

2023-2024 “e能杯”计算机与通信工程学院、控制工程学院期中考试

命题人：控制工程学院 姚瑞祺

审题人：控制工程学院 陈嘉毅 计算机与通信工程学院 李正天

主办方：计算机与通信工程学院学习部 控制工程学院学习部 2023年11月19日

姓名：_____ 班级：_____ 学号：_____

考场：_____ 座位号：_____ 成绩：_____

一、填空题（每小题4分，共24分）

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{2}{n^2 + 2\pi} + \dots + \frac{n}{n^2 + n\pi} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $y = e^{\sin \frac{1}{x}}$, 求 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处导数存在, α, β 为常数, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \beta x}{f(x_0 - \beta x) - f(x_0 + \alpha x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. 设 $y = \sin^4 x - \cos^4 x$, 则 $y^{(n)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

6. 函数 $f(x)$ 在某邻域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数, 则任意 $x \in U(x_0)$, $f(x)$ 在点 x_0 处的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式为 (要求写出 0, 1, 2, n 阶导数和余项具体表达式) $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题（每小题4分，共24分，选项填到左侧方括号内）

7. [] 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$,
则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

- A. e^{-2} B. e^2 C. $e^{\frac{1}{2}}$ D. $e^{-\frac{1}{2}}$

8. [] 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处 _____

- A. 左右导数都存在 B. 左导数存在, 右导数不存在
C. 左导数不存在, 右导数存在 D. 左右导数都不存在

9. [] 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \cdot \ln(1+x^2)}{(e^x-1)(x-3)}$ 的第二类间断点个数为 _____

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. [] 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是 _____

- A. 无穷小 B. 无穷大
C. 有界但不是无穷小 D. 无界但不是无穷大

11. [] 当 $x \rightarrow 0$ 时, $a = \sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}$, $b = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$,
 $c = \sin x - x \cos x$ 均为 x 的无穷小, 则它们关于 x 的无穷小阶数从高到低的顺序为 _____

- A. $a c b$ B. $b c a$ C. $c a b$ D. $b a c$

12. [] 已知 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定,
则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{n[f(\frac{2}{n}) - 1]\}$ 的值为 _____

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

三、计算题

13. 计算下列极限 (每小题6分, 共18分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{(e^x - e^{-x}) \sin^2 x \cdot \arctan x}$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$$

(15.续)

14. 计算下列函数的导数 (每小题 5 分, 共 10 分)

$$(1) y = e^{\sin x^2} \cdot \arctan \sqrt{1-x^2}$$

$$(2) y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{ax} + x^{xa} \quad (a > 0)$$

四、解答题 (每小题 8 分, 共 24 分)

$$15. \text{求曲线 } \begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases} \quad (t \text{为参数}) \text{ 在对应 } t=1 \text{ 处的切线方程}$$

$$16. \text{已知 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - ax - b) = 2023 \text{ 确定常数 } a, b$$

17. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$,

$$\text{证明: } \exists \varepsilon, \eta \in (a, b) \text{ 使 } f'(\varepsilon) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta)$$