TỔNG HỢP LÝ THUYẾT CƠ HỌC

(Trọng tâm)

PHUC NGUYEN HONG - 2X18 - HUS

Mục lục

1 KHỐI TÂM (CENTER OF MASS)

1.1 Định nghĩa

Khối tâm (G) là điểm đại diện cho vị trí trung bình của sự phân bố khối lượng trong hệ.

- **Hệ chất điểm rời rạc:**
$$\vec{r}_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$$
Trong đó $M = \sum m_i$ là tổng khối lượng của hệ.

- **Vật rắn (phân bố liên tục):** Ta chia vật thành các phần tử khối lượng vô cùng nhỏ dm:
$$\vec{r}_G = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

1.2 Chuyển động của Khối tâm

Định lý: Khối tâm của hệ chuyển động như một chất điểm mang toàn bộ khối lượng của hệ (M) và chịu tác dụng của tổng các ngoại lực đặt lên hệ.

- **Vận tốc khối tâm:**
$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{v}_i = \frac{\vec{P}_{\text{hệ}}}{M}$$
$\Rightarrow$ Động lượng của hệ bằng động lượng của một chất điểm có khối lượng M đặt tại G: $\vec{P}_{\text{hệ}} = M\vec{v}_G$.

- **Phương trình động lực học (Định luật II Newton cho hệ):**
$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{1}{M}\sum \vec{F}_i = \frac{\sum \vec{F}_{\text{ngoại lực}}}{M}$$
$$\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_G}$$
Ý nghĩa: Khối tâm chuyển động như thể toàn bộ khối lượng của hệ tập trung tại đó và chịu tác dụng của tổng ngoại lực. (Nội lực không gây gia tốc cho khối tâm).

2 CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT CÓ KHỐI LƯỢNG BIẾN ĐỔI (TÊN LỬA)

Bài toán tên lửa là bài toán mà khối lượng M không hằng số (phụt khí ra sau). Ta không thể dùng $\vec{F} = m\vec{a}$ trực tiếp mà phải dùng dạng tổng quát $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

2.1 Thiết lập phương trình (Phương trình Meshchersky)

Xét hệ gồm (Tên lửa + Nhiên liệu) tại hai thời điểm:

- **Tại thời điểm** t**:** Tên lửa có khối lượng M vận tốc $\vec{v}$.

$$\vec{p}(t) = M\vec{v}$$

- **Tại thời điểm** $t + dt$**:** Tên lửa phụt ra một lượng khí có khối lượng dm ($dm > 0$, khối lượng tên lửa giảm đi một lượng $-dm$).
  - Khối lượng tên lửa còn lại: $M - dm$. Vận tốc: $\vec{v} + d\vec{v}$.
  - Khối lượng khí phụt ra: dm. Vận tốc khí đối với đất: $\vec{v}_{\text{khí}} = \vec{v} + \vec{u} + d\vec{v}$. (Với $\vec{u}$ là vận tốc phụt khí **đối với tên lửa**).

$$\vec{p}(t + dt) = (M - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + \vec{u} + d\vec{v})$$

Áp dụng định lý biến thiên động lượng $d\vec{p} = \vec{F}_{\text{ext}}dt$:

$$Md\vec{v} = \vec{u}dm + \vec{F}_{\text{ext}}dt$$

Chia hai vế cho dt (với $\frac{dm}{dt}$ là tốc độ tiêu thụ nhiên liệu):

$$\boxed{M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\frac{dm}{dt} + \vec{F}_{\text{ext}}}$$

Trong đó $\vec{F}_{\text{đẩy}} = \vec{u}\frac{dm}{dt}$ là lực đẩy phản lực (Thrust).

2.2 Công thức Tsiolkovsky (Trong không gian tự do)

Nếu bỏ qua ngoại lực ($\vec{F}_{\text{ext}} = 0$, không trọng lực, không cản), ta có:

$$d\vec{v} = \vec{u}\frac{dm}{M}$$

Lấy tích phân hai vế (với giả sử $\vec{u}$ ngược chiều bay và có độ lớn u không đổi):

$$\int_{v_0}^{v} dv = -u\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M}$$

$$\boxed{v = v_0 + u\ln\left(\frac{M_0}{M}\right)}$$

(M_0: khối lượng ban đầu, M: khối lượng còn lại, u: tốc độ phụt khí tương đối).

3 VA CHẠM (COLLISION)

Nguyên lý chung: Trong thời gian va chạm rất ngắn, nội lực rất lớn so với ngoại lực → Bỏ qua ngoại lực → **Động lượng bảo toàn**.

$$\sum \vec{p}_{\text{trước}} = \sum \vec{p}_{\text{sau}}$$

3.1 Va chạm đàn hồi (Elastic Collision)

Là va chạm mà cơ năng được bảo toàn (không sinh nhiệt, không biến dạng vĩnh cửu).

- Bảo toàn động lượng: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$
- Bảo toàn động năng: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1{v'}_1^2 + \frac{1}{2}m_2{v'}_2^2$

Trường hợp 1 chiều (xuyên tâm):

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}; \quad v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

3.2 Va chạm mềm (Inelastic Collision)

Là va chạm mà sau đó hai vật dính vào nhau và chuyển động cùng vận tốc $\vec{V}$. Cơ năng **không** bảo toàn (một phần động năng chuyển thành nhiệt năng Q).

- Bảo toàn động lượng:

$$\boxed{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V} \Rightarrow \vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

- Năng lượng toả nhiệt (Độ giảm động năng):

$$Q = K_{\text{trước}} - K_{\text{sau}} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2 \quad \text{(với 1 chiều)}$$

4 PHƯƠNG TRÌNH CỦA CHUYỂN ĐỘNG QUAY

Xét một vật rắn quay quanh một trục cố định (trục z) dưới tác dụng của ngoại lực.

4.1 Phương trình động lực học

Phương trình cơ bản cho chuyển động quay của vật rắn quanh trục cố định là:

$$\tau_z = I_z \gamma$$

Trong đó:

- $\tau_z = \sum(\vec{r} \times \vec{F})_z$: Tổng mô-men ngoại lực đối với trục quay z.
- $I_z = \int r^2 dm$: Mô-men quán tính của vật đối với trục z.
- $\gamma = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$: Gia tốc góc của vật.

4.2 Chứng minh

Xét vật rắn gồm hệ các chất điểm m_i. Với chất điểm thứ i cách trục quay một khoảng r_i, chịu tác dụng của lực tiếp tuyến F_{ti}. Theo định luật II Newton cho phương tiếp tuyến:

$$F_{ti} = m_i a_{ti} = m_i(r_i \gamma)$$

Nhân hai vế với cánh tay đòn r_i để ra mô-men lực:

$$\tau_i = r_i F_{ti} = m_i r_i^2 \gamma$$

Lấy tổng cho toàn bộ vật rắn (với γ giống nhau cho mọi điểm):

$$\tau_z = \sum \tau_i = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \gamma$$

Chuyển sang dạng tích phân cho vật rắn phân bố liên tục, ta có điều phải chứng minh: $\tau_z = I_z \gamma$.

5 ĐỊNH LÝ STEINER - HUYGENS (ĐỊNH LÝ TRỤC SONG SONG)

Định lý này giúp tính mô-men quán tính đối với một trục bất kỳ song song với trục đi qua khối tâm.

5.1 Phát biểu

Mô-men quán tính I của vật rắn đối với một trục bất kỳ bằng mô-men quán tính I_G đối với trục song song đi qua khối tâm cộng với tích của khối lượng vật M và bình phương khoảng cách d giữa hai trục.

$$\boxed{I = I_G + Md^2}$$

5.2 Chứng minh chi tiết

Gọi O là gốc tọa độ trên trục quay bất kỳ. G là khối tâm. Xét một phần tử khối lượng dm tại vị trí $\vec{r}$ so với O. Vị trí của dm so với khối tâm G là $\vec{s}$. Vị trí của G so với O là $\vec{d}$.

Theo quy tắc cộng vector: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{d}$. Bình phương vô hướng hai vế:

$$r^2 = (\vec{s} + \vec{d})^2 = s^2 + d^2 + 2\vec{s} \cdot \vec{d}$$

Mô-men quán tính đối với trục qua O:

$$I = \int r^2 dm = \int (s^2 + d^2 + 2\vec{s} \cdot \vec{d}) dm$$

Tách tích phân thành 3 phần:

$$I = \underbrace{\int s^2 dm}_{I_G} + \underbrace{d^2 \int dm}_{Md^2} + 2\vec{d} \cdot \underbrace{\int \vec{s} dm}_{\vec{0}}$$

Giải thích:

- $\int r'^2 dm = I_G$: Định nghĩa mô-men quán tính đối với trục qua khối tâm.
- $\int dm = M$: Tổng khối lượng vật.
- $\int \vec{s} dm = M\vec{s}_{G/G} = 0$: Vì $\vec{s}$ là vector vị trí tính từ khối tâm, nên tích phân (mô-men tĩnh) của các khối lượng đối với chính khối tâm bằng 0.

$\Rightarrow$ Ta thu được: $I = I_G + Md^2$ (đpcm).

6 ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN VÀ BẢO TOÀN MOMEN ĐỘNG LƯỢNG

6.1 Định lý biến thiên

Đạo hàm theo thời gian của vector mô-men động lượng $\vec{L}$ của hệ đối với một điểm cố định bằng tổng mô-men ngoại lực $\vec{M}$ tác dụng lên hệ đối với điểm đó.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{ext}}$$

Chứng minh: Mô-men động lượng của một chất điểm: $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$. Đạo hàm theo thời gian:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

- Số hạng 1: $\vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$ (tích có hướng 2 vector cùng phương).
- Số hạng 2: $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$ (định nghĩa mô-men lực).

Suy ra $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M}$. Lấy tổng cho cả hệ vật, ta có $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{ext}}$ (Mô-men nội lực triệt tiêu từng đôi một theo định luật III Newton).

6.2 Định luật bảo toàn

Nếu tổng mô-men ngoại lực tác dụng lên hệ bằng 0 ($\vec{M}_{\text{ext}} = 0$), thì vector mô-men động lượng của hệ được bảo toàn.

$$\vec{L} = \text{const}$$

Ứng dụng cho vật rắn quay quanh trục cố định ($L = I\omega$): Nếu $M_z = 0$ thì $I\omega = \text{const}$.

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

(Giải thích hiện tượng vận động viên trượt băng co tay/dang tay thay đổi vận tốc góc).

Chứng minh:

Xét chất điểm thứ i có khối lượng m_i, cách trục quay một khoảng r_i. Mô-men động lượng của chất điểm i đối với trục z là tích của động lượng $p_i = m_i v_i$ và cánh tay đòn r_i (khoảng cách từ trục đến vector vận tốc):

$$L_{zi} = r_i \cdot (m_i v_i)$$

Thay $v_i = r_i\omega$ vào:

$$L_{zi} = r_i \cdot m_i(r_i\omega) = m_i r_i^2 \omega$$

Lấy tổng cho toàn bộ vật rắn (với ω là như nhau tại mọi điểm):

$$L_z = \sum L_{zi} = \left(\sum m_i r_i^2\right)\omega$$

Nhận thấy $\sum m_i r_i^2 = I_z$ (Mô-men quán tính đối với trục z).

7 ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG ĐỐI VỚI VẬT RẮN

7.1 Biểu thức động năng vật rắn

Động năng của vật rắn trong chuyển động song phẳng (vừa quay vừa tịnh tiến):

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}Mv_G^2}_{\text{Tịnh tiến}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_G\omega^2}_{\text{Quay quanh G}}$$

Chứng minh động năng quay: Chia vật rắn thành hệ gồm n chất điểm vô cùng nhỏ. Xét chất điểm thứ i có khối lượng m_i và cách trục quay một khoảng r_i. Động năng của toàn bộ vật rắn bằng tổng động năng của các chất điểm thành phần:

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

Thay v_i vào biểu thức động năng:

$$K = \sum_i \frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$$

Vì vật rắn là tuyệt đối cứng, vận tốc góc ω là như nhau tại mọi điểm, ta đưa các hằng số ra ngoài dấu tổng:

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

Thay vào ta thu được điều phải chứng minh:

$$K_{quay} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

7.2 Định lý biến thiên động năng

Độ biến thiên động năng của vật rắn bằng tổng công của các ngoại lực tác dụng lên vật.

$$\boxed{\Delta K = K_2 - K_1 = A_{\text{ext}}}$$

7.3 Chứng minh (Xét trường hợp quay quanh trục cố định)

Xét vật rắn quay quanh trục cố định z dưới tác dụng của mô-men lực τ_z. Công vi phân thực hiện khi vật quay một góc $d\theta$:

$$dA = \tau_z d\theta$$

Sử dụng phương trình động lực học: $\tau_z = I\gamma = I\frac{d\omega}{dt}$.

$$dA = I\frac{d\omega}{dt}d\theta = I\frac{d\theta}{dt}d\omega = I\omega d\omega$$

Tích phân hai vế từ trạng thái (1) đến (2):

$$A = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \Delta K$$

(đpcm).

8 VECTƠ GIA TỐC TRONG CHUYỂN ĐỘNG CONG

Trong chuyển động cong phẳng, vectơ gia tốc $\vec{a}$ được phân tích thành hai thành phần: gia tốc tiếp tuyến ($\vec{a}_t$) và gia tốc pháp tuyến ($\vec{a}_n$).

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

8.1 Gia tốc tiếp tuyến ($\vec{a}_t$)

- **Biểu thức:**

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$$

  (Về vectơ: $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$, với $\vec{\tau}$ là vectơ đơn vị tiếp tuyến với quỹ đạo).

- **Đặc điểm:** Phương trùng với tiếp tuyến quỹ đạo, chiều cùng chiều chuyển động (nếu v tăng) hoặc ngược chiều (nếu v giảm).
- **Vai trò:** Đặc trưng cho sự biến đổi về **độ lớn** của vận tốc.
  - $a_t \neq 0$: Chuyển động có vận tốc thay đổi (nhanh dần hoặc chậm dần).
  - $a_t = 0$: Chuyển động đều.

8.2 Gia tốc pháp tuyến ($\vec{a}_n$)

- **Biểu thức:**

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\theta}}$$

  (Về vectơ: $\vec{a}_n = \frac{v^2}{\theta}\vec{n}$, với $\vec{n}$ là vectơ đơn vị pháp tuyến hướng vào tâm cong, θ là bán kính cong).

- **Đặc điểm:** Phương vuông góc với tiếp tuyến, chiều luôn hướng về phía lõm của quỹ đạo (tâm cong).
- **Vai trò:** Đặc trưng cho sự biến đổi về **phương** của vận tốc.
  - $a_n \neq 0$: Quỹ đạo cong.
  - $a_n = 0$: Quỹ đạo thẳng ($\theta \to \infty$).

9 TRƯỜNG LỰC THẾ & BẢO TOÀN CƠ NĂNG

9.1 Lực thế (Conservative Force)

Định nghĩa: Lực thế là lực mà công của nó thực hiện khi vật di chuyển giữa hai điểm bất kỳ chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đầu và điểm cuối, **không phụ thuộc vào dạng đường đi**, điển hình như trọng lực, lực đàn hồi, lực tĩnh điện. .

$$A_{12} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{(Không phụ thuộc đường đi)}$$

Hệ quả: Công của lực thế trên một đường cong kín bằng 0.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

9.2 Chứng minh lực hấp dẫn là lực thế

Xét trường hấp dẫn đều (trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$) gần mặt đất. Chọn trục Oz hướng thẳng đứng lên trên.

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

Công của trọng lực khi vật di chuyển từ vị trí có độ cao z_1 đến z_2 theo một đường cong bất kỳ C:

$$A = \int_C \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_C (-mg\vec{k}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$A = \int_{z_1}^{z_2} -mg\,dz = -mg(z_2 - z_1) = mgz_1 - mgz_2$$

Kết luận: Công chỉ phụ thuộc vào độ cao đầu z_1 và độ cao cuối z_2, không phụ thuộc hình dạng đường đi. Vậy trọng lực là lực thế.

9.3 Định luật bảo toàn cơ năng trong trường thế

Phát biểu: Khi một chất điểm chuyển động trong trường lực thế (và không chịu tác dụng của lực không thế như ma sát, lực cản...), thì cơ năng của hệ được bảo toàn.

Chứng minh: Theo định lý biến thiên động năng: Độ biến thiên động năng bằng tổng công ngoại lực.

$$\Delta K = K_2 - K_1 = A_{12}$$

Vì lực tác dụng là lực thế, công của lực thế bằng độ giảm thế năng:

$$A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Suy ra:

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

$$\Leftrightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\Leftrightarrow E_1 = E_2 = \text{const}$$

Vậy cơ năng $E = K + U$ được bảo toàn.

10 VẬN TỐC VŨ TRỤ

Vận tốc vũ trụ là các ngưỡng vận tốc cần thiết để một vật thể có thể thực hiện các loại chuyển động quỹ đạo khác nhau so với Trái Đất hoặc Mặt Trời.

10.1 Vận tốc vũ trụ cấp I (v_I)

Là vận tốc tối thiểu cần thiết để đưa một vật trở thành vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất (quỹ đạo tròn ngay sát mặt đất).

$$F_{hd} = F_{ht} \Rightarrow G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$$
$$v_I = \sqrt{gR} \approx 7,9\,\text{km/s}$$

10.2 Vận tốc vũ trụ cấp II (v_{II})

Là vận tốc tối thiểu cần thiết để một vật từ mặt đất có thể thoát khỏi trường hấp dẫn của Trái Đất (đi ra vô cực). Áp dụng bảo toàn cơ năng tại mặt đất và tại vô cực ($v_\infty = 0$):

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$
$$v_{II} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_I \approx 11,2\,\text{km/s}$$

10.3 Vận tốc vũ trụ cấp III (v_{III}):

- **Định nghĩa:** Là vận tốc tối thiểu cần truyền cho một vật phóng từ mặt đất để nó thoát ra khỏi trường hấp dẫn của Mặt Trời và bay ra khỏi Hệ Mặt Trời.
- **Cơ sở tính toán:** Để thoát khỏi Hệ Mặt Trời tại vị trí quỹ đạo Trái Đất, vật cần có vận tốc thoát so với Mặt Trời là:

  $$v_S = \sqrt{2}v_{TD} \approx \sqrt{2} \cdot 29,8 \approx 42,1\,\text{km/s}$$

  (Trong đó $v_{TD} \approx 29,8$ km/s là vận tốc quay của Trái Đất quanh Mặt Trời).

  Lợi dụng chuyển động của Trái Đất, ta phóng vật cùng chiều quay của Trái Đất. Khi đó, vận tốc cần thiết của vật so với Trái Đất khi đã ra xa vô cực (v_∞) phải bù đắp được phần còn thiếu:

  $$v_\infty = v_S - v_{TD} = 42,1 - 29,8 = 12,3\,\text{km/s}$$

  Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng tại mặt đất (với vận tốc phóng v_3) và tại vô cực (với vận tốc dư v_∞):

  $$\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

  Với $\frac{GM}{R} = \frac{v_{II}^2}{2}$ (thế năng hấp dẫn của Trái Đất), ta có:

  $$v_3^2 = v_{II}^2 + v_\infty^2$$

- **Kết quả:**

$$\boxed{v_{III} = \sqrt{(v_{II})^2 + (v_\infty)^2} \approx 16,7\,\text{km/s}}$$