

2024-2025 “e 能杯” 高等数学期中考试

命题人：控制工程学院 姚瑞祺 审题人：“一站式”学生社区 李小璐

主办方：计算机与通信工程学院学习部 控制工程学院学习部 2024 年 11 月 30 日

姓名：_____ 班级：_____ 学号：_____ 成绩：_____

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 + 6x - 9}{x^3 + 3x^2 - 3x - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 已知函数 $y = f\left[\ln \cos\left(e^{x^2+1}\right)\right]$ ，求 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $y = f(x)$ 是由方程 $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f(1) = 1$ ，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 _____.

5. 已知 $f(x) = x^2 \ln(1+2x)$ ，求 $f^{(18)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 已知方程 $\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x} (x > 0, y > 0)$ 确定函数 $y = f(x)$ ，则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

7. () 设函数 $f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ \lambda, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}.$

A. e^2 B. e^{-2} C. 1 D. 0

8. () 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 _____.

A. 极限不存在 B. 极限存在但不连续
C. 连续但不可导 D. 可导

9. () 函数 $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \arctan \frac{x}{(1-x)(2+x)}$ 的第一类间断点个数为 _____.

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

10. () 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1+t^3 \\ y = e^{t^3} \end{cases}$ 确定，则 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[f\left(2+\frac{2}{x}\right) - f(2) \right] = \underline{\hspace{2cm}}$

A. $2e$ B. $\frac{4e}{3}$ C. $\frac{2e}{3}$ D. $\frac{e}{3}$

11. () 当 $x \rightarrow 0$ 时， $a = \cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}$ ， $b = \ln \cos x$ ， $c = e^x - e^{\sin x}$ 均为 x 的无穷小，则它们关于 x 的无穷小阶数从高到低的顺序为 _____.

A. bca B. bac C. acb D. cab

12. () 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ， $(\alpha > 0, \beta > 0)$ 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，则 _____.

A. $\alpha - \beta > 1$ B. $0 < \alpha - \beta \leq 1$ C. $\alpha - \beta > 2$ D. $0 < \alpha - \beta \leq 2$

三、计算题

13. 求极限（每小题 6 分，共 18 分）

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right)$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(15续)

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$$

14. 求下列函数的导数 (每小题 5 分, 共 10 分)

$$(1) y = e^{\arctan \frac{1}{x}} \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x}$$

$$(2) y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} + a^{a^a} + x^{x^x} \quad (a > 0)$$

四、计算题 (每小题 8 分, 共 24 分)

15. 求曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 所有的渐近线.

16. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-3} \sin 3x + ax^{-2} + b) = 2024$, 确定常数 a, b .

17. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 证明:

(1) 存在 $\zeta \in (0, 1)$, 使得 $f(\zeta) = 1 - \zeta$.

(2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.