

2025-2026 学年上学期 “e 能杯” 高等数学期中考试

命题人：李小璐、甘书霖 2025 年 11 月 29 日

姓名：_____ 班级：_____ 学号：_____ 成绩：_____

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1+e^{-x}}}{e^x - e^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}}$, 求 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2 + \sin 1}{n^3 + 1} + \frac{2^2 + \sin 2}{n^3 + 2} + \dots + \frac{n^2 + \sin n}{n^3 + n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 设 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 + \arctan(xy)$ 所决定，则曲线 $y = y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $= \underline{\hspace{2cm}}$

5. 已知 $\begin{cases} x = \ln(1 + e^{2t}) \\ y = t - \arctan e^t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

6. $f(x) = e^{x^2} \sin x + \frac{a}{1+x^2}$, 若 $f'(0) + f''(0) + f'''(0) = 0$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

二、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{e^x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{x^a}{\sin x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处连续，则常数 a 的取值范围为（ ）

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

8. 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x+2)}$ 的渐近线有（ ）

- A. 1条 B. 2条 C. 3条 D. 4条

9. 设 $f(0) = 0$, $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充分条件为（ ）

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{\arcsin x^2}$ 存在 B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{\arcsin x - x}$ 存在

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ 存在 D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{1 - \cos x}$ 存在

10. 当 $x \rightarrow 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是（ ）

- A. 无穷小 B. 无穷大
C. 有界的，但不是无穷小 D. 无界的，但不是无穷大

11. 函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上第二类间断点的个数为（ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

12. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内有定义，且 $|f(x)| \leq 1 - \cos x$ ，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ ）

- A. 极限不存在 B. 极限存在，但不连续
C. 连续的，但不可导 D. 可导

三、计算题（共 25 分）

13. 求下列极限（每小题 5 分，共 15 分）

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x - 1) \arctan x \log_2(x+1)}{(\sin x - x) \cos x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc^2 x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - (1+x)^{\frac{e}{x}}}{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}$

14. 求下列函数的导数（每小题 5 分，共 10 分）

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{b-ac}} \ln \left(\frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b-ac}} \right) \quad (b > ac)$$

$$(2) y = a^{x^a} + x^{a^x} + x^{a^x} \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$$

16. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) + a \cos 2x + b}{x^2} = 2025$ ，求 a 和 b

17. 已知 $f(x)$ 二阶可导, $f(1) = 1$ ，并满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ，证明：

$$(1) f'(0) = 1$$

$$(2) \text{存在 } \zeta \in (0,1) \text{, 使得 } f''(\zeta) - 2f'(\zeta) = -2$$

3

四、计算题（第 15 题 7 分，第 16、17 题各 10 分，共 27 分）

15. 求曲线 $y = \frac{x^{x+1}}{(1+x)^x}$ ($x > 0$) 的渐近线方程