선택형

1. <보기> 중 극한값이 존재하는 것만을 있는 대로 고른 것은? [3.2점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 2}\frac{3x}{x-1}$ $=\frac{6}{1}=6$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}(-2x+3)$ $=-\infty$

ㄷ. $\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{3}{x+1}\right)$ $=2$

ㄹ. $\lim_{x\to 3}\frac{1}{|x-3|}$ $=\infty$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ

④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

2. 함수 $f(x)=\begin{cases}3x+k & (x<1)\\ x^2+2x+1 & (x\geq 1)\end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재하도록 하는 상수 k의 값은? [2.5점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+k)=3+k$

$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+2x+1)=4$

$\therefore 3+k=4$

$k=1$

4번풀이

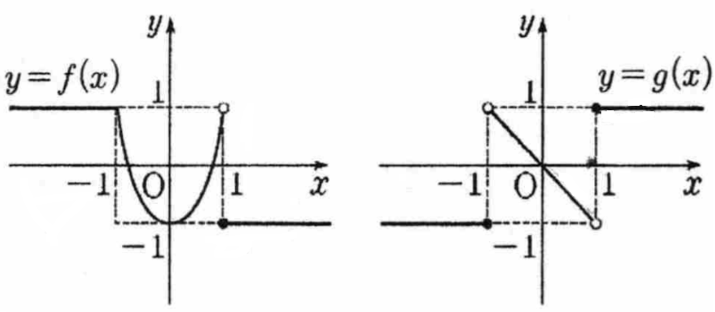
iii) $b=-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{7}{6}$

$c=\frac{5}{6}$

$\therefore g(x)=-\frac{7}{6}x+\frac{5}{6}$

$g(-1)=\frac{12}{6}=2$

3. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3.4점]



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=0$ $1+1=0$

ㄴ. 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄹ. $\lim_{x\to -1-}f(x)g(x)+\lim_{x\to 0+}\{f(x)-g(x)\}=-2$

$1\cdot(-1)+(-1-0)=-2$

① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄷ, ㄹ

④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄴ. $\frac{f(1^-)}{g(1^-)}=\frac{1}{-1}=-1$

$\frac{f(1^+)}{g(1^+)}=\frac{-1}{1}=-1$ ||

ㄷ. $f(-1^-)+g(-1^-)=1-1=0$

$f(-1^+)+g(-1^+)=1+1=2$

4. 일차함수 $g(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-1)$의 값은? [4.2점]

<조 건>

(가) $\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=3$

(나) $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-3)(n-4)$ (단, $n=1,2,3$)

ii) $n=3$ 일때 0 이므로

$f(3)=18+3a+3=0$

$\therefore a=-9$

① -1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 2

i) let $x=-t$

$\lim_{t\to\infty}f\left(-\frac{1}{t}\right)=3$

$\lim_{s\to 0^-}f(s)=3$

$\therefore f(0)=3$ ($\because f$: 연속)

let $f(x)=2x^2+ax+3$

$\therefore f(x)=2x^2-9x+3$

iii) $\lim_{x\to n}\frac{(x-3)(2x-1)}{bx-c}=(n-3)(n-4)$

ㄱ) $\frac{\cancel{-2}\cdot(-1)}{b-c}=\cancel{-2}\cdot(-3)$

$b-c=-\frac{1}{3}$

ㄴ) $\frac{\cancel{-1}\cdot 3}{2b-c}=\cancel{-1}\cdot(-2)$

$2b-c=-\frac{3}{2}$

5. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $x^2-9 \le f(x) \le 2x^2+6x$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{x+3}$의 값은? [3.5점]

① -9 ② -6 ③ 3 ④ 6 ⑤ 9

$\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to-3}\frac{2x^2+6x}{x+3} = -6$

이므로 조임정리에 의해

$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{x+3} = -6$

6. 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1,2]$에서 $f(x) = \begin{cases} 3x-2a & (-1 \le x < 1) \\ x^2+ax+b & (1 \le x \le 2) \end{cases}$ 이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시킬 때, $f(11)$의 값은? [3.6점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

i) $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(3x-2a) = 3-2a$ ∴ $3-2a = 1+a+b$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(x^2+ax+b) = 1+a+b$ $3a+b=2$

ii) $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}(x^2+ax+b) = 4+2a+b$ ∴ $-3-2a = 4+2a+b$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}(3x-2a) = -3-2a$ $4a+b=-7$

iii) $a=-9$, $b=29$ ∴ $f(11)=f(2)$

$= 4+2\cdot(-9)+29 = 15$

7. 실수 k에 대하여 집합 $\{x \mid kx^2-2(k-4)x-3k+12=0, x$는 실수$\}$의 원소의 개수를 $f(k)$라고 할 때, 함수 $f(k)$의 불연속인 점의 개수는? [4.1점]

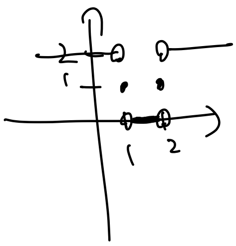
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

$D/4 = (k-4)^2 - k(-3k+12)$

$= k^2-8k+16+3k^2-12k$

$= 4k^2-20k+16$

$= 4(k-1)(k-2)$



∴ 2개

8. 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$f(-3)=-2,\ f(-1)=4,\ f(0)=7,\ f(1)=-5,\ f(3)=6$

일 때, 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-3,3)$에서 적어도 n개의 실근을 갖는다. 이때 자연수 n의 값은? [3.7점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

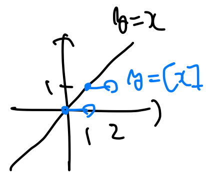
$f(-3)\cdot f(-1)<0$

$f(0)\cdot f(1)<0$ ∴ 3개

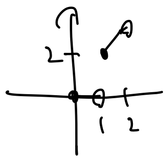
$f(1)\cdot f(3)<0$

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x+[x]$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 열린구간 $(1,5)$에서 연속일 때, $f(5)$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4.0점]

① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6



⇓



$f(x)$는 2, 3, 4 에서 불연속.

∴ $g(2)=g(3)=g(4)=0$

let $g(x)=(x-2)(x-3)(x-4)$

$g(5) = 3\cdot2\cdot1 = 6$

10. 곡선 $y=4x^2+3x$ 위의 점 $P(-1,1)$에서의 접선의 기울기는? [2.0점]

① -8 ② -5 ③ 3 ④ 8 ⑤ 11

$m = f'(-1) = -8+3 = -5$

$(\because y' = 8x+3)$

11. <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [5.8점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)=2x^2+1$에서 x의 값이 1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은 6이다. $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=9-3=6$

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. 함수 $f(x)=x^2+1$에 대하여 $f'(2)=4$

ㄹ. 함수 $f(x)=|x+1|$은 $x=-1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

~~ㅁ~~. $f(x)=|x|$는 닫힌구간 $[-1,1]$에서 롤의 정리가 성립한다. $(-1,1)$ 에서 미분가능하지 않음. $(x=0$ 일때$)$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ, ㄹ ③ ㄴ, ㄹ, ㅁ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

12. $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+1 & (x\geq -1) \\ bx+2 & (x<-1) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능할 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3.0점]

($3x^2+2ax$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

i) 연속
$-1+a+1=-b+2$
$a+b=2$
$\therefore a=1,\ b=1$

ii) 미분가능
$3-2a=b$
$2a+b=3$
$\therefore a-b=1-1=0$

13. 함수 $f(x)=x^2+4x$에 대하여 닫힌구간 $[-3,2k]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수의 값이 $\frac{k}{2}$일 때, k의 값은? [4.4점]

$f'(x)=2x+4$

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

$\frac{f(2k)-f(-3)}{2k-(-3)}=f'\left(\frac{k}{2}\right)$

$\frac{4k^2+8k+3}{2k+3}=k+4$

$4k^2+8k+3=2k^2+11k+12$

$2k^2-3k-9=0$ $\therefore k=\cancel{-\frac{3}{2}}$ or 3 $(\because$ 구간$)$

14. 함수 $f(x)=-x^2+6x$에 대하여 닫힌구간 $[0,6]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c의 값은? [2.8점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

$f(0)=f(6)$ 이므로
$f'(c)=0$ 인 $c\in(0,6)$ 존재 — 이 문제엔 안적어도 됨.

$-2c+6=0$
$c=3$

15. 점 $(-4,-2)$에서 곡선 $y=x^2+4x-1$에 그은 접선 중에서 기울기가 가장 큰 접선이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라고 할 때, $\overline{AB}$의 길이는? [5.6점]

① $5\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{14}$ ③ $8\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{130}$ ⑤ $2\sqrt{33}$

i) $\ell: (a, f(a))$ $m=f'(a)=2a+4$

$y-(a^2+4a-1)=(2a+4)(x-a)$ ∋ $(-4,-2)$ 대입.

$-2-a^2-4a+1=-2a^2-12a-16$

$a^2+8a+15=0$

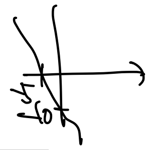
$\therefore a=-3$ or -5

ii) $f'(-3)>f'(-5)$ 이므로

$\ell: (-3,-4)$ $m=-2$

$y+4=-2(x+3)$

$y=-2x-10$



$\therefore \overline{AB}=\sqrt{5^2+10^2}$

$=5\sqrt{5}$

16. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=1$, $f'(1)=2$을 만족시키고 $g(x)=(x^3+2x+1)f(x)$일 때, $g'(1)$의 값은? [3.9점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

$g'(x)=(3x^2+2)f(x)+(x^3+2x+1)f'(x)$

$g'(1)=5\cdot f(1)+4f'(1)$

$=5\cdot1+4\cdot2$

$=13$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x^3+1}=1$일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(-1+3h)-f(-1-h)}{h}$의 값은? [4.6점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

i) $\lim_{x\to-1}\frac{f'(x)}{3x^2}=\frac{f'(-1)}{3}=1 \quad \therefore f'(-1)=3$

ii) $\lim_{h\to0}\frac{f(-1+3h)-f(-1-h)}{h}=4f'(-1)=4\cdot3=12$

18. 최고차항의 계수가 1이고 $f(-1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [5.7점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{5}{2}$

Let $f(x)=(x-2)(x+1)(x+a)$ $(\because f(-1)=0)$

$f'(x)=(x+1)(x+a)+(x-2)(x+a)+(x-2)(x+1)$

$\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)(x+a)}{\cancel{(x-2)}[(x+1)(x+a)+(x-2)(x+a)+(x-2)(x+1)]^2}$

$=\frac{\cancel{3(2+a)}}{(3(2+a))^{\cancel{2}}}=\frac{1}{3(2+a)}=\frac{1}{4}$

$\therefore 6+3a=4$

$a=-\frac{2}{3}$

$\therefore f(x)=(x-2)(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

$f(1)=-1\cdot2\cdot\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$

서답형

단답형 1. 다음은 사잇값의 정리에 대한 설명이다. 빈칸 안에 들어갈 말을 각각 쓰시오. [총 4점, 각각 2점]

> 사잇값의 정리란
> :함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 $\boxed{\quad(가)\quad}$이고
> $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 k에 대하여
> $\boxed{\quad(나)\quad}$ $(a<c<b)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

연속 , $f(c)=k$

단답형 2. 곡선 $y=2x^2-2x-1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식을 구하시오. [3.0점]

$l:\ (a, f(a))$ $\quad m=f'(a)=4a-2=2$

$=(1,-1)$ $\quad a=1$

$y-(-1)=1\cdot(x-1)$

$y=x-2$

단답형 3. 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하며, 열린구간 (a,b)의 모든 x에 대하여 $f'(x)=0$이면 닫힌구간 $[a,b]$에서 상수함수임을 보이는 과정을 서술하시오. [6.0점]

임의의 $c, d\in(a,b)$ 에 대하여

$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}=f'(x)=0$ $\quad(\because$ 평균값 정리$)$

$\therefore f(c)=f(d)$ $\quad\therefore f(x)$는 상수함수

모든 함숫값이 같음.

서술형 1. 두 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-3}{2|x-3|} & (x\neq 3) \\ \dfrac{1}{2} & (x=3) \end{cases}$, $g(x)=3x^2$

에 대하여 $\lim_{x\to -1+}(f\circ g)(x)-\lim_{x\to 2-}f(x)$의 값을 구하는 풀이과정을 서술하시오. [5.0점]

i) $\lim_{x\to -1+} f(g(x)) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x-3}{2|x-3|}$

$= \lim_{x\to 3^-} \frac{\cancel{x-3}}{-2\cancel{(x-3)}} = -\frac{1}{2}$

ii) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x\to -1^+} f(g(x)) - \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = -1$

서술형 2. 민정이는 $\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}$의 값을 다음과 같이 구하였다. 민정이의 계산과정에서 처음으로 잘못된 부분의 기호를 쓰고, 바르게 고쳐 풀이하는 과정과 답을 서술하시오. [4.0점]

민정이의 풀이
:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1} \overset{㉠}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{3x^2+1}}{x}}{\frac{x+1}{x}} \overset{㉡}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\overset{㉢}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} \overset{㉣}{=} \sqrt{3}$$

㉡ : $x<0$ 이므로 불가능

let $x=-t$

$\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{3t^2+1}}{-t+1} = \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{1}{t^2}}}{-1+\frac{1}{t}}$

$= \frac{3}{-1} = 3$

서술형 3. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3, g(3))$에서의 접선의 방정식을 구하는 풀이과정을 서술하시오. [8.0점]

(가) $g(x)=x^2f(x)+8$
(나) $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=2$

i) $f(3)=g(3)$
$f(3)=9\cdot f(3)+8$
$\therefore f(3)=-1=g(3)$

ii) $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{f'(x)-g'(x)}{1} = 2$

$f'(3)=2+g'(3)$

iii) $g'(x)=2x f(x)+x^2 f'(x)$
$g'(3)=6\cdot f(3)+9f'(3)$
$=-6+9(2+g'(3))$
$g'(3)=12+9g'(3)$
$\therefore g'(3)=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}$

iv) l: $(3, g(3))$ $m=g'(3)=-\frac{3}{2}$
$=(3,-1)$

$y+1=-\frac{3}{2}(x-3)$
$y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}-1$
$y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$