TÀI LIỆU TỔNG HỢP GIẢI TÍCH PHY1107 - TÍCH PHÂN

PHUC NGUYEN HONG - HUS

Hanoi, January 2026

Mục lục

I TÍCH PHÂN ĐỊNH NGHĨA **1**

1 PHƯƠNG PHÁP TỔNG RIEMANN **1**

2 GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP (ĐỊNH NGHĨA) **2**

II CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN **5**

3 CÁC CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM CẦN NHỚ **5**

4 TÍCH PHÂN CƠ BẢN VÀ ĐỔI BIẾN SỐ **6**

5 TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN **8**

6 TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ VÀ VÔ TỶ **10**

7 CÁC PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ ĐẶC BIỆT **12**

8 TÍCH PHÂN LƯỢNG GIÁC **14**

III TÍCH PHÂN SUY RỘNG **16**

9 LÝ THUYẾT VÀ CÁC ĐỊNH LÝ SO SÁNH **16**

9.1 Định nghĩa Tích phân suy rộng Loại I (Cận vô hạn) 16

9.2 Các tiêu chuẩn hội tụ (Dành cho hàm dương) 16

9.2.1 Định lý so sánh 1 (So sánh chuẩn) 16

9.2.2 Định lý so sánh 2 (So sánh giới hạn) 16

9.2.3 Tích phân Dirichlet (Làm chuẩn so sánh) 16

10 TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI I **17**

11 TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI II **19**

11.1 Định nghĩa và Cách tính 19

11.2 Tiêu chuẩn hội tụ 19

11.3 Bài tập 20

12 XÉT SỰ HỘI TỤ CỦA CÁC TÍCH PHÂN **22**

Phần I
TÍCH PHÂN ĐỊNH NGHĨA

1 PHƯƠNG PHÁP TỔNG RIEMANN

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ bằng định nghĩa, ta thực hiện các bước:

1. Chia đoạn $[a, b]$ thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
2. Độ dài mỗi đoạn con: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
3. Chọn điểm mẫu ξ_i trong mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ (thường chọn đầu mút phải: $\xi_i = x_i = a+i\Delta x$).
4. Lập tổng Riemann: $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x$.
5. Tính giới hạn: $I = \lim_{n\to\infty} S_n$.

2 GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP (ĐỊNH NGHĨA)

Bài 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

Lời giải:

- Xét hàm số $f(x) = \cos x$ liên tục trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$, do đó $f(x)$ khả tích trên đoạn này.
- Chia đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$ thành n đoạn bằng nhau. Độ dài mỗi đoạn:
$$\Delta x = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{n} = \frac{\pi}{2n}$$
- Chọn điểm mẫu tại đầu mút phải của mỗi đoạn: $\xi_i = x_i = 0 + i \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{i\pi}{2n}$.
- Lập tổng Riemann:
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{i\pi}{2n}\right) \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} \cos\left(i \cdot \frac{\pi}{2n}\right)$$
- **Tính tổng lượng giác:** Đặt $\alpha = \frac{\pi}{2n}$. Ta cần tính $S = \sum_{i=1}^{n} \cos(i\alpha)$. Nhân cả hai vế với $2\sin(\frac{\alpha}{2})$:
$$2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot S = \sum_{i=1}^{n} 2\cos(i\alpha)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
Áp dụng công thức $2\cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$:
$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\sin\left((i+\frac{1}{2})\alpha\right) - \sin\left((i-\frac{1}{2})\alpha\right)\right]$$
Đây là tổng sai phân (triệt tiêu liên tiếp), chỉ còn lại số hạng cuối và đầu:
$$2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot S = \sin\left((n+\frac{1}{2})\alpha\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\Rightarrow S = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2n}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}$$
- Thay S vào biểu thức của S_n:
$$S_n = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \quad \text{(Khai triển } \sin(A+B)\text{)}$$
Tuy nhiên, ta có thể biến đổi gọn hơn:
$$S_n = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{2\cos(\frac{n+1}{2}\alpha)\sin(\frac{n\alpha}{2})}{2\sin(\frac{\alpha}{2})} = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\cos(\frac{n+1}{4n}\pi)\sin(\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4n})}$$
- **Tính giới hạn:**
$$I = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin(\frac{\pi}{4n})} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4n}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
Sử dụng giới hạn cơ bản $\lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} = 1$:
$$I = 1 \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

Kết quả: $I = 1$.

Bài 2: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$

Lời giải:

- Hàm số $f(x) = \sin x$ liên tục và khả tích trên $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- Phân hoạch và chọn điểm mẫu tương tự Bài 1: $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$, $x_i = \frac{i\pi}{2n}$.
- Tổng Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i\pi}{2n}\right) \cdot \frac{\pi}{2n}$$

- **Tính tổng:** Xét $S = \sum_{i=1}^{n} \sin(ix)$ với $x = \frac{\pi}{2n}$. Nhân với $2\sin(\frac{x}{2})$:

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot S = \sum_{i=1}^{n} 2\sin(ix)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\cos\left((i - \frac{1}{2})x\right) - \cos\left((i + \frac{1}{2})x\right)\right]$$

  Khai triển tổng sai phân:

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot S = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left((n + \frac{1}{2})x\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{4n}) - \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n})}{2\sin(\frac{\pi}{4n})}$$

- **Tính giới hạn:**

$$I = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin(\frac{\pi}{4n})} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}\right)\right)\right]$$

  Khi $n \to \infty$:

  - $\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin(\frac{\pi}{4n})} \to 1$
  - $\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) \to \cos(0) = 1$
  - $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}\right) \to \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$I = 1 \cdot (1 - 0) = 1$$

Kết quả: $I = 1$.

Bài 3: Tính $I = \int_1^2 x^2\,dx$

Lời giải:

- Hàm số $f(x) = x^2$ liên tục trên $[1, 2]$.
- Chia đoạn $[1, 2]$ thành n phần bằng nhau.

$$\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

- Chọn điểm mẫu $x_i = 1 + i \cdot \Delta x = 1 + \frac{i}{n}$.
- Tổng Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

- Khai triển hằng đẳng thức:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{2i}{n} + \frac{i^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

- Áp dụng các công thức tổng đại số:
  - $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$
  - $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
  - $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[n + \frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$S_n = 1 + \frac{n+1}{n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$S_n = 1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

- **Tính giới hạn:**

$$I = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 + 1 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

$$I = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Kết quả: $I = \frac{7}{3}$.

Phần II
CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN

3 CÁC CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM CẦN NHỚ

Trước khi đi vào giải chi tiết, ta cần nắm vững các công thức nguyên hàm mở rộng thường gặp trong các bài toán dưới đây:

1. **Dạng Logarit (hàm bậc nhất):**

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

2. **Dạng Căn thức (Logarit):**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C$$

3. **Dạng Phân thức hữu tỷ (Logarit):**

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

4. **Dạng Arctan:**

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

5. **Dạng Arcsin:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

4 TÍCH PHÂN CƠ BẢN VÀ ĐỔI BIẾN SỐ

Một số công thức

Công thức lũy thừa: $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
Công thức Logarit: $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln|u + \sqrt{u^2+a}| + C$
Công thức hàm mũ: $\int e^u du = e^u + C$

Bài 1: Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$
Lời giải:

- Đặt $u = 5x - 2$.
- Lấy vi phân: $du = (5x-2)'dx = 5dx \Rightarrow dx = \frac{1}{5}du$.
- Thay vào tích phân:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{5} du = \frac{1}{5} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{u} + C \end{aligned}$$

- Trả biến x:

$$I = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$$

Bài 2: Tính $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$
Lời giải:

- Nhận xét $x^4 = (x^2)^2$. Đặt $u = x^2$.
- Lấy vi phân: $du = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}du$.
- Thay vào tích phân:

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$$

- Áp dụng công thức $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln|u + \sqrt{u^2+a}|$:

$$I = \frac{1}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| + C$$

- Trả biến x:

$$I = \frac{1}{2} \ln\left|x^2 + \sqrt{x^4+1}\right| + C$$

Bài 3: Tính $I = \int x\sqrt{x-1}\,dx$
Lời giải:

- Đặt $u = x - 1 \Rightarrow x = u + 1$.
- Lấy vi phân: $dx = du$.
- Thay vào tích phân:

$$\begin{aligned} I &= \int (u+1)\sqrt{u}\,du = \int (u \cdot u^{1/2} + u^{1/2})du \\ &= \int (u^{3/2} + u^{1/2})du \\ &= \frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C \end{aligned}$$

- Trả biến x:

$$I = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Bài 4: Tính $I = \int x^2 e^{x^3}dx$
Lời giải:

- Đặt $u = x^3$.
- Lấy vi phân: $du = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}du$.
- Thay vào tích phân:

$$\begin{aligned} I &= \int e^u \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int e^u du \\ &= \frac{1}{3}e^u + C \end{aligned}$$

- Trả biến x:

$$I = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

5 TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Công thức Tích phân từng phần

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

Thứ tự ưu tiên đặt u: Nhất **Lô**, nhì **Đa**, tam **Lượng**, tứ **Mũ**.

Bài 5: Tính $I = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$

Lời giải:

- Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2+1} \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

- Áp dụng công thức từng phần $I = uv - \int vdu$:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{x^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ &= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

- Tích phân sau cùng là dạng Logarit cơ bản:

$$I = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

Bài 6: Tính $I = \int x \ln x \, dx$

Lời giải:

- Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

- Áp dụng công thức:

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

- Kết quả:

$$I = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Bài 7: Tính $I = \int e^x \cos x \, dx$

Lời giải:

- **Lần 1:** Đặt $\begin{cases} u_1 = \cos x \\ dv_1 = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = -\sin x dx \\ v_1 = e^x \end{cases}$

$$I = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \quad (*)$$

- **Lần 2:** Tính $J = \int e^x \sin x dx$. Đặt $\begin{cases} u_2 = \sin x \\ dv_2 = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_2 = \cos x dx \\ v_2 = e^x \end{cases}$

$$J = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - I$$

- Thay J vào $(*)$:

$$\begin{aligned} I &= e^x \cos x + (e^x \sin x - I) \\ 2I &= e^x(\cos x + \sin x) \\ I &= \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C \end{aligned}$$

Bài 8: Tính $I = \int e^x \sin 2x \, dx$

Lời giải:

- **Lần 1:** $\begin{cases} u = \sin 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\cos 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$I = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x dx \quad (1)$$

- **Lần 2:** Tính $J = \int e^x \cos 2x dx$. $\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$J = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx = e^x \cos 2x + 2I$$

- Thay J vào (1):

$$\begin{aligned} I &= e^x \sin 2x - 2(e^x \cos 2x + 2I) \\ I &= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4I \\ 5I &= e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) \end{aligned}$$

- Kết quả:

$$I = \frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) + C$$

6 TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ VÀ VÔ TỶ

3 Công thức Nguyên hàm đặc biệt cần nhớ

1. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$
2. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$
3. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Phương pháp:

- Nếu mẫu số có $\Delta < 0$: Đưa về dạng bình phương + hằng số → **Arctan**.
- Nếu mẫu số có $\Delta > 0$: Đưa về dạng hiệu hai bình phương → **Logarit**.
- Nếu dưới dấu căn hệ số x^2 âm: Đưa về dạng $a^2 - u^2$ → **Arcsin**.

Bài 9: Tính $I = \int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$

Lời giải:

- Biến đổi mẫu số về dạng chính tắc:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 7 &= 2(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}) \\ &= 2\left[x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{56}{16}\right] \\ &= 2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}\right] \end{aligned}$$

- Thay vào tích phân:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-5/4)^2 + (\sqrt{31}/4)^2}$$

- Áp dụng công thức $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{4}}\arctan\left(\frac{x-5/4}{\sqrt{31}/4}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right) + C \end{aligned}$$

- Kết quả:

$$I = \frac{2}{\sqrt{31}}\arctan\left(\frac{4x-5}{\sqrt{31}}\right) + C$$

Bài 10: Tính $I = \int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx$

Lời giải:

- Đạo hàm mẫu số: $(x^2 - x - 1)' = 2x - 1$.
- Tách tử số để xuất hiện đạo hàm mẫu: $x - 1 = \frac{1}{2}(2x-1) - \frac{1}{2}$.
- Tách thành 2 tích phân:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x-1}$$

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^2-x-1| - \frac{1}{2}J$$

- Tính $J = \int \frac{dx}{x^2-x-1}$:

$$x^2 - x - 1 = (x-1/2)^2 - 5/4 = (x-1/2)^2 - (\sqrt{5}/2)^2$$

$$J = \frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}\ln\left|\frac{x-1/2-\sqrt{5}/2}{x-1/2+\sqrt{5}/2}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|$$

- Kết quả tổng hợp:

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^2-x-1| - \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right| + C$$

Bài 11: Tính $I = \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

Lời giải: Tách $x + 3 = \frac{1}{2}(2x+2) + 2$:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$\boxed{I = \sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C}$$

Bài 12: Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

Lời giải:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{2}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{3/2}}\right) + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + C}$$

7 CÁC PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ ĐẶC BIỆT

Phương pháp xử lý căn thức phức tạp

1. **Căn bậc cao:** Gặp $\sqrt[n]{f(x)} \to$ Đặt $t = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow t^n = f(x)$.
2. **Căn thức bậc 2 mẫu số (Vô tỉ):**
   - Dạng $\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$: Đặt $mx + n = \frac{1}{t}$.
   - Dạng $\sqrt{a^2 - x^2}$: Đặt $x = |a| \sin t$ (hoặc dùng công thức Arcsin).
   - Dạng $\sqrt{x^2 + a^2}$: Đặt $x = |a| \tan t$ (để dùng $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$).
3. **Lượng liên hợp:** Nếu mẫu số có dạng $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, có thể nhân liên hợp hoặc đặt ẩn phụ cho căn phức tạp hơn.

Bài 13: Tính $I = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$
Lời giải: Đặt $x + 1 = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$. Khi $x = \frac{1}{t} - 1$.

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 2} = \frac{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}}{|t|}$$

(Xét $t > 0$ để đơn giản hoá).

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{2t^2-2t+1}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2t^2 - 2t + 1}}$$

Đưa tam thức về dạng chính tắc: $2t^2 - 2t + 1 = 2(t - 1/2)^2 + 1/2$.

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{2}} \right| + C$$

Thay $t = \frac{1}{x+1}$:

$$\boxed{I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}} \right| + C}$$

Bài 14: Tính $I = \int \sqrt{1 - x^2} dx$
Lời giải: Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$.

$$I = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$I = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C}$$

Bài 15: Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$

Lời giải: Đặt $t = \sqrt[4]{2x-1} \Rightarrow t^4 = 2x - 1 \Rightarrow 4t^3dt = 2dx \Rightarrow dx = 2t^3dt$.

$$I = \int \frac{2t^3dt}{t^2 - t} = 2\int \frac{t^2}{t-1}dt = 2\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$I = 2\left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + C$$

Thay $t = \sqrt[4]{2x-1}$:

$$\boxed{I = \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 2\ln|\sqrt[4]{2x-1} - 1| + C}$$

Bài 16: Tính $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

Lời giải: Đặt $u = \sqrt[4]{x} \Rightarrow x = u^4 \Rightarrow dx = 4u^3du$.

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1+u}}{u^2} \cdot 4u^3du = 4\int u\sqrt[3]{1+u}du$$

Đặt tiếp $v = \sqrt[3]{1+u} \Rightarrow v^3 = 1 + u \Rightarrow u = v^3 - 1 \Rightarrow du = 3v^2dv$.

$$I = 4\int (v^3 - 1)v \cdot 3v^2dv = 12\int (v^6 - v^3)dv$$

$$I = 12\left(\frac{v^7}{7} - \frac{v^4}{4}\right) + C$$

Thay $v = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$:

$$\boxed{I = \frac{12}{7}(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})^7 - 3(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})^4 + C}$$

8 TÍCH PHÂN LƯỢNG GIÁC

Phương pháp Tích phân Lượng giác

- **Mũ lẻ ($\sin^{2n+1} x, \cos^{2n+1} x$):** Tách ra 1 thừa số để đi cùng dx. Đặt ẩn phụ là hàm còn lại (Tách sin đặt cos, tách cos đặt sin).
- **Mũ chẵn ($\sin^{2n} x, \cos^{2n} x$):** Sử dụng công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

- **Hàm Tan/Cot ($\tan^n x$):** Tách $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ để xuất hiện đạo hàm $(\tan x)' = \sec^2 x$.
- **Dạng hữu tỉ $\frac{1}{a\sin x + b\cos x + c}$:** Đặt $t = \tan(x/2)$ (Công thức vạn năng).

Bài 17: Tính $I = \int \sin^{10} x \cos^3 x dx$

Lời giải:

$$I = \int \sin^{10} x(1-\sin^2 x)\cos x dx$$

Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$.

$$I = \int u^{10}(1-u^2)du = \frac{u^{11}}{11} - \frac{u^{13}}{13} + C$$

$$\boxed{I = \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C}$$

Bài 18: Tính $I = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$

Lời giải:

$$I = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1+\tan^2 x) d(\tan x)$$

$$\boxed{I = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C}$$

Bài 19: Tính $I = \int \tan^4 x dx$

Lời giải: Ta có $\tan^4 x = \tan^2 x(\sec^2 x - 1) = \tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x$.

$$I = \int \tan^2 x d(\tan x) - \int (\sec^2 x - 1)dx$$

$$\boxed{I = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C}$$

Bài 20: Tính $I = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

Lời giải: Đặt $t = \tan(x/2) \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2+2t+1-t^2} = \int \frac{2dt}{2t+2} = \int \frac{dt}{t+1}$$

$$\boxed{I = \ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| + C}$$

Bài 21: Tính $I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

Lời giải: Chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 x$:

$$I = \int \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x + \tan^2 x} = \int \frac{d(\tan x)}{1 + 2\tan^2 x}$$

Đặt $u = \tan x$:

$$I = \int \frac{du}{1 + (\sqrt{2}u)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}u) + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + C}$$

Bài 22 (Nâng cao): Tính $I = \int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}} dx$

Lời giải: Tách $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+3}} + 3\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x+3}} = I_1 + 3I_2$. Đặt $u = \sqrt{2x+3} \Rightarrow u^2 = 2x+3$
$\Rightarrow x = \frac{u^2-3}{2}, dx = udu.$
Tính I_1:

$$I_1 = \int \frac{udu}{\frac{u^2-3}{2}\cdot u} = 2\int \frac{du}{u^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right|$$

Tính I_2:

$$I_2 = \int \frac{udu}{\left(\frac{u^2-3}{2}\right)^2 \cdot u} = 4\int \frac{du}{(u^2-3)^2}$$

Sử dụng phân tích: $\frac{1}{(u^2-3)^2} = \frac{1}{36}\left(\frac{u}{u^2-3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right|\right)'$ (hoặc dùng hệ số bất định). Kết hợp và trả về biến $u = \sqrt{2x+3}$ để có kết quả cuối cùng.

Phần III
TÍCH PHÂN SUY RỘNG

9 LÝ THUYẾT VÀ CÁC ĐỊNH LÝ SO SÁNH

Trước khi đi vào giải chi tiết, ta cần nắm vững các định nghĩa và định lý so sánh thường gặp để xét sự hội tụ của tích phân suy rộng (TPSR).

9.1 Định nghĩa Tích phân suy rộng Loại I (Cận vô hạn)

Cho hàm $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, M]$.

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)dx$$

- Nếu giới hạn tồn tại và hữu hạn: Tích phân **hội tụ**.
- Nếu giới hạn là ∞ hoặc không tồn tại: Tích phân **phân kỳ**.

9.2 Các tiêu chuẩn hội tụ (Dành cho hàm dương)

Giả sử $f(x) \geq 0$ và $g(x) \geq 0$ trên $[a, +\infty)$.

9.2.1 Định lý so sánh 1 (So sánh chuẩn)

- Nếu $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [a, +\infty)$:
  - $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.
  - $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

9.2.2 Định lý so sánh 2 (So sánh giới hạn)

Tính giới hạn $k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

- Nếu $0 < k < +\infty$: Hai tích phân $\int f(x)dx$ và $\int g(x)dx$ **cùng hội tụ** hoặc **cùng phân kỳ**.
- Nếu $k = 0$ và $\int g(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $k = +\infty$ và $\int g(x)dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int f(x)dx$ phân kỳ.

9.2.3 Tích phân Dirichlet (Làm chuẩn so sánh)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

- Hội tụ khi $\alpha > 1$.
- Phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

10 TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI I

Tính các tích phân suy rộng loại I sau:

Câu 1: $I = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

Lời giải:

- Xét tích phân trên đoạn hữu hạn: $I_M = \int_0^M xe^{-x}dx$.
- Sử dụng phương pháp tích phân từng phần: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$
- Áp dụng công thức:

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int (-e^{-x})dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$$

- Thế cận từ 0 đến M:

$$I_M = \left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^M = \left(-e^{-M}(M+1)\right) - \left(-e^0(1)\right) = 1 - \frac{M+1}{e^M}$$

- Tính giới hạn khi $M \to +\infty$:

$$I = \lim_{M\to+\infty}\left(1 - \frac{M+1}{e^M}\right)$$

  Dùng quy tắc L'Hopital cho $\lim \frac{M+1}{e^M} = \lim \frac{1}{e^M} = 0$.

- **Kết quả:** $I = 1$.

Câu 2: $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$

Lời giải:

- Xét tích phân: $H = \int_1^M \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$.
- Đổi biến hoặc vi phân trực tiếp: Ta có $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow \frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Thay vào tích phân:

$$H = -\int_1^M \cos\left(\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^M$$

$$H = -\sin\left(\frac{1}{M}\right) + \sin(1)$$

- Tính giới hạn:

$$I = \lim_{M\to+\infty}\left[\sin(1) - \sin\left(\frac{1}{M}\right)\right]$$

  Vì $M \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{M} \to 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{M}\right) \to 0$.

- **Kết quả:** $I = \sin(1)$.

Câu 3: $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$

Lời giải:

- Ta có: $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$.
- Biến đổi tích phân trên đoạn $[2, M]$:

$$H = \int_2^M \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \int_2^M (\ln x)^{-2} d(\ln x)$$

$$H = \left[\frac{(\ln x)^{-1}}{-1}\right]_2^M = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^M = -\frac{1}{\ln M} + \frac{1}{\ln 2}$$

- Tính giới hạn:

$$I = \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln M}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

- **Kết quả:** $I = \frac{1}{\ln 2}$.

Câu 4: $I = \int_0^{+\infty} \sin(ax)dx$

Lời giải:

- Xét tích phân trên $[0, M]$:

$$H = \int_0^M \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)\Big|_0^M = -\frac{1}{a}\cos(aM) + \frac{1}{a}$$

- Tính giới hạn:

$$I = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\cos(aM)\right]$$

- Vì $\cos(aM)$ dao động tuần hoàn trong đoạn $[-1, 1]$ khi $M \to \infty$, nên giới hạn này **không tồn tại**.
- **Kết luận:** Tích phân phân kỳ.

11 TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI II

Tích phân suy rộng loại 2 xuất hiện khi ta tính $\int_a^b f(x)dx$ nhưng hàm $f(x)$ **không bị chặn** (tiến tới vô cùng) tại một số điểm thuộc đoạn $[a,b]$.

11.1 Định nghĩa và Cách tính

- **Điểm bất thường tại a:** Nếu $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

- **Điểm bất thường tại b:** Nếu $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

- **Điểm bất thường tại $c \in (a,b)$:** Ta tách thành 2 tích phân:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(Tích phân ban đầu hội tụ khi và chỉ khi cả 2 tích phân thành phần cùng hội tụ).

11.2 Tiêu chuẩn hội tụ

Tương tự loại 1, ta sử dụng tích phân mẫu để so sánh.

Tích phân Dirichlet Loại 2 (Lưu ý ngược với Loại 1)

Xét tích phân có điểm bất thường tại a:

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

- **Hội tụ** khi $\alpha < 1$.
- **Phân kỳ** khi $\alpha \geq 1$.

Định lý so sánh (tương đương vô cùng bé):

Khi $x \to a$ (điểm bất thường), nếu $f(x) \sim \frac{C}{(x-a)^\alpha}$ thì:

- Nếu $\alpha < 1 \Rightarrow \int f(x)dx$ hội tụ.
- Nếu $\alpha \geq 1 \Rightarrow \int f(x)dx$ phân kỳ.

11.3 Bài tập

Bài 1: Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
Lời giải:

- Hàm số không xác định tại $x = 1$ (cận trên).
- Theo định nghĩa:
$$I = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} (1-x)^{-1/2} dx$$
- Tính nguyên hàm: $\int (1-x)^{-1/2} dx = -2(1-x)^{1/2}$.
$$I = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\epsilon}$$
$$I = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(-2\sqrt{1-(1-\epsilon)} - (-2\sqrt{1})\right) = \lim_{\epsilon \to 0^+} (-2\sqrt{\epsilon} + 2)$$
$$I = 0 + 2 = 2$$
- **Kết luận:** Tích phân hội tụ về 2.

Bài 2: Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{x}$
Lời giải:

- Hàm số không xác định tại $x = 0$.
- Ta có:
$$I = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \to 0^+} [\ln |x|]_\epsilon^1$$
$$I = \lim_{\epsilon \to 0^+} (\ln 1 - \ln \epsilon) = 0 - (-\infty) = +\infty$$
- **Kết luận:** Tích phân phân kỳ (Đúng với quy tắc $\alpha = 1$).

Bài 3: Xét sự hội tụ của $I = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$
Lời giải:

- Điểm bất thường tại $x = 0$.
- Khi $x \to 0$, ta có $\cos x \to 1$. Do đó:
$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$
- Xét tích phân mẫu $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$: Có $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ nên hội tụ.
- **Kết luận:** Theo tiêu chuẩn so sánh, I **hội tụ**.

Bài 4 (Cẩn thận bẫy): Tính $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$
Lời giải:

- Hàm số gián đoạn tại $x = 0 \in (-1, 1)$. Ta phải tách tích phân:

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = I_1 + I_2$$

- Xét $I_2 = \int_0^1 x^{-2}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\epsilon}\right) = +\infty$.
- Vì I_2 phân kỳ nên I phân kỳ.
- *Lưu ý:* Nếu tính nhầm nguyên hàm $-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$ là **SAI** vì hàm dương không thể có diện tích âm.

Bài 5: Tính $I = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
Lời giải:

- **Nhận diện:** Hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ xác định trên $[0, 3)$ nhưng tiến tới $+\infty$ khi $x \to 3^-$. Đây là điểm bất thường.
- Theo định nghĩa:

$$I = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{3-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{3^2 - x^2}}$$

- Sử dụng công thức $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin(\frac{u}{a})$ với $a = 3$:

$$I = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{3-\epsilon}$$

- Thế cận và tính giới hạn:

$$I = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\arcsin\left(\frac{3-\epsilon}{3}\right) - \arcsin(0)\right)$$

$$I = \arcsin(1) - 0 = \frac{\pi}{2}$$

- **Kết luận:** Tích phân hội tụ và có giá trị bằng $\frac{\pi}{2}$.

12 XÉT SỰ HỘI TỤ CỦA CÁC TÍCH PHÂN

Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

Câu 1: $I = \int_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

Lời giải:

- Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}du.$
- Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow u = 1$; $x \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty.$
- Tích phân trở thành:
$$I = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} e^{-u}du$$
- Tính tích phân trên $[1, M]$:
$$H = \frac{1}{2}\left[-e^{-u}\right]_1^M = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e^M} + \frac{1}{e}\right)$$
- Lấy giới hạn: $\lim_{M\to+\infty} H = \frac{1}{2e}$.
- **Kết luận:** Giới hạn tồn tại hữu hạn nên tích phân **hội tụ**.

Câu 2: $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx$

Lời giải:

- **Cách 1: Tính trực tiếp** Sử dụng tích phân từng phần: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^{-3}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{2x^2} \end{cases}$
$$\int_1^M \frac{\ln x}{x^3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2}\bigg|_1^M + \frac{1}{2}\int_1^M \frac{dx}{x^3}$$
$$= -\frac{\ln M}{2M^2} - \frac{1}{4x^2}\bigg|_1^M = -\frac{\ln M}{2M^2} - \frac{1}{4M^2} + \frac{1}{4}$$
Khi $M \to +\infty$, các số hạng chứa M dưới mẫu tiến về 0. Kết quả là 1/4.

- **Cách 2: Sử dụng định lý so sánh chuẩn**
Chọn hàm so sánh $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln x/x^3}{1/x^2} = \frac{\ln x}{x} < 1, \forall x > 1$$
Bên cạnh đó, f(x) và g(x) dương, $\forall x > 1$ và $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ.
Nên I=$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

Câu 3: $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha\sqrt{1+x}}$

Lời giải:

- Đặt $f(x) = \frac{1}{x^\alpha\sqrt{1+x}}$.
- Chọn hàm so sánh $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}$ (Vì khi $x \to \infty$, $\sqrt{1+x} \sim \sqrt{x} = x^{1/2}$).
- Xét giới hạn tỉ số:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+1/2}}{x^\alpha\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{1+x}} = 1$$

- Theo định lý so sánh giới hạn, hai tích phân cùng tính chất.
- Để I hội tụ thì $\int g(x)dx$ phải hội tụ $\Leftrightarrow$ số mũ $p > 1$.

$$\alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$$

- **Kết luận:** Tích phân hội tụ khi $\alpha > 0.5$.

Câu 4: $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$

Lời giải:

- Đặt $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.
- Chọn hàm so sánh $g(x) = \frac{1}{x}$.
- Ta có bất đẳng thức: Với mọi $x > 2$, $x > \ln x \Rightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$.
- Tích phân $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ phân kỳ (do $\alpha = 1$).
- Theo định lý so sánh chuẩn ($f(x) > g(x)$), I cũng **phân kỳ**.