하여 열량을 측정하였더니 평균이 270kcal이었다. 이 공장에서 생산된 초콜릿 1개의 평균 열량 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $269.02 \le m \le 270.98$ (단위 kcal)일 때, n의 값을 구하시오. [4.5점] (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|\overline{Z}| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

$$270 + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} = 270.98$$

$$1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.98$$

$$4 = \sqrt{n}$$

$$n = 16$$

단답형 2. 이산확률변수 X가 갖는 값이 1, 2, 3이고 X의 확률질량함수가

$$P(X = x) = \frac{x+k}{9} \quad (\text{단, } x = 1, 2, 3)$$

일 때, 확률변수 X의 평균을 구하시오. [5.5점]

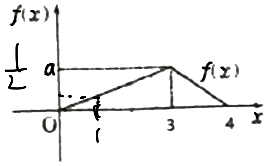
i) $\frac{1+k}{9} + \frac{2+k}{9} + \frac{3+k}{9} = \frac{k}{3} + \frac{2}{3} = 1$

$\therefore k = 1$

ii) $E(X) = 1 \cdot \frac{1+1}{9} + 2 \cdot \frac{2+1}{9} + 3 \cdot \frac{3+1}{9}$

$= \frac{20}{9}$

서술형 1. $0 \le x \le 4$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $P(1 \le X \le 3)$을 구하시오. [4점]



i) $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a = 1$

$a = \frac{1}{2}$

ii) $f(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(1 \le X \le 3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)(3-1)$

$= \frac{2}{3}$

서술형 2. 흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나온 흰 공의 개수를 확률변수 X라 한다. X의 확률질량함수와 X의 확률분포표를 이용하여 흰 공이 2개 이상 뽑힐 확률을 구하시오. [5점]

X	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_3}$	$\frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1}{{}_6C_3}$	$\frac{{}_4C_3 \times {}_2C_0}{{}_6C_3}$

X	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{4}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{4}{20}$

$P(X \ge 2) = \frac{12}{20} + \frac{3}{20}$

$= \frac{3}{4}$

서술형 3. 정규분포 $N(30,9)$를 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하였을 때, 그 표본의 값의 합을 확률변수 S라 하자. $P(S \geq 132)$을 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [5점]

표본 평균 × n

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

$X \sim N(30, 3^2)$

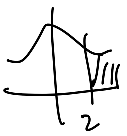
$\overline{X} \sim N\left(30, \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$

$S = 4\overline{X}$

$P(S \geq 132) = P(4\overline{X} \geq 132)$

$= P(\overline{X} \geq 33)$

$= P\left(Z \geq \frac{33-30}{\frac{3}{2}}\right)$



$= P(Z \geq 2)$

$= 0.5 - 0.4772$

$= 0.0228$

V 오타

서술형 4. 모집단의 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 5이다. 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때

$$2 \times P(X=1) = P(X=5),\ P(\overline{X}=2) = \frac{8}{125}$$

이다. $E(\overline{X}) + V(\overline{X})$의 값을 구하시오. [6점]

$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+X_3}{3} = 2$

$X_1+X_2+X_3 = 6$