

- ◆ 전제 : 선택형 14문항(70점) 서답형 6문항(30점)
- ◆ 배점 : 문항 옆에 배점 표시
- ◆ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. 다음 중 수렴하지 않는 것은? [4.3점]

- ① $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$
- ② $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- ③ $2+1, 2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{4}, \dots, 2+\frac{1}{n}, \dots$
- ④ $\sqrt{2}-1, \sqrt{3}-\sqrt{2}, 2-\sqrt{3}, \sqrt{5}-2, \dots, \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \dots$
- ⑤ $7, 4, 1, -2, \dots, 10-3n, \dots$

2. 모든 자연수 n 에 대하여 $1 \leq k \leq n$ 일 때, 다음 부등식이 성립한다.

$$\sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n}$$

이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{n^2+k}}$ 의 값은? [5점]

- ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ ∞

3. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 2$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 $2a_{n+1} < a_n + 2 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 를 만족시킬 때, 다음은 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하는 과정이다.

<과정>

부등식 $2a_{n+1} < a_n + 2$ 의 양변에 (가)를 더하면

$$2a_{n+1} + \text{(가)} < a_n + 2 + \text{(가)}$$

$$\text{즉, } a_{n+1} - 2 < \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

따라서 $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n - 2 < \frac{1}{2}(a_{n-1} - 2)$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^2 (a_{n-2} - 2)$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^3 (a_{n-3} - 2) \text{ 모든 자연수 } n \text{에 대하여}$$

...

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - 2)$$

$a_n > 2$ 이므로

$$0 < a_n - 2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - 2) \quad (n \geq 2)$$

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - 2) \right\} = \text{(나)} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{(다)}$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c 라 할 때, $a + b + c$ 의 값은? [5.6점]

- ① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ ∞

4. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - (-2)^n}{4^n}$ 의 합은? [5점]

- ① $\frac{4}{3}$ ② 2 ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

5. <보기>의 급수 중에서 발산하는 것은 모두 몇 개인가? [5.2점]

<보 기>

$$\text{ㄱ. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{ㄴ. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

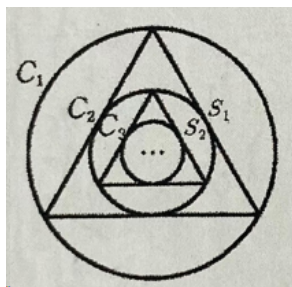
$$\text{ㄷ. } 1 + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{n+1}{3n-1} + \dots$$

$$\text{ㄹ. } \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$$

$$\text{ㅁ. } 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

6. 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 C_1 에 내접하는 정삼각형 S_1 을 그리고 이 정삼각형의 내접원을 C_2 라 하자. 또, 원 C_2 에 내접하는 정삼각형 S_2 를 그리고 이 정삼각형의 내접원을 C_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 한 없이 반복할 때, 정삼각형 S_1, S_2, \dots 의 넓이의 합은? [5점]



- ① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

7. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}}$ 의 합은?

<조 건>

(가) $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 - \frac{a_n}{3^n}\right)$ 은 수렴한다.

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

8. 다음 중 극한값을 바르게 구하지 못한 것은? [4.5점]

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 4^x}{4^x} = 0$

③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x = e^3$

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{\log_3(x+5)} = 2$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{4^x-1} = \frac{1}{\ln 2}$ 를 만족시키는 두 상수 a 와 b 에 대하여 ab 의 값은? [5점]

- ① 1 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

10. 함수 $f(x) = (x^2 + 3x)e^x$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [4.3점]

- ① $4e$ ② $5e$ ③ $8e$ ④ $9e$ ⑤ $10e$

11. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$ 이고 $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{1}{2}$ 일 때, $\cos(\alpha - \beta)$ 의 값은? [5점]

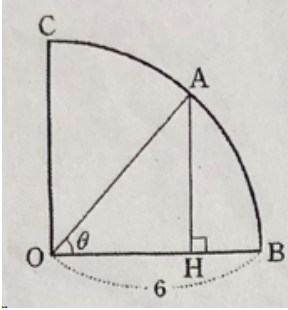
- ① $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$ ③ $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$
 ④ $\frac{-4+3\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\frac{-4-3\sqrt{3}}{10}$

12. 함수 $f(x)$ 가 다음과 같을 때, $f'(0)$ 의 값은? [5점]

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin 4x + x^2 \cos \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

- ① 2 ② 4 ③ 8 ④ 9 ⑤ $\frac{1}{2}$

13. 아래 그림과 같이 중심이 점 O 이고 반지름의 길이가 6인 사분원 OBC 위의 한 점 A 에서 선분 OB 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. $\angle AOB = \theta$, 호 AB 의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{BH}}{\{f(\theta)\}^2}$ 의 값은? [5.2점]



- ① 0 ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ 6 ⑤ 12

14. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) \log_2 x - 3}{x - e} = \frac{4}{e}$$

일 때, $\frac{f(e)}{f'(e)}$ 의 값은? [5.2점]

- ① $\frac{1}{3e}$ ② $3e$ ③ $\frac{1}{e}$ ④ e ⑤ $\frac{3}{e}$

서답형

단답형 1. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

단답형 2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -2$ 일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3b_n)$ 의 합을 구하시오. [3점]

단답형 3. 원점 O 와 점 $P(-3, 4)$ 를 지나는 동경 OP 가 나타내는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\sec \theta$ 의 값을 구하시오. [3점]

서술형 1. 다음은 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 에 대한 명제이다. [6점]

<보 기>

두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{a_nb_n\}$ 이 수렴하면 수열 $\{b_n\}$ 도 수렴한다.

- (1) 명제의 참 거짓을 판별하시오. [2점]
- (2) 명제가 참이라면 수열의 극한의 기본 성질을 이용하여 증명하고, 명제가 거짓이라면 반례를 찾고 그 이유를 서술하시오. [4점]

서술형 2. 두 곡선 $y = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 가 있다. 양수 t 에 대하여 곡선 $y = 3^x$ 가 직선 $x = t$ 와 만나는 점을 A , 곡선 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 가 직선 $x = t$ 와 만나는 점을 B 라 하자. 점 A 에서 $y = 3^x$ 의 기울기를 $f(t)$, 점 B 에서 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 기울기를 $g(t)$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [7점]

- (1) $f(t)$, $g(t)$ 를 구하시오. [2점]
- (2) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) + g(t)}{t}$ 의 값을 구하는 풀이과정과 답을 서술하시오. [5점]

서술형 3. 도함수의 정의와 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수 $y = \cos x$ 의 도함수를 구하는 과정을 서술하시오. [7점]