♦ 전체 : 선택형 15문항(60점), 서답형 7문항(40점)

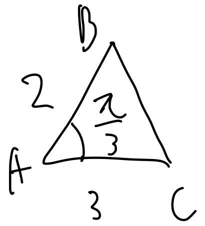
♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. $\overline{AB}=2,\ \overline{CA}=3,\ \angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC에 대하여 $\overline{BC}$의 길이는?

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$



$\overline{BC}^2 = 2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos\frac{\pi}{3}$

$= 13-12\cdot\frac{1}{2}$

$=7$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{7}\quad(\because \overline{BC}>0)$

2. 다음 두 조건을 모두 만족시키는 삼각형 ABC에 대하여 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 2라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

$\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$

<조 건>

(가) $\sin^2 A+\sin^2 B=2\sin A\sin(A+C)$

(나) $\sin A=2\cos B\sin C$

① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

(가) $\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}$

$(a-b)^2=0$

$\therefore a=b$

(나) $\frac{a}{\cancel{2R}}=2\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{\cancel{2a}c}\cdot\frac{c}{\cancel{2R}}$

$(c+b)(c-b)=0$

$\therefore c=b\quad(\because c,b>0)$

$\therefore a=b=c$인 정삼각형

i) $\frac{a}{2R}=\sin\frac{\pi}{3}$

$\frac{a}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$a=2\sqrt{3}$

$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=3\sqrt{3}$

3. $\overline{AB}=3,\ \overline{BC}=5,\ \overline{CA}=7$인 삼각형 ABC에 대하여 각 B의 크기는?

(c, a, b)

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot5\cdot3}$

$=-\frac{1}{2}$

$\therefore B=\frac{2}{3}\pi\quad(\because \frac{\pi}{2}<B<\pi)$

4. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_3=10,\ a_5=-12$일 때, a_{10}의 값은?

① -67 ② -54 ③ -38 ④ -12 ⑤ -10

$\begin{cases} a+2d=10 \\ a+4d=-12 \end{cases}$

$2d=-22$

$d=-11,\ a=32$

$\therefore a_{10}=32+9\cdot(-11)$

$=-67$

5. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_5+a_{10}=0,\ a_7=10,\ a_n<0$일 때, 자연수 n의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 20

i) $a+4d+a+9d=0$

$2a+13d=0$

ii) $a+6d=10$

$2a+12d=20$

$\therefore d=-20$

$\therefore a_7>0,\ a_8<0$

$\therefore n_{최소}=8$

6. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $S_n = 3n^2 - n + k - 2$일 때, 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

i) $a_1 = S_1 = 3 - 1 + k - 2 = k$

ii) $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 3n^2 - n + k - 2$

$- (3(n-1)^2 - (n-1) + k - 2)$

$-6n+3 \quad +1$

$= 6n - 4 \quad (n \geq 2)$

$\therefore a_1 = 6 \cdot 1 - 4 = 2 = k \quad (\because \{a_n\}$: 등차수열$)$

7. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = -3n + 31$일 때, 제1항부터 제n항까지의 부분합 S_n이 최대가 되는 자연수 n의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$a_n = -3n + 31 > 0$

$n < \frac{31}{3} = 10.XX$

$\therefore a_{10} > 0,\ a_{11} < 0$

$\therefore n_{최대} = 10$

8. 두 수 2와 54 사이에 두 실수 a, b를 넣어 만든 수열 $2, a, b, 54$이 등비수열일 때, 두 수 a, b의 합 $a + b$의 값은?

① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

i) $2r^3 = 54$

$r^3 = 27$

$r = 3 \quad (\because r$은 실수$)$

ii) $a = 2 \cdot 3 = 6$

$b = 2 \cdot 3^2 = 18$

$\therefore a + b = 6 + 18$

$= 24$

9. 등비수열 $1, -\sqrt{2}, 2, -2\sqrt{2}, \cdots$의 첫째항을 a, 공비를 r, 제5항을 a_5라고 할 때, $a + r + a_5$의 값은?

① $5 - \sqrt{2}$ ② $4 - \sqrt{2}$ ③ $3 - \sqrt{2}$ ④ $2 - \sqrt{2}$ ⑤ $1 - \sqrt{2}$

$a = 1,\ r = -\sqrt{2}$

$a_5 = 1 \cdot (-\sqrt{2})^4 = 4$

$\therefore a + r + a_5 = 1 - \sqrt{2} + 4$

$= 5 - \sqrt{2}$

10. 세 수 $0, a, a^2 + b$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, $a, a^2 + b, b - 1$은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 두 실수 a, b에 대하여 $a + b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

i) $2a = a^2 + b$

$b = 2a - a^2$

ii) $(a^2 + b)^2 = a(b - 1)$

$\therefore (\cancel{a^2} + 2a - \cancel{a^2})^2 = a(2a - a^2 - 1)$

$4a^2 = -a(a-1)^2$

iii) $a = 0$ 일때 $b = 0$,

$0, 0, -1$ 은 등비수열이 아니므로 모순

iv) $a \neq 0$ 일때

$-4a = a^2 - 2a + 1$

$0 = (a+1)^2$

$a = -1$

$b = -3$

$\therefore a + b = -1 - 3$

$= -4$

11. $a_1+a_2+a_3+a_4=15$, $a_5+a_6+a_7+a_8=240$을 만족시키는 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 제12항까지의 합 S_{12}의 값은?

① 1024 ② 1025 ③ 2048 ④ 4095 ⑤ 4096

i) $\begin{cases} a(1+r+r^2+r^3)=15 \\ ar^4(1+r+r^2+r^3)=240 \end{cases}$

$r^4=16$

$r=2,-2$ (∵ r은 실수)

ii) $a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$

$=ar^8(1+r+r^2+r^3)$

$=240\times r^4$

$=240\times 16$

$=3840$

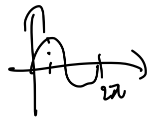
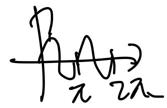
$\therefore S_{12}=15+240+3840$

$=4095$

12. 정의역이 양의 실수 전체집합인 두 함수 $f(x)=\sin(mx)$, $g(x)=\cos(mx)$에 대하여 $f(x)=1$, $g(y)=1$을 만족하는 x, y값에 대하여 작은 수부터 각각 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$와 $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$ (n은 자연수)라 하자. $\sum_{k=1}^{2022}\{(-1)^{k-1}\times k\times(x_k-y_k)\}=2022\pi$를 만족하는 양의 실수 m에 대하여 $8m$의 값은?

① 6 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

i) m=1 일때 ii) m=2 일때

$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

(k은 음이아닌 정수) (k은 음이 아닌 정수)

$\therefore x_n=\frac{\pi}{2m}+\frac{n-1}{m}\cdot 2\pi$

주기 반에 반 주기 X (n-1)

마찬가지 방법으로

$y_n=\frac{2\pi}{m}+\frac{n-1}{m}\cdot 2\pi$

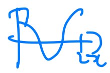
$\therefore \sum_{k=1}^{2022}(-1)^{k-1}\times k\times\left(-\frac{3\pi}{2m}\right)=-\frac{3\pi}{2m}(1-2+3-4+\cdots)$

$=1011\cdot\frac{3\pi}{2m}=2022\pi$

$\therefore 4m=3\pi$

$8m=6\pi$

i) m=1 일때 ii) m=2 일때




$x=2\pi+k\cdot 2\pi$ $x=\pi+k\cdot\pi$

(k은 음이아닌 정수)

13. $\sum_{k=3}^{n-1}(2k+1)=187$를 만족하는 자연수 n의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$187+3+5=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$

$=\cancel{2}\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{\cancel{2}}+n-1$

$=n^2-1$

$\therefore\ n^2=196$

$n=14\ (\because n>0)$

14. 자연수 n을 4로 나눈 나머지를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{1348}\{(-1)^{n+1}\times a_n\}$의 값은?

① 524 ② 557 ③ 635 ④ 674 ⑤ 698

$(1-2+3-0)+(1-2+3-0)$

$+\cdots+(1-2+3-0)$

$=337\times 2$

$=674$

15. 복소수 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$에 대하여 x^n의 실수 부분을 a_n, 허수부분을 b_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{2022}(a_n+b_n)$의 값은?

① $-2+\sqrt{3}$ ② $1-\sqrt{3}$ ③ $2-\sqrt{3}$ ④ $1+\sqrt{3}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

i) $a_1+b_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$

ii) $x^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}i$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

iii) $x^3=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}+i$

$=i$

iv) $x^4=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$x^5=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$x^6=-1$

$x^7=-x^1$

$x^8=-x^2$

$\vdots$

$x^{12}=1$

$\therefore$ 12개씩 합이 0.

$\therefore(준식)=0+(x^1+\cdots+x^6)$

$=2+\sqrt{3}-1$

$=1+\sqrt{3}$

서답형

단답형 1. 삼각형 ABC에서 $A=\frac{\pi}{6}$, $\overline{BC}=4$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 구하시오.

$\frac{4}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R$

$\frac{4}{\frac{1}{2}}=2R$

$R=4$

$\therefore S=4^2\pi=16\pi$

단답형 2. 삼차방정식 $x^3-9x^2+ax+b=0$의 세 실근이 등차수열을 이룰 때, 실수 a, b에 대한 $3a+b$의 값을 구하시오.

let $\alpha=c-d,\ \beta=c,\ \gamma=c+d$

i) $\alpha+\beta+\gamma=(c-d)+c+(c+d)=9$

$3c=9$

$c=3$

ii) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=c(c-d)+c(c+d)+(c-d)(c+d)$

$=3c^2-d^2=27-d^2=a$

iii) $\alpha\beta\gamma=(c-d)c(c+d)$

$=c^3-cd^2=27-3d^2=-b$

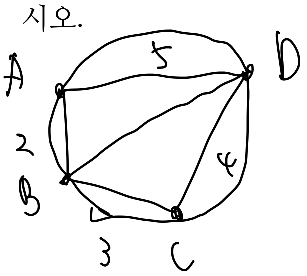
$b=3d^2-27$

$\therefore 3a+b=3(27-d^2)+3d^2-27$

$=2\cdot 27$

$=54$

단답형 3. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=4$, $\overline{DA}=5$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이를 구하시오.



i) $C=\pi-A$

($\because$ 내접 사각형)

$\cos C=\cos(\pi-A)$

$=-\cos A$

ii) 코사인 법칙에 의해

$\overline{AD}^2=2^2+5^2-2\cdot2\cdot5\cos A=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos C$

$4-20\cos A=24\cos A$

$\therefore \cos A=\frac{1}{11}$ $1,\ 2\sqrt{30},\ 11$

$\sin A=\frac{2\sqrt{30}}{11}$ ($\because \frac{\pi}{2}<A<\pi$)

iii) $S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot5\cdot\sin A+\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\sin(\pi-A)$

$=11\cdot\sin A$

$=2\sqrt{30}$

수학적 귀납법

단답형 4. $n\ge5$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식 $2^n>n^2$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정의 일부이다.

<보 기>

(ii) $n=k\ (k\ge5)$일 때,

부등식 $2^k>k^2$이 성립한다고 가정하며 양변에 $\boxed{\text{(A)}}$를 곱하면 $A\times2^k>\overset{A}{\cancel{a}}\times k^2$

그런데 $k\ge5$이므로 $2k^2-\boxed{\text{(B)}}=k^2-2k-1>0$

즉, $2^{k+1}>(k+1)^2$ 따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

$\boxed{\text{(A)}}$에 알맞은 수를 p, $\boxed{\text{(B)}}$에 들어갈 함수를 $f(k)$라 할 때, $f(p+2)$의 값을 구하시오.

i) $A=2=p$

ii) $f(k)=(k+1)^2$

$\therefore f(p+2)=f(4)=(4+1)^2=25$

서술형 1. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_3b_3=4$, $a_5b_5=8$일 때, a_7b_7의 값을 구하여라.

let $a_n=ar_1^{n-1},\ b_n=br_2^{n-1}$

$$\begin{cases} ar_1^2\cdot br_2^2=4 \\ ar_1^4\cdot br_2^4=8 \end{cases}$$

$(r_1r_2)^2=2,\ ab=2$

$\therefore a_7b_7=ar_1^6\cdot br_2^6$

$=ab\cdot(r_1r_2)^6$

$=2\cdot2^3=16$

서술형 2. $A = \{x \mid 1 \le x \le 100$인 자연수$\}$일 때, 집합 A의 원소 중에서 3 또는 5로 나누어 떨어지는 원소들의 합을 구하시오.

i) 3의 배수

$3, 6, \cdots, 99$

$a = 3,\ d = 3,\ n = 33$

$\therefore S_{3\text{의 배수}} = \frac{33(3+99)}{2} = 1683$

ii) 5의 배수

$5, 10, \cdots, 100$

$a = 5,\ d = 5,\ n = 20$

$\therefore S_{5\text{의 배수}} = \frac{20(5+100)}{2} = 1050$

iii) 15의 배수

$15, 30, \cdots, 90$

$a = 15,\ d = 15,\ n = 6$

$\therefore S_{15\text{의 배수}} = \frac{6(15+90)}{2} = 315$

$\therefore$ 답: $1683 + 1050 - 315$

$= 2418$

서술형 3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 n번째항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = 4n^2 - 4n + 2$일 때,

㉠ 일반항 a_n을 구하는 과정을 서술한 후 그 값을 구하고,

㉡ $\sum_{k=1}^{5} a_{3n-2}$의 값을 구하는 과정을 서술한 후 그 값을 구하시오.

㉠ i) $a_1 = S_1 = 4 - 4 + 2 = 2$

ii) $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \cancel{4n^2} - \cancel{4n} + \cancel{2}$

$- (\cancel{4(n-1)^2} - \cancel{4(n-1)} + \cancel{2})$

$= -(-8n + 4 + 4)$

$= 8n - 8 \quad (n \ge 2)$

$$\boxed{\therefore a_1 = 2,\ a_n = 8n - 8 \quad (n \ge 2)}$$

㉡ $\sum_{k=1}^{5} a_{3n-2} = a_1 + a_4 + \cdots + a_{13}$

$= 2 + \frac{4(a_4 + a_{13})}{2}$

$= 2 + 2(32 - 8 + 104 - 8)$

$= 242$