

◆ 전체 : 선택형 17문항(70점) 서답형 6문항(30점)

◆ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

◆ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

### 선택형

1. 다음 중에서 극한값이 나머지 넷과 다른 것은? [3.5점]

- ①  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x$       ②  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$       ③  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$   
 ④  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$       ⑤  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$$\textcircled{5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{3 \tan x}$ 의 값은? [3.6점]

- ① 0      ②  $\frac{2}{3}$       ③ 1      ④  $\frac{3}{2}$       ⑤ 2

$$\frac{5}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\left( \because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3 \tan x} \cdot \left( \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 - \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \right) \right)$$

3. 함수  $f(x) = x \sin x$ 에 대하여  $f'(\pi)$ 의 값은? [3.6점]

- ①  $-\pi$       ② -1      ③ 0      ④ 1      ⑤  $\pi$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

$$f'(\pi) = 0 + \pi(-1)$$

$$= -\pi$$

4. 함수  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^{x-1} + 1}$ 에 대하여  $f'(1)$ 의 값은? [3.7점]

- ① 0      ②  $\frac{1}{e}$       ③ 1      ④ 2      ⑤  $e$

$$f'(x) = \frac{2x(e^{x-1} + 1) - (x^2 - 1)e^{x-1}}{(e^{x-1} + 1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{4}{4} = 1$$

$$f'(x) = \frac{2x(e^{x-1} + 1) - (x^2 - 1)e^{x-1}}{(e^{x-1} + 1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{4}{4} = 1$$

5. 실수 전체에서 미분가능한 두 함수  $y = f(x)$ 와  $y = g(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln|f(x)|}{x-1} = 5$  이고  $g(x) = \{f(x)\}^2$  일 때,  $g'(1)$ 의 값은? [4.4점]

- ① ~~10~~      ② 1      ③ 5      ④ 10      ⑤ 20

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(1)}{f(1)} = 5, \quad \ln f(1) = 0, \quad f(1) = 1$$

$$\therefore f'(1) = 5$$

$$y) \quad g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$$

$$g'(1) = 2f(1) \cdot f'(1)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 5$$

$$= 10$$

6.  $y = \ln|3 \csc x|$ 의 도함수는? [3.7점]

- ①  $y' = 3 \csc x$       ②  $y' = \frac{1}{3 \csc x}$       ③  $y' = -\frac{\cot x}{3}$   
 ④  $y' = \cot x$       ⑤  $y' = -\cot x$

$$y' = \frac{-\cancel{3} \cancel{\csc x} \cot x}{\cancel{3} \cancel{\csc x}}$$

$$= -\frac{\cot x}{3}$$

7. 매개변수로 나타낸 함수  $x = e^{2t-6}$ ,  $y = (2t+3)^{\frac{3}{2}}$ 에서  $t=3$ 일 때,  $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3.8점]

- ① 3    ②  $\frac{9}{2}$     ③ 9    ④  $\frac{27}{2}$     ⑤ 27

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=3} = 2e^{2t-6} = 2 \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=3} = \frac{3}{2} (2t+3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \Big|_{t=3} = 9$$

$$\therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=3} = \frac{9}{2}$$

8. 방정식  $\frac{1}{x} - xy + y^2 = 3$  위의 점  $(a, 2)$ 에서  $\frac{dy}{dx}$ 의 값을  $b$ 라 할 때,  $a+b$ 의 값은? (단,  $a > 0$ ) [4.3점]

- ① 0    ② 1    ③ 2    ④ 3    ⑤ 4

$$\begin{aligned} \text{1) } \frac{1}{a} - 2a + 4 &= 3 & \text{2) } -\frac{1}{x^2} - y - x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{1}{a} - 2a + 1 &= 0 & (-a+y) \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{a^2} + 2 \\ a^2 + a - 2 &= 0 & 3b &= 1+2 \\ \frac{2}{-1} & & b &= 1 \\ a &= 1 \text{ or } -2 \text{ (} a > 0 \text{)} & \therefore a+b &= 1+1=2 \end{aligned}$$

9. 함수  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,  $g'(3)$ 의 값은? [3.8점]

- ①  $\frac{1}{3}$     ②  $\frac{1}{2}$     ③ 1    ④ 2    ⑤ 3

$$\begin{aligned} f(a) &= a^3 - 3a^2 + 3a + 1 = 3 \\ a^3 - 3a^2 + 3a - 2 &= 0 \\ \therefore a &= 2 \text{ (} \because a^2 - a + 1 > 0 \text{)} \end{aligned}$$

$$\therefore g'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3}$$

$$\left( \begin{array}{l} f(a) = 3a^2 - 6a + 3 \\ f'(a) = 12 - 12a \\ \phantom{f(a)} = 3 \end{array} \right)$$

10. 상수  $a$ 에 대하여 함수  $f(x) = x \sin ax$ 가  $f''(0) = 4$ 를 만족시킬 때,  $a$ 의 값은? [4.2점]

- ① -2    ② 0    ③ 1    ④ 2    ⑤ 4

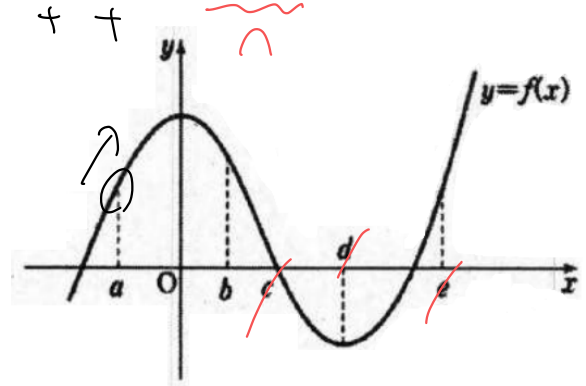
$$\begin{aligned} f(x) &= x \sin ax \\ f'(x) &= a \cos ax + a \cos ax - a^2 x \sin ax \\ f''(0) &= 2a = 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

11. 함수  $f(x) = xe^{x+2}$ 의 변곡점에서의 접선의 방정식을  $y = ax + b$ 라 할 때,  $ab$ 의 값은? [4.1점]

- ① 1    ② 2    ③  $e$     ④ 4    ⑤  $2e$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x+2} + xe^{x+2} \\ f'(x) &= e^{x+2} + e^{x+2} + xe^{x+2} \\ &= (x+2)e^{x+2} \\ \therefore \text{변곡점 } (-2, -2) \\ \therefore (-2, -2) \quad f'(-2) &= -1 \\ y+2 &= -(x+2) \\ y &= -x-4 \\ \therefore ab &= -1 \cdot (-4) = 4 \end{aligned}$$

12. 삼차함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,  $a, b, c, d, e$  중에서  $f(x)f'(x) > 0$ ,  $f''(x) < 0$ 을 만족하는 것은? [4점]



- ① a    ② b    ③ c    ④ d    ⑤ e

13. 함수  $f(x) = (x^2 - ax + a)e^x$ 의 극댓값이 3일 때, 극솟값은?  
(단,  $a > 2$ ) [4.5점]

- ① 0    ② 1    ③  $e$     ④ 3    ⑤  $3e^3$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - ax + a)e^x + (x^2 - ax + a)e^x \\ &= (x^2 + (2-a)x)e^x \quad (\because a > 2) \\ &= x(x + 2 - a)e^x \end{aligned}$$

i)  $f'(x) = a = 3$

ii)  $f(a-2) = f(1) = (1-3+3)e^1 = e$

$x$	0	$a-2$
$f'(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

14. 구간  $[0, 2\pi]$ 에서 방정식  $x \cos x - \sin x + k = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2개가 되도록 하는 정수  $k$ 의 개수는? [4.5점]

- ① 0    ② 1    ③ 2    ④ 3    ⑤ 4

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - x \sin x - \cos x \\ &= -x \sin x \end{aligned}$$

$\nearrow \searrow$

$x$	0	$\pi$	$2\pi$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$k$	$-\pi + k$	$2\pi + k$

$$\therefore f(\pi) = -\pi + k < 0$$

$$0 < k < \pi$$

$$\therefore k = 1, 2, 3. \quad (3\text{개})$$

15. 함수  $f(x) = 2x^2 - 3x - \frac{3}{x}$ ,  $g(x) = -\frac{k}{x}$ 에 대하여  $x > 0$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq g(x)$ 가 성립할 때, 상수  $k$ 의 최솟값은? [4.6점]

- ① -1    ② 1    ③ 2    ④ 3    ⑤ 4

$$\text{let } h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{k}{x}$$

$$\therefore h = 2x^2 - 3x, \quad y = \frac{k-3}{x}$$

이  $x=t$ 에서 공통점을 가지면 된다

$$i) y = 2t^2 - 3t = \frac{k-3}{t}$$

$$ii) y = 4t - 3 = -\frac{k-3}{t^2}$$

$$4t - 3 = -\frac{1}{t^2}(2t^2 - 3t)$$

$$4t^2 - 3t = -2t^2 + 3t$$

$$6t^2 - 6t = 0$$

$$6t(t-1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ or } 1 \quad (\because t=0 \text{ 일때 } \frac{1}{t} \text{ 정의 안됨})$$

$$y(1) = 2 - 3 = \frac{k-3}{1}$$

$$2 = k$$

16. 함수  $f(x) = e^{2x} - e^{-2x} - 4 \sin x$ 에 대하여 방정식  $f(x) = 0$ 의 실근의 개수는? [4.7점]

- ① 0    ② 1    ③ 2    ④ 3    ⑤ 4

$$f'(x) = 2e^{2x} + 2e^{-2x} - 4 \cos x$$

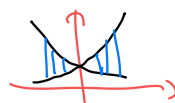
$$f'(0) = 4 - 4 = 0$$

$$\begin{array}{c} x \\ f(x) \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ + \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \pi \\ + \end{array}$$

$$\therefore x=0 \text{ 일때 } \pm \pi$$

$$i) g(x) = 2e^{2x} + 2e^{-2x}$$

$$ii) y = -4 \cos x$$



17. 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점  $P$ 의 시각  $t$ 에서의 위치  $x = f(t)$ 가  $f(t) = \ln(t^2 + 2) - \ln 2$ 라 하자.  $t = a$ 에서 점  $P$ 의 속도가 최대가 될 때,  $f(a)$ 의 값은? [5점]

- ① 0      ②  $\ln 2$       ③  $\sqrt{2}$       ④ 2      ⑤  $\ln 4$

$$f'(t) = \frac{2t}{t^2+2}$$

$$f''(t) = \frac{2(t^2+2) - 2t \cdot 2t}{(t^2+2)^2} = \frac{-2t^2+4}{(t^2+2)^2}$$

$$= \frac{-2(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})}{(t^2+2)^2}$$

$$\begin{array}{c|c} t & \sqrt{2} \\ \hline f'(t) & + \quad 0 \quad - \\ \hline f''(t) & \nearrow \quad \searrow \end{array}$$

$$\therefore a = \sqrt{2}$$

$$\therefore f(a) = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

서답형

단답형 1. 좌표평면 위를 움직이는 점  $P$ 의 시각  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x = t^2 + 1$ ,  $y = 2 \ln t$ 이다.  $t = a$ 에서 점  $P$ 의 속력이  $2\sqrt{2}$ 일 때,  $a$ 의 값을 구하시오. (단,  $t > 0$ ) [4점]

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}$$

$$\text{속력} = \sqrt{4t^2 + \frac{4}{t^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$4(t^2 + \frac{1}{t^2}) = 8$$

$$t^4 - 2t^2 + 1 = 0$$

$$\therefore t^2 = 1, t = 1 \text{ or } -1 \quad (\because t > 0)$$

$$\therefore a = 1$$

단답형 2. 양의 실수  $a$ 에 대하여 함수  $f(x) = a(\ln x)^2 - x^2$ 라 하자. 방정식  $f'(x) = 0$ 의 실근이 1개 존재할 때, 다음 물음에 답하시오. [6점]

(1)  $f'(x)$ 를  $a$ 를 이용하여 나타내시오. [6점]

(2)  $a$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$(1) f'(x) = 2a(\ln x) \cdot \frac{1}{x} - 2x$$

$$(2) \frac{2a}{x} \ln x = 2x$$

$$a \ln x = x^2$$

$$\text{let } g(x) = x^2, h(x) = a \ln x$$

$$g'(x) = 2x, h'(x) = \frac{a}{x}$$

$g, h$ 는 공통 접점을 가지므로

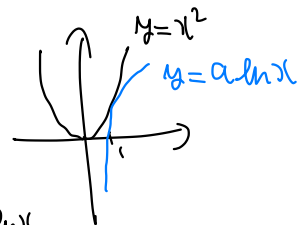
$$(i) 2x = \frac{a}{x} \quad (ii) \frac{a}{2} = a \ln \frac{a}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{a}{2}}$$

$$\frac{1}{2} = \ln \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{e}$$



**서술형 1.** 중심이  $A(1,0)$ 이고 반지름이 1인 원 위의 임의의 점  $P(x,y)$ 에 대하여 선분  $OP$ 가  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를  $t$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단,  $O$ 는 원점) [4점]

(1) 점  $P$ 의 좌표를 매개변수  $t$ 에 대한 식으로 나타내시오. [2점]

(2)  $t = \frac{\pi}{6}$  일 때,  $\frac{dy}{dx}$ 의 값을 구하시오. [2점]

(1)

$\therefore (x,y) = (1+\cos t, \sin t)$

(2)  $\frac{dx}{dt} = -\sin t$   $\frac{dy}{dt} = \cos t$

$\therefore \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = -\frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\sqrt{3}$

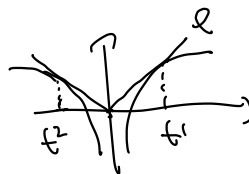
**서술형 2.** 원점에서 곡선  $y = \ln|x|$ 에 그은 두 접선이 이루는

예각의 크기를  $\theta$ 라 하고 두 접점의  $x$ 좌표를 각각

$t_1, t_2$  ( $t_1 > t_2$ )라 할때, 다음 물음에 답하시오. [5점]

(1)  $t_1, t_2$ 를 각각 구하시오. [2점]

(2)  $\tan \theta$ 를 구하시오. [3점]



(1) let  $t_1 = a$

e:  $(a, \ln a)$   $m = \frac{1}{a}$

$y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a)$   $\downarrow (0,0) \text{ in eq}$

$-\ln a = -1$

$a = e$

$\therefore t_1 = e \quad t_2 = -e$

(2)  $\tan \alpha = \frac{e \cdot e}{e} = \frac{1}{e}$   $\tan \beta = \frac{\ln e}{-e} = -\frac{1}{e}$

$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

$= \frac{\frac{1}{e} + \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e^2}} = \frac{\frac{2}{e}}{\frac{e^2-1}{e^2}} = \frac{2e}{e^2-1}$

$\tan(\alpha - \beta) > 0$  이므로  $(\tan(\alpha - \beta) < 0$  이면 부적)

$\tan \theta = \frac{2e}{e^2-1}$

서술형 3. 구간  $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 정의된 함수

$f(x) = \cos^n x (n = 2, 3, 4, \dots)$ 의 변곡점의 좌표를  $(a_n, b_n)$ 이라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [5점]

(1)  $\sin a_n$ 을  $n$ 에 관한 식으로 나타내시오. [2점]

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 을 구하시오. [3점]

$$(1) f'(x) = n \cos^{n-1} x (-\sin x)$$

$$f''(x) = n(n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x - n \cos^n x = 0$$

$$n \cos^{n-2} x ( (n-1) \sin^2 x - \cos^2 x ) = 0$$

$$n \sin^2 x - 1 = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{n}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\because \sin x > 0 \text{ on } (0, \frac{\pi}{2}))$$

$$\therefore \sin a_n = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$(2) b_n = \cos^n a_n \quad \cos a_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{n \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left( \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$$

✓

서술형 4. 구간  $(0, \frac{\pi}{2a})$ 에서 정의된 함수  $f(x) = \tan(ax)$ 의 역 함수를  $g(x)$ 라 하자. 두 곡선  $y = f(x), y = g\left(\frac{1}{x}\right)$ 의 교점  $(m, n)$ 에서 두 곡선에 각각 접하는 직선이 서로 수직일 때, 다음 물음에 답하시오. (단,  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ) [6점]

(1)  $\tan(am)$ 을  $n$ 에 관한 식으로 나타내시오. [1점]

(2)  $\tan(an)$ 을  $m$ 에 관한 식으로 나타내시오. [1점]

(3) 교점  $(m, n)$ 의 좌표를 구하시오. [2점]

(4) 상수  $a$ 의 값을 구하시오. [2점]

$$(1) f(m) = \tan am = n$$

$$(2) x = \tan(ag(x))$$

$$\frac{1}{x} = \tan\left(a g\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\frac{1}{m} = \tan an$$

$$(3) \left( \frac{1}{\tan an}, \tan am \right)$$

$$(4) i) f'(m) = a \sec^2 am$$

$$g'(m) = g'\left(\frac{1}{\tan am}\right) =$$

$$f(m) = \tan am$$

$$f'(m) = a \sec^2 am$$

$$g'(\tan am) = \frac{1}{a \sec^2 am}$$