

Bài 1: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

Xét hàm số $f(x) = \cos x$ liên tục trên $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\rightarrow f(x)$ khả tích trên $[0, \frac{\pi}{2}]$

Chia đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$ thành n đoạn bằng nhau

$$\delta_i = \delta = \frac{\pi}{2n}, \text{ tại đoạn thứ } i: \xi_i = x_i = i \cdot \frac{\pi}{2n}$$

$$\text{Ta có: } \sigma(n) = \sum_{i=1}^n \cos(i \cdot \frac{\pi}{2n}) \cdot \frac{\pi}{2n}$$

$$\text{Có: } \sum_{i=1}^n \cos(ix) = S$$

$$\Rightarrow 2 \sin(\frac{x}{2}) \cdot S = \sum_{i=1}^n 2 \cos(ix) \sin(\frac{x}{2})$$

$$(\Rightarrow) H = \sum_{i=1}^n \sin(ix + \frac{x}{2}) - \sin(ix - \frac{x}{2})$$

$$(\Rightarrow) H = \sum_{i=1}^n \sin[(i + \frac{1}{2})x] - \sin[(i - \frac{1}{2})x]$$

$$(\Rightarrow) H = \sin[(n + \frac{1}{2})x] - \sin(0,5x)$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})x] - \sin 0,5x}{2 \cdot \sin(\frac{x}{2})}$$

$$(\Rightarrow) S = \sin(\frac{n+1}{2}x) \cos(\frac{n}{2}x)$$

$$(\Rightarrow) S = \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{Với } x = \frac{\pi}{2n}$$

$$\Rightarrow \sigma(n) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{n+1}{4n}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \cdot \frac{\pi}{2n}$$

$$\text{Tạo: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n)$$

$$(\Rightarrow) I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{n+1}{4n}\pi\right)}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\frac{\pi}{4n}}} \cdot 2$$

$$(\Rightarrow) I = 1$$

Bài 2

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = I$$

Xét hàm số $g(x) = \sin x$ liên tục trên $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\rightarrow g(x)$ khả tích trên $[0, \frac{\pi}{2}]$

→ $f(x)$ khả tích trên $[0, \frac{\pi}{2}]$

Chia đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$ thành n đoạn bằng nhau

$$\delta_i = \delta = \frac{\pi}{2n}, \text{ tại đoạn thứ } i: \xi_i = x_i = \frac{i \cdot \pi}{2n}$$

$$\sigma(n) = \sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{i\pi}{2n}\right) \cdot \frac{\pi}{2n}$$

$$\text{Ta có: } \sum_{i=1}^n \sin(ix) = S$$

$$\rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cdot S = \sum_{i=1}^n 2 \sin(ix) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow H = - \sum_{i=1}^n \cos\left[\left(i + \frac{1}{2}\right)x\right] - \cos\left[\left(i - \frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$\Rightarrow H = \cos(0,5x) - \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$\Rightarrow S = \frac{\cos(0,5x) - \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{Với } x = \frac{\pi}{2n}$$

$$\rightarrow \sigma(n) = \frac{\cos \frac{\pi}{4n} - \cos\left(\frac{2n+1}{4n} \cdot \pi\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \cdot \frac{\pi}{2n}$$

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n)$$

$$\Rightarrow I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{4n} \cdot \pi\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \cdot 2$$

$$(\Rightarrow) I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{4n}) - \cos(\frac{(4n-1)\pi}{4n})}{2 \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4n})}{\frac{\pi}{4n}}} \cdot 2$$

$$(\Rightarrow) I = 1$$

Bài 3

$$I = \int_1^2 x^2 \cdot dx$$

Xét hàm số $f(x) = x^2$ liên tục trên $[1; 2]$
 $\rightarrow f(x)$ khả tích trên đoạn $[1; 2]$

Chia đoạn $[1; 2]$ thành n đoạn bằng nhau

$$\delta_i = \delta = \frac{1}{n}, \text{ tại đoạn thứ } i: \xi_i = x_i = 1 + \frac{i}{n}$$

$$\text{Ta có: } \sigma_n = \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$(\Rightarrow) \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} + \frac{2i}{n} + 1$$

$$(\Rightarrow) \sigma_n = \frac{1}{n} \left(\frac{n(2n+1)(n+1)}{6n^2} + \frac{2}{n} \cdot \frac{n}{2}(n+1) + n \right)$$

$$(\Rightarrow) \sigma_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} + \frac{n+1}{n} + 1$$

$$\sigma(n) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} + \frac{n+1}{n} + 1$$

Ta có: $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n)$

$$\Rightarrow I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} + \frac{n+1}{n} + 1$$

$$\Rightarrow I = \frac{7}{3}$$