Câu 1. Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-4x^2}{3x^2-8x+4};\qquad \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{x-1}$$

Câu 2. Tìm k để hàm số sau liên tục tại $x=-1$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-k-3 & \text{khi } x<-1 \\ k+4 & \text{khi } x=-1 \\ k^2+4x-4 & \text{khi } x>-1 \end{cases}$$

Câu 3.
a/ Cho hàm số $y(x)$ được xác định bởi biểu thức: $y^4+xy=4$. Tính đạo hàm cả 2 vế của biểu thức theo x. Rồi từ đó suy ra đạo hàm $y'(x)$.

b/ Viết khai triển Maclaurin đến bậc n của hàm $y=xe^x$.

Câu 4. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{5x+\ln x}}\quad,\quad J=\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

Câu 5.
a/ Cho $F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$. Tìm $F'(1)$ và $F''(1)$.

b/ Tính diện tích miền phẳng được giới hạn bởi các đường sau: $y=x^2$ (với $x\geq 0$); $y=0$; $x=1$.

Đề thi gồm 1 trang. Sinh viên không được sử dụng tài liệu.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm./.

GỢI Ý LỜI GIẢI

Câu 1.

a) $L_1 = \lim_{x\to 2} \frac{2x^3-4x^2}{3x^2-8x+4}$ (Dạng $\frac{0}{0}$)

- Tử số: $2x^3 - 4x^2 = 2x^2(x-2)$
- Mẫu số: $3x^2 - 8x + 4 = (x-2)(3x-2)$

$$\Rightarrow L_1 = \lim_{x\to 2} \frac{2x^2(x-2)}{(x-2)(3x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x^2}{3x-2} = \frac{2(2^2)}{3(2)-2} = \frac{8}{4} = \mathbf{2}$$

b) $L_2 = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2}{x-1}$ (Dạng $\frac{0}{0}$)

Áp dụng quy tắc L'Hospital:

$$L_2 = \lim_{x\to 1} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \frac{2\ln 1}{1} = \mathbf{0}$$

Câu 2. Điều kiện liên tục tại $x = -1$: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$.

- $f(-1) = k + 4$
- $\lim_{x\to -1^-}(x^2 - k - 3) = (-1)^2 - k - 3 = -k - 2$
- $\lim_{x\to -1^+}(k^2 + 4x - 4) = k^2 - 4 - 4 = k^2 - 8$

Giải hệ phương trình:

$$-k - 2 = k + 4 \Rightarrow 2k = -6 \Rightarrow k = -3$$

Thử lại với $k^2 - 8$: $(-3)^2 - 8 = 1$. Giá trị $k + 4 = -3 + 4 = 1$. (Thỏa mãn).

Đáp số: $k = -3$.

Câu 3.

a) $y^4 + xy = 4$. Đạo hàm 2 vế theo x:

$$4y^3 \cdot y' + (y + xy') = 0 \Rightarrow y'(4y^3 + x) = -y \Rightarrow y' = \frac{-y}{4y^3 + x}$$

b) Khai triển Maclaurin $y = xe^x$:

Ta có $e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + o(x^{n-1})$.

$$\Rightarrow y = x \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n)$$

Câu 4.

a) $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{5x+\ln x}}$. Khi $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{5}x^{1/2}}$. Vì $\alpha = 1/2 \le 1$ nên I **phân kỳ**.

b) $J = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. Điểm bất thường $x = 3$. Khi $x \to 3$, $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{6}(3-x)^{1/2}}$. Vì $\alpha = 1/2 < 1$ nên J **hội tụ**.

Câu 5.

a) Cho $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Tìm $F'(1)$ và $F''(1)$.

Giải thích: Tích phân có cận dưới là hằng số 0, cận trên là biến x. Theo định lý cơ bản của giải tích, đạo hàm theo x sẽ triệt tiêu dấu tích phân.

- **Tính $F'(1)$:**

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right) = e^{-x^2}$$

Thay $x = 1$ vào:

$$F'(1) = e^{-1^2} = e^{-1} = \mathbf{\frac{1}{e}}$$

- **Tính $F''(1)$:** Lấy đạo hàm của $F'(x) = e^{-x^2}$ (sử dụng công thức $(e^u)' = u'e^u$):

$$F''(x) = (e^{-x^2})' = (-x^2)' \cdot e^{-x^2} = -2x \cdot e^{-x^2}$$

Thay $x = 1$ vào:

$$F''(1) = -2(1) \cdot e^{-1} = -\mathbf{\frac{2}{e}}$$

b) Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi: $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

Giải thích về cận: Đề bài chỉ cho một cận đứng là $x = 1$. Cận còn lại là giao điểm của hai hàm số.

- **Bước 1: Tìm cận tích phân**
  - Cận trên: $x = 1$ (giả thiết).
  - Cận dưới: Xét phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ và trục hoành $y = 0$:

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\Rightarrow$ Vậy miền D giới hạn từ $x = 0$ đến $x = 1$.

- **Bước 2: Tính diện tích** Công thức: $S = \int_0^1 |x^2 - 0| dx$. Vì $x \in [0, 1]$ nên $x^2 \geq 0$, bỏ trị tuyệt đối:

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1$$

Thay cận:

$$S = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \mathbf{\frac{1}{3}} \text{ (đvdt)}$$