선택형

1. 수열 $7, 4, 1, -2, -5, \cdots$의 일반항 a_n은? [4점]

① $a_n = -3n + 10$ ② $a_n = -3n + 7$

③ $a_n = 3n + 4$ ④ $a_n = 3n + 7$

⑤ $a_n = 3n + 10$

$a = 7 \quad d = -3$

2. 수열 $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, \cdots$의 일반항 a_n은? [4.2점]

① $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ② $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

③ $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ ④ $a_n \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}$

⑤ $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

$a = 1 \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $\sum_{k=1}^{5} (a_{2k-1} + a_{2k}) = 30$일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k - 1)$의 값을 구하면? [4.4점]

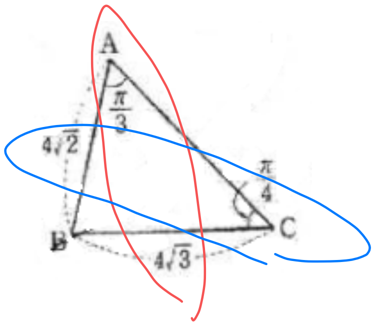
① 29 ② 30 ③ 49 ④ 50 ⑤ 59

$(a_1 + a_2) + \cdots + (a_9 + a_{10}) = 30$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(2a_k - 1) = 2\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 1$

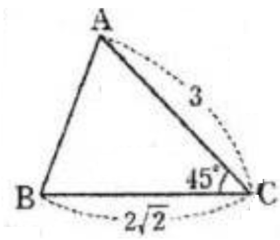
$= 2 \cdot 30 - 1 = 59$

4. 삼각형 ABC에 대하여 $\frac{4\sqrt{3}}{\sin\boxed{}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$의 빈칸에 알맞은 것은? [4.5점]



① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{5}$ ④ $\frac{\pi}{6}$ ⑤ $\frac{\pi}{12}$

5. 그림과 같이 $a = 2\sqrt{2},\ b = 3,\ C = 45°$인 삼각형 ABC의 넓이는? [4.7점]



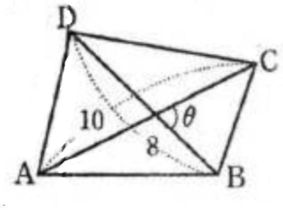
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$S = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot \cancel{2}\sqrt{2} \cdot \sin 45°$

$= 3\cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$

$= 3$

6. 넓이가 20인 사각형의 두 대각선의 길이가 각각 8, 10이라고 한다. 두 대각선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, θ의 값은? [4.9점]



① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5\pi}{12}$

$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin\theta = 20$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$

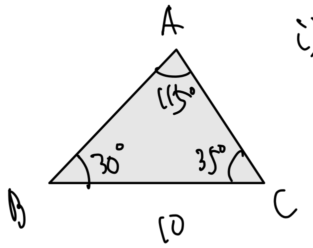
$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

7. 삼각형 ABC에서 $\angle B = 30°$, $\angle C = 35°$, $\overline{BC} = 10$일 때, 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 구하면? [5.0점]

<삼각함수표>

각	sin	cos
20°	0.34	0.93
25°	0.42	0.90
30°	0.50	0.86
35°	0.57	0.81

① $\frac{250}{21}$ ② 10 ③ $\frac{500}{57}$ ④ $\frac{50}{9}$ ⑤ 5



i) $\sin 115° = \sin(90° + 25°)$

$= \sin 25°$

$= 0.42$

ii) $2R = \frac{10}{\sin 115°} = \frac{10}{0.42}$

$\therefore R = \frac{5}{0.42}$

$= \frac{250}{21}$

8. 다음 <보기>는 모든 자연수 n에 대하여 등식 $1+3+3^2+\cdots 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ $\cdots$㉠ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<보 기>

(1) $n = 1$일 때,

(좌변)=1, (우변)=$\frac{1}{2} \times 2 = 1$ 따라서 ㉠이 성립한다.

(2) $n = k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$1+3+3^2+\cdots+3^{k-1} = \frac{1}{2}\boxed{f(k)}$ $3^k - 1$

위의 식에 양변에 3^k를 더하면

$1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}+3^k$ 3^k

$= \frac{1}{2}(3^k - 1) + 3^k = \frac{3}{2}\boxed{g(k)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1)$

따라서 $n = k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(1), (2)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 과정에서 $f(k)$와 $g(k)$에 대하여 $f(2)g(1)$의 값을 구하면? [5.1점]

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 48 ⑤ 144

$f(2) = 3^2 - 1 = 8$

$g(1) = 3^1 - 1 = 2$

$\therefore f(2)g(1) = 8 \cdot 2 = 16$

9. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [5.2점]

<보 기>

ㄱ. 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면 $a_n + S_n = 3$이다. X

ㄴ. 수열 $\{\log_3 a_n\}$은 등차수열이다. O

ㄷ. 수열 $\{b_n = a_{n+1} + a_n\}$은 첫째항이 $\frac{5}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이다. O

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $S_n = \frac{1\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{3}} = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 3 - 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ㄴ. $\log_3 a_n = (n-1)\log_3 \frac{2}{3}$ $\therefore a = 0,\ d = \log_3 \frac{2}{3}$

ㄷ. $a_{n+1} + a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

10. 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}} = 1$를 만족시킬 때, 자연수 n의 값을 구하면? [5.4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

(준식) $= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{a_k - a_{k+1}}$ $a_n = 2n+2$

$= -\frac{1}{2}\left[(\sqrt{a_1}-\cancel{\sqrt{a_2}}) + (\cancel{\sqrt{a_2}}-\cancel{\sqrt{a_3}}) + \cdots + (\cancel{\sqrt{a_n}}-\sqrt{a_{n+1}})\right]$

$= -\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2n+4}\right) = 1$

$2-\sqrt{2n+4} = -2$

$\sqrt{2n+4} = 4$

$2n = 12$ $(\because n>0)$

$n = 6$

11. 수열 $\{a_n\}$이 $a_8 - a_6 = 4$를 만족한다. 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하자. $S_n = pn^2 + n + 1$일 때, $a_1 + a_3 + a_5$의 값은? [5.5점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

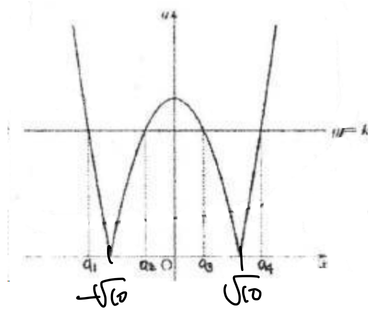
i) $a_1 = S_1 = p+1+1 = 3$ ← 실수하기 쉬운건 먼저 해결

ii) $a_n = S_n - S_{n-1}$
$= pn^2+n+1$
$-\left(p(n-1)^2+(n-1)+1\right)$
$= 2pn - p + 1$

iii) $a_8 - a_6 = 16p - p + 1$
$-(12p - p + 1)$
$= 4p = 4$ $\therefore p = 1$ $\therefore a_n = 2n\ (n \ge 2)$

$\therefore a_1 + a_3 + a_5$
$= 3 + 6 + 10$
$= 19$

12. 그림과 같이 함수 $y = |x^2 - 10|$의 그래프가 직선 $y = k$와 서로 다른 네 점에서 만날 때, 네 점의 x좌표를 각각 a_1, a_2, a_3, a_4라 하자. 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4가 각각 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은? [5.6점]



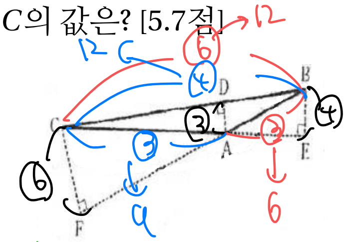
① 6 ② $\frac{31}{5}$ ③ 7 ④ $\frac{36}{5}$ ⑤ 8

i) let $a_3 = d$, then
$a_1 = -3d$, $a_2 = -d$, $a_4 = 3d$

ii) $f(d) = 10 - d^2$
$f(3d) = 9d^2 - 10$
$f(d) = f(3d)$
$10 - d^2 = 9d^2 - 10$
$20 = 10d^2$
$\sqrt{2} = d$ $(\because d>0)$

$\therefore k = f(d)$
$= 10 - 2 = 8$

13. 그림과 같이 $A > 90°$인 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C에서 세 직선 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{AD} : \overline{BE} : \overline{CF} = 3 : 4 : 6$일 때, 삼각형 ABC에서 $\cos C$의 값은? [5.7점]



① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

$\therefore \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 6 : 12 : 9 = 2 : 4 : 3$
$= c : a : b$

$\therefore \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$= \frac{(4k)^2+(3k)^2-(2k)^2}{2 \cdot 4k \cdot 3k}$

$= \frac{25-4}{24}$

$= \frac{21}{24}$

$= \frac{7}{8}$

14. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

<조 건>

(가) $-1 \le x < 1$에서 $f(x) = |x|$이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$이다.

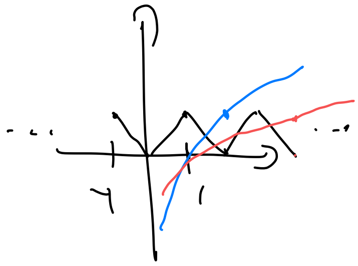
자연수 n에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 함수 $y = \log_{2n} x$ 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [5.8점]

① 90 ② 100 ③ 132 ④ 156 ⑤ 182

i) $n=1$ 일때

$y = \log_2 x$

$\therefore a_1 = 1$

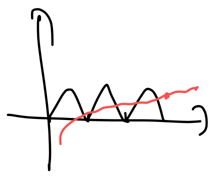


ii) $n=2$ 일때

$y = \log_4 x$

$\therefore a_2 = 3$

iii) $y = \log_6 x$



$\therefore a_3 = 5$

$\therefore a_n = 2n-1$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} (2n-1) = 2\sum_{n=1}^{10} n - \sum_{n=1}^{10} 1$

$= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 10$

$= 100$

서답형

* 계차수열 풀이로 하지 않는다.

단답형 1. 수열 $\{a_n\}$이 $0, 2, 6, 12, 20, \cdots$일 때, a_8을 구하시오. [4.5점]

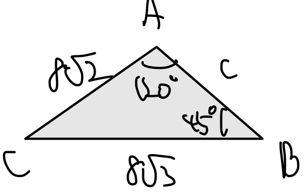
+2 +4 +6 +8

b_n

$a_8 = 0+2+4+6+8+10+12+14$

$= 56$

단답형 2. 반지름의 길이가 8인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $A = 120°$, $B = 45°$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. [5.5점]



i) $\frac{a}{\sin 120°} = 16$

$a = 8\sqrt3$

ii) $\frac{b}{\sin 45°} = 16$

$b = 8\sqrt2$

iii) $\cos 120° = \frac{128+c^2-192}{2\cdot 8\sqrt2\cdot c}$

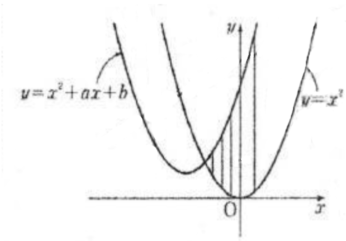
$-\frac{1}{2} = \frac{c^2-8^2}{2\cdot 8\sqrt2\cdot c}$

$c^2-8\sqrt2 c-64=0$

$\therefore c = -4\sqrt2+\sqrt{96}$

$= 4(\sqrt6-\sqrt2)$

서술형 1. 다음 그림은 두 곡선 $y = x^2 + ax + b$, $y = x^2$의 교점에서 오른쪽 방향으로 두 곡선 사이에 y축과 평행한 선분 12개를 일정한 간격으로 그은 것이다. 선분의 길이를 왼쪽부터 차례로 $l_1, l_2, l_3, \cdots l_{12}$이라고 하면 $l_1 = 3$, $l_{12} = 13$이다. $l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_{12}$의 값을 구하시오. (단, $a > 0$이고 a, b는 상수) [4점]

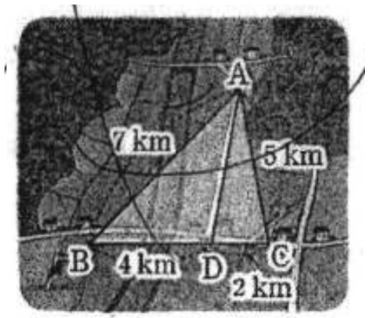


$x^2+ax+b-x^2 = ax+b \Rightarrow$ 등차수열

$\therefore \sum_{k=1}^{12} l_k = \frac{12(l_1+l_{12})}{2} = 6(3+13)$

$= 96$

서술형 2. 그림과 같이 네 지점 A, B, C, D 중 B, C, D가 한 직선 위에 있다. $\overline{AB} = 7km$, $\overline{AC} = 5km$, $\overline{BD} = 4km$, $\overline{DC} = 2km$ 일 때, $\cos C$의 값을 이용하여 두 지점 A, D사이의 거리를 구한 후, 삼각형 ACD의 내접원의 반지름을 구하시오. [5점]



i) let $\overline{AD} = x$

$\cos C = \frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot6\cdot5} = \frac{12}{2\cdot6\cdot5} = \frac{1}{5}$

$\cos C = \frac{2^2+5^2-x^2}{2\cdot2\cdot5} = \frac{1}{5}$

$4+25 = x^2+4$

$x = 5$ ($\because x>0$)

ii) $\sin C = \frac{2\sqrt6}{5}$

$\frac{x}{\sin C} = 2R$

$\frac{5}{\frac{2\sqrt6}{5}} = 2R$

$5 = 2R\cdot\frac{2\sqrt6}{5}$

$\therefore R = \frac{25}{4\sqrt6} = \frac{25\sqrt6}{24}$

서술형 3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 a_2 = a_{10}$, $a_1 + a_9 = 90$일 때, $(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)$의 값을 구하시오. [6점]

i) $a \cdot ar = ar^9$

$a = r^8$

ii) $a + ar^8 = 90$

$a^2 + a - 90 = 0$

$a = 9$ or $\cancel{-10}$

$(\because a>0)$

$\therefore r^8 = 9$

$r^4 = 3$

iii) (준식) $= \dfrac{a(1-(r^2)^5)}{1-r^2} \cdot \dfrac{a(1+(r^2)^5)}{1+r^2}$

$= a^2 \dfrac{1-r^{20}}{1-r^4}$

$= 81 \cdot \dfrac{1-3^5}{1-3}$

$= 9801$

서술형 4. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$일 때, 식 $\dfrac{1\times 2}{a_1} + \dfrac{2\times 3}{a_2} + \dfrac{3\times 4}{a_3} \cdots + \dfrac{9\times 10}{a_9}$을 $\sum$를 이용하여 표현하고, 그 값을 구하시오. [5점]

i) $a_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

ii) (준식) $= 2^2\left(\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{9\times 10}\right)$

$= 4\sum_{k=1}^{10} \dfrac{1}{k(k+1)}$

$= 4\left[\left(\dfrac{1}{1} - \cancel{\dfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\dfrac{1}{2}} - \cancel{\dfrac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\dfrac{1}{9}} - \dfrac{1}{10}\right)\right]$

$= 4 \cdot \dfrac{9}{10}$

$= \dfrac{18}{5}$