♦ 전체 : 선택형 16문항(70점), 서답형 6문항(30점)

♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 주어져 있을 때, 1~2번 물음에 답하시오.

<보 기>

2, 4, 8, 16, $\boxed{\quad\quad}$, 64, $\cdots$

1. 빈 칸에 들어갈 수를 올바르게 고르면?

① 20 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 44

$a=2 \quad r=2$

$a_n = 2^n$

2. 128은 수열 $\{a_n\}$의 제 몇 항인가?

① 제6항 ② 제7항 ③ 제8항 ④ 제9항 ⑤ 제10항

$a_n = 2^n = 128$

$= 2^7$

$\therefore n = 7$

3. $\triangle ABC$에서 $a=4,\ A=45°$일 때, 외접원의 넓이는?

① 4π ② 6π ③ 8π ④ 10π ⑤ 12π

$\frac{4}{\sin 45°} = 2R$

$\frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2R$

$R = 2\sqrt{2}$

$\therefore S = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2$

$= 8\pi$

4. $\triangle ABC$에서 $C=120°,\ a=6,\ b=10$일 때, c의 값은?

① 15 ② 14 ③ 13 ④ 12 ⑤ 11

$c^2 = 6^2 + 10^2 - 2\cdot 6\cdot 10\cdot \cos 120°$

$= 36 + 100 - 120\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 196$

$= 13^2$

$\therefore c = 13 \ (\because c > 0)$

5. 다음 중 합 $1+3+5+7+9$과 다른 것은?

① $\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$ ② $\sum_{k=1}^{10}k - \sum_{k=1}^{5}2k$

③ $\sum_{k=1}^{5}2k-5$ ④ $\sum_{k=3}^{7}(2k-5)$

⑤ $2\sum_{k=1}^{5}k + \sum_{k=1}^{5}1$

(준식) $= 25$

① $2\cdot\frac{5\cdot 6}{2} - 5 = 25$

② $\frac{10\cdot 11}{2} - 2\cdot\frac{5\cdot 6}{2} = 25$

③ $2\cdot\frac{5\cdot 6}{2} - 5 = 25$

④ $2\cdot\frac{7\cdot 8}{2} - 2\cdot\frac{2\cdot 1}{2} - 5\cdot 5 = 29$

⑤ $2\cdot\frac{5\cdot 6}{2} - 5 = 25$

6. 자연수 k에 대해 세 수 a_k, b_k, c_k가 순서대로 등차수열을 이룬다. a_k, c_k가 이차방정식 $x^2-2x-k=0$의 서로 다른 두 근일 때, $\sum_{k=2}^{13}(a_k+b_k+c_k)$의 값을 구하면?

① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

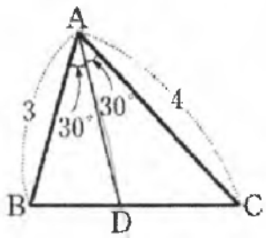
i) $2b_k = a_k + c_k = 2 \Rightarrow b_k = 1$

ii) $a_k + c_k = 2,\quad a_k c_k = -k$

$\therefore a_k + b_k + c_k = 3$

$\sum_{k=2}^{13}(a_k+b_k+c_k) = 12 \cdot 3 = 36$

7. 다음 그림과 같은 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=4$, $\angle BAD = \angle DAC = 30°$일 때, $\overline{AD}$의 길이는?



① $\frac{12\sqrt{3}}{7}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\frac{16\sqrt{3}}{7}$ ④ $\frac{18\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{20\sqrt{3}}{7}$

$S = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} 3 \cdot \overline{AD} \cdot \sin 30° + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \overline{AD} \cdot \sin 30°$

$12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 7 \cdot \overline{AD} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$

$\therefore \overline{AD} = \frac{12\sqrt{3}}{7}$

8. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k}) = \frac{n^2}{7}$$

이 성립할 때, $\sum_{k=10}^{30} a_k$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

i) $(a_1+a_2+a_3)+\cdots+(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$

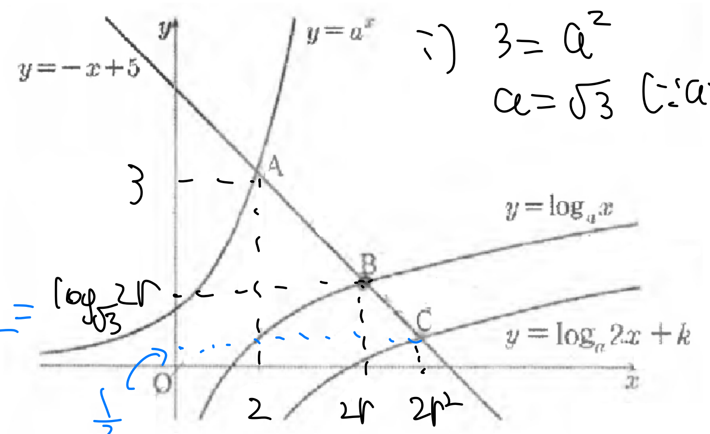
$= \sum_{k=1}^{3n} a_k = \frac{n^2}{7}$

ii) $n=10,\ n=3$ 각각 대입.

$\sum_{k=10}^{30} a_k = \sum_{k=1}^{30} a_k - \sum_{k=1}^{9} a_k$

$= \frac{10^2}{7} - \frac{3^2}{7} = \frac{91}{7} = 13$

9. $a>1$인 실수 a에 대하여 그림과 같이 직선 $y=-x+5$가 세 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$, $y=\log_a 2x+k$와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. 점 A의 좌표가 $(2,3)$이고, 세 점 A, B, C의 x좌표가 차례대로 등비수열을 이룰 때, k의 값은?



i) $3 = a^2$

$a = \sqrt{3}$ ($\because a>0$)

① -4 ② $-\frac{7}{2}$ ③ -3 ④ $-\frac{5}{2}$ ⑤ -2

ii) $2r - 2 = 3 - \log_{\sqrt{3}} 2r$

$= \log_{\sqrt{3}} \frac{3\sqrt{3}}{2r}$

$\sqrt{3}^{2r-2} = \frac{3\sqrt{3}}{2r}$

$3^{r-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2r}$

$2r \cdot 3^r = 9 \cdot \sqrt{3}$ $\therefore r = \frac{3}{2}$

r은 분모지수에 2가 있을 것이라 추측

iii) $\frac{1}{2} = \log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \frac{9}{2} + k$

$\frac{1}{2} = 4 + k$

$\therefore k = -\frac{7}{2}$

10. 수열 $\{a_n\}$에 대해 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = -3n^2 + 52n + 5$일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

<보 기>

ㄱ. $a_5 = 25$　　ㄴ. $a_{n+1} - a_n = -6$

ㄷ. S_n은 $n = 9$에서 최댓값을 갖는다.

① ㄱ　② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ) $a_5 = -6\cdot5+55$
$= 25$

i) $a_1 = -3+52+5 = 54$

ii) $a_n = S_n - S_{n-1}$

$= -3n^2+52n+5$

$-(-3(n-1)^2+52(n-1)+5)$

$6n-3$　-52

$= -6n+55 > 0$

ㄴ) $a_{n+1} - a_n = -6$

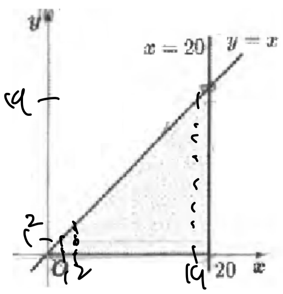
ㄷ) $55 > 6n$

$\frac{55}{6} > n$

$9.xx > n$

∴ 제 9항

11. 다음 그림과 같이 두 직선 $y = x$와 $x = 20$ 및 x축으로 둘러싸인 부분에 속한 점 중에서 x, y 좌표가 모두 자연수인 점의 x좌표를 모두 더한 값은? (경계 포함 여부 반드시 언급되어야 함)



① 2180　② 2370　③ 2580

④ 2870　⑤ 2880

$1\cdot1 + 2\cdot2 + \cdots + 20\cdot20$

$= \sum_{k=1}^{20} k^2$

$= \frac{20\cdot21\cdot41}{6} = 2870$

12. 첫째항과 공차가 모두 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_{10}과 a_{11}은 절댓값이 같고 부호가 반대일 때, $|S_n| > |S_{n+1}|$을 만족하는 자연수 n의 개수를 구하면?

① 10　② 11　③ 13　④ 14　⑤ 15

i) $a+9d = -(a+10d)$

$2a = -19d$

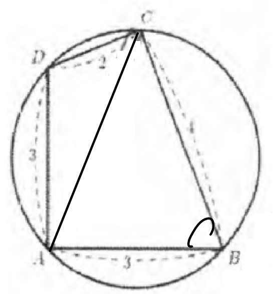
ii) $S_{10} = \frac{10(a+a+9d)}{2} = 10a+45d$

$S_n = \frac{n(a+a+(n-1)d)}{2} = \frac{n}{2}(\overset{-19d}{2a}+(n-1)d)$

$= \frac{nd}{2}(n-20)$

∴ $S_{20} = 0$　∴ $n = 10, 11, \cdots, 19$　∴ 10개

13. 다음 그림과 같이 원에 내접하는 □$ABCD$에서 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = 2$이고 $\overline{DA} = 3$일 때, □$ABCD$의 넓이는? (단, B는 예각이다.)



① $4\sqrt{2}$　② $5\sqrt{2}$　③ $6\sqrt{2}$

④ $7\sqrt{2}$　⑤ $8\sqrt{2}$

$\overline{AC}^2 = \cancel{3^2}+2^2-2\cdot3\cdot2\cos D = 4^2+\cancel{3^2}-2\cdot4\cdot3\cos B$

$4+12\cos B = 16-24\cos B$ (∵ 내접사각형)

$36\cos B = 12$

$\cos B = \frac{1}{3}$　∴ $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

∴ $S = \frac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin D + \frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\sin B$

$= 3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} + 6\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (∵ 내접사각형)

$= 6\sqrt{2}$

수학적 귀납법

14. $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \cdots\cdots ㉠$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증 명>

(i) $n=2$일 때, $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ $\quad 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

(좌변) = $\boxed{\text{(가)}}$, (우변) = $\boxed{\text{(나)}}$

따라서 $n=2$일 때, ㉠이 성립한다. (ii) $n=k\ (k \geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

$n=k+1$일 때,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\overset{\frac{1}{(k+1)^2}}{\boxed{\text{(다)}}}<2-\frac{1}{k}+\boxed{\text{(다)}}$$

이때 $k \geq 2$이므로

$$\left\{2-\frac{1}{k}+\boxed{\text{(다)}}\right\}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)=\boxed{\text{(라)}}<0$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

(가)$=p$, (나)$=q$, (다)$=f(k)$, (라)$=g(k)$라 할 때, $-\frac{f(p+q)}{g(p+q)}$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{13}{4}$

i) $\cancel{2}-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}-\cancel{2}+\frac{1}{k+1}$

$=\frac{-(k+1)+k}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)^2}$

$=\frac{-(k+1)+k}{k(k+1)^2}$

$=\frac{-1}{k(k+1)^2}<0$

$\therefore g(k)=\frac{-1}{k(k+1)^2}$

ii) $p+q=\frac{5}{4}+\frac{3}{2}=\frac{11}{4}$

$-\frac{f(k)}{g(k)}=-\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{-1}{k(k+1)^2}}$

$=k$

$\therefore$ 답: $\frac{11}{4}$

15. $\sum_{k=1}^{29}\log_{25}\{\log_{k+1}(k+3)\}-\sum_{k=3}^{30}\log_{25}\{\log_k(k+1)\}$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

$\log_{25}\left(\frac{\log 4}{\log 2}\times\frac{\log 5}{\log 3}\cdots\frac{\log 31}{\log 29}\times\frac{\log 32}{\log 30}\right)$

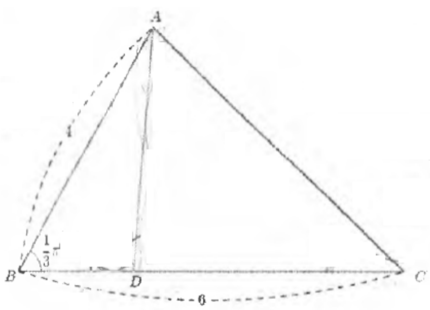
$-\log_{25}\left(\frac{\log 4}{\log 3}\cdots\frac{\log 31}{\log 30}\right)$

$=\log_{25}\left(\frac{\log 31}{\log 2}\cdot\frac{\log 32}{\log 3}\cdot\frac{\log 3}{\log 31}\right)$

$=\log_{25}5$

$=\frac{1}{2}$

16. $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$인 $\triangle ABC$가 있다. $\overline{BC}$ 위에 점 B와 점 C가 아닌 점 D를 잡고, $\triangle ACD$의 외접원의 반지름의 길이를 r라 하자. $r=\frac{3\sqrt{21}}{5}$일 때, $\overline{AD}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소)



① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

i) $\overline{AC}^2=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$=28$

ii) $\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{\sin C}$

$\sin C=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{28}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

iii) $\frac{\overline{AD}}{\sin C}=2\cdot\frac{3\sqrt{21}}{5}$

$\overline{AD}=2\cdot\frac{3\sqrt{21}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$=\frac{18}{5}$

$\therefore p+q=5+18$

$=23$

서답형

단답형 1. $\sin A = 2\cos B \sin C$를 만족시키는 $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인지 쓰시오.

사인법칙, 코사인법칙에 의해

$$\frac{a}{\cancel{2R}} = \cancel{2}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{\cancel{2}a\cancel{c}}\cdot\frac{\cancel{c}}{\cancel{2R}}$$

$$(c+b)(c-b)=0$$

$$\therefore c=b \quad (\because c+b\neq 0)$$

$\boxed{\therefore b=c \text{ 인 이등변삼각형}}$

단답형 2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3+a_7=26,\ a_6-a_4=-12$ 일 때, a_{10}의 값을 구하시오.

$$(a+2d)+(a+6d)=26$$

$$(a+5d)-(a+3d)=-12$$

$$2d=-12$$

$$d=-6,\ a=37$$

$$\therefore a_{10}=a+9d$$

$$=37+9\cdot(-6)$$

$$=-17$$

단답형 3. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 15,\ \sum_{k=1}^{10} b_k = -7$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(4a_k-2b_k-5)$의 값을 구하시오.

$$4\cdot 15-2\cdot(-7)-5\cdot 10$$

$$=60+14-50$$

$$=24$$

서술형인 경우 가급적 헤론의 공식은 쓰지 말 것

서술형 1. $\triangle ABC$에서 $a=8,\ b=13,\ c=7$일 때, $\triangle ABC$의 넓이를 풀이과정과 함께 구하시오.

i) $\cos A = \dfrac{13^2+7^2-8^2}{2\cdot 13\cdot 7}$

$$=\frac{11}{13}$$

$$\sin A = \frac{4\sqrt{3}}{13}$$

ii) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$$=\frac{1}{2}\cdot\cancel{13}\cdot 7\cdot\frac{4\sqrt{3}}{\cancel{13}}$$

$$=14\sqrt{3}$$

서술형 2. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = 9 \times 2^n - 9$일 때, $a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{13}$의 값을 풀이과정과 함께 구하시오.

i) let $a_n = ar^{n-1}$

$a_{2n} = ar \cdot r^{2(n-1)}$ (∵ 공비 $= r^2$)

$= ar^{2n-1}$

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = \frac{ar((r^2)^n - 1)}{r^2 - 1} = 9(2^n - 1)$

∴ $r^2 = 2$

$r = \sqrt{2}$ (∵ $r > 0$)

∴ $\frac{ar}{r^2 - 1} = 9$

$a = \frac{9}{\sqrt{2}}$

∴ $a_n = \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$

ii) $a_{2n+1} = 9\sqrt{2} \cdot 2^{n-1}$

$\sum_{k=1}^{6} a_{2k+1} = \frac{9\sqrt{2}(2^6 - 1)}{2 - 1}$

$= 279\sqrt{2}$

서술형 3. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열일 때, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = 3$을 만족시키는 자연수 n의 값을 풀이과정과 함께 구하시오.

let $a_n = 3n - 2$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{3n+1} + \sqrt{3n-2}}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n-2}}{3n+1 - (3n-2)}$

$= \frac{1}{3}\left[(\cancel{\sqrt{4}} - \sqrt{1}) + (\cancel{\sqrt{7}} - \cancel{\sqrt{4}}) + \cdots + (\sqrt{3n+1} - \cancel{\sqrt{3n-2}})\right]$

$= \frac{1}{3}(\sqrt{3n+1} - 1) = 3$

$\sqrt{3n+1} = 10$

$3n + 1 = 100$

$n = 33$