

# 2024-2025 “e 能杯” 高等数学期中考试

命题人：控制工程学院 姚瑞祺 审题人：“一站式”学生社区 李小璐

主办方：计算机与通信工程学院学习部 控制工程学院学习部 2024年11月30日

姓名：\_\_\_\_\_ 班级：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 成绩：\_\_\_\_\_

## 一、填空题（每小题4分，共24分）

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 + 6x - 9}{x^3 + 3x^2 - 3x - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 已知函数  $y = f[\ln \cos(e^{x^2+1})]$ , 求  $dy = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 设  $y = f(x)$  是由方程  $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$  确定的隐函数, 且满足  $f(1) = 1$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, 1)$  处的切线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 已知  $f(x) = x^2 \ln(1+2x)$ , 求  $f^{(18)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 已知方程  $\sqrt[x]{y} = \sqrt[3]{x}$  ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ) 确定函数  $y = f(x)$ , 则  $\frac{d^2y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## 二、选择题（每小题4分，共24分）

7. ( ) 设函数  $f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ \lambda, & x=0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 则  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$ .

- A.  $e^2$       B.  $e^{-2}$       C. 1      D. 0

8. ( ) 设  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  在  $x=0$  处  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

- A. 极限不存在      B. 极限存在但不连续  
C. 连续但不可导      D. 可导

9. ( ) 函数  $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \arctan \frac{x}{(1-x)(2+x)}$  的第一类间断点个数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

- A. 3      B. 2      C. 1      D. 0

10. ( ) 设函数  $y = f(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = 1+t^3 \\ y = e^{t^3} \end{cases}$  确定, 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ f\left(2 + \frac{2}{x}\right) - f(2) \right] = \underline{\hspace{2cm}}$

- A.  $2e$       B.  $\frac{4e}{3}$       C.  $\frac{2e}{3}$       D.  $\frac{e}{3}$

11. ( ) 当  $x \rightarrow 0$  时,  $a = \cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $b = \ln \cos x$ ,  $c = e^x - e^{\sin x}$  均为  $x$  的无穷小, 则它们关于  $x$  的无穷小阶数从高到低的顺序为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

- A. bca      B. bac      C. acb      D. cab

12. ( ) 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ , ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ) 若  $f'(x)$  在  $x=0$  连续,

则  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

- A.  $\alpha - \beta > 1$       B.  $0 < \alpha - \beta \leq 1$       C.  $\alpha - \beta > 2$       D.  $0 < \alpha - \beta \leq 2$

## 三、计算题

13. 求极限 (每小题6分, 共18分)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right)$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(15续)

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$

14. 求下列函数的导数 (每小题 5 分, 共 10 分)

(1)  $y = e^{\arctan \frac{1}{x}} \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x}$

(2)  $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} + a^{a^a} + x^{x^x} \quad (a > 0)$

四、计算题 (每小题 8 分, 共 24 分)

15. 求曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$  所有的渐近线.

16. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-3} \sin 3x + ax^{-2} + b) = 2024$ , 确定常数  $a, b$ .

17. 已知函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 证明:

(1) 存在  $\zeta \in (0,1)$ , 使得  $f(\zeta) = 1 - \zeta$ .

(2) 存在两个不同的点  $\eta, \zeta \in (0,1)$ , 使得  $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$ .