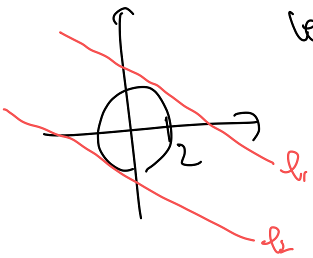
 답 교정.

선택형

1. 실수 x, y에 대하여 $x^2 + y^2 = 4$이 성립할 때, $3x + 4y$의 최댓값을 구하면? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11



let $3x+4y=k \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{k}{4}$

$m=-\frac{3}{4}$, $r=2$ 이므로

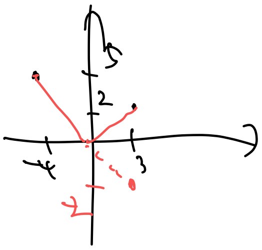
$l_1: y=-\frac{3}{4}x+2\sqrt{1+\frac{9}{16}}$

$=-\frac{3}{4}x+2\cdot\frac{5}{4}$

$\therefore k=10$

2. 두 점 $A(-4,5)$, $B(3,2)$과 x축 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하면? [4점]

① $5\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $7\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $9\sqrt{2}$



$d: (-4,5), (3,-2)$

$d=\sqrt{(3+4)^2+(-2-5)^2}$

$=7\sqrt{2}$

3. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$의 두 부분집합 $A=\{2,3,5\}$, $B=\{1,2,3,6,7\}$에 대하여 $A\cup C=B\cup C$를 만족시키는 U의 부분집합 C의 개수를 구하면? [4점]

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

$2^4=16$

4. 전체집합 U의 공집합이 아닌 세 부분집합 P, Q, R가 각각 세 조건 p, q, r의 진리집합이라 하자.
$P\cap Q=Q$, $R^c\cup P=U$, $Q^c\cap R=\varnothing$일 때, 다음 중 참인 명제만을 있는 대로 고르면? [4점]

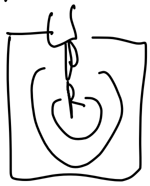
<보 기>

ㄱ. $p\to q$ ㄴ. $r\to q$ ㄷ. $\sim q\to\sim r$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

i) $P\cap Q=Q \Rightarrow Q\subset P$

ii)



$\therefore R\subset P$

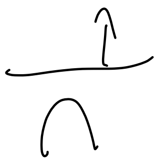
iii)

$\therefore R\subset Q$

$\therefore R\subset Q\subset P$

5. 명제 "어떤 실수 x에 대하여 $ax^2-ax-1\geq 0$이다."가 거짓이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하면?[5점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$a<0$ and $D<0$ 이므로

$D=a^2+4a<0$

$a(a+4)<0$

$-4<a<0$

$\therefore a=-3,-2,-1$ 3개

6. 두 명제 $p \to \sim q$, $\sim p \to r$가 모두 참일 때, 다음 <보기> 중 반드시 참인 명제의 개수를 구하면? [5점]

<보 기>

ㄱ. $r \to \sim p$　　ㄴ. $q \to \sim p$

ㄷ. $\sim r \to \sim q$　　ㄹ. $\sim q \to p$

ㅁ. $\sim q \to \sim r$　　ㅂ. $r \to \sim q$

① 5　② 4　③ 3　④ 2　⑤ 1

대우　$q \to \sim p$　$\sim r \to p$

삼단논법　$q \to r$

$\sim r \to \sim q$

7. 집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 할 때, 실수 전체의 집합의 두 부분집합

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a+k, b+k, c+k, d+k, e+k\}$

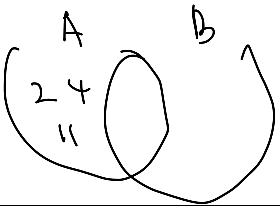
에 대하여 다음 조건을 만족시키는 상수 k의 값이 존재한다. 집합 $A \cap B$의 모든 원소의 곱을 구하면? [5점]

<보 기>

(가) $S(A) = 33$

(나) $A - B = \{2, 4, 11\}$

(다) $S(A \cup B) = 75$



① 39　② 48　③ 55　④ 60　⑤ 63

i) $a+b+c+d+e = 33$

ii) $(a+b+c+d+e) + 5k + 2+4+11 = 75$

$5k = 25$

$k = 5$

iii) $A \cap B$ 에 7, 9, 16 중 2개

$2+4+11+d+e = 33$

$d+e = 16$

$\therefore d, e = 7, 9$　∴답: $7 \times 9 = 63$

8. 원 $x^2 + (y-1)^2 = 16$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동 하였더니 직선 $4x - 3y - 1 = 0$과 x축에 접하였다. 이때 $4a + b$의 값을 구하면? (단, a, b는 양의 실수) [5점]

① 36　② 37　③ 38　④ 39　⑤ 40

원의 중심 $(0, 1) \xrightarrow[a,\,b]{x,\,y} (a, b+1)$

i) d: $(a, b+1)$　$4x - 3y - 1 = 0$

$d = \dfrac{|4a - 3(b+1) - 1|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{|4a-3b-4|}{5} = 4 = r$

ii) d: $(a, b+1)$　$y = 0$

$d = \dfrac{|b+1|}{1} = 4 = r$

$b+1 = 4$ or -4

$b = 3$ or $\cancel{-5}$ $(\because b > 0)$

iii) $|4a - 13| = 20$

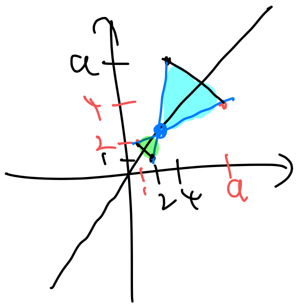
$4a - 13 = 20$ or -20

$4a = 33$ or $\cancel{-7}$ $(\because 4a > 0)$

$\therefore 4a + b = 33 + 3 = 36$

9. 좌표평면에서 두 점 $A(4, a)$, $B(2, 1)$을 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A', B'이라 하고, 두 직선 AB, $A'B'$의 교점을 P라 하자. 두 삼각형 APA', BPB'의 넓이의 비가 16:9일 때, a의 값을 구하면? (단, $a > 4$) [5점]

① $\frac{14}{3}$　② 5　③ $\frac{16}{3}$　④ $\frac{17}{3}$　⑤ 6



i) $\triangle APA' \sim \triangle BPB'$

닮음비 4:3

ii) $\overline{AA'} = \sqrt{(a-4)^2 + (4-a)^2} = \sqrt{2} \times \frac{4}{3}$

$\overline{BB'} = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$

$|a - 4| = \frac{4}{3}$

$a - 4 = \frac{4}{3}$ or $-\frac{4}{3}$

$\therefore a = \frac{16}{3}$ or $\cancel{\frac{8}{3}}$ $(\because a > 4)$

10. 그림과 같이 두 대각선 AC, BD의 교점이 원점이고 네 변이 각각 x축 또는 y축에 평행한 직사각형 $ABCD$가 다음 조건을 만족시킨다.

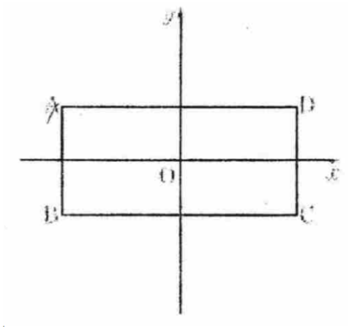
<보 기>

(가) $\overline{AD} > \overline{AB} > 3$

(나) 직사각형 $ABCD$를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직사각형의 내부와 직사각형 $ABCD$ 내부와의 공통부분의 넓이는 30이다.

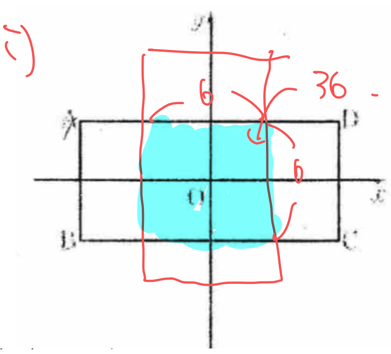
(다) 직사각형 $ABCD$를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 직사각형의 내부와 직사각형 $ABCD$의 내부와의 공통부분의 넓이는 36이다.

직사각형 $ABCD$의 넓이를 구하면? (단, 점 A는 제 2사분면 위의 점이다.) [5점]



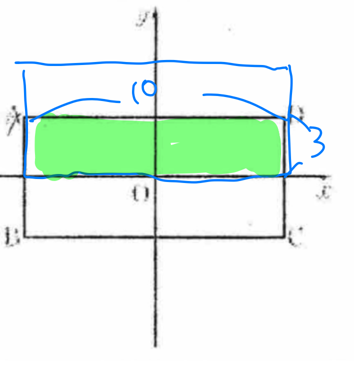
① 58　② 60　③ 62　④ 64　⑤ 66

i)



$\therefore \overline{AB} = 6$

ii)

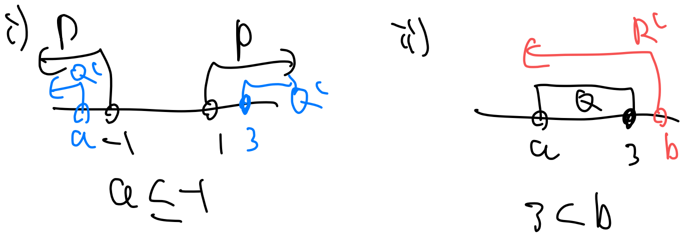


$\therefore \overline{AD} = 10$

$\therefore S = 6 \cdot 10 = 60$

11. 실수 x에 대하여 세 조건 p, q, r가 $p : |x| > 1$, $q : a < x \le 3$, $r : x \ge b$ 일 때, p는 $\sim q$이기 위한 필요조건이고, q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다. 이때, 정수 a, b에 대하여 a의 최댓값과 b의 최솟값의 곱을 구하면? [6점]

① -10　② -8　③ -6　④ -4　⑤ -2



$\therefore a_{최대} \times b_{최소} = -1 \cdot 4 = -4$

12. 천안고등학교 급식 신청에서 점심 또는 저녁 급식을 신청한 1학년 210명과 2학년 200명의 학생을 대상으로 점심과 저녁 급식의 이용 실태를 조사한 결과가 다음과 같다. (4)

<보 기>

(가) 점심 급식을 신청한 학생의 수와 저녁 급식을 신청한 학생의 수의 합은 460이다.

(나) 점심과 저녁 급식 중 한 끼만 이용하는 1학년 학생의 수와 점심과 저녁 급식 중 한 끼만 이용하는 2학년 학생의 수는 같다.

이 학생 중 점심과 저녁 급식을 모두 신청한 2학년 학생의 수를 구하면? [6점]

① 20　② 25　③ 30　④ 35　⑤ 40

i) $n(점) + n(저) = n(점 \cup 저) - n(점 \cap 저)$

$460 = 410 - n(점 \cap 저)$

$\therefore n(점 \cap 저) = 50$

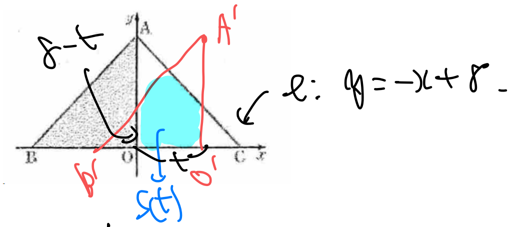
ii) let $(점_1 \cup 저_1) - (점_1 \cap 저_1) = A$

$(210 - A) + (200 - A) = 50$

$\therefore A = 180$

$\therefore$ 답: $200 - 180 = 20$

13. 좌표평면 위에 세 점 $A(0,8)$, $B(-8,0)$, $C(8,0)$이 있다. 실수 t $(0<t<16)$에 대하여 세 점 O, A, B를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 점을 각각 O', A', B'이라 하자. 삼각형 OCA의 내부와 삼각형 $O'A'B'$의 내부의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S(t)$가 최댓값을 가질 때의 t값을 구하면? (단, O는 원점이다.) [6점]



① $\frac{14}{3}$ ② 5 ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ 6

$S = \frac{1}{2}\cdot\left(8-t+\left(-\frac{t}{2}+8\right)\right)\cdot\frac{t}{4}\times\cancel{4}$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(16-\frac{3}{2}t\right)t$

$\therefore\ 16-\frac{3}{2}t=0$

$t=\frac{32}{3}$ or 0 이므로

$S_{최대}$ 일 때 $t=\dfrac{\frac{32}{3}+0}{2}=\frac{16}{3}$

14. 100이하의 자연수 k에 대하여 두 집합 $A=\{x|x$는 k의 양의 약수$\}$, $B=\{7,9,10\}$이 있다. $n(A\cap B)=2$일 때, 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 홀수가 되는 모든 k의 값의 합을 구하면? [6점]

① 70 ② 90 ③ 133 ④ 153 ⑤ 160

i) $A\cap B=\{7,9\}$ 일때

$A=\{1,3,7,9,21,63\}$

$1+3+21+63$ 은 짝수 ∴ 불가능.

ii) $A\cap B=\{7,10\}$ 일때

$A=\{1,2,5,7,10,14,35,70\}$

$1+2+5+14+35+70$ 은 홀수 ∴ 가능.

iii) $A\cap B=\{9,10\}$ 일때

$A=\{1,2,3,5,6,9,10,15,18,30,45,90\}$

$1+2+3+5+6+15+18+30+45+90$ 은 홀수

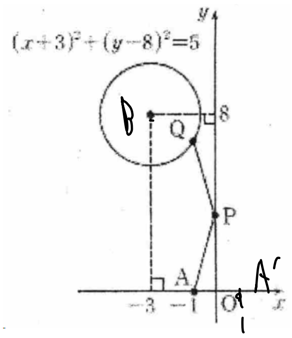
∴ 가능

$\therefore k=70, 90$

∴ 답: $70+90=160$

서답형

단답형 1. 좌표평면 위에 점 $A(-1,0)$과 원 $C:(x+3)^2+(y-8)^2=5$가 있다. y축 위의 점 P와 원 C 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오 [5점]



$\overline{A'B} = \sqrt{(1+3)^2+(0-8)^2} = 4\sqrt{5}$

$\therefore k = \overline{A'B} - r = 4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$\therefore k^2 = 45$

40의 약수 : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

단답형 2. 전체집합 $U=\{x|x$는 20이하의 자연수$\}$의 부분집합 $A_k=\{x|x(y-k)=40,\ y\in U\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\frac{40-x}{4}\in U\right\}$ 에 대하여 $n(A_k\cap B^c)=1$ 이 되도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. [5점]

i) B에서

$\frac{40-4}{4}=9\in U$, ⋯ , $\frac{40-20}{4}=5\in U$

$\therefore B=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

$A_k\cap B^c = A_k - B$ 이 한 원소 집합.

ii) A_1에서

$x(y-1)=40$ 에서 $y-1$ 이 40의 약수일 때,

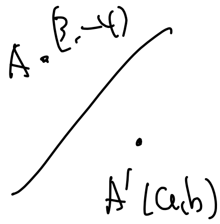
$x=20, 10, 8, 5, 4$ $(\because y\le 20)$

$A_k - B=\{5, 10\}$ 모순

서술형 1. 원 $(x-3)^2+(y+4)^2=9$을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하시오.

$y=x+1$

Let $A'(a,b)$



i) $m_{\overline{AA'}} = \frac{b+4}{a-3} = -1$

$b+4=-a+3$

$a+b=-1$

ii) $\overline{AA'}$ 중점 $= \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b-4}{2}\right)$ 대입.

$x-y+1=0$

$\frac{a+3}{2} - \frac{b-4}{2} + 1 = 0$

$a+3-b+4+2=0$

$\begin{cases} a-b=-9 \\ a+b=-1 \end{cases}$

$2a=-10$

$\therefore a=-5,\ b=4$

$\therefore O: (-5, 4)\quad r=3$

$(x+5)^2+(y-4)^2=9$

iii) A_{13}에서

5·8=40 이므로 20−k≠8 이 되도록 가정.

$x(y-13)=40$ 일때

$y-13<8$ 이므로

$x=5$가 될 수 없다.

$\therefore A_k - B=\{10\}$

성립

iv) A_{17}에서

10·4=40 이므로 20−k≠4 이 되도록 가정

$x(y-17)=40$ 일때

$y-14<4$ 이므로

$x=10$이 될 수 없다.

$\therefore A_k - B=\emptyset$

모순

$\therefore k = 13, 14, 15, 16$

$\therefore$ 답: 58

서술형 2. $x>0$일 때, $\dfrac{x}{x^2-3x+9}$은 $x=a$에서 최댓값 b를 갖는다. 이때 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. [6점]

$$\frac{x}{x^2-3x+9} = \frac{1}{x-3+\frac{9}{x}} \le \frac{1}{-3+2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}} \quad (\because \text{산술기하})$$

$$= \frac{1}{3} \qquad \therefore b=\frac{1}{3}$$

(단, $x=\frac{9}{x}$ 일때 등호성립)

$x=3$ $(\because x>0)$

$\therefore a=3$

$\therefore ab = 3\cdot\frac{1}{3} = 1$

서술형 3. 두 실수 a, b에 대하여 조건 p, q, r, s, t는

$p: |a|+|b|=0$ $\quad a=0,\ b=0$ $(\because a, b:$ 실수$)$

$q: a^2-2ab+b^2=0$ $\quad (a-b)^2=0$ $\quad \therefore a=b$

$r: |a+b|=|a-b|$

$s: a^2-b^2=0$ $\quad a+b=0$ or $a-b=0$

$t: ab\ge 0$

이다. 다음 빈칸 안에 충분, 필요, 필요충분 중에서 알맞은 것을 순서대로 쓰시오. [6점]

<보 기>

ㄱ. p는 r이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$ 조건이다.

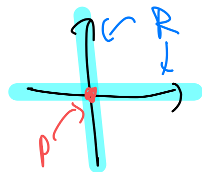
ㄴ. q이고 s는 p이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$ 조건이다.

ㄷ. s이고 t는 p이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$ 조건이다.

i) r: $a+b=a-b$ or $a+b=b-a$

$2b=0$ or $2a=0$

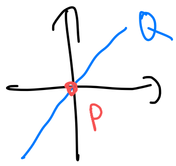
$b=0$ or $a=0$



$\therefore P\subset R$

∴ 충분조건

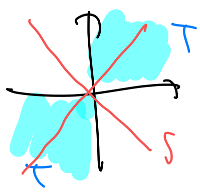
ii) $Q\cap S = Q$ $(\because Q\subset S$, 참$)$



$\therefore P\subset Q$

∴ 필요조건.

iii) $S\cap T = \{(a,b)\mid b=a\}$.



$\therefore P\subset S\cap T$

∴ 필요조건.