♦ 전체 : 선택형 13문항(59점), 서답형 8문항(41점)

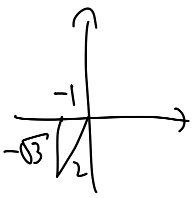
♦ 배점 : 문항 옆에 배점 표시

♦ 선택형은 답안 카드에 컴퓨터용 사인펜으로 정확히 마킹하고, 서답형은 반드시 검정볼펜으로 기입하시오.

선택형

1. $\sin\frac{4}{3}\pi$의 값을 구하면? [3.5점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



2. 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열의 제 5항을 구하면? [3.7점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

$a_5 = 3 + 4 \cdot 2$

$= 11$

3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)-\tan x\times\cancel{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}$을 간단히 하면?[4.0점]

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

① $-\frac{\pi}{2}$ ② -1 ③ 0 ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ 1

$\cos x - \cos x - \cancel{\tan x} \cdot \frac{1}{\cancel{\tan x}}$

$= 1 - 1 - 1$

$= -1$

4. 삼각형 ABC에서 $b=1$, $c=2$, $A=120°$일 때, a의 값을 구하면? [4.0점]

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ 5 ⑤ 7

코사인 법칙에 의해

$a^2 = 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120°$

$= 1 + 4 - 4 \cdot \frac{1}{2}$

$= 3$

$\therefore a = \sqrt{3}$ $(\because a > 0)$

5. 서로 다른 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열일 때, $\frac{1}{\log_2 b}(\log_2 a+\log_2 c)$의 값으로 옳은 것은? [4.3점]
(단, a, b, c는 1이 아닌 양수이다.)

① 0 ② 1 ③ $\log_2 3$ ④ 2 ⑤ $\log_2 5$

(준식) $= \frac{\log_2 ac}{\log_2 b}$

$= \log_b ac$

$= \log_b b^2$ $(\because b^2 = ac$, 등비중항$)$

$= 2$

6. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - n$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{3k-1}$의 값을 구하면? [4.3점]

① 250 ② 260 ③ 270 ④ 280 ⑤ 290

i) $a_1 = 1-1=0$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 2n-2 \ (n\ge 2)$

$2\cdot 1-2=0$ 이므로

$a_n = 2n-2 \ (n \ge 1)$

$\therefore a_{3k-1} = 2\cdot(3k-1)-2$

$= 6k-4$

ii) $\sum_{k=1}^{10} a_{3k-1}$

$= \sum_{k=1}^{10} (6k-4)$

$= 6\cdot\frac{10\cdot 11}{2} - 4\cdot 10$

$= 330 - 40$

$= 290$

7. 첫째항이 5인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합이 126일 때, a_5의 값을 구하면? [4.4점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$S_9 = \frac{9(5+5+8d)}{2} = 126$

$10+8d = 28$

$d = \frac{9}{4}$

$\therefore a_5 = 5 + 4\cdot\frac{9}{4} = 14$

8. 삼각형 ABC에서 변 AC의 길이를 25% 늘려서 삼각형 ABC'를 만들었다. 삼각형 ABC의 넓이가 12일 때, 삼각형 ABC'의 넓이를 구하면? [4.9점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

let $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc\sin A = 12$

$S_{\triangle ABC'} = \frac{1}{2} b\cdot\frac{125}{100}\cdot c\sin A$

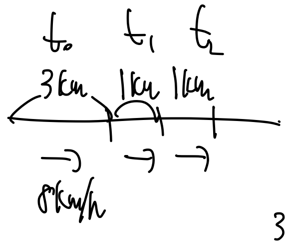
$= \cancel{12}^{3}\cdot\frac{\cancel{125}^{5}}{\cancel{100}_{4}}$

$= 15$

9. 태호는 전 구간이 10 km 인 이봉주 마라톤 대회에 참가하였다. 처음 3 km 까지는 8 km/h 의 속력으로 일정하게 달리다가 숨이 차서 이후 1 km 를 달리는데 걸린 시간이 바로 전 1 km 를 달리는데 걸린 시간보다 10%씩 증가하였다. 태호가 전 구간을 완주하는 데 걸린 시간은? (단, $\log_{1.1} 2 = 7$) [5.1점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

* 시간 $= \frac{거리}{속력}$



$t_0 = \frac{3}{8}$

$t_1 = \frac{3}{8}\times\frac{110}{100}$

$\vdots$

$t_7 = \frac{3}{8}\times\left(\frac{110}{100}\right)^7$

$\therefore S = \frac{3}{8} + \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{110}{100}(1.1^7-1)}{1.1-1}$

$= \frac{3}{8} + \frac{\frac{3}{8}\cdot 1.1}{0.1}$

$= 12\cdot\frac{3}{8}$

$= \frac{9}{4}$

10. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면 $8S_n = a_n{}^2 + 4a_n - 5$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 가 성립한다. a_6의 값을 구하면? [5.3점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

$8S_{n-1} = a_n^2 - 4a_n - 5$

i) $8S_1 = a_1^2 + 4a_1 - 5$

$0 = a_1^2 - 4a_1 - 5$

$a_1 = 5$ $(\because a_1 > 0)$

ii) $40 = a_2^2 - 4a_2 - 5$

$0 = a_2^2 - 4a_2 - 45$

$a_2 = 9$ $(\because a_2 > 0)$

iii) $84 = a_3^2 - 4a_3 - 5$

$0 = a_3^2 - 4a_3 - 117$

$a_3 = 13$ $(\because a_3 > 0)$

iv) $216 = a_4^2 - 4a_4 - 5$

$0 = a_4^2 - 4a_4 - 221$

$a_4 = 17$ $(\because a_4 > 0)$

v) $a_1 = 5$, $d = 4$

$\therefore a_6 = 5 + 5 \cdot 4 = 25$

11. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $(n+1)a_n + na_{n+1} = 2n(n+1)$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$을 만족한다. 이때, a_{2022}의 값을 구하면? [5.0점]

① 2021 ② 2022 ③ 2023 ④ 2024 ⑤ 2025

i) $\frac{a_n}{n} + \frac{a_{n+1}}{n+1} = 2$

let $\frac{a_n}{n} = b_n$, $b_1 = 1$

$b_n + b_{n+1} = 2$.

ii) $b_1 + b_2 = 2$

$b_2 = 1$

$\therefore b_n = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$

$\therefore \frac{a_{2022}}{2022} = 1$

$a_{2022} = 2022$

12. $\sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=2}^{12} k + \sum_{k=3}^{12} k + \cdots + \sum_{k=12}^{12} k$의 값을 구하면? [5.4점]

① 630 ② 635 ③ 640 ④ 645 ⑤ 650

$1 + 2 + 3 + \cdots + 12$

$2 + 3 + \cdots + 12$

$\vdots$

$+12$

$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 12 \cdot 12$

$= \sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} = 650$

13. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$일 때, $c\cos(A+B) = b\cos(A+C)$이면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가? (단, $b \neq c$) [5.1점]

① $\angle A = 90°$인 직각삼각형

② $\angle B = 90°$인 직각삼각형

③ $a = c$인 이등변삼각형

④ $a = b$인 이등변삼각형

⑤ 정삼각형

$A + B = \pi - C$, $A + C = \pi - B$

$c\cos(\pi - C) = b\cos(\pi - B)$

$c \cdot (-\cos C) = b(-\cos B)$

$c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\cancel{2}ab} = b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{\cancel{2}ac}$

$c^2(a^2 + \cancel{b^2} - c^2) = b^2(a^2 + \cancel{c^2} - b^2)$

$0 = a^2(b^2 - c^2) + (c^2 + b^2)(c^2 - b^2)$

$= (b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2)$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2$ $(\because b \neq c)$. $\angle A = 90°$인 직각삼각형

서답형

단답형 1. $\sum_{k=1}^{7} k - \sum_{t=1}^{5} t$를 구하시오. [3.0점]

$= \sum_{k=6}^{7} k$

$= 6+7$

$= 13$

단답형 2. 삼각형 ABC에 대하여 $a=3,\ b=4,\ \angle C = \frac{\pi}{3}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [4.0점]

$S = \frac{1}{2}ab\sin C$

$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 3\sqrt{3}$

수열의 귀납적 정의

단답형 3. $a_1 = 1,\ a_2 = 3$이고, $a_{n+1}{}^2 = a_n a_{n+2}$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 일반항을 구하시오. (단, n은 자연수) [4.0점]

$a = 1 \quad r = 3$

$a_n = 1\cdot 3^{n-1}$

$= 3^{n-1}$

단답형 4. $\sum_{k=1}^{50} [\log_2 k]$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.) [5.0점]

$[\log_2 1] = 0$

$[\log_2 2] = 1, \quad [\log_2 2^2] = 2.$

$[\log_2 2^3] = 3 \quad [\log_2 2^4] = 4$

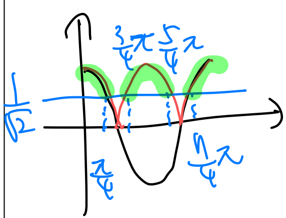
$[\log_2 2^5] = 5 \quad [\log_2 2^6] = 6.$

$\therefore \underbrace{0}_{2^1-1\text{개}} + \underbrace{1+1}_{2^2-2\text{개}} + 2 + \cdots + 5$

$= 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 8 + 4\cdot 16$
$+ 5\cdot 19 \qquad 50 - 2^5 + 1 = 19$

$= 2 + 8 + 24 + 64 + 95 = 143$

단답형 5. 부등식 $|\cos x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$를 만족하는 해를 구하시오. (단, $0 \le x < 2\pi$) [5.0점]



$0 \le x < \frac{\pi}{4}$

or

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$

or

$\frac{7}{4}\pi < x < 2\pi$

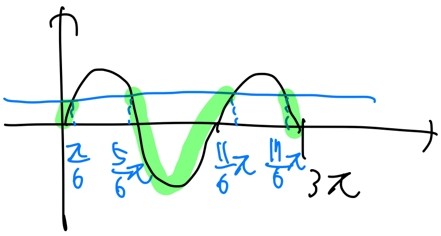
서술형 1. x에 대한 이차방정식 $4x^2+4\sqrt{2}x\sin\theta+\sin\theta=0$의 실근이 존재하지 않을 때, θ의 값의 범위를 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오. (단, $0\le\theta\le3\pi$) [6.0점]

$D/4=(2\sqrt{2}\sin\theta)^2-4\sin\theta$

$=8\sin^2\theta-4\sin\theta<0$

$4\sin\theta(2\sin\theta-1)<0$

$0<\sin\theta<\frac{1}{2}$



$\therefore$ $\boxed{0\le\theta<\frac{\pi}{6} \text{ or } \frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi \text{ or } \frac{17}{6}\pi<\theta\le3\pi}$

등호 유의.

서술형 2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음을 만족할 때, 물음에 답하시오. [7.0점]

<조 건>

(가) $a_2=8$

(나) $|a_4|=|a_8|$

(다) 공차 $d\neq0$

(1) 공차 d를 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오. [3.0점]

(2) 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n의 최댓값을 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오. [4.0점]

(1) i) $a+d=8$

ii) $a+3d=-(a+7d)$ ($\because d\neq0$)

$2a=-10d$

$a=-5d$

$\therefore -5d+d=8$

$-4d=8$

$\boxed{d=-2}$, $a=10$

(2) $a_n=10+(n-1)\cdot(-2)$

$=-2n+12\ge0$

$6\ge n$

$\therefore a_5>0,\ a_6=0,\ a_n<0$ 이므로

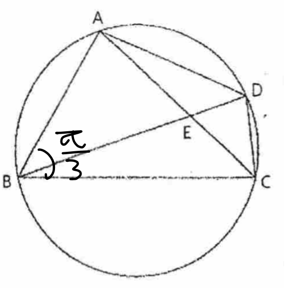
S_n의 최댓값은 $n=5$ or 6 일때

$S_{n\text{최대}}=\frac{5(10+2)}{2}$ or $\frac{6(10+0)}{2}$

$=\boxed{30}$

둘 중 하나만 적용해도 됨.

서술형 3. 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원 O에 내접하는 사각형 $ABCD$에 대하여 $\overline{AD} : \overline{DC} = 2 : 1$, $\angle ABC = \dfrac{\pi}{3}$를 만족한다고 한다. 물음에 답하시오. [7.0점]



(1) $\overline{AC}$를 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오. [3.0점]

(2) $\triangle ADC$의 넓이를 구하는 풀이과정과 답을 쓰시오. [4.0점]

(1) 사인 법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\cdot\sqrt{3}$$

$$\overline{AC} = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

(2) i) $\angle D = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ($\because$ 내접사각형)

ii) let $\overline{CD} = t$

$$3^2 = t^2 + (2t)^2 - 2\cdot t\cdot 2t\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$= 5t^2 + 2t^2$$

$$\therefore t = \frac{3}{\sqrt{7}} \quad (\because t>0)$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}\cdot t\cdot 2t\cdot \sin D$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{14}$$