선택형

1. 등식 $\int f(x)dx = 3x^2 + 2x + C$를 만족시키는 함수 $f(x)$는? [4.3점]

① $f(x) = 6x + 2$

② $f(x) = 6x - 2$

③ $f(x) = x^3 + x^2$

④ $f(x) = x^3 - x^2$

⑤ $f(x) = x^3 + x^2 + 2$

2. 함수 $f(x)$가 $f'(x) = 4x + 3$을 만족시키고 $f(1) = 6$일 때, $f(2)$의 값은? [4.5점]

① 1 ② 6 ③ 8 ④ 14 ⑤ 15

$f(x) = 2x^2 + 3x + C$ $(1, 6)$ 대입

$6 = 2 + 3 + C$

$C = 1$

$\therefore f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$f(2) = 8 + 6 + 1$

$= 15$

v 오타.

3. 직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치 x가 $x = 30t - \cancel{5t}$ $5t^2$일 때, $t = 2$에서의 점 P의 속도와 가속도의 합은? [4.4점]

① 0 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

$v = 30 - 10t \Rightarrow v(2) = 30 - 20 = 10$

$a = -10 \Rightarrow a(2) = -10$

$\therefore v(2) + a(2) = 10 - 10 = 0$

4. 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + 1$가 $x = 1$에서 극값을 가질 때, 상수 a의 값은? [4.6점]

① -9 ② -8 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2 - 12x + a$

$f'(1) = 3 - 12 + a = 0$

$a = 9$

5. 좌표가 1인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 속도가 $v(t) = 4 - 2t$일 때, $t = 4$에서 점 P의 위치는? [4.8점]

① 0 ② 1 ③ 4 ④ 8 ⑤ 9

$x = x(0) + \int_0^t (4 - 2t)\,dt$

$= 1 + 4t - t^2$

$x(4) = 1 + 16 - 16 = 1$

6. $f(x) = x^3 + 3x^2 + kx + 1$이 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 증가하도록 하는 상수 k의 값의 범위는? [4.8점]

① $k \le -3$ ② $k \ge 3$ ③ $k \le 3$
④ $k \ge -3$ ⑤ $-3 \le k \le 3$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + k \ge 0$

$f''(x) = 6x + 6$
$= 6(x+1)$

x		-1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘		↗

$f'(-1) = 3 - 6 + k \ge 0$

$k \ge 3$

7. $x \ge 0$일 때, 부등식 $x^3 - 3kx^2 + 4 \ge 0$이 항상 성립하도록 하는 양수 k의 최댓값은? [4.9점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{7}{2}$

let $f(x) = x^3 - 3kx^2 + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 6kx$
$= 3x(x - 2k)$

x		0		$2k$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$\therefore f(2k) = 8k^3 - 12k^3 + 4 \ge 0$

$-4(k-1)(k^2+k+1) \ge 0.$

$k - 1 \le 0 \quad (\because k^2+k+1 > 0)$

$k \le 1$

8. 지상 45 m 높이에서 40 m/s 의 속도로 지면과 수직으로 위로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 속도를 $v(t)$ m/s 라고 하면 $v(t) = 40 - 10t$ $(0 \le t \le 9)$인 관계가 성립한다고 한다. 이 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는? [4.9점]

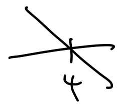
① 45 ② 90 ③ 105 ④ 205 ⑤ 305

i) $x = x_0 + \int_0^t (40 - 10t)\,dt$

$= 45 + 40t - 5t^2 = 0$

$-5(t^2 - 8t - 9) = 0$

$t = 9$ or $\cancel{-1}$ $(\because t > 0).$



ii) 움직인 거리 $= \int_0^9 |40 - 10t|\,dt$

$= \int_0^4 (40 - 10t)\,dt + \int_4^9 (-40 + 10t)\,dt$

$= \left[40t - 5t^2\right]_0^4 + \left[-40t + 5t^2\right]_4^9$

$= 200 - 80 + -540 + 405 - (-200 + 80)$
$= 105$

9. 함수 $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax - 1$의 그래프에서 극댓값과 극솟값이 모두 존재하도록 하는 정수 a의 값은? [5.2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2 + \overset{2}{4}x + a$

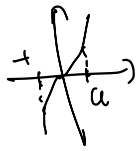
$D/4 = 4 - 3a > 0$

$\frac{4}{3} > a$

$\therefore a = 1 \quad (\because a$: 정수$)$

10. 곡선 $y = 2x^3$과 x축 및 두 직선 $x = -1$, $x = a$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{17}{2}$일 때, 양수 a의 값은? [5.3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$



$$\int_{-1}^{0} -2x^3\,dx + \int_0^a 2x^3\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^4}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^a$$

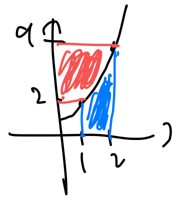
$$= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{a^4}{2}$$

$$= \frac{a^4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

$$a = 2.$$

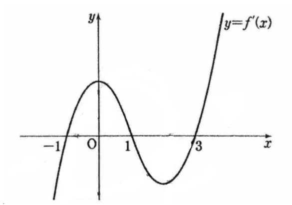
12. 함수 $f(x) = x^3 + 1$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\int_1^2 f(x)dx + \int_2^9 g(x)dx$의 값은? [5.6점]

① 9 ② 13 ③ 16 ④ 25 ⑤ 28



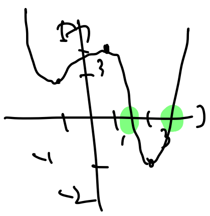
$S = 2 \times 9 - 1 \times 2 = 16$

11. 다음 그림은 다항함수 $y = f(x)$의 도함수 $y = f'(x)$의 그래프이다. $f(-1) = 3$, $f(1) = 5$, $f(3) = -2$일 때, 방정식 $f(x) - 4 = 0$의 실근의 개수는? [5.4점]



① 없다. ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

x		-1		1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		3		5		-2	



13. 직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서 위치는 각각 $f(t) = t^3 - 6t^2 - 36t + 3$, $g(t) = 2t^2 - 4t + 3$이다. $t > 0$에서 두 점 P, Q가 움직이는 방향이 서로 반대인 t의 값의 범위가 $t_1 < t < t_2$일 때, $t_2 - t_1$의 최댓값은? [5.6점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$f'(t) = 3t^2 - 12t - 36$
$= 3(t-6)(t+2)$

$g'(t) = 4t - 4$
$= 4(t-1)$

t		-2		6	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$

t		1	
$g'(t)$	$-$	0	$+$

$\therefore 1 < t < 6$ 에서 반대

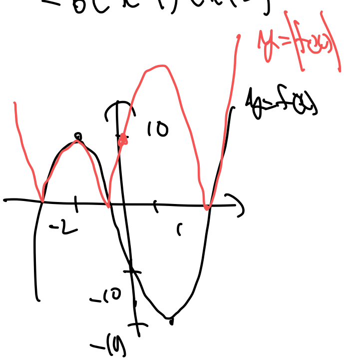
$\therefore t_2 - t_1 = 6 - 1 = 5$

14. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-10$에 대하여 $-2\le x\le t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 할 때, 정적분 $\int_{-2}^{1} g(t)\,dt$는? (단, $t\ge -2$) [5.7점]

① $\frac{23}{2}$ ② $\frac{69}{2}$ ③ 35 ④ $\frac{71}{2}$ ⑤ 70

i) $f'(x)=6x^2+6x-12$
$=6(x-1)(x+2)$

x		-2		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



$f(-2)=-16+12+24-10$
$=10$
$f(1)=2+3-12-10$
$=-19$

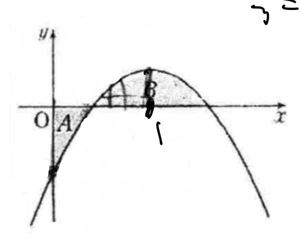
ii) $g(t)=\begin{cases}10 & (-2\le t\le 0)\\ -f(t) & (0\le t\le 1)\\ 19 & (1\le t\le \alpha)\end{cases}$

$\therefore \int_{-2}^{1} g(t)\,dt=\int_{-2}^{0}10\,dt+\int_0^1(-2x^3-3x^2+12x+10)\,dx$
$=0-(-20)+\left[-\frac{x^4}{2}-x^3+6x^2+10x\right]_0^1$
$=20+\left(-\frac{1}{2}-1+6+10-0\right)$
$=\frac{70}{2}-\frac{1}{2}$
$=\frac{69}{2}$

서답형

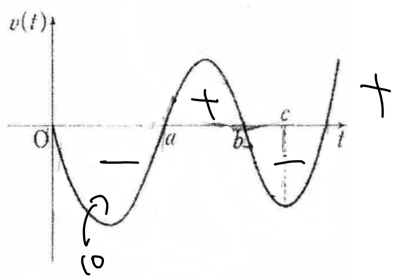
단답형 1. 다음 그림과 같이 곡선 $y=-2x^2+4x+p$와 x축과 y축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 A, B라고 할 때, $A:B=1:2$이다. 이때, 상수 p의 값을 구하여라. (단, $-2<p<0$) [4.5점]

축 $= -\frac{4}{-4}=1$



$\int_0^1(-2x^2+4x+p)\,dx=0$
$\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+px\right]_0^1=0$
$-\frac{2}{3}+2+p=0$
$\therefore p=-\frac{4}{3}$

단답형 2. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 다음과 같다. 점 P의 시각 $t=c$에서의 위치는 -4이고, 점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꿀 때까지 움직인 거리는 10이다. $\int_0^b v(t)\,dt-\int_b^c v(t)\,dt=0$일 때, 점 P가 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리를 구하시오. [5.5점]



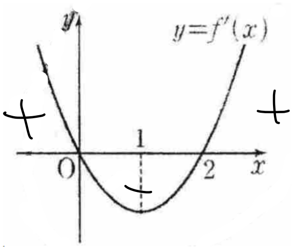
Let $\int_0^a(-f(x))\,dx=A$, $\int_a^b f(x)\,dx=B$, $\int_b^c(-f(x))\,dx=C$

i) $A+B=10$
ii) $-A+B-C=-4$
$-A+B=C-4$
iii) (조건) $=-A+B+C=0$
$2C-4=0$
$\therefore C=2$

iv) $\begin{cases}A+B=10\\ -A+B=-2\end{cases}$
$2B=8$
$B=4$

서술형 1. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$의 도함수 $y = f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 6일 때, 상수 a, b, c의 값과 극솟값을 구하시오. [4점]

$f(0)=6$



i) $f'(x) = dx(x-2) = dx^2 - 2dx$

$f(x) = \frac{d}{3}x^3 - dx^2 + 6 \quad (\because f(0)=6)$

$= x^3 + ax^2 + bx + c$

$\therefore d = 3, \ \boxed{a=-3, \ b=0, \ c=6}$

ii) 극솟값 $= f(2)$

$= 2^3 - 3\cdot 2^2 + 6$

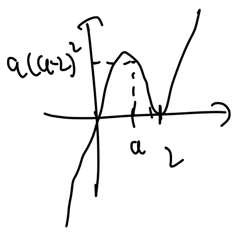
$= 2$

서술형 2. 곡선 $y = x(x-2)^2$ $(0 < x < 2)$ 위의 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 삼각형 OAH의 넓이가 최대일 때, 선분 OH의 길이와 그때의 넓이를 구하는 과정을 다음에 따라 구하시오. (단, O는 원점이다.) [5점]

(1) H의 좌표를 $(a, 0)$이라고 할 때, 삼각형 OAH의 넓이 $S(a)$를 a의 범위와 함께 a에 대한 식으로 나타내시오.

(2) 삼각형 OAH의 넓이 $S(a)$가 최대일 때, OH의 길이를 구하시오.

(3) 삼각형 OAH의 넓이의 최댓값을 구하시오.



(1) $S(a) = \frac{1}{2} a \cdot a(a-2)^2 \quad (0 < a < 2)$

$\boxed{S(a) = \frac{1}{2}a^2(a-2)^2 \quad (0<a<2)}$

(2) $S'(a) = 2a(a-2)^2 + a^2(a-2)$

$= a(2a^2 - 8a + 8 + a^2 - 2a)$

$= a(3a^2 - 10a + 8)$

a	0		$\frac{4}{3}$		2
$S'(a)$	0	+	0	−	0

$= a(3a-4)(a-2)$

$\therefore a = \frac{4}{3}$일 때 최대

$\boxed{\therefore \overline{OH} = \frac{4}{3}}$

(3) $S(a)_{최대} = S\left(\frac{4}{3}\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9}\cdot\frac{4}{9}$

$= \frac{32}{81}$

서술형 3. 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\int_1^x (x-t)f(t)dt = -2x^3 + ax^2 + 4x - 3$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [5점]

$$x\int_1^x f(t)dt - t\int_1^x f(t)dt = -2x^3+ax^2+4x-3$$

$$\int_1^x f(t)dt - \cancel{xf(x)} + \cancel{xf(x)} = -6x^2+2ax+4$$

$$f(x) = -12x+2a$$

$x=1$ 대입

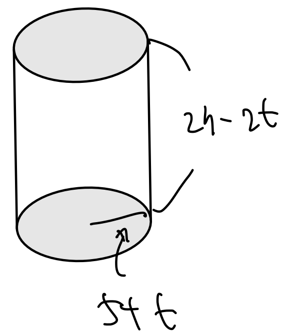
$$0 = -2+a+4-3$$

$$a=1$$

$\therefore f(x) = -12x+2$

$\therefore f(2) = -24+2 = -22$

서술형 4. 밑면의 반지름의 길이가 5 cm, 높이가 27 cm인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 매초 1 cm의 비율로 증가하고, 높이는 매초 2 cm의 비율로 감소한다고 한다. 이 원기둥의 부피가 처음으로 감소하는 시각이 n초와 $(n+1)$초 사이일 때, 자연수 n의 값을 구하시오. [6점]



$$V = \pi r^2 h$$

$$= \pi(5+t)^2(27-2t)$$

$$V' = \pi\left[2(5+t)(27-2t) - 2(5+t)^2\right]$$

$$= 2\pi(5+t)\left(27-2t-(5+t)\right)$$

$$= 2\pi(5+t)(22-3t)$$

t		-5		$\frac{22}{3}$	
V'	$-$	0	$+$	0	$-$
V	↘		↗		↘

$\therefore n < \frac{22}{3} < n+1$

$\therefore n = 7$