PHƯƠNG PHÁP VÀ GIẢI CHI TIẾT CÁC BÀI TOÁN TÍCH PHÂN

2X18 - PHUC NGUYEN HONG - HUS

Hanoi, 25th December 2025

Mục lục

1 CÁC CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM CẦN NHỚ

Trước khi đi vào giải chi tiết, ta cần nắm vững các công thức nguyên hàm mở rộng thường gặp trong các bài toán dưới đây:

1. **Dạng Logarit (hàm bậc nhất):**
$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

2. **Dạng Căn thức (Logarit):**
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C$$

3. **Dạng Phân thức hữu tỷ (Logarit):**
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

4. **Dạng Arctan:**
$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

5. **Dạng Arcsin:**
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

2 PHẦN 1: TÍCH PHÂN CƠ BẢN VÀ ĐỔI BIẾN SỐ

Một số công thức

Công thức lũy thừa: $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

Công thức Logarit: $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln|u + \sqrt{u^2+a}| + C$

Công thức hàm mũ: $\int e^u du = e^u + C$

Bài 1: Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$

Lời giải:

- Đặt $u = 5x - 2$.
- Lấy vi phân: $du = (5x-2)'dx = 5dx \Rightarrow dx = \frac{1}{5}du$.
- Thay vào tích phân:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{u} + C \end{aligned}$$

- Trả biến x:

$$I = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$$

Bài 2: Tính $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$

Lời giải:

- Nhận xét $x^4 = (x^2)^2$. Đặt $u = x^2$.
- Lấy vi phân: $du = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}du$.
- Thay vào tích phân:

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$$

- Áp dụng công thức $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln|u + \sqrt{u^2+a}|$:

$$I = \frac{1}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| + C$$

- Trả biến x:

$$I = \frac{1}{2} \ln\left|x^2 + \sqrt{x^4+1}\right| + C$$

Bài 3: Tính $I = \int x\sqrt{x-1}\,dx$

Lời giải:

- Đặt $u = x - 1 \Rightarrow x = u + 1$.
- Lấy vi phân: $dx = du$.
- Thay vào tích phân:

$$\begin{aligned} I &= \int (u+1)\sqrt{u}\,du = \int (u \cdot u^{1/2} + u^{1/2})du \\ &= \int (u^{3/2} + u^{1/2})du \\ &= \frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C \end{aligned}$$

- Trả biến x:

$$I = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Bài 4: Tính $I = \int x^2 e^{x^3} dx$

Lời giải:

- Đặt $u = x^3$.
- Lấy vi phân: $du = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}du$.
- Thay vào tích phân:

$$\begin{aligned} I &= \int e^u \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int e^u du \\ &= \frac{1}{3}e^u + C \end{aligned}$$

- Trả biến x:

$$I = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

3 PHẦN 2: TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Công thức Tích phân từng phần

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

Thứ tự ưu tiên đặt u: Nhất **Lô**, nhì **Đa**, tam **Lượng**, tứ **Mũ**.

Bài 5: Tính $I = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx$

Lời giải:

- Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2+1} \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

- Áp dụng công thức từng phần $I = uv - \int vdu$:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{x^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \\ &= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

- Tích phân sau cùng là dạng Logarit cơ bản:

$$I = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

Bài 6: Tính $I = \int x \ln x\,dx$

Lời giải:

- Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

- Áp dụng công thức:

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int xdx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

- Kết quả:

$$I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Bài 7: Tính $I = \int e^x \cos x \, dx$

Lời giải:

- **Lần 1:** Đặt $\begin{cases} u_1 = \cos x \\ dv_1 = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = -\sin x dx \\ v_1 = e^x \end{cases}$

$$I = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \quad (*)$$

- **Lần 2:** Tính $J = \int e^x \sin x dx$. Đặt $\begin{cases} u_2 = \sin x \\ dv_2 = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_2 = \cos x dx \\ v_2 = e^x \end{cases}$

$$J = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - I$$

- Thay J vào $(*)$:

$$\begin{aligned} I &= e^x \cos x + (e^x \sin x - I) \\ 2I &= e^x(\cos x + \sin x) \\ I &= \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C \end{aligned}$$

Bài 8: Tính $I = \int e^x \sin 2x \, dx$

Lời giải:

- **Lần 1:** $\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$I = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x dx \quad (1)$$

- **Lần 2:** Tính $J = \int e^x \cos 2x dx$. $\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$J = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx = e^x \cos 2x + 2I$$

- Thay J vào (1):

$$\begin{aligned} I &= e^x \sin 2x - 2(e^x \cos 2x + 2I) \\ I &= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4I \\ 5I &= e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) \end{aligned}$$

- Kết quả:

$$I = \frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) + C$$

4 PHẦN 3: TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ VÀ VÔ TỶ (TAM THỨC BẬC 2)

3 Công thức Nguyên hàm đặc biệt cần nhớ

1. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$
2. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$
3. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Phương pháp:

- Nếu mẫu số có $\Delta < 0$: Đưa về dạng bình phương + hằng số $\to$ **Arctan**.
- Nếu mẫu số có $\Delta > 0$: Đưa về dạng hiệu hai bình phương $\to$ **Logarit**.
- Nếu dưới dấu căn hệ số x^2 âm: Đưa về dạng $a^2 - u^2 \to$ **Arcsin**.

Bài 9: Tính $I = \int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$

Lời giải:

- Biến đổi mẫu số về dạng chính tắc:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 7 &= 2(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}) \\ &= 2\left[x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{56}{16}\right] \\ &= 2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right] \end{aligned}$$

- Thay vào tích phân:
$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-5/4)^2 + (\sqrt{31}/4)^2}$$

- Áp dụng công thức $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{4}}\arctan\left(\frac{x-5/4}{\sqrt{31}/4}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right) + C \end{aligned}$$

- Kết quả:
$$I = \frac{2}{\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right) + C$$

Bài 10: Tính $I = \int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx$

Lời giải:

- Đạo hàm mẫu số: $(x^2 - x - 1)' = 2x - 1$.
- Tách tử số để xuất hiện đạo hàm mẫu: $x - 1 = \frac{1}{2}(2x - 1) - \frac{1}{2}$.
- Tách thành 2 tích phân:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x-1}$$

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^2 - x - 1| - \frac{1}{2}J$$

- Tính $J = \int \frac{dx}{x^2-x-1}$:

$$x^2 - x - 1 = (x - 1/2)^2 - 5/4 = (x - 1/2)^2 - (\sqrt{5}/2)^2$$

$$J = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} \ln\left|\frac{x - 1/2 - \sqrt{5}/2}{x - 1/2 + \sqrt{5}/2}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2x - 1 - \sqrt{5}}{2x - 1 + \sqrt{5}}\right|$$

- Kết quả tổng hợp:

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^2 - x - 1| - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{2x - 1 - \sqrt{5}}{2x - 1 + \sqrt{5}}\right| + C$$

Bài 11: Tính $I = \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

Lời giải: Tách $x + 3 = \frac{1}{2}(2x + 2) + 2$:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$\boxed{I = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C}$$

Bài 12: Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

Lời giải:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{2} - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{3/2}}\right) + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + C}$$

5 PHẦN 4: CÁC PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ ĐẶC BIỆT (HÀM VÔ TỶ)

Phương pháp xử lý căn thức phức tạp

1. **Căn bậc cao:** Gặp $\sqrt[n]{f(x)} \to$ Đặt $t = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow t^n = f(x)$.
2. **Căn thức bậc 2 mẫu số (Vô tỉ):**
   - Dạng $\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$: Đặt $mx + n = \frac{1}{t}$.
   - Dạng $\sqrt{a^2 - x^2}$: Đặt $x = |a| \sin t$ (hoặc dùng công thức Arcsin).
   - Dạng $\sqrt{x^2 + a^2}$: Đặt $x = |a| \tan t$ (để dùng $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$).
3. **Lượng liên hợp:** Nếu mẫu số có dạng $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, có thể nhân liên hợp hoặc đặt ẩn phụ cho căn phức tạp hơn.

Bài 13: Tính $I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

Lời giải: Đặt $x + 1 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$. Khi $x = \frac{1}{t} - 1$.

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 2} = \frac{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}}{|t|}$$

(Xét $t > 0$ để đơn giản hoá).

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{2t^2-2t+1}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}}$$

Đưa tam thức về dạng chính tắc: $2t^2 - 2t + 1 = 2(t - 1/2)^2 + 1/2$.

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{2}} \right| + C$$

Thay $t = \frac{1}{x+1}$:

$$\boxed{I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}} \right| + C}$$

Bài 14: Tính $I = \int \sqrt{1 - x^2} dx$

Lời giải: Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$.

$$I = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$I = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + C}$$

Bài 15: Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$

Lời giải: Đặt $t = \sqrt[4]{2x-1} \Rightarrow t^4 = 2x - 1 \Rightarrow 4t^3dt = 2dx \Rightarrow dx = 2t^3dt$.

$$I = \int \frac{2t^3dt}{t^2 - t} = 2\int \frac{t^2}{t-1}dt = 2\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$I = 2\left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + C$$

Thay $t = \sqrt[4]{2x-1}$:

$$\boxed{I = \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 2\ln|\sqrt[4]{2x-1} - 1| + C}$$

Bài 16: Tính $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

Lời giải: Đặt $u = \sqrt[4]{x} \Rightarrow x = u^4 \Rightarrow dx = 4u^3du$.

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1+u}}{u^2} \cdot 4u^3du = 4\int u\sqrt[3]{1+u}du$$

Đặt tiếp $v = \sqrt[3]{1+u} \Rightarrow v^3 = 1 + u \Rightarrow u = v^3 - 1 \Rightarrow du = 3v^2dv$.

$$I = 4\int (v^3-1)v \cdot 3v^2dv = 12\int (v^6 - v^3)dv$$

$$I = 12\left(\frac{v^7}{7} - \frac{v^4}{4}\right) + C$$

Thay $v = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$:

$$\boxed{I = \frac{12}{7}(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})^7 - 3(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})^4 + C}$$

6 PHẦN 5: TÍCH PHÂN LƯỢNG GIÁC

Phương pháp Tích phân Lượng giác

- **Mũ lẻ** ($\sin^{2n+1} x, \cos^{2n+1} x$)**:** Tách ra 1 thừa số để đi cùng dx. Đặt ẩn phụ là hàm còn lại (Tách sin đặt cos, tách cos đặt sin).
- **Mũ chẵn** ($\sin^{2n} x, \cos^{2n} x$)**:** Sử dụng công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

- **Hàm Tan/Cot** ($\tan^n x$)**:** Tách $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ để xuất hiện đạo hàm $(\tan x)' = \sec^2 x$.
- **Dạng hữu tỉ** $\frac{1}{a \sin x + b \cos x + c}$**:** Đặt $t = \tan(x/2)$ (Công thức vạn năng).

Bài 17: Tính $I = \int \sin^{10} x \cos^3 x dx$

Lời giải:

$$I = \int \sin^{10} x(1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$.

$$I = \int u^{10}(1 - u^2)du = \frac{u^{11}}{11} - \frac{u^{13}}{13} + C$$

$$\boxed{I = \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C}$$

Bài 18: Tính $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$

Lời giải:

$$I = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) d(\tan x)$$

$$\boxed{I = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C}$$

Bài 19: Tính $I = \int \tan^4 x dx$

Lời giải: Ta có $\tan^4 x = \tan^2 x(\sec^2 x - 1) = \tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x$.

$$I = \int \tan^2 x d(\tan x) - \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$\boxed{I = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C}$$

Bài 20: Tính $I = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Lời giải: Đặt $t = \tan(x/2) \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2+2t+1-t^2} = \int \frac{2dt}{2t+2} = \int \frac{dt}{t+1}$$

$$\boxed{I = \ln\left|\tan\frac{x}{2} + 1\right| + C}$$

Bài 21: Tính $I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

Lời giải: Chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 x$:

$$I = \int \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x + \tan^2 x} = \int \frac{d(\tan x)}{1 + 2\tan^2 x}$$

Đặt $u = \tan x$:

$$I = \int \frac{du}{1+(\sqrt{2}u)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}u) + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + C}$$

Bài 22 (Nâng cao): Tính $I = \int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$

Lời giải: Tách $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+3}} + 3\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x+3}} = I_1 + 3I_2$. Đặt $u = \sqrt{2x+3} \Rightarrow u^2 = 2x+3 \Rightarrow x = \frac{u^2-3}{2}, dx = udu$. Tính I_1:

$$I_1 = \int \frac{udu}{\frac{u^2-3}{2}\cdot u} = 2\int \frac{du}{u^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right|$$

Tính I_2:

$$I_2 = \int \frac{udu}{\left(\frac{u^2-3}{2}\right)^2\cdot u} = 4\int \frac{du}{(u^2-3)^2}$$

Sử dụng phân tích: $\frac{1}{(u^2-3)^2} = \frac{1}{36}\left(\frac{u}{u^2-3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right|\right)'$ (hoặc dùng hệ số bất định). Kết hợp và trả về biến $u = \sqrt{2x+3}$ để có kết quả cuối cùng.