1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+e^{x}}-\sqrt{1+e^{-x}}}{e^{x}-e^{-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+e^{x}}-\sqrt{1+e^{-x}}}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+e^{x}}-\sqrt{1+e^{-x}})(\sqrt{1+e^{x}}+\sqrt{1+e^{-x}})}{x(\sqrt{1+e^{x}}+\sqrt{1+e^{-x}})}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+e^{0}}+\sqrt{1+e^{0}}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}$$

$$\overset{L'}{=}\frac{1}{4\sqrt{2}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

2. $$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)]$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)$$

$$dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)dx$$

3. 原式 $= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k} + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{n^3+k}\right)$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k} = \frac{1}{3}$$

$$|\sin k| \leqslant 1 \quad \therefore \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{n^3+k}\right| \leqslant \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \quad \therefore \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{n^3+k} = 0$$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$

4. $y(0) = 1$

令 $F(x,y) = y - 1 - \arctan(xy)$

$$y' = -\frac{F_x'}{F_y'}$$

$$= \frac{\frac{y}{1+(xy)^2}}{1 - \frac{x}{1+(xy)^2}}$$

$$= \frac{y}{1+(xy)^2 - x}$$

$$y'(0) = \frac{y(0)}{1} = 1$$

$\therefore\ y = x + 1$

5. $\frac{dx}{dt} = \frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}$, $\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{e^t}{1+e^{2t}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+e^{2t}-e^t}{2e^{2t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(2e^{2t}-e^t)\cdot 2e^{2t} - (1+e^{2t}-e^t)\cdot 4e^{2t}}{(2e^{2t})^2} = \frac{2e^{3t}-4e^{2t}}{4e^{4t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(e^t-2)(1+e^{2t})}{4e^{4t}}$$

6. $f(x)=(1+x^2+o(x^3))(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))+a(1-x^2+o(x^3))=x+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)+a-ax^2+o(x^3)$

$=a+x-ax^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$

$f'(0)=1\quad f''(0)=-2a\quad f'''(0)=5$

$1-2a+5=0\quad \therefore a=3$

7. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^a}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{a}{x}}=0$

要使$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^a}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^{a-1}=0$

则 $a-1>0$，即$a>1$

要使$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{a}{x}}=0$，则 $a>0$

$\therefore a>1\quad\therefore$ D

8. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{\pi}{4}$

$\therefore y=\frac{\pi}{4}$为曲线的水平渐近线.

由曲线方程知 $x=0$、$x=-1$、$x=-2$为间断点.

但只有 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)}=\infty$

$\therefore$ $x=0$ 为曲线的铅直渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)}}{x}$

$=0$

$\therefore$ 曲线没有斜渐近线 $\therefore$ B

9. $f(x)$在$x=0$处可导. $f'(0^+)$和$f'(0^-)$存在且相等.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{\arcsin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}$存在

$\because x\to 0$. $x^2\to 0^+$ $\therefore$说明$f'(0^+)$存在

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{\arcsin x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{\frac{x^3}{6}}=6\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)-f(0)}{x^3-0}$存在

$x\to 0$时. $x^3\to 0$ $\therefore$说明$f'(0)$存在

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[2\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x-0}-\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]$存在

但无法说明$f'(0)$存在

例如$f(x)=|x|$ 则原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x|-|x|}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$不存在. $\therefore$无法说明$f'(0)$存在

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{1-\cos x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{x^2}$存在. $\therefore$无法说明$f'(0)$存在. $\therefore B$

10. $\because\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 其中$\sin\frac{1}{x}\in[-1,1]$, $\frac{1}{x^2}\to\infty$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\neq 0$ $\therefore\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$不是无穷小.

若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}=\infty$, 则$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$为无穷大

但$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\in[-\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^2}]$

$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$可以变得~~无穷大~~任意大, 但不趋于无穷大

$\therefore\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$为无界的且不是无穷大. $\therefore D.$

11. 可能的间断点为$x=0$, $x=1$和$x=\pm\frac{\pi}{2}$

对于$x=0$: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$

$\therefore x=0$为第一类间断点.

对于$x=1$: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$

$\therefore x=1$为第二类间断点.

对于$x=\pm\frac{\pi}{2}$, $\tan x\to\infty$ 极限为无穷大

$\therefore x=\pm\frac{\pi}{2}$为第二类间断点.

$\therefore 3.$

12. $|f(x)| \leq 1-\cos x$，当$x \to 0$时，$1-\cos x \to 0$

根据夹逼定理．$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$f(x)$在$x=0$处极限存在

$|f(0)| \leq 1-\cos 0 = 0$　　$f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$　∴函数在$x=0$处连续.

要使函数在$x=0$处可导．须满足 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 存在

即 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{1-\cos x}{|x|}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2|x|} = 0$$

根据夹逼定理．得 $\lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{x}\right| = 0$

即 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$　∴$f(x)$在$x=0$处可导.

∴ D.

13.(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln 3\cdot x\cdot \frac{x}{\ln 2}}{-\frac{1}{6}x^3\cdot 1}=-\dfrac{6\ln 3}{\ln 2}=-6\log_2 3$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\csc^2 x\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1-\frac{1}{2}x^2)}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

(3) 对分母展开有

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^4).$

则 $\sqrt{\cos x}=(1-\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{x^2}{4}+o(x^4)$

$\sqrt[3]{\cos x}=(1-\frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{3}}=1-\frac{x^2}{6}+o(x^4).$

故 $\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}=-\frac{x^2}{12}+o(x^4).$

对分子展开：

$e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}=e^{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}-e^{e\cdot\frac{1}{x}\ln(1+x)}.$

$\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)$

考虑到分子实为 $e^{v(x)}$ 与 $e^{u(x)}$ 之差的形式 使用拉格朗日中值定理

得到 $\exists\xi\in(v(x),u(x))$，使分子 $=e^{\xi}(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x))$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}v(x)=e$ $\lim\limits_{x\to 0}u(x)=e$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}\xi=e$

那么 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}-e(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)))$

$=e\cdot\lim\limits_{x\to 0}((1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+o(x)^2)-(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)))$

$=e\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{8}x^2+o(x^2).$

综合分子分母 则 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^e\cdot e\cdot\frac{1}{8}x^2}{-\frac{x^2}{12}}=-\frac{3}{2}e^{e+1}$

14.(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{b-ac}}\left(\ln(\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac})-\ln(\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac})\right)$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{b-ac}}\cdot\left(\dfrac{a}{2(\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac})\sqrt{ax+b}}-\dfrac{a}{2(\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac})\sqrt{ax+b}}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{b-ac}}\cdot\dfrac{a(\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}-\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac})}{2\sqrt{ax+b}\,(ax+b-b+ac)}=\dfrac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}$

(2) 对 a^{x^x} 有. $(a^{x^x})'=a^{x^x}\cdot\ln a\cdot(x^x)'$ $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1).$

$(a^{x^x})'=a^{x^x}\cdot\ln a\cdot x^x(\ln x+1)$

对 x^{x^a} 有：$(x^{x^a})'=(e^{x^a\ln x})'=e^{x^a\ln x}(x^a\ln x)'=x^{x^a}(ax^{a-1}\ln x+x^{a-1})=x^{x^a+a-1}(a\ln x+1)$

对 x^{a^x} 有：$(x^{a^x})'=(e^{a^x\ln x})'=e^{a^x\ln x}(a^x\ln x)'=x^{a^x}(a^x\ln a\ln x+a^x\cdot\frac{1}{x})=x^{a^x}\cdot a^x(\ln a\ln x+\frac{1}{x})$

则原式 $=a^{x^x}\ln a\cdot x^x(\ln x+1)+x^{x^a+a-1}(a\ln x+1)+x^{a^x}a^x(\ln a\ln x+\frac{1}{x})$

15. $x\to+\infty$ 时. $y\to+\infty$. 则无水平渐近线

$x\to 0$ 时 不存在 $(1+x)^x=0$. 则无垂直渐近线

则对于斜渐近线 $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{-(1+x)\cdot\left(-\frac{x}{1+x}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x}{1+x}}=e^{-1}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}y-kx=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(\frac{x}{1+x}\right)^x-\frac{1}{e}\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x}-\frac{1}{e}\right]$$

考虑到 $x\to+\infty$ 时泰勒展开不方便计算. 取 $t=\frac{1}{x}$

$$b=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{-\frac{1}{t}}-e^{-1}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^{-\frac{1}{t}\ln(1+t)}-e^{-1}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^{-1+\frac{t}{2}+o(t)}-e^{-1}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^{-1}(e^{\frac{t}{2}+o(t)}-1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^{-1}(\frac{t}{2}+o(t))}{t}=\frac{1}{2e}$$

则斜渐近线为 $y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{2e}$

16. $$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+a\cos2x+b}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+o(x))+a(1-2x^2+o(x^2))+b}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{a+b}{x^2}+(1-2a)+\frac{o(x^2)}{x^2}$$

又 $\frac{o(x^2)}{x^2}\to0$. 则 $\frac{a+b}{x^2}$ 不发散当且仅当 $a+b=0$ 又 $1-2a=2025$ 联立解得 $\begin{cases}a=-1012\\ b=1012\end{cases}$

17. (1) 由极限条件 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$. 可知 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)-f(0)=0$

则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$

(2) 构造辅助函数 $g(x)=e^{-2x}[f'(x)-1]$ 则 $g'(x)=e^{-2x}[f''(x)-2f'(x)+2]$

那么证明存在两个不同的x 使$g(x)=0$即可 又 $g(0)=0$、考虑构造$\eta\in(0,1)$. 使 $f'(\eta)=1$. 那么由于 $f(0)=0$. $f(1)=1$. 根据拉格朗日中值定理, $\exists\eta$. 使 $f'(\eta)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$

则 $g(\eta)=0$. 根据罗尔定理. $\exists\xi\in(0,\eta)$. 使 $g'(\xi)=0$ 即 $f''(x)-2f'(x)=-2$