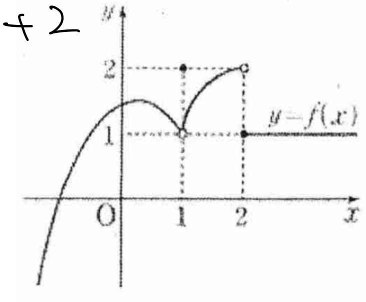
선택형

1. $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때,

$f(1)-\lim\limits_{x\to1+}f(x)+\lim\limits_{x\to2-}f(x)$의 값은? [3.0점]

$2-1+2$



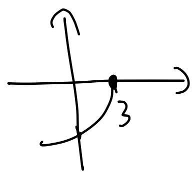
① -1 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

2. 함수 $f(x)=-\sqrt{-2x+6}$가 연속인 구간은? [3.5점]

① $(-\infty,\infty)$ ② $(-\infty,3]$ ③ $[-3,\infty)$

④ $(3,\infty)$ ⑤ $[3,\infty)$

$f(x)=-\sqrt{-2(x-3)}$



$[-\infty,3]$

3. 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{|x-4|}$에서 극한값 $\lim\limits_{x\to4+}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to4-}f(x)=b$라고 할 때, $a-2b$의 값은? [4.0점]

① -5 ② 0 ③ 5 ④ 10 ⑤ 15

$$\lim_{x\to4+}\frac{x^2-3x-4}{|x-4|}=\lim_{x\to4+}\frac{\cancel{(x-4)}(x+1)}{\cancel{x-4}}=5=a$$

$$\lim_{x\to4-}\frac{x^2-3x-4}{|x-4|}=\lim_{x\to4-}\frac{\cancel{(x-4)}(x+1)}{-\cancel{(x-4)}}=-5=b.$$

$\therefore a-2b=5-2\cdot(-5)=15$

4. 달 표면에서 24m/s의 속도로 달 표면과 수직하게 위로 돌을 던지면 던진 지 t초 후 돌의 높이를 $s(t)$m라고 할 때

$$s(t)=24t-0.8t^2\ (0\le t\le30)$$

인 관계가 성립한다고 한다. t의 값이 5에서 10까지 변할 때, $s(t)$의 평균변화율의 값은? [3.8점]

① 12 ② 16 ③ 22 ④ 32 ⑤ 160

$$\text{평균변화율}=\frac{S(10)-S(5)}{10-5}=\frac{160-100}{5}=12$$

$S(10)=240-80=160$

$S(5)=120-20=100$

5. 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+a}{x+2} & (x\neq-2)\\ b & (x=-2)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 미분가능할 때, 상수 a,b에 대하여 $a+b$의 값은? [4.4점]

① -20 ② -16 ③ 0 ④ 16 ⑤ 20

미분가능이면 연속이므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+a}{x+2}=b$$

ㄱ) $(-2)^3+a=0$

$a=8$

ㄴ) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{x+2}}=12$

$\therefore a+b=8+12=20$

6. 어느 가게에서 제품 $x$kg을 생산하는 데 드는 총비용이 $C(x) = 2x^3 - 4.8x^2 + 4x \ (0 < x < 1.5)$일 때, 제품 1kg을 생산하는데 드는 한계비용은? (단, 총비용의 순간변화율을 한계비용이라 한다.) [3.8점]

① 0.4 ② 0.6 ③ 0.8 ④ 1 ⑤ 1.2

$C'(x) = 6x^2 - 9.6x + 4$

$C'(1) = 6 - 9.6 + 4 = 0.4$

7. 함수 $f(x) = [x-2](x-k)$가 $x = 2$에서 연속일 때, 상수 k의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수) [4.3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

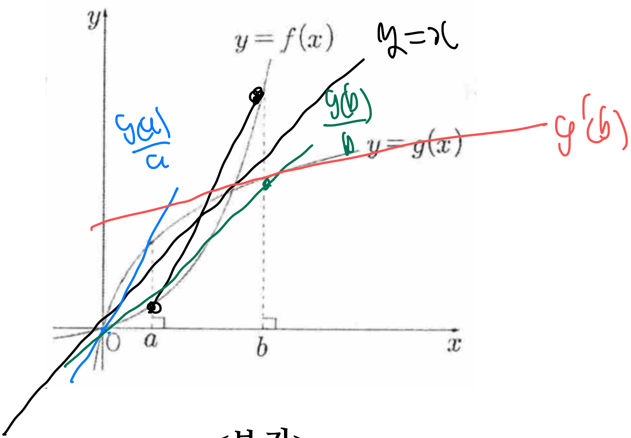
$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (-1)(x-k) = -2+k$

$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} 0 \cdot (x-k) = 0$

$\therefore -2+k = 0$

$k = 2$

8. 그림과 같이 $x \geq 0$에서 미분가능한 함수 $y = f(x)$의 역함수가 $y = g(x)$이고 $0 < a < b$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.6점]



<보 기>

ㄱ. $f(b) - f(a) > b - a$

ㄴ. $\dfrac{g(a)}{a} < \dfrac{g(b)}{b}$

ㄷ. $f'(a) > f'(b)$

ㄹ. $g'(b) < 1$

ㄱ. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > 1$

ㄴ. $\dfrac{g(a)}{a} > \dfrac{g(b)}{b}$

ㄷ. $f'(x)$는 증가함수

① ㄱ,ㄴ ② ㄴ,ㄷ ③ ㄷ,ㄹ

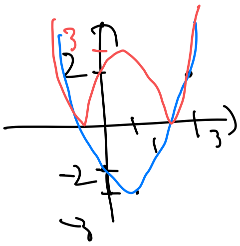
④ ㄱ,ㄹ ⑤ ㄴ,ㄹ

9. 닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)=|x^2-2x-2|$의 최댓값은? [4.4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)=|x^2-2x+1-1-2|$

$=|(x-1)^2-3|$



로피탈 정리 이용

10. 연속함수 $f(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.6점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h}=0$이면 $f'(0)=0$이다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=0$이면 $f'(1)=0$이다.

ㄷ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=0$이면 $f'(0)=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h^2)\cdot 2h}{1}=0$

$f'(h^2)$에 관계없이 0

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)}{1}=f'(1)=0$.

ㄷ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(-h)\cdot(-1)}{2}$

$=f'(0)=0$.

11. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^2-3x}=3,\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{(x-1)(x-2)}=30$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4.7점]

① -27 ② -24 ③ -21 ④ 24 ⑤ 27

i) $f(x)=6x^2+cx+d$ ii) $f(x)-3=(x-2)(ax+b)$

$=(x-2)(ax+b)+3$

$\therefore a=6$

$\therefore f(x)=(x-2)(6x+b)+3$

iii) $\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(6x+b)+\cancel{3}-\cancel{3}}{(x-1)\cancel{(x-2)}}=\frac{12+b}{1}=30$

$\therefore b=18$

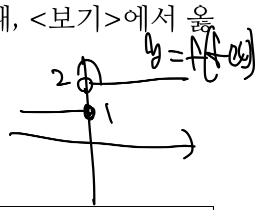
$\therefore f(x)=(x-2)(6x+18)+3$

$f(1)=-1\cdot(6+18)+3=-21$

12. 실수 전체 집합에서 정의된 두 함수 f,g가

$$f(x)=\begin{cases}2 & (x>0)\\ 1 & (x=0)\\ 0 & (x<0)\end{cases},\quad g(x)=\sin(\pi x)$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.5점]



<보 기>

ㄱ. $f(f(x))$는 상수함수이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0}f(g(x))$의 값이 존재한다.

ㄷ. $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄹ. $f(f(f(x)))$는 모든 실수에서 연속이다.

ㄱ. $f(f(1))=f(2)=2$

$f(f(0))=f(0)=1$

① ㄱ,ㄴ ② ㄱ,ㄹ

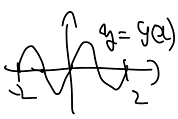
③ ㄴ,ㄷ ④ ㄷ,ㄹ

⑤ ㄴ,ㄷ,ㄹ

주기 $=\frac{2\pi}{\pi}=2$

ㄴ. $\lim_{x\to 0+}f(g(x))=\lim_{x\to 0+}f(x)=2$

$\lim_{x\to 0-}f(g(x))=\lim_{x\to 0-}f(x)=0$



$\therefore$ 극한값 X

ㄷ. $\lim_{x\to 0+}g(f(x))=g(2)=0$

$\lim_{x\to 0-}g(f(x))=g(0)=0$

$g(f(0))=g(1)=0$

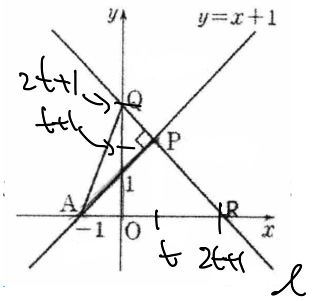
0보다 크든작든 2로 고정됨

ㄹ. $f(f(f(0+)))=f(f(2))=f(2)=2$

$f(f(f(0-)))=f(f(0))=f(1)=2$

$f(f(f(0)))=f(f(1))=f(2)=2$

13. 다음 그림과 같이 직선 $y = x+1$ 위의 두 점 $A(-1,0)$, $P(t,t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y = x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q, x축과 만나는 점을 R이라 하자. 삼각형 APQ와 삼각형 APR의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$라 할 때, 극한값 $\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{T(t)}$의 값은? [4.8점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

i) $l : (t, t+1)\ \ m=-1$

$y-(t+1) = -(x-t)$

$y = -x+2t+1$

$\therefore Q(0, 2t+1)$

ii) $\overline{AP} = \sqrt{(t+1)^2+(t+1)^2} = \sqrt{2}(t+1)$

$\overline{QP} = \sqrt{2}t$

$\therefore S(t) = \frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{QP} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\sqrt{2}}(t+1)\cancel{\sqrt{2}}t$

$= t(t+1)$

iii) $T(t) = \frac{1}{2}(2t+2)\cdot(t+1)$

$= (t+1)^2$

$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{T(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{t(t+1)}{(t+1)^2} = \frac{1}{1} = 1$

14. 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y) = f(x)+f(y)+3xy-5$$

를 만족시키고 $f'(0) = 4$, $f'(a) = 16$일 때, 상수 a의 값은? [4.6점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

i) $f'(0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\cancel{f(0)}+f(h)-5-\cancel{f(0)}}{h} = 4$

ii) $f'(a) = \lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\cancel{f(a)}+f(h)+3ah-5-\cancel{f(a)}}{h}$

$= 4+3a = 16$

$\therefore a = 4$

15. x에 대한 방정식 $nx^3-3x^2+3x = 10$은 자연수 n의 값에 관계 없이 오직 하나의 실근을 갖는다. 이 방정식의 실근이 닫힌구간 $[1,3]$에 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은? [5.5점]

① 42 ② 44 ③ 50 ④ 52 ⑤ 54

삼차함수가 한 실근 ⇒ 미분한게 중근 or 허근

let $f(x) = nx^3-3x^2+3x-10$

i) $f'(x) = 3nx^2-6x+3$

$D/4 = 9-9n \le 0$

$1 \le n$

ii) $f(1)\cdot f(3) = (n-\cancel{3}+\cancel{3}-10)(27n-27+9-10)$

$= (n-10)(27n-30) < 0$

$\therefore \frac{30}{27} < n < 10$ ← $n=2,3,\cdots,9$

$\therefore$ 답 : $\sum_{k=1}^{8}(k+1) = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot9}{\cancel{2}}+8 = 44$

✓ 문제오류

16. 삼차함수 $f(x)$가 다음을 만족시킬 때, 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근의 곱은? [5.5점]

$$\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{x-n}=7-4n \quad (n=1,2)$$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

i) $f(n)=0 \Rightarrow f(1)=f(2)=0$.

ii) $f'(n)=7-4n \Rightarrow \begin{cases} f'(1)=3 \\ f'(2)=1 \end{cases}$

iii) Let $f(x)=(x-1)(x-2)(ax-b)$

ㄱ) $f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)(ax-b)}{\cancel{x-1}}=-a+b=3$

ㄴ) $f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)\cancel{(x-2)}(ax-b)}{\cancel{x-2}}=2a-b=1$

$\therefore a=4$

$b=7$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(4x-7)$

$\therefore$ 답: $1\times2\times\frac{7}{4}=\frac{7}{2}$

서답형

단답형 1. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$3x^2-x\le(2x^2+x)f(x)\le3x^2+7x$$

를 만족시킬 때, 극한값 $\lim_{x\to\infty}f(x)$을 구하시오. [3.0점]

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x}{2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x}{2x^2+x}=\frac{7}{2}$

이므로 조임정리에 의해

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{7}{2}$

단답형 2. 다음 극한값을 구하시오. [3.0점]

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{3-\sqrt{9-x}}$$

$\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{9}-\cancel{(9-x)}}\times(3+\sqrt{9-x})$

$=3+3=6$

단답형 3. 함수 $f(x)=(x-2)(x^2-x+1)$에 대하여 다음 극한값을 구하시오. [4.0점]

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{h}=4f'(2)$$

$f'(x)=1\cdot(x^2-x+1)+(x-2)(2x-1)$

$f'(2)=3+0=3$

$\therefore 4f(2)=4\cdot3=12$

서술형 1. 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f(x)=3x^3-x^2f(x)+x-2$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오. [6.0점]

$f'(x)=9x^2-2xf(x)-x^2f'(x)+1$

$f'(1)=9-2f(1)-f'(1)+1$

$2f'(1)=9-2\cdot1+1$

$f'(1)=4$

$\left(\therefore f(1)=3-f(1)+1-2,\ 2f(1)=2,\ f(1)=1\right)$

서술형 2. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\{2f(x)+g(x)\}=-5$$

를 만족시킬 때, 극한값 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{6f(x)+g(x)}{f(x)-2g(x)}$를 구하시오. [7점]

i) $\lim_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)=0$ $\quad\therefore \lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=-2$

ii) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{6+\frac{g(x)}{f(x)}}{1-2\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}=\dfrac{6-2}{1-2\cdot(-2)}$

$=\dfrac{4}{5}$

서술형 3. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 연속함수이고, 모든 실수 x에 대하여

$$(x-3)f'(x)=x^2-9-f(x)$$

$x=3$ 대입

$0=9-9-f(3)$

$\therefore f(3)=0\ \cdots ㉠$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [7.0점]

$f'(3)=\lim_{x\to3}\dfrac{x^2-9-f(x)}{x-3}$ $\quad(\because f'$: 연속$)$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{2x-f'(x)}{1}$ $\quad(\because$ 로피탈 정리$)$

$=6-f'(3)$

$\therefore 2f'(3)=6$

$f'(3)=3$

* 로피탈 정리를 쓰지 않는 풀이

$f'(3)=\lim_{x\to3}\dfrac{x^2-9-f(x)}{x-3}$ $\quad(\because f'$: 연속$)$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}-\lim_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$ $\quad(\because f(3)=0)$ ㉠

$=6-f'(3)$

$\therefore 2f'(3)=6$

$f'(3)=3$