

# 2025-2026 学年上学期 “e 能杯” 高等数学期中考试

命题人：李小璐、甘书霖 2025 年 11 月 29 日

姓名：\_\_\_\_\_ 班级：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 成绩：\_\_\_\_\_

## 一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1+e^{-x}}}{e^x - e^{-x}} =$  \_\_\_\_\_

2.  $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}}$ ，求  $dy =$  \_\_\_\_\_

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^2 + \sin 1}{n^3 + 1} + \frac{2^2 + \sin 2}{n^3 + 2} + \dots + \frac{n^2 + \sin n}{n^3 + n} \right) =$  \_\_\_\_\_

4. 设  $y = y(x)$  由方程  $y = 1 + \arctan(xy)$  所决定，则曲线  $y = y(x)$  在  $x = 0$  处的切线方程为 = \_\_\_\_\_

5. 已知  $\begin{cases} x = \ln(1 + e^{2t}) \\ y = t - \arctan e^t \end{cases}$ ，求  $\frac{d^2 y}{dx^2} =$  \_\_\_\_\_

6.  $f(x) = e^{x^2} \sin x + \frac{a}{1+x^2}$ ，若  $f'(0) + f''(0) + f'''(0) = 0$ ，则  $a =$  \_\_\_\_\_

## 二、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

7.  $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{e^x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{x^a}{\sin x}, & x > 0 \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内处处连续，则常数  $a$  的取值范围为 ( )

A.  $(-\infty, 0)$  B.  $(0, +\infty)$  C.  $(0, 1)$  D.  $(1, +\infty)$

8. 曲线  $y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x+2)}$  的渐近线有 ( )

A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

9. 设  $f(0) = 0$ ， $f(x)$  在点  $x = 0$  可导的充分条件为 ( )

A.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{\arcsin x^2}$  存在

B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{\arcsin x - x}$  存在

C.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$  存在

D.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{1 - \cos x}$  存在

10. 当  $x \rightarrow 0$  时，变量  $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$  是 ( )

A. 无穷小

B. 无穷大

C. 有界的，但不是无穷小

D. 无界的，但不是无穷大

11. 函数  $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$  在  $[-\pi, \pi]$  上第二类间断点的个数为 ( )

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

12. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  的某领域内有定义，且  $|f(x)| \leq 1 - \cos x$ ，则  $f(x)$  在  $x = 0$  处 ( )

A. 极限不存在

B. 极限存在，但不连续

C. 连续的，但不可导

D. 可导

## 三、计算题（共 25 分）

13. 求下列极限（每小题 5 分，共 15 分）

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x - 1) \arctan x \log_2(x+1)}{(\sin x - x) \cos x}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc^2 x}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - (1+x)^{\frac{e}{x}}}{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}$

14. 求下列函数的导数（每小题 5 分，共 10 分）

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{b-ac}} \ln \left( \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b-ac}} \right) \quad (b > ac)$$

$$(2) y = a^{x^x} + x^{x^a} + x^{a^x} \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$$

$$16. \text{ 已知 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) + a \cos 2x + b}{x^2} = 2025, \text{ 求 } a \text{ 和 } b$$

$$17. \text{ 已知 } f(x) \text{ 二阶可导}, f(1) = 1, \text{ 并满足 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1, \text{ 证明:}$$

$$(1) f'(0) = 1$$

$$(2) \text{ 存在 } \zeta \in (0, 1), \text{ 使得 } f''(\zeta) - 2f'(\zeta) = -2$$

3

四、计算题（第 15 题 7 分，第 16、17 题各 10 分，共 27 分）

$$15. \text{ 求曲线 } y = \frac{x^{x+1}}{(1+x)^x} \quad (x > 0) \text{ 的渐近线方程}$$