

◆ 전체 : 선택형 15문항(70점) 서답형 4문항(30점)

◆ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

◆ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 동전 1개를 3번 던질 때, 적어도 1번은 뒷면이 나올 확률은?

[3.7점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{15}{16}$ ⑤ $\frac{31}{32}$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$$

2. 다음은 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 A와 B^c도 서로 독립임을 증명하는 과정이다.

<증명>

두 사건 A와 B에 대하여 $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ 이고, 사건 $(A \cap B)$ 와 $(A \cap B^c)$ 는 서로 (가) 사건이므로

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

$$\therefore P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= P(A) \times (나)$$

$$= P(A)P(B^c) \quad (1 - P(B))$$

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은? (단, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$) [4점]

- ① 배반, $1 - P(B)$ ② 배반, $1 + P(B)$
 ③ 종속, $1 - P(B)$ ④ 종속, $1 + P(B)$
 ⑤ 독립, $1 - P(B)$

3. 크기와 모양이 같은 사탕 13개를 상자 A, B, C에 나누어 담으려고 할 때, 모든 상자에 적어도 2개 이상의 사탕이 들어갈 확률은? [4.7점]

- ① $\frac{3}{35}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{7}{35}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{12}{35}$

$$x+y+z=13 \quad x, y, z \geq 2$$

$$x'+y'+z'=9 \quad x', y', z' \geq 0$$

$$\therefore \frac{{}^3H_9}{{}^3H_{13}} = \frac{{}^9C_9}{{}^{15}C_{13}} = \frac{{}^9C_9}{{}^{15}C_2} = \frac{12}{35}$$

4. 먼저 4승을 거둔 팀이 최종 우승을 하게 되는 경기에서 지난 3차전까지 A팀이 2승, B팀이 1승을 거두었다. 7차전에서 B팀이 최종 우승할 확률은? (단, 매 경기에 무승부는 없고, 두 팀이 이길 확률은 서로 같다.) [4.7점]

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{5}{16}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

$$AAB \left(ABBB \right) \rightarrow {}^3C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

2021 국가 단과 14번 중 일부분

5. 한 개의 동전을 7번 던질 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은?

[4.9점]

<조건>

(가) 앞면이 4번 나온다.

(나) 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있다.

- ① $\frac{13}{64}$ ② $\frac{17}{64}$ ③ $\frac{25}{64}$ ④ $\frac{29}{64}$ ⑤ $\frac{35}{64}$

$$n=7 \quad p=\frac{1}{2}$$

$$n(4) \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{165}{324} \cdot \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^7} = \frac{34}{128} = \frac{17}{64}$$

6. 부등식 $0 < b < 3 - \frac{a^2}{4}$ 을 만족시키는 좌표평면 위의 점 (a, b) 중에서 임의로 서로 다른 두 점을 선택한다. 선택된 두 점의 y 좌표가 같을 때, 이 두 점의 y 좌표가 1일 확률은? (단, a, b 는 정수이다.) [5.3점]

- ① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{13}$ ④ $\frac{10}{13}$ ⑤ $\frac{11}{18}$

$$\rightarrow 4(b-3) > a^2$$

$$12-4b > a^2$$

1) $b=1$ 일 때

$$a=0, \pm 1, \pm 2 \rightarrow 5가지$$

$$\frac{5(2)}{5(2)+3(2)}$$

2) $b=2$ 일 때

$$a=0, \pm 1 \rightarrow 3가지$$

$$= \frac{10}{13}$$

3) $b=3$ 일 때

불가능

7. 한 개의 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b

라 하자. $a > b$ 일 때, 곡선 $y = x^2 + ax + b$ 와 직선 $y = x - 1$ 가

만날 확률은? [5.3점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$$x^2 + ax + b = x - 1$$

ii) $a > b$ 일 경우

$$x^2 + (a-1)x + b+1 = 0$$

$$1+2+3+4+5$$

$$D = (a-1)^2 - 4(b+1) \geq 0$$

$$= 15가지$$

$$(a-1)^2 \geq 4(b+1)$$

i) $a=1, 2$ 일 때

ii) $a=5$ 일 때

$b < 0$ 불가

$$4 \geq b+1 \therefore b=1, 2, 3$$

ii) $a=3$ 일 때

iii) $a=6$ 일 때

$$4 \geq 4(b+1)$$

$$\frac{25}{4} \geq b+1 \therefore b=1, 2, 3, 4, 5$$

$b=0$ 불가

$$\therefore \frac{1+3+5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

iii) $a=4$ 일 때

$$\frac{9}{4} \geq b+1 \therefore b=1$$

8. 좌표평면 원의 점 P 는 주사위 한 개를 한 번 던져서 나오는

눈의 수가 3이하 이면 x 축의 양의 방향으로 1만큼, 4 또는 5의

눈이 나오면 x 축의 음의 방향으로 1만큼, 6의 눈이 나오면 y

축 양의 방향으로 1만큼 이동한다. 주사위 1개를 6번 던질 때,

원점 O 에서 출발한 점 P 가 점 $(2, 2)$ 에 도착할 확률은? [5.5점]

- ① $\frac{1}{72}$ ② $\frac{1}{36}$ ③ $\frac{1}{24}$ ④ $\frac{1}{18}$ ⑤ $\frac{5}{72}$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6}$$

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \leftarrow \uparrow \uparrow$$

$$\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$$

$$5(3) \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 6 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{5}{72}$$

9. 확률변수 X 에 대하여 $E(2X+1) = 7$, $U(-3X+1) = 18$ 을 만족할 때, $E(X) + V(X)$ 의 값은? [3.9점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$$i) E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 7$$

$$E(X) = 3$$

$$ii) U(-3X+1) = 9V(X) = 18$$

$$V(X) = 2$$

$$\therefore E(X) + V(X) = 3 + 2 = 5$$

U 24.

10. 이산확률변수 X 가 갖는 값이 $-2, -1, 0, 1, 2$ 이고 X 의 확률 질량함수가

$$P(X=x) = \frac{x^2 + ax + a}{15} \quad (x = -2, -1, 0, 1, 2)$$

일 때, $P(X^2 > 1)$ 의 값은? [4.3점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$$i) \frac{1}{15} (4 + a + a + 1 - a + a + a + 1 + a + a + 4 + 2 + a)$$

$$= \frac{a+2}{3} = 1$$

$$\therefore a = 1$$

$$ii) P(X^2 > 1) = P(X > 1) + P(X < -1) \\ = P(X=2) + P(X=-2) \\ = \frac{1}{15} (5 + 5) = \frac{2}{3}$$

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{15}$

[11~13] 다음은 표준정규분포표이다. 표를 활용하여 물음에 답하시오.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

U 62 주의!

11. 확률변수 X 가 정규분포 $N(50, 36)$ 을 따를 때, $P(47 < X < 62)$ 의 값은? [3.7점]

- ① 0.1359 ② 0.2417 ③ 0.2857 ④ 0.6247 ⑤ 0.6687

$$P(47 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 2)$$

$$= 0.1915 + 0.4772$$

$$= 0.6687$$



12. 어느 공장에서 생산된 초콜릿 1개의 열량은 평균이 290kcal, 표준편차가 20kcal인 정규분포를 따른다고 한다. 이 각종에서 생산된 초콜릿 중 임의추출한 16개의 초콜릿의 열량의 평균이 300kcal 이상일 확률은? [4.3점]

- ① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.1915 ⑤ 0.3085

$$X \sim N(290, 20^2)$$

$$\bar{X} \sim N(290, 5^2)$$

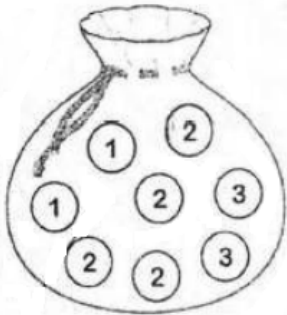
$$P(\bar{X} \geq 300) = P(Z \geq 2)$$

$$= 0.5 - 0.4772$$

$$= 0.0228$$



13. 그림과 같이 주머니에 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 8개의 공이 들어 있다.



이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 주머니에 넣는 시행을 980회 반복할 때, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 최솟값이 2인 횟수를 확률변수 X 라 하자. $P(X \geq 320)$ 의 값은? [5.3점]

- ① 0.0228 ② 0.1587 ③ 0.1915 ④ 0.8413 ⑤ 0.9772

$p = \frac{6C_3}{8C_3}$ ← 1번 실패 6번 성공

$= \frac{10}{8.196} = \frac{5}{14}$

$\therefore X \sim B(980, \frac{5}{14})$

$X \sim N(350, 15^2)$

$\therefore P(X \geq 320) = P(Z \geq -2)$
 $= 0.5 + 0.4112$
 $= 0.9112$

$\frac{25}{350} \times \frac{9}{14^2}$



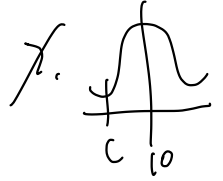
14. 확률변수 X 가 평균이 10, 표준편차가 3인 정규분포를 따를 때, 양의 상수 c 가 $P(X < c) = 0.1234$ 을 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4.9점]

<보기>

- ㉠. $c > 10$
 ㉡. $P(X > c) = 0.8766$
 ㉢. $P(X > \alpha) = 0.1$ 일 때, $\alpha + c < 20$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

$X \sim N(10, 3^2)$



㉠. $P(X > c) = 1 - 0.1234 = 0.8766$

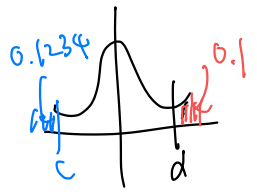
㉢. If $\alpha = -c$, then

$\frac{\alpha + c}{2} = 10$

$\alpha + c = 20$

or $c = -\alpha$ or $\alpha = -c$

$\alpha + c < 20$



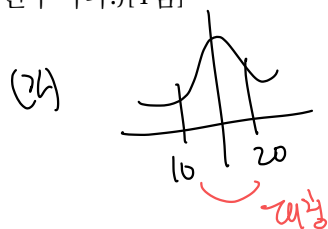
서술형 3. 확률변수 X 가 평균이 m , 표준편차가 σ 인 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

<보기>

(가) $P(X \geq 10) = 1 - P(X \geq 20)$

(나) $P(12 \leq X \leq 18) = 2P(0 \leq Z \leq 1)$

$m+5\sigma$ 의 값을 구하시오. (단, Z 는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [4점]



$$\therefore m = \frac{10+20}{2} = 15$$

$$\begin{aligned} (나) \quad P(12 \leq X \leq 18) &= P\left(\frac{-3}{\sigma} \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) \\ &= 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{3}{\sigma} = 1$$

$$\sigma = 3$$

$$\therefore m+5\sigma = 15+15 = 30$$

서술형 4. 한 개의 주사위를 6번 던져 4의 약수가 나오는 횟수를 m , 4의 약수가 아닌 숫자가 나오는 횟수를 n 이라 할 때, $i^{|m-n|} = -1$ 일 확률을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$) [5점]

$$i) \quad p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$ii) \quad (m, n) = (4k+2, 6-k) \quad (k=0, 1, \dots)$$

$$= 2 \text{ or } 6$$

$$\therefore (m, n) = (4, 2), (2, 4), (6, 0), (0, 6)$$

$$\begin{aligned} &6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 6C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 6C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ &= 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^1 &= i & i^2 &= -1 & i^3 &= -i & i^4 &= 1 \\ i^5 &= i & i^6 &= -1 \end{aligned}$$