Rozwiązania Zadań z książki

Witold Kołodziej, Analiza Matematyczna
PWN Warszawa 2009

Grzegorz Wierzchowski

31 stycznia 2016

Licencja

Podziękowania

Niniejsza publikacja została stworzona wyłacznie przy użyciu programów i narzędzi open source:

- System składu tekstu LaTeX
- Biblioteka graficzna wspólpracująca z LaTeX: `tikz`
- Edytor tekstu wyspecjalizowany do pisania w LaTeX: Kile
- Programy graficzne: Kig, Inkscape
- Program obliczeniowy: Maxima

Dziękuję autorom, twórcom i współtwórom tych programów za ich wkład pracy wniesiony w stworzenie i dopracowanie tych narzędzi.

Uwagi to tego dokumentu, znalezione błędy lub sugestie proszę zgłaszać poprzez stronę domową projektu: `https://github.com/gwierzchowski/math-phis` gdzie też należy szukać najnowszej wersji dokumentu.

Spis treści

Wstęp

§ 1 Podstawowe pojęcia mnogościowe

1. s.21

a) $x \in (\bigcup_{s\in S} A_s) \cap (\bigcup_{t\in T} B_t) \Rightarrow x \in \bigcup_{s\in S} A_s \wedge x \in \bigcup_{t\in T} B_t \Rightarrow \exists_{s'\in S} x \in A_{s'} \wedge \exists_{t'\in T} x \in B_{t'} \Rightarrow \exists_{s'\in S, t'\in T} x \in A_{s'} \cap B_{t'} \Rightarrow x \in \bigcup_{s\in S, t\in T}(A_s \cap B_t)$
$x \in \bigcup_{s\in S, t\in T}(A_s \cap B_t) \Rightarrow \exists_{s'\in S, t'\in T} x \in A_{s'} \cap B_{t'} \Rightarrow \exists_{s'\in S} x \in A_{s'} \wedge \exists_{t'\in T} x \in B_{t'} \Rightarrow x \in (\bigcup_{s\in S} A_s) \wedge x \in (\bigcup_{t\in T} B_t) \Rightarrow x \in (\bigcup_{s\in S} A_s) \cap (\bigcup_{s\in S} B_s)$

b) $x \in (\bigcap_{s\in S} A_s) \cup (\bigcap_{t\in T} B_t) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{s\in S} A_s \vee x \in \bigcap_{t\in T} B_t \Leftrightarrow \forall_{s\in S} x \in A_s \vee \forall_{t\in T} x \in B_t \Leftrightarrow \forall_{s\in S, t\in T} x \in A_s \vee x \in B_t \Leftrightarrow x \in \bigcap_{s\in S, t\in T}(A_s \cup B_t)$

c) $(x, y) \in (\bigcup_{s\in S} A_s) \times (\bigcup_{t\in T} B_t) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{s\in S} A_s \wedge y \in \bigcup_{t\in T} B_t \Leftrightarrow \exists_{s'\in S} x \in A_{s'} \wedge \exists_{t'\in T} y \in B_{t'} \Leftrightarrow \exists_{s'\in S, t'\in T} x \in A_{s'} \wedge y \in B_{t'} \Leftrightarrow \exists_{s'\in S, t'\in T}(x, y) \in A_{s'} \times B_{t'} \Leftrightarrow (x, y) \in \bigcup_{s\in S, t\in T} A_s \times B_t$

d) Analogicznie jak c).

2. s.22

$B_1 \cap B_2 = A_1 \cap (A_2 \setminus A_1) = \emptyset$
Niech $i > j > 1, B_i \cap B_j = A_i \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j \cup \ldots \cup A_{i-1}) \cap A_j \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{j-1}) = \emptyset$
$a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \Rightarrow \exists_i a \in B_i \Rightarrow \exists_i a \in A_i \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1}) \Rightarrow \exists_i a \in A_i \Rightarrow a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$
$a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \exists_i a \in A_i$ Niech $i' = \min\{i : a \in A_i\} \Rightarrow a \in A_{i'} \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{i'-1}) \Rightarrow a \in B_{i'} \Rightarrow a \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

3. s.22

$\Rightarrow$) Wykażemy, że jeżeli zachodzi równość jak w zadaniu, to f jest odwracalna.
Przypuśćmy, że f nie jest odwracalna: $\exists_{y\in f(X)} \exists_{x_1, x_2 \in X} x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y$
Niech $S = \{1, 2\}, A_1 = \{x_1\}, A_2 = \{x_2\}$ many $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{y\} = f(A_1) \cap f(A_2)$.

$\Leftarrow$) Wykażemy, że jeżeli f jest odwracalna, to zachodzi równość jak w zadaniu.
Niech $\{A_s : s \in S\}$ będzie dowolną rodziną zbiorów taką, że $\bigcup_{s\in S} A_s \subset X$. Możemy założyć, że $\forall_s A_s \neq \emptyset$.
Przypuśćmy, że istnieje y taki, że:

$$y \in \bigcap_{s\in S} f(A_s) \tag{1}$$

oraz:

$$y \notin f(\bigcap_{s\in S} A_s) \tag{2}$$

Z 1 wynika:

$$\forall_{s\in S} y \in f(A_s) \Rightarrow \forall_{s\in S} \exists_{x_s \in A_s} f(x_s) = y \tag{3}$$

oraz, że $y \in f(\bigcup_s A_s) \subset f(X)$.
Z powyższego oraz z 2 wynika: $\exists_{x' \in X} x' \notin \bigcap_s A_s \wedge y = f(x') \Rightarrow \exists_{x' \in X} \exists_{s' \in S} x' \notin A_{s'} \wedge y = f(x)$. Oznaczając $x_{s'}$ według równania 3 mamy: $x' \notin A_{s'} \wedge x_{s'} \in A_{s'} \Rightarrow x' \neq x_{s'}$ oraz $f(x') = y = f(x_{s'})$ co jest sprzeczne z różnowartościowością funkcji *f*.

4. s.22

$\subset$) $y \in f(A_1) \setminus f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1) \wedge y \notin f(A_2) \Rightarrow \exists_{x \in A_1} f(x) = y \wedge \forall_{x \in A_2} f(x) \neq y \Rightarrow \exists_{x \in A_1} f(x) = y \wedge x \notin A_2 \Rightarrow y \in f(A_1 \setminus A_2)$.

$=$) Niech $A_2' = X \setminus A_2; f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1 \cap A_2') = f(A_1) \cap f(A_2')$ przy czym ostatnia równość zachodzi pod warunkiem, że f jest odwracalna (patrz poprzednie zadanie). Wykażemy teraz, że $f(A_2') \subset Y \setminus f(A_2)$.
$y \in f(A_2') \Rightarrow \exists_{x \in X \setminus A_2} f(x) = y \overset{f\text{-odwracalna}}{\Longrightarrow} \forall_{x \in A_2} f(x) \neq y \Rightarrow y \notin f(A_2) \Rightarrow y \in Y \setminus f(A_2)$.
Zatem $f(A_1) \cap f(A_2') \subset f(A_1) \cap (Y \setminus f(A_2)) = f(A_1) \setminus f(A_2)$.

5. s.22

Dowód wynika wprost z definicji zbioru przeliczalnego.

6. s.22

Niech $\mathbb{Q}^n := \underbrace{\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{n}$. Jest to zbiór przeliczalny z tw. 8 s.21 dla każdego n. Zatem $\forall_{n \in \mathbb{N}}$ istnieje bijekcja $\mathbb{Q}^n \to \mathbb{N}$, oznaczmy ją q_n. Zatem każdy skończony, n-elementowy ciąg liczb wymiernych $\overline{q}$ możemy przedstawić jako parę $(q_n(\overline{q}), n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a ten zbiór jest przeliczalny z tw. 8 s.21.
Alternatywnie można też potraktować zbiór ciągów jako $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$, a to jest przeliczalne z tw. 7 s.20.

7. s.22[1]

Przypuśćmy że można ustawić w ciąg wszystkie nieskończone ciągi zer i jedynek, czyli że mamy $(a_n)_{n=1..\infty}$, gdzie $a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots)$, $a_{ij} \in \{0, 1\}$ który zawiera wszystkie ciągi zero-jedynkowe. Skonstruujmy teraz ciąg $b = (b_1, b_2, \dots)$ taki, że $\forall_n \; b_n \neq a_{nn}$ i $b_n \in \{0, 1\}$. Dla dowolnego n ciąg ten ze względu na warunek $b_n \neq a_{nn}$ nie może znajdować się na pozycji n czyli $\forall_n b \neq a_n$ a zatem nie najeży do naszej rodziny (a_n) co jest sprzeczne z założeniem, że ta rodzina zawiera wszystkie ciągi zero-jedynkowe.

8. s.22

To jest wniosek z poprzedniego ćwiczenia, ponieważ każdemu podzbiorowi zbioru nieskończonego (przeliczalnego) możemy jednoznacznie przyporządkować nieskończony ciąg zer i jedynek, gdzie zero oznacza, że element nie należy do podzbioru, a jedynka, że należy. Natomiast jeżeli sam zbiór jest nieprzeliczalny, podzbiór jego podzbiorów składający się z samych tylko zbiorów jednoelementowych jest nieprzeliczalny.

Inny, ogólniejszy dowód (Na podstawie dowodu w *Młody Technik*, styczeń 2012, str. 55).
Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Przypuśćmy, że istnieje jednoznaczne przyporządkowanie (bijekcja) każdego podzbioru tego zbioru do elementu tego zbioru. Innymi słowy, że zbiór i zbiór jego podzbiorów są równoliczne.
Zauważmy najpierw, że istnieje przynajmniej jedna taka para element-podzbiór należąca do naszej bijekcji, że element nie należy do przyporządkowanego mu podzbioru. Weźmy dowolny $\{a, b\} \subset X$. Jeżeli jest mu przyporządkowany jakiś inny element nie a ani b to mamy naszą parę, a jeżeli którychś z tych elementów (przypuśćmy, że a) to zastanówmy się jakiemu elementowi jest przyporządkowany podzbiór $\{a\}$. Nie może być to a bo ono jest już zajęte z zatem musi być to jakiś inny element c i właśnie ta para $c, \{a\}$ jest tą której istnienie chcieliśmy wykazać.

[1] Na podstawie dowodu w *Młody Technik*, styczeń 2012, str. 54

Oznaczmy teraz przez D zbiór wszystkich takich elementów X, którym przyporządkowane są podzbiory X nie zawierające tych elementów. Jak pokazaliśmy wyżej taki zbiór istnieje i nie jest pusty oraz oczywiście sam jest podzbiorem X. Zatem i jemu jest przyporządkowany jakichś element $d \in X$. Pytamy czy $d \in D$. Jeżeli tak, to przeczyło by to temu jak D został określony (zbiór wszystkich takich elementów, którym przyporządkowane są podzbiory nie zawierające tych elementów). Jeżeli zaś nie to mamy wewnętrzna sprzeczność, bo d spełniałby warunki przynależności do D a powiedzieliśmy, że D zawiera wszystkie takie elementy. A zatem otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi że na samym początku nasza konstrukcja jest niemożliwa (czyli nie może być bijekcji element-podzbiór).
Uwaga: tego rodzaju rozumowanie jest zwane paradoksem fryzjera. W pewnym miasteczku jest fryzjer, który goli wszystkich mężczyzn, którzy nie golą się sami i tylko takich. Pytamy czy goli on sam siebie?

§ 2 Liczby rzeczywiste

1. s.27

Wynika to z definicji pierwiastka (potęgi 1/2).

2. s.27

$$a := \inf\{x : x^3 + x + 1 > 0\}$$

***a* istnieje)** Mamy dla $x = -1, (-1)^3 - 1 + 1 = -1 \not> 0$ oraz $\forall_{x<-1} x^3 < -1$ i $x + 1 < 0$ czyli $x^3 + x + 1 \not> 0$. Zatem zbiór $\{x : x^3 + x + 1 > 0\}$ jest ograniczony z dołu przez -1, więc z zasady ciągłości infimum istnieje oraz jest nie mniejsze od -1.

$a^3 + a + 1 = 0$) Mamy dla $x = -1/2, (-1/2)^3 - 1/2 + 1 = 3/8 > 0$ z czego wynika, że $a \leqslant -1/2$. Zbadajmy teraz monotoniczność funkcji $f(x) = x^3 + x + 1$ w przedziale $\langle -2, -1/3\rangle \supset \langle -1, -1/2\rangle$. Niech $\epsilon > 0, f(x+\epsilon) - f(x) = (x+\epsilon)^3 + x + \epsilon + 1 - x^3 - x - 1 = (x+\epsilon)^3 + \epsilon - x^3 = x^3 + 2x^2\epsilon + x\epsilon^2 + \epsilon x^2 + 2x\epsilon^2 + \epsilon^3 - x^3 = 3x^2\epsilon + 3x\epsilon^2 + \epsilon^3 = 3x\epsilon(x+\epsilon) + \epsilon^3 > 0$ dla x z podanego przedziału, oraz $\epsilon < 1/3$. Ponadto wyrażenie to dla ustalonego x może być dowolnie małe, czyli:

$$\forall_{x\in(-2,-1/3)} \forall_{\delta>0} \exists_{\epsilon'>0} \forall_{0<\epsilon\leqslant\epsilon'} f(x+\epsilon) - f(x) < \delta \tag{4}$$

co jest równoważne:

$$\forall_{x\in(-2,-1/3)} \forall_{\delta>0} \exists_{\epsilon'>0} \forall_{0<\epsilon\leqslant\epsilon'} f(x) - f(x-\epsilon) < \delta \tag{5}$$

Zatem funkcja $f(x) = x^3 + x + 1$ w przedziale $\langle -1, -1/2\rangle$ jest rosnąca i przechodzi z wartości -1 do wartości 3/8.
Przypuśćmy teraz, że $f(a) > 0$. Przyjmując w równaniu 5 $x := a, \delta := f(a)$ mamy $\exists_{\epsilon'>0} f(a) - f(a-\epsilon') < f(a) \Leftrightarrow \exists_{\epsilon'>0} f(a-\epsilon') > 0$ co jako, że $a - \epsilon' < a$ jest w sprzeczności z definicja infimum (warunek pierwszy).
Przypuśćmy teraz, że $f(a) < 0$. Przyjmując w równaniu 4 $x := a, \delta := -f(a)$ mamy $\exists_{\epsilon'>0} \forall_{0<\epsilon\leqslant\epsilon'} f(a+\epsilon) - f(a) < -f(a) \Leftrightarrow \exists_{\epsilon'>0} \forall_{0<\epsilon\leqslant\epsilon'} f(a+\epsilon) < 0$ co jest w sprzeczności z definicja infimum (warunek drugi - przyjmując $m_1 := a + \epsilon' > a$ z monotoniczności funkcji f mamy $\forall_{x<a+\epsilon'} f(x) < 0 \Leftrightarrow \forall_{x<a+\epsilon'} x \notin \{x : f(x) > 0\}$.
Zatem musi być $f(a) = 0$.

3. s.27

+)

$\leqslant$) $x = \sup(A+B) \Rightarrow x = \min\{M : \forall_{x\in A+B} x \leqslant M\} \Rightarrow x = \min\{M : \forall_{x_a\in A, x_b\in B} x_a + x_b \leqslant M\}$. Mamy ponadto $\forall_{x_a\in A, x_b\in B} x_a + x_b \leqslant \sup A + \sup B$. Z tych dwu równiań wynika, że $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$.

$\geqslant$) Niech $\epsilon > 0$. Wykażemy, że $\exists_{x \in A+B} x > \sup A + \sup B - \epsilon$. Przyjmijmy $\epsilon' := \frac{1}{2}\epsilon$. Z definicji supremum $\exists_{x_a \in A} x_a > \sup A - \epsilon'$ oraz $\exists_{x_b \in B} x_b > \sup B - \epsilon'$. Czyli mamy $x := x_a + x_b > \sup A - \epsilon' + \sup B - \epsilon' = \sup A + \sup B - \epsilon$. Jako, że ϵ było dowolne, dowodzi to. że $\sup(A+B) \geqslant \sup A + \sup B$. Dowód dla infimum wygląda analogicznie.

$\cdot$)

$\leqslant$) Niech $x_a \in A, x_b \in B \Rightarrow x_a x_b \geqslant 0$ oraz M, N będą dowolnymi liczbami nieujemnymi. $x_a \leqslant M \wedge x_b \leqslant N \Rightarrow x_a x_b \leqslant MN \Rightarrow \forall_{x_a \in A, x_b \in B} x_a x_b \leqslant \sup A \sup B \Rightarrow \sup(AB) \leqslant$
$supA \sup B$.

$\geqslant$) Niech $\epsilon > 0$. Wykażemy, że $\exists_{x \in AB} x > \sup A \sup B - \epsilon$. Przyjmijmy ϵ' takie, że $\epsilon'(\sup A + \sup B) - \epsilon'^2 < \epsilon$. Z definicji supremum $\exists_{x_a \in A} x_a > \sup A - \epsilon'$ oraz $\exists_{x_b \in B} x_b > \sup B - \epsilon'$. Czyli mamy $x := x_a x_b > (\sup A - \epsilon')(\sup B - \epsilon') = \sup A \sup B - (\epsilon'(\sup A + \sup B) - \epsilon'^2) > \sup A \sup B - \epsilon$. Jako, że ϵ było dowolne, dowodzi to. że $\sup(AB) \geqslant \sup A \sup B$. Dowód dla infimum wygląda analogicznie.

4. s.28

Niech $\mathcal{I}$ będzie rodziną przedziałów niezdegenerowanych, rozłącznych. Jeżeli $\mathcal{I}$ zawiera przedział nieograniczony z dołu (oznaczmy go $I_{-\infty}$), to z rozłączności przedziałów mamy $\mathcal{I} = \{I_{-\infty}\} \cup \mathcal{I}'$, gdzie każdy przedział należący do $\mathcal{I}'$ jest ograniczony z dołu. Podobnie może być $\mathcal{I}' = \mathcal{I}'' \cup \{I_{+\infty}\}$, gdzie każdy przedział należący do $\mathcal{I}''$ jest ograniczony z góry. Możemy więc założyć bez straty ogólności, że każdy przedział z rodziny, którą badamy jest ograniczony z góry i z dołu.
Wykażemy teraz, że:

$$\forall_{a,b \in \mathbb{R}} a < b \, \exists_{q \in \mathbb{Q}} a < q < b$$

$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ jest ograniczony z dołu przez 0, a zatem posiada infimum. Łatwo wykazać, że to infimum jest równe 0. Zatem $\forall_{\epsilon > 0} \exists_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} < \epsilon$. Niech $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, przyjmijmy $\epsilon := (b-a)/2$, zatem $\exists_{\overline{n} \in \mathbb{N}} \frac{1}{\overline{n}} < \epsilon$. Wykażemy, że $\exists_{m \in \mathbb{Z}} a < \frac{m}{\overline{n}}$ i $\frac{m}{\overline{n}} < b$. Jak łatwo wykazać $\exists_{m_1 \in \mathbb{Z}} \frac{m_1}{\overline{n}} < a$ oraz $\exists_{m_2 \in \mathbb{Z}} \frac{m_2}{\overline{n}} > a$. Ponieważ $\mathbb{N} \ni \overline{n} > 0$ to $m_1 < m_2$. Niech więc $\overline{m} := \max\{m \in \langle m_1, m_2 \rangle \cap \mathbb{Z} : \frac{m}{\overline{n}} < a\}$. Z definicji wynika, że $\frac{\overline{m}}{\overline{n}} < a$ oraz $\frac{\overline{m}+1}{\overline{n}} > a$. A zatem $a < \frac{\overline{m}+1}{\overline{n}} = \frac{\overline{m}}{\overline{n}} + \frac{1}{\overline{n}} < a + \frac{1}{\overline{n}} < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$. Czyli $\frac{\overline{m}+1}{\overline{n}}$ jest szukaną liczbą wymierną. Teraz wystarczy każdemu przedziałowi z naszej rodziny przyporządkować liczbę wymierną z jego wnętrza. Z rozłączności przedziałów wynika różnowartościowość funkcji. Zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny co kończy dowód.

§ 3 Liczby zespolone

1. s.30

+)

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} && = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} &= \overline{a_1 + b_1 i} + \overline{a_2 + b_2 i} = a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i && = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \end{aligned}$$

$-$)

$$\begin{aligned} \overline{z_1 - z_2} &= \overline{a_1 + b_1 i - a_2 - b_2 i} = \overline{(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i} && = (a_1 - a_2) + (b_2 - b_1)i \\ \overline{z_1} - \overline{z_2} &= \overline{a_1 + b_1 i} - \overline{a_2 + b_2 i} = a_1 - b_1 i - (a_2 - b_2 i && = (a_1 - a_2) + (b_2 - b_1)i \end{aligned}$$

$\cdot$)

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i} && = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{a_1 + b_1 i a_2 + b_2 i} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) && = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)i \end{aligned}$$

/)

$$\overline{z_1/z_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_1b_2-b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

$$\overline{z_1}/\overline{z_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} - \frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}i = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_1b_2-b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

2. s.30

$$\left|\frac{x-z}{x-\overline{z}}\right| = \left|\frac{x-a-bi}{x-a+bi}\right| = \left|\frac{(x-a)^2-b^2}{(x-a)^2+b^2} - \frac{(x-a)b+b(x-a)}{(x-a)^2+b^2}i\right| = \left|\frac{(x-a)^2-b^2}{(x-a)^2+b^2} - \frac{2b(x-a)}{(x-a)^2+b^2}i\right|$$

$$= \sqrt{\frac{((x-a)^2-b^2)^2+4b^2(x-a)^2}{((x-a)^2+b^2)^2}} = \sqrt{\frac{((x-a)^4-2b^2(x-a)^2+b^4)^2+4b^2(x-a)^2}{((x-a)^2+b^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{((x-a)^2+b^2)^2}{((x-a)^2+b^2)^2}} = 1$$

3. s.30

Jak można łatwo stwierdzić $|\overline{z}| = |z|$ oraz $z\overline{z} = (|z|, 0)$. Ponadto $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$.
Mnożąc licznik i mianownik przez $\overline{z}$ dostajemy:

$$\left|\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right| = \left|\frac{z\overline{z}-a\overline{z}}{(\overline{a}z-1)\overline{z}}\right| \stackrel{|z|=1}{=} \left|\frac{1-a\overline{z}}{\overline{a}-\overline{z}}\right| = \left|\frac{a\overline{z}-1}{\overline{z}-\overline{a}}\right| = \left|\frac{\overline{a}z-1}{z-a}\right|$$

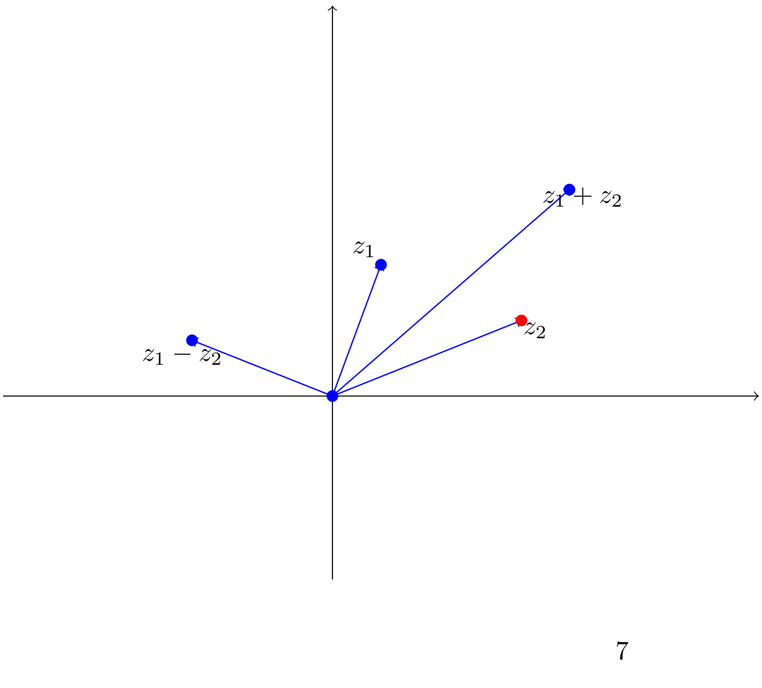
Zatem:

$$\left|\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right|^2 = 1 \Rightarrow \left|\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right| = 1$$

Powyższe równania mają sens, gdy $\overline{a}z - 1 \neq 0$. Jest to spełnione, gdyż: $|a| \neq 1 \Rightarrow |\overline{a}z| \neq 1 \Rightarrow \overline{a}z \neq 1$.

4. s.30

$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = (a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2 + (a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 + b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2 + a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2 = 2(a_1^2+b_1^2) + 2(a_2^2+b_2^2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.



Rozdział I

Elementy topologii

§ 4 Przestrzenie metryczne

Zauważmy na wstępie, że warunek $\forall_{0<\epsilon}$ w definicji granicy możemy zastąpić przez: $\forall_{0<\epsilon<1}$. Wynika to z tego, że jeżeli dla jakiegoś $0 < \epsilon' < 1$ zachodzi $\rho(a_n, a) < \epsilon'$, to $\rho(a_n, a) < 1 \leqslant \epsilon$. Zatem możemy brać pod uwagę tylko $\epsilon < 1$.

1. s.34

Najpierw wykażemy, ze dla dowolnych $a, b > 0$ zachodzi $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a+b} \leqslant& \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow && \text{(Podnosząc obie strony do kwadratu)} \\
a + b \leqslant& (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\
=& a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \Leftrightarrow \\
0 \leqslant& 2\sqrt{a}\sqrt{b}
\end{aligned}$$

Oznaczmy: $\rho(x, y) := \sqrt{|x-y|}$, $\rho_{\mathrm{n}}(x, y) := |x-y|$ (metryka naturalna). Wykażemy najpierw nierówność trójkąta dla metryki ρ (pozostałe dwa aksjomaty są w sposób oczywisty spełnione):

$$\begin{aligned}
\sqrt{|x-y|} =& \sqrt{|x-z+z-y|} \\
\leqslant& \sqrt{|x-z| + |z-y|} && \text{(n. trójkąta dla metr. naturalnej)} \\
\leqslant& \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} && \text{(powyższa nierówność)}
\end{aligned}$$

Wykażemy teraz warunek na równoważność metryk, tzn. $\lim_{\rho_{\mathrm{n}}} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{\rho} a_n = a$.

$\Rightarrow$) Niech $\lim_{\rho_{\mathrm{n}}} a_n = a$ oraz niech będzie dane $\epsilon > 0$. Ponieważ $\epsilon^2 > 0$, więc z definicji granicy w metryce ρ mamy:

$$\begin{aligned}
&\exists_{n_{\mathrm{n}} \in \mathbb{N}} \forall_{n > n_{\mathrm{n}}} \rho_{\mathrm{n}}(a_n, a) < \epsilon^2 \Leftrightarrow && \text{(pierwiastkując obustronnie nierówność)} \\
&\exists_{n_{\mathrm{n}} \in \mathbb{N}} \forall_{n > n_{\mathrm{n}}} |a_n - a| < \epsilon^2 \Leftrightarrow \\
&\exists_{n_{\mathrm{n}} \in \mathbb{N}} \forall_{n > n_{\mathrm{n}}} \sqrt{|a_n - a|} < \epsilon \Leftrightarrow \\
&\lim\nolimits_{\rho} a_n = a
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Zakładamy, że $\epsilon < 1$ oraz korzystamy z tego, że $|a_n - a| < \sqrt{|a_n - a|}$ dla $|a_n - a| < 1$.

2. s.34

Najpierw wykażemy, że dla dowolnych $a, b \geqslant 0$ zachodzi $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+a+b} \leqslant 1$:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+a+b} \leqslant 1 \Leftrightarrow$$

wykonując dodawanie

$$\frac{b^2 + (a+2)\, b + a^2 + 2\,a + 1}{(a+1)\, b^2 + (a^2 + 3\,a + 2)\, b + a^2 + 2\,a + 1} \leqslant 1 \Leftrightarrow$$

przenosząc dodatni mianownik na drugą stronę i upraszczając

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant a\,b^2 + \left(a^2 + 2\,a\right)\, b \Leftrightarrow \\ 0 &\leqslant a\,b\,(b + a + 2) \end{aligned}$$

Oznaczmy: $\bar{\rho}(x,y) := \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = 1 - \frac{1}{1+\rho(x,y)}$.
Wykażemy najpierw nierówność trójkąta dla metryki $\bar{\rho}$ (pozostałe dwa aksjomaty są w sposób oczywisty spełnione):

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(x,y) &\leqslant \bar{\rho}(x,z) + \bar{\rho}(z,y) \Leftrightarrow \\ 1 - \frac{1}{1+\rho(x,y)} &\leqslant 1 - \frac{1}{1+\rho(x,z)} + 1 - \frac{1}{1+\rho(z,y)} \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{1+\rho(x,y)} &\leqslant 1 - \frac{1}{1+\rho(x,z)} - \frac{1}{1+\rho(z,y)} \Leftarrow \end{aligned}$$

z nierówności trójkąta dla metryki ρ

$$\begin{aligned} -\frac{1}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)} &\leqslant 1 - \frac{1}{1+\rho(x,z)} - \frac{1}{1+\rho(z,y)} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{1+\rho(x,z)} + \frac{1}{1+\rho(z,y)} - \frac{1}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)} &\leqslant 1 \end{aligned}$$

A ta nierówność jest prawdziwa jak pokazano wyżej.
Wykażemy teraz warunek na równoważność metryk, tzn. $\lim_{\bar{\rho}} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{\rho} a_n = a$.

⇒) Niech $\lim_{\bar{\rho}} a_n = a$ oraz niech będzie dane $\epsilon > 0$.
Ponieważ $1 - \frac{1}{1+\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon+1} > 0$, więc z definicji granicy w metryce $\bar{\rho}$ mamy:

$$\begin{aligned} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n > n_0} \quad & \bar{\rho}(a_n, a) < 1 - \frac{1}{1+\epsilon} \Rightarrow \\ & 1 - \frac{1}{1+\rho(a_n,a)} < 1 - \frac{1}{1+\epsilon} \Rightarrow \\ & -\frac{1}{1+\rho(a_n,a)} < -\frac{1}{1+\epsilon} \Rightarrow \\ & \frac{1}{1+\epsilon} < \frac{1}{1+\rho(a_n,a)} \Rightarrow \\ & 1 + \rho(a_n,a) < 1 + \epsilon \Rightarrow \\ & \rho(a_n,a) < \epsilon \Rightarrow \\ \lim_{\rho} a_n = a & \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Korzystamy z tego, że $\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \leqslant \rho(x,y)$ dla $\rho(x,y) \geqslant 0$.

3. s.34

Zakładamy, że dodatkowo A jest niepusty. Zauważmy, że A-ograniczony $\Leftrightarrow \delta(A) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sup_{x,y\in A} \rho(x,y) \in \mathbb{R}$. Oznaczmy $D := \sup_{x,y\in A} \rho(x,y)$.

(a)$\Rightarrow$(c)) Weźmy dowolny $a \in A$ oraz przyjmijmy $r := D$. Z definicji supremum mamy $\forall_{x\in A}\rho(x,a) \leqslant r$.

(b)$\Rightarrow$(a)) Weźmy dowolne $x, y \in A$. Z nierówności trójkąta mamy $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,a) + \rho(a,y) \leqslant r + r$. Zatem $\{\rho(x,y) : x, y \in A\}$ jest ograniczony z góry przez $2r$, a więc posiada supremum.

(c)$\Rightarrow$(b)) Jeżeli A jest niepusty, to jest to oczywiste.
Z powyższych trzech wykazanych implikacji wynikają równoważności.

4. s.34

$\Rightarrow$) Wynika wprost z Tw. 5 na stronie 33 w podręczniku.

$\Leftarrow$) Dowód nie-wprost. Przypuśćmy, że $\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$.

Rozważmy przypadek 1: $\lim a_n = b$ i $b \neq a$.
Wtedy każdy podciąg jest zbieżny do b, czyli nie istnieje podciąg zbieżny do a.

Rozważmy przypadek 2: $\lim a_n$ nie istnieje, czyli: $\forall_{a\in X}\exists_{\epsilon>0}\forall_{k\in\mathbb{N}}\exists_{n_k>k}\rho(a_{n_k}, a) \geqslant \epsilon$. Zatem dla dowolnej hipotetycznej granicy $a \in X$ wybierzemy sobie podciąg a_{n_k} zdefiniowany jak wyżej, ponieważ istnieje $\epsilon > 0$ taki, że $\forall_k \rho(a_{n_k}, a) \geqslant \epsilon$, więc ani a_{n_k}, ani żaden jego podciąg nie są zbieżne do a.

§ 5 Granica ciągu liczbowego

1. s.42

Oznaczmy przez a_n wyraz naszego ciągu, czyli:

$$a_n := \left(1 - \frac{1}{(a-1)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(a-2)^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(a-n)^2}\right)$$

Zbieżność) Na razie przyjmijmy, że $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Oznaczmy: $\lfloor a \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} : n < a\}$.
Zauważmy, że

$$\forall_{n>|a|+1}(a-n)^2 > 1 \Rightarrow$$
$$\forall_{n>|a|+1} 0 < \left(1 - \frac{1}{(a-n)^2}\right) < 1 \Rightarrow$$
$$\text{ciąg}\{a_n : n > |a| + 1\} \text{ jest:}$$

- malejący i ograniczony z dołu przez 0 jeżeli $a_{\lfloor |a| \rfloor+1} > 0$ lub
- rosnący i ograniczony z góry przez 0 jeżeli $a_{\lfloor |a| \rfloor+1} < 0$.

W obu wypadkach oznacza to, że jest on zbieżny, jak i cały ciąg a_n (Tw. 3 §4 w książce).
Zauważmy, że z $a \notin \mathbb{N}$ wynika, że $\forall_n a_n \neq 0$.

Granica) Wykażemy, że $(n-1)$-szy wyraz naszego ciągu możemy zapisać jako $\frac{a^2-na}{a^2-na+(n-1)}$.
Dla $n=2$ mamy:

$$\frac{a^2-2a}{a^2-2a+1} = \frac{(a-1)^2-1}{(a-1)^2} = 1 - \frac{1}{(a-1)^2} = a_1$$

Przyjmując, że wzór jest prawdziwy dla $n-1$ mamy:

$$a_n = \frac{a^2-na}{a^2-na+(n-1)}\left(1-\frac{1}{(a-n)^2}\right) = \frac{a^2-(n+1)a}{a^2-(n+1)a+n}$$

Zatem mamy:

$$a_{n-1} = \frac{a^2-na}{a^2-na+(n-1)} = \frac{\frac{a^2}{n}-a}{\frac{a^2}{n}-a+\frac{n-1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{a-1}$$

2. s.42

Wykażemy najpierw następującą nierówność zachodzącą dla każdego $a, b \in \mathbb{C}$:

$$||a|-|b|| \leqslant |a+b| \tag{*}$$

Z nierówności trójkąta mamy $|a| = |a+b-b| \leqslant |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$, a stąd $|a|-|b| \leqslant |a+b|$.
W podobny sposób $|b|-|a| \leqslant |a+b|$ a stąd (*).

Zachodzi również następująca nierówność:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{a^n+b_1}+\dots+\frac{1}{a^n+b_n}\right| &\overset{\text{z n. trójkąta}}{\leqslant} \frac{1}{|a^n+b_1|}+\dots+\frac{1}{|a^n+b_n|} \\ &\overset{\text{z nierówności (*)}}{\leqslant} \frac{1}{|a|^n-|b_1|}+\dots+\frac{1}{|a|^n-|b_n|} \\ &\overset{\text{z założenia } |b_n|\leqslant|a|}{\leqslant} \frac{1}{|a|^n-|a|}+\dots+\frac{1}{|a|^n-|a|} = \frac{n}{|a|^n-|a|}\end{aligned} \tag{**}$$

Z założenia $|a|>1$ oraz z Przykładu 3 (str. 39 w książce) mamy:

$$\lim \frac{n}{|a|^n} = \lim \left(\frac{1}{|a|}\right)^n n^1 = 0$$

Zatem z Twierdzenia 9 (str. 37 w książce) mamy:

$$\lim \frac{|a|^n}{n} = +\infty$$

Zatem:

$$\lim\left(\frac{|a|^n-|a|}{n}\right) = \lim\frac{|a|^n}{n} - \lim\frac{|a|}{n} = \lim\frac{|a|^n}{n} - 0 = +\infty$$

Zatem z Twierdzenia 9 (str. 37 w książce) mamy:

$$\lim\left(\frac{n}{|a|^n-|a|}\right) = 0$$

Zatem z nierówności (**):

$$\lim\left|\frac{1}{a^n+b_1}+\dots+\frac{1}{a^n+b_n}\right| = 0$$

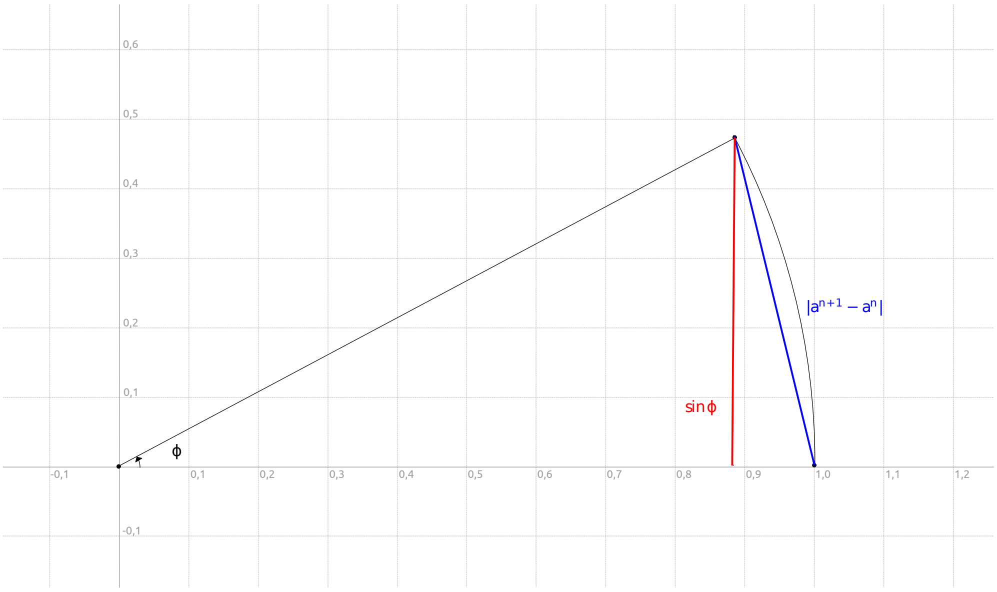
Zatem z równoważności zbieżności ciągu i zbieżności odległości od granicy do zera (str. 33 w książce) mamy:

$$\lim\left(\frac{1}{a^n+b_1}+\dots+\frac{1}{a^n+b_n}\right) = 0$$

3. s.42

$|a| > 1$) Jeżeli istniałaby granica $\lim a^n = A$, to z Twierdzenia 1 (str. 34 w książce) $\lim |a^n| = \lim |a|^n = |A|$. Ale $|a| > 1 \Rightarrow |a|^n \to +\infty$. Zatem ciąg (a^n) nie może mieć skończonej granicy.

$|a| = 1$) $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$, gdzie $\varphi = \arg(a)$. Przy czym $a \neq 1 \Rightarrow \sin\varphi \neq 0 \Rightarrow \varphi \notin \{0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2n\pi, \ldots\}$. Ze znanych wzorów trygonometrycznych (oraz własności liczb zespolonych) mamy: $a^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$. Z interpretacji geometrycznej mamy: $|a^{n+1} - a^n| > |\sin\varphi| > 0$ dla każdego n. A zatem przyjmując $\varepsilon := \frac{1}{2}|\sin\varphi|$ mamy dla dowolnego A i dla każdego n: $|a^{n+1} - A| + |A - a^n| \geqslant |a^{n+1} - a^n| > |\sin\varphi| = 2\varepsilon > 0$. Czyli albo $|a^{n+1} - A| > \varepsilon$ albo $|a^n - A| > \varepsilon$ co dowodzi, że ciąg (a^n) nie może być zbieżny.



4. s.42

Oznaczmy:

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 1$$

a zatem ciąg (a_n) jest rosnący.
Oznaczmy: $e_n := (1+\frac{1}{n})^n$. Wykażemy, że dla wystarczająco dużych n: $n > N \Rightarrow a_n < e_n$. A to by oznaczało, że ciąg (a_n) jest zbieżny ponieważ $\lim e_n = e$.
Najpierw wykażemy, że dla wystarczająco dużych n zachodzi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{e_{n+1}}{e_n}$$

$$1 + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \frac{n+1}{n+2} < 1 \tag{*}$$

Wobec łatwej do wykazania nierówności: $1 + \frac{1}{2^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2n}$, dla $n \geqslant 1$, nierówność (*) wynika z poniższej nierówności:

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n \frac{n+1}{n+2} < 1$$
$$(2n+1)(n+1)^3 < 2n^2(n+2)^2$$
$$(2n+1)(n^3+3n^2+3n+1) < 2n^2(n^2+4n+4)$$
$$2n^4+6n^3+6n^2+2n+n^3+3n^2+3n+1 < 4n^4+8n^3+8n^2$$
$$2n^4+7n^3+9n^2+5n+1 < 4n^4+8n^3+8n^2$$
$$0 < 2n^4+n^3-n^2-5n-1$$

Równanie: $2x^4+x^3-x^2-5x-1=0$ posiada dwa rzeczywiste rozwiązania (w przybliżeniu):
$x=-0,20988309824446$; $\quad x=1,375911832954823$, a zatem ostatnia nierówność jest spełniona dla wszystkich $n \geqslant 2$.
A zatem dla $n \geqslant 2$ zachodzi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{e_{n+1}}{e_n}$.
Ponadto: $a_2 = \frac{15}{8} = 1,875 < e_2 = \frac{9}{4} = 2,25$.
Zakładając, że $a_n < e_n$ mamy:

$$a_{n+1} = a_n \frac{a_{n+1}}{a_n} < a_n \frac{e_{n+1}}{e_n} < e_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = e_{n+1}$$

A zatem wykazaliśmy, że dla $n \geqslant 2$, $\quad a_n < e_n$. A zatem ciąg (a_n) jest ograniczony z góry przez e a zatem jest zbieżny.
Korzystając z narzędzi CAS takich jak n.p. Maxima możemy w przybliżaniu obliczyć tą granicę, oraz porównać zbieżność tego ciągu ze zbieżnością ciągu definiującego liczbę e:

```
(%i1) a(n):=product(1+1/(2^i),i,1,n)$
(%i2) a(500),numer;
(%o2)                       2.384231029031371
(%i3) a(501),numer;
(%o3)                       2.384231029031371
(%i4) b(n):=(1+1/n)^n$
(%i5) plot2d([a(n),b(n)],[n,1,300]);
```

§ 6 Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych $\widetilde{\mathbb{R}}$

1. s.49

Jeżeli (a_{n_k}) jest podciągiem (a_n), to:

$$\forall_n \quad n_n \geqslant n \Rightarrow$$
$$\forall_n \quad \{a_{n_n}, a_{n_{n+1}}, \dots\} \subset \{a_n, a_{n+1}, \dots\} \Rightarrow$$
$$\forall_n \quad \underline{a_{n_n}} = \inf\{a_{n_n}, a_{n_{n+1}}, \dots\} \geqslant \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} = \underline{a_n} \Rightarrow$$
$$\liminf_{k\to\infty} a_{n_k} = \sup\{\underline{a_{n_1}}, \underline{a_{n_2}}, \dots\} \geqslant \sup\{\underline{a_1}, \underline{a_2}, \dots\} = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

Drugą nierówność wykazujemy analogicznie korzystając z tego, że:

$$\forall_n \quad \overline{a_{n_n}} \leqslant \overline{a_n}$$

2. s.49

$a_n \in \widetilde{\mathbb{R}}$, A - zbiór granic podciągów (a_n). Chcemy wykazać, że $\liminf a_n = \min A$.
Z poprzedniego zadania, dla każdego podciągu (n_k) ciągu $\{1,2,\dots\}$: $\liminf\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \geqslant \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Ponadto z

Twierdzenia 4 (str. 46 w książce) jeżeli istnieje granica (a_n), to $\liminf a_n = \lim a_n$, a zatem:

$$a \in A \Rightarrow a \geqslant \liminf_{n\to\infty} a_n \qquad (*)$$

Rozważmy teraz trzy przypadki:

Granica dolna skończona) $\liminf a_n =: \underline{a} \in \mathbb{R}$.
Z definicji granicy dolnej: $\sup\{\underline{a_1}, \underline{a_2}, \dots\} = \underline{a} \in \mathbb{R}$.
Z definicji supremum mamy:

$$\begin{cases} \forall_n & \underline{a_n} \leqslant \underline{a} \\ \forall_{\epsilon>0}\exists_n & \underline{a_n} > \underline{a} - \epsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall_n & \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \leqslant \underline{a} \\ \forall_{\epsilon>0}\exists_n & \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} > \underline{a} - \epsilon \end{cases}$$

Niech będzie dowolne $\epsilon > 0$; z definicji infimum:

$$\begin{cases} \forall_k \exists_{n_k \geqslant k} & a_{n_k} \leqslant \underline{a} < \underline{a} + \epsilon \\ \exists_N \forall_{n>N} & \underline{a} - \epsilon < a_n \end{cases}$$

Zatem mając dowolne $\epsilon > 0$ znajdujemy N oraz podciąg $(a_{n_N}, a_{n_{N+1}}, \dots)$ taki, że $\forall_i \ \underline{a} - \epsilon < a_{n_{N+i}} < \underline{a} + \epsilon$.
Czyli znaleźliśmy podciąg ciągu (a_n) zbieżny do $\underline{a}$, czyli $\underline{a} \in A$. Co wobec (*) oznacza, że $\underline{a} = \min A$.

Granica dolna $-\infty$) $\liminf a_n = -\infty$.

$$\begin{gathered} \sup\{\underline{a_1}, \underline{a_2}, \dots\} = -\infty \Rightarrow \\ \forall_n \quad \underline{a_n} = -\infty \Rightarrow \\ \forall_n \quad \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} = -\infty \Rightarrow \\ \forall_{r\in\mathbb{R}} \forall_N \exists_{n_N > N} \quad a_{n_N} < r \end{gathered}$$

Skonstruowaliśmy zatem podciąg $(a_{n_N}, a_{n_{N+1}}, \dots)$ zbieżny do $-\infty$. Czyli $\liminf a_n = -\infty \in A$, a zatem $\min A = -\infty$.

Granica dolna $+\infty$) $\liminf a_n = +\infty$.
Z nierówności (4) (str. 44 w książce) $\limsup a_n = +\infty$. Zatem z Twierdzenia 4 (str. 46 w książce) $\lim a_n = +\infty$. Zatem z Twierdzenia 7 (str. 37 w książce) każdy podciąg jest zbieżny do $+\infty$, czyli w tym przypadku $A = \{+\infty\}$.
Drugą równość: $\limsup a_n = \max A$ dowodzimy w analogicznie.

3. s.49

Niech $a_n \in \widetilde{\mathbb{R}}$ oraz $b := \lim b_n \in \mathbb{R}$.
Z definicji granicy ciągu (b_n):

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n>N} \quad a_n + b - \epsilon < a_n + b_n < a_n + b + \epsilon$$

Z Twierdzenia 1 (str. 45 w książce):

$$\forall_{\epsilon>0} \quad \liminf(a_n + b - \epsilon) \leqslant \liminf(a_n + b_n) \leqslant \liminf(a_n + b + \epsilon)$$

Z Twierdzenia 2 (str. 45 w książce):

$$\forall_{\epsilon>0} \quad \liminf(a_n) + b - \epsilon \leqslant \liminf(a_n + b_n) \leqslant \liminf(a_n) + b + \epsilon \qquad (*)$$

Rozważmy teraz trzy przypadki:

Granica dolna skończona) $\liminf a_n \in \mathbb{R}$.
Przyjmując dowolny ciąg $(\epsilon_i) \to 0$, z (*) oraz z Twierdzenia o trzech ciągach (str. 36 w książce):

$$\liminf a_n + b = \liminf (a_n + b_n)$$

Granica dolna $-\infty$) $\liminf a_n = -\infty$.
Ponieważ $b + \epsilon \in \mathbb{R}$, to $\liminf a_n + b + \epsilon = -\infty$. A zatem z prawej części nierówności (*)

$$\liminf (a_n + b_n) = -\infty = \liminf a_n + b$$

Granica dolna $+\infty$) $\liminf a_n = +\infty$.
Ponieważ $b - \epsilon \in \mathbb{R}$, to $\liminf a_n + b - \epsilon = +\infty$. A zatem z lewej części nierówności (*)

$$\liminf (a_n + b_n) = +\infty = \liminf a_n + b$$

Równość dotyczącą $\limsup (a_n + b_n)$ dowodzimy analogicznie.

4. s.49

Najpierw zauważmy kilka własności funkcji φ, które będą przydatne w dalszym rozumowaniu.

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x \geqslant 0 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & x \geqslant 0 \\ -1 + \frac{1}{1-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & x \geqslant 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{(1+|x|)^2}$$

Z powyżej przytoczonych wzorów łatwo wywnioskować, że:

$$\varphi \text{ jest rosnąca i ciągła w całym przedziale } (-\infty; +\infty) \text{ oraz } \varphi((-\infty; +\infty)) = (-1; 1) \tag{1}$$

Z tego wynika, że:

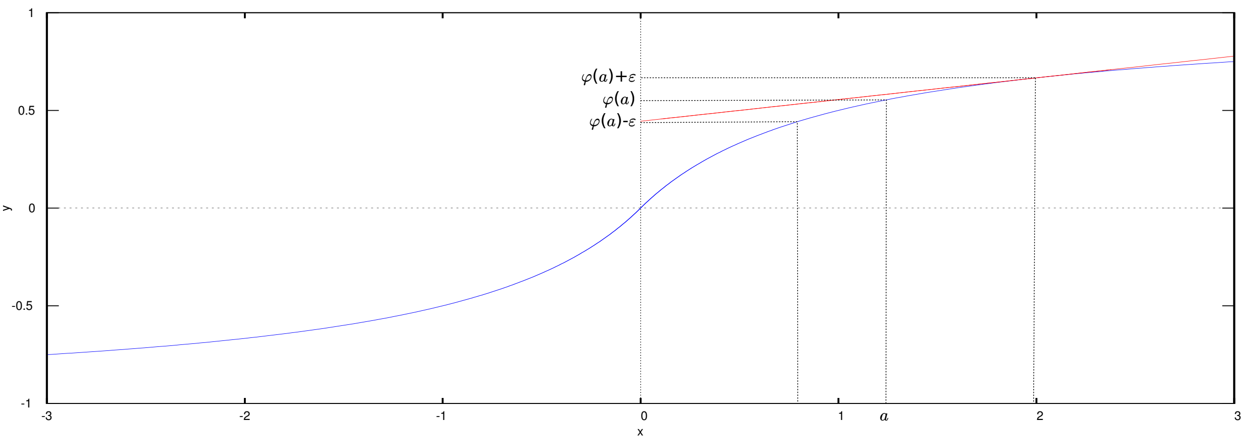
$$\varphi^{-1} \text{ istnieje, jest rosnąca i ciągła w całym przedziale } (-1; 1) \tag{2}$$

Oraz, że:

$$\varphi' \text{ jest rosnąca i ciągła w przedziale } (-\infty; 0\rangle \text{ oraz malejąca i ciągła w przedziale } \langle 0; +\infty) \text{ oraz } \varphi'((-\infty; +\infty)) = (0; 1\rangle \tag{3}$$

Niech będzie dowolne $a \in \mathbb{R}$ oraz ε:

$$0 < \varepsilon < \begin{cases} \min\{|\varphi(a)|, 1 - |\varphi(a)|\} & a \neq 0 \\ 1 & a = 0 \end{cases}$$



Przypadek, gdy $a > 0$. Z interpretacji geometrycznej (patrz rysunek) oraz z tego, że φ' jest malejąca w otoczeniu a, mamy:

$$\forall_b \quad |\varphi(b)-\varphi(a)|<\varepsilon \Rightarrow |\varphi(b)-\varphi(a)|>\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(a)+\varepsilon))|b-a| \tag{4a}$$

Podobnie jeżeli $a<0$, to:

$$\forall_b \quad |\varphi(b)-\varphi(a)|<\varepsilon \Rightarrow |\varphi(b)-\varphi(a)|>\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(a)-\varepsilon))|b-a| \tag{4b}$$

Dla $a=0$ z interpretacji geometrycznej:

$$\forall_b \quad |\varphi(b)|<\varepsilon \Rightarrow |\varphi(b)|>\varphi'(\varphi^{-1}(\varepsilon))|b| \tag{4c}$$

Zauważmy, że ostatni wzór jest szczególnym przypadkiem (4a) oraz (4b). Czyli, że oba te wzory są prawdziwe również dla $a=0$. Dla ustalonego $a\in\mathbb{R}$ mamy z (3) $\varphi'(a)>0$. A zatem z ciągłości funkcji $\varphi,\varphi^{-1},\varphi'$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(a)+\varepsilon))=0 \tag{5a}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(a)-\varepsilon))=0 \tag{5b}$$

Teraz zajmiemy się właściwą treścią zadania, czyli pokazaniem że ρ jest metryką równoważną naturalnej.

Nierówność trójkąta) Ze wzoru (5) (str. 25 w książce):

$$\rho(x,z)+\rho(z,y)=|\varphi(x)-\varphi(z)|+|\varphi(z)-\varphi(y)|\geqslant|\varphi(x)-\varphi(z)+\varphi(z)-\varphi(y)|=|\varphi(x)-\varphi(y)|=\rho(x,y)$$

$\Rightarrow$) Niech $\lim_\rho a_n=a$.

Przypadek $a\in\langle 0;+\infty)$:

Niech będzie dowolne $\nu>0$.
Z (5a):

$$\exists_{\varepsilon_\nu>0}\forall_{\varepsilon\leqslant\varepsilon_\nu}\quad \varepsilon\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(a)+\varepsilon))<\nu$$

Przyjmując:

$$\varepsilon'_\nu=\begin{cases}\min\{\nu,\varepsilon_\nu,|\varphi(a)|,1-|\varphi(a)|\} & a>0\\ \min\{\nu,\varepsilon_\nu,1\} & a=0\end{cases}$$

mamy:

$$\varepsilon'_\nu\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(a)+\varepsilon'_\nu))\leqslant\nu$$

Przyjmując $\varepsilon:=\varepsilon'_\nu\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(a)+\varepsilon'_\nu))$ z założenia oraz z (3):

$$\exists_N\forall_{n>N}\quad |\varphi(a_n)-\varphi(a)|<\varepsilon'_\nu\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(a)+\varepsilon'_\nu))<\varepsilon'_\nu$$

Z (4a) mamy:

$$\exists_N\forall_{n>N}\quad \varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(a)+\varepsilon'_\nu))|a_n-a|<\varepsilon'_\nu\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(a)+\varepsilon'_\nu))$$

Ponownie z (3):

$$\exists_N\forall_{n>N}\quad |a_n-a|<\varepsilon'_\nu\leqslant\nu$$

Zatem wykazaliśmy, że $\lim a_n=a$ w metryce naturalnej.

Przypadek $a\in(-\infty;0)$:

Pokazujemy analogicznie przyjmując we wzorach $\varphi(a)-\varepsilon$ w miejsce $\varphi(a)+\varepsilon$ oraz $\varphi(a)-\varepsilon'_\nu$ w miejsce $\varphi(a)+\varepsilon'_\nu$ oraz korzystając z (5b) i (4b).

Przypadek $a = +\infty$:

Z założenia mamy $\lim \varphi(a_n) = 1$. Niech teraz będzie dowolne $E \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $E > 0$. Przyjmijmy $\varepsilon_E := \frac{1}{E+1} > 0$. Z założenia:

$$\exists_N \forall_{n>N} \quad \varphi(a_n) = \frac{a_n}{1+|a_n|} > 1 - \varepsilon_E = 1 - \frac{1}{E+1} > 0$$

Zauważmy, że z powyższego wynika, że $a_n > 0$, czyli:

$$\begin{aligned}
&\exists_N \forall_{n>N} \quad \frac{a_n}{1+a_n} = 1 - \frac{1}{1+a_n} > 1 - \frac{1}{E+1} \\
&\exists_N \forall_{n>N} \quad \frac{1}{E+1} > \frac{1}{1+a_n} \\
&\exists_N \forall_{n>N} \quad 1 + a_n > E + 1 \\
&\exists_N \forall_{n>N} \quad a_n > E
\end{aligned}$$

Zatem wykazaliśmy, ze $\lim a_n = +\infty$ w metryce naturalnej.

Przypadek $a = -\infty$:

Z założenia mamy $\lim \varphi(a_n) = -1$. Niech teraz będzie dowolne $E \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $E < 0$. Przyjmijmy $\varepsilon_E := \frac{1}{1-E} > 0$. Z założenia:

$$\exists_N \forall_{n>N} \quad \varphi(a_n) = \frac{a_n}{1+|a_n|} < -1 + \varepsilon_E = -1 + \frac{1}{1-E} < 0$$

Zauważmy, że z powyższego wynika, że $a_n < 0$, czyli:

$$\begin{aligned}
&\exists_N \forall_{n>N} \quad \frac{a_n}{1-a_n} = -\frac{a_n}{a_n-1} = -(1 + \frac{1}{a_n-1}) = -1 - \frac{1}{a_n-1} < -1 + \frac{1}{1-E} \\
&\exists_N \forall_{n>N} \quad \frac{1}{1-a_n} < \frac{1}{1-E} \\
&\exists_N \forall_{n>N} \quad 1 - E < 1 - a_n \\
&\exists_N \forall_{n>N} \quad a_n < E
\end{aligned}$$

Zatem wykazaliśmy, ze $\lim a_n = -\infty$ w metryce naturalnej.

$\Leftarrow$)

Zauważmy, że z własności funkcji φ oraz φ': (1) i (3) wynika:

$$\forall_{a,b\in\mathbb{R}} \quad \rho(b,a) = |\varphi(b) - \varphi(a)| \leqslant |b-a|$$

Stąd w oczywisty sposób wynika, że dla każdego ciągu (a_n) $\lim a_n = a \Rightarrow \lim_\rho a_n = a$.

§ 7 Przestrzenie metryczne zupełne

1. s.52

Jeżeli I jest przedziałem otwartym, oraz $I \neq (-\infty; +\infty)$ to $I = (a; b)$ lub $(-\infty; b)$ lub $(a; +\infty)$. Przypuśćmy, że $I = (-\infty; b)$. Łatwo wykazać, że ciąg $(b - \frac{1}{n})_n$ spełnia warunek Cauchy'ego i jest zbieżny do $b \notin (-\infty; b)$. Czyli $(-\infty; b)$ nie jest przestrzenią zupełną. Podobnie dla innych przypadków.

2. s.52

a$_1$) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow \sup\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\dots\}=0 \Leftrightarrow \forall_i |x_i-y_i|=0 \Leftrightarrow \forall_i x_i=y_i \Leftrightarrow x=y.$

a$_2$) Oczywiste.

a$_3$)

$$\forall_{(z_i)}\forall_i \quad |x_i-y_i|=|x_i-z_i+z_i-y_i|\leqslant|x_i-z_i|+|z_i-y_i|$$

Z zadania 3. s.27 (strona 5):

$$\sup\{|x_i-z_i|+|z_i-y_i| : i\in\mathbb{N}\}=\sup\{|x_i-z_i| : i\in\mathbb{N}\}+\sup\{|z_i-y_i| : i\in\mathbb{N}\}$$

Z tych dwu równań wynika nierówność trójkąta:

$$\forall_{x,y,z\in I}\quad \rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

Zupełność) Niech będzie dany ciąg $(x_n)_n =: ((x_{n,i})_i)_n$ ciągów ograniczonych z przestrzeni X, spełniający warunek Cauchy'ego:

$$\begin{aligned}
\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n,m>N}&\quad \rho(x_n,x_m)<\epsilon\\
\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n,m>N}&\quad \sup\{|x_{n,1}-x_{m,1}|,|x_{n,2}-x_{m,2}|,\dots\}<\epsilon\\
\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n,m>N}\forall_{i\in\mathbb{N}}&\quad |x_{n,i}-x_{m,i}|<\epsilon\\
\forall_{i\in\mathbb{N}}\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n,m>N}&\quad |x_{n,i}-x_{m,i}|<\epsilon\\
\forall_{i\in\mathbb{N}}&\quad \text{ciąg liczb rzeczywistych } (x_{n,i})_n \text{ spełnia warunek Cauchy'ego}
\end{aligned}$$

Z zupełności przestrzeni $\mathbb{R}$ istnieją granice:

$$\forall_{i\in\mathbb{N}}\quad \lim_{n\to\infty}x_{n,i}=:\chi_i\in\mathbb{R}$$

Jeżeli wykażemy, że tak zdefiniowany ciąg (χ_i) jest ograniczony (należy do przestrzeni X) oraz, że (x_n) jest zbieżny do tego ciągu w metryce ρ, to będzie oznaczało zupełność przestrzeni X.

$\chi\in X$: Oznaczmy:

$$\underline{x_n}:=\inf_i\{x_{n,i}\}\in\mathbb{R}$$

$$\overline{x_n}:=\sup_i\{x_{n,i}\}\in\mathbb{R}$$

Jeżeli (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego z metryką ρ, to:

$$\begin{aligned}
\exists_N\forall_{n,m>N}&\quad \sup\{|x_{n,1}-x_{m,1}|,|x_{n,2}-x_{m,2}|,\dots\}<1\\
\exists_N\forall_{m>N+1}&\quad \sup\{|x_{N+1,1}-x_{m,1}|,|x_{N+1,2}-x_{m,2}|,\dots\}<1\\
\exists_N\forall_{m>N+1}&\quad \underline{x_{N+1}}-1\leqslant\underline{x_m}\leqslant\overline{x_m}\leqslant\overline{x_{N+1}}+1
\end{aligned}$$

A zatem:

$$\underline{\underline{x}}:=\inf_n\{\underline{x_n}\}=\min\{\underline{x_1},\underline{x_2},\dots,\underline{x_{N+1}}-1\}=\inf_{n,i}\{x_{n,i}\}\in\mathbb{R}$$

$$\overline{\overline{x}}:=\sup_n\{\overline{x_n}\}=\max\{\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_{N+1}}+1\}=\sup_{n,i}\{x_{n,i}\}\in\mathbb{R}$$

Zatem:

$$\forall_{i\in\mathbb{N}}\quad \chi_i=\lim_{n\to\infty}x_{n,i}\in\langle\underline{\underline{x}};\overline{\overline{x}}\rangle$$

Czyli ciąg (χ_i) jest ograniczony.

$\lim \rho(x_n, \chi) = 0$: Wykażemy najpierw przydatną własność ciągów liczbowych rzeczywistych. Dla dowolnego $\epsilon > 0$ oraz $N \geqslant 1$:

$$\forall_{n>N}\ |a_N - a_n| < \epsilon \wedge \lim a_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall_{n>N}\ |a - a_n| \leqslant 2\epsilon \tag{*}$$

Przypuśćmy, że:

$$\exists_{n'>N}\ |a - a_{n'}| > 2\epsilon$$

Z definicji granicy:

$$\exists_{N'}\forall_{n>N'}\ |a - a_n| < |a - a_{n'}| - 2\epsilon$$

W szczególności dla $N'' := \max\{N, N'\} + 1$:

$$|a - a_{N''}| < |a - a_{n'}| - 2\epsilon$$

Z nierówności trójkąta:

$$\begin{gathered} |a_{n'} - a_{N''}| + |a_{N''} - a| \geqslant |a_{n'} - a| \\ |a_{n'} - a_{N''}| \geqslant |a_{n'} - a| - |a_{N''} - a| > |a_{n'} - a| - (|a_{n'} - a| - 2\epsilon) \\ |a_{n'} - a_{N''}| > 2\epsilon \end{gathered}$$

Jeszcze raz z nierówności trójkąta:

$$2\epsilon < |a_{n'} - a_{N''}| \leqslant |a_{n'} - a_N| + |a_N - a_{N''}|$$

co jest sprzeczne z założeniem gdyż każdy ze składników sumy po prawej stronie jest według założenia mniejszy od ϵ. To dowodzi (*).

Niech teraz będzie dowolne $\epsilon > 0$. Z założenia:

$$\begin{aligned} \exists_N\forall_{n>N} \quad & \sup\{|x_{N,1} - x_{n,1}|, |x_{N,2} - x_{n,2}|, \dots\} < \frac{1}{3}\epsilon \\ \exists_N\forall_{n>N}\forall_i \quad & |x_{N,i} - x_{n,i}| < \frac{1}{3}\epsilon \end{aligned}$$

Z definicji χ oraz korzystając z (*) dla każdego i:

$$\begin{aligned} \exists_N\forall_{n>N}\forall_i \quad & |\chi_i - x_{n,i}| \leqslant 2\frac{1}{3}\epsilon < \epsilon \\ \exists_N\forall_{n>N} \quad & \sup\{|\chi_1 - x_{n,1}|, |\chi_2 - x_{n,2}|, \dots\} < \epsilon \\ \exists_N\forall_{n>N} \quad & \rho(\chi, x_n) < \epsilon \end{aligned}$$

co dowodzi, że (x_n) jest zbieżne do χ.

3. s.52

W przypadku $n = 1$ równianie początkowe sprowadza się do równania liniowego, które ma w oczywisty sposób jedno rozwiązanie, które należy do przedziału $(0; 1)$:

$$\begin{gathered} x - 2(1 - x) = 0 \\ x - 2 + 2x = 0 \\ 3x - 2 = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{gathered}$$

W dalszym ciągu zadania będziemy zakładali, że $n > 1$.

Równanie początkowe:

$$x^n - (n+1)(1-x) = 0$$

jest dla dowolnego $a \neq 0$ równoważne równaniu:

$$ax^n - a(n+1) + anx + ax = 0$$
$$ax^n - a(n+1) + anx + (a+1)x = x$$

Będziemy chcieli tak dobrać a, by funkcja:

$$f_a(x) := ax^n - a(n+1) + anx + (a+1)x$$

spełniała założenia twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

$$f_a'(x) = anx^{n-1} + an + (a+1)$$

Konkretniej, chcemy znaleźć takie a, by: $0 < f_a(0) < f_a(1) < 1, f_a$ była rosnąca w przedziale $(0;1)$ (tj. f_a' dodatnia), f_a' była monotoniczna w przedziale $(0;1)$.

$$f_a(0) = -a(n+1) > 0$$
$$a(n+1) < 0$$
$$\boldsymbol{a < 0}$$

$$f_a(0) = -a(n+1) < 1$$
$$a(n+1) > -1$$
$$\boldsymbol{a > -\frac{1}{n+1}}$$

$$f_a(1) = a - a(n+1) + an + a + 1 = a - an - a + an + a + 1 = a + 1 < 1$$
$$\boldsymbol{a < 0}$$

$$f_a(0) < f_a(1)$$
$$-a(n+1) < a + 1$$
$$an + a + a + 1 > 0$$
$$a(n+2) > -1$$
$$\boldsymbol{a > -\frac{1}{n+2}}$$

Ze wzoru na $f_a'(x)$ widać, że dla $a < 0$ (pamiętając, że $n > 1$), f_a' jest malejąca w przedziale $(0;1)$.

$$f_a'(1) = a(2n+1) + 1 > 0$$
$$a(2n+1) > -1$$
$$\boldsymbol{a > -\frac{1}{2n+1}}$$

Zbierając wszystkie te warunki, mamy ostatecznie:

$$a \in (-\frac{1}{2n+1}; 0)$$

Pamiętając, że $n > 1$ przyjmijmy $a = -\frac{1}{3n}$, oraz $g := f_{-\frac{1}{3n}}$.
Podstawiając to do wcześniej wyprowadzonych wzorów mamy:

$$\begin{gathered} g' \text{ jest malejąca w przedziale } \langle 0;1\rangle \\ g'(0) = -\frac{1}{3n}(n+1)+1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3n} \in (0;1) \\ g'(1) = -\frac{1}{3n}(2n+1)+1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n} \in (0;1) \end{gathered}$$

Zatem $g'(x) \in (0;1)$ w całym przedziale $\langle 0;1\rangle$, oraz:

$$\sup\{g'(x) : x \in \langle 0;1\rangle\} = g'(0) \qquad (*)$$

Zatem:

$$\begin{gathered} g \text{ jest rosnąca w przedziale } \langle 0;1\rangle \\ g(0) = \frac{1}{3n}(n+1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3n} \in (0;1) \\ g(1) = -\frac{1}{3n} + 1 = 1 - \frac{1}{3n} \in (0;1) \end{gathered}$$

Zatem $g(x) \in (0;1)$ w całym przedziale $\langle 0;1\rangle$, czyli $g : \langle 0;1\rangle \to \langle 0;1\rangle$. Ponadto $\langle 0;1\rangle$ jest przestrzenią metryczna zupełną.
Z (*) (patrz również rysunek z zadania 4 s.49 (strona 15)) mamy dla dowolnych $0 \leqslant x < y \leqslant 1$:

$$|g(x) - g(y)| < g'(x)|x-y| \leqslant g'(0)|x-y|$$

gdzie $g'(0) \in (0;1)$.
Czyli g spełnia założenia twierdzenia o punkcie stałym Banacha, czyli:

$$\exists!_{x^* \in \langle 0;1\rangle} \quad g(x^*) = x^*$$

Ponadto: $g(0) \neq 0$ oraz $g(1) \neq 1$, czyli $x^* \in (0;1)$.
Ponieważ $a = -\frac{1}{3n} \neq 0$ to jest to równoważne z istnieniem jedynego rozwiązania początkowego równania w przedziale $(0;1)$.

§ 8 Produkt kartezjański przestrzeni metrycznych

1. s.54

a) $\rho_{\mathrm{a}}(x,y) := \sum_{i=1}^{k} \rho(x_i, y_i)$.

Aksjomaty: Aksjomat $\mathbf{a_1}$ wynika ze spełnienia tego aksjomatu dla poszczególnych metryk w przestrzeniach X_i. Podobnie z $\mathbf{a_2}$ oraz $\mathbf{a_3}$.

Równoważność metryk: Niech $\lim_\rho a_n = a$ oraz $\epsilon > 0$ będzie dowolne.

$$\exists_N \forall_{m>N} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \rho(a_{in}, a_i)^2} < \frac{\epsilon}{k}$$

$$\exists_N \forall_{m>N} \quad \sum_{i=1}^{k} \rho(a_{in}, a_i)^2 < \left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2$$

$$\exists_N \forall_{m>N} \quad \max\{\rho(a_{in}, a_i) : i = 1, \ldots, k\}^2 < \left(\frac{\epsilon}{k}\right)^2$$

$$\exists_N \forall_{m>N} \quad \max\{\rho(a_{in}, a_i) : i = 1, \ldots, k\} < \frac{\epsilon}{k}$$

$$\exists_N \forall_{m>N} \quad \sum_{i=1}^{k} \rho(a_{in}, a_i) \leqslant k \max\{\rho(a_{in}, a_i) : i = 1, \ldots, k\} < \epsilon$$

A to oznacza, że $\lim_{\rho_\mathrm{a}} a_n = a$.

Dowód w drugą stronę wynika w oczywisty sposób z nierówności:

$$\sum_{i=1}^{k} \rho(a_{in}, a_i)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \rho(a_{in}, a_i)\right)^2$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} \rho(a_{in}, a_i)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \rho(a_{in}, a_i)$$

Zupełność: Z dowiedzionej równoważności metryk wynika, że dla metryki ρ_a prawdziwe jest też Twierdzenie 1 (str. 53 w książce) a w związku z tym i następne Twierdzenie 2.

b) $\rho_\mathrm{b}(x, y) := \max\{\rho(x_1, y_1), \rho(x_2, y_2), \ldots, \rho(x_k, y_k)\}$.

Aksjomaty: Aksjomat $\mathbf{a_1}$ wynika ze spełnienia tego aksjomatu dla poszczególnych metryk w przestrzeniach X_i. Podobnie z $\mathbf{a_2}$ oraz $\mathbf{a_3}$.

Równoważność metryk: $\lim_\rho a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{\rho_\mathrm{b}} a_n = a$.
Wynika to w oczywisty sposób z nierówności:

$$\max\{\rho(a_{in}, a_i) : i = 1, \ldots, k\} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \rho(a_{in}, a_i)^2}$$

Niech teraz $\lim_{\rho_\mathrm{b}} a_n = a$ oraz $\epsilon > 0$ będzie dowolne.

$$\exists_N \forall_{m>N} \quad \max\{\rho(a_{in}, a_i) : i = 1, \ldots, k\} < \frac{\epsilon}{k}$$

$$\exists_N \forall_{m>N} \quad \sum_{i=1}^{k} \rho(a_{in}, a_i) \leqslant k \max\{\rho(a_{in}, a_i) : i = 1, \ldots, k\} < \epsilon$$

Zatem $\lim_{\rho_\mathrm{a}} a_n = a$, a z dowiedzionej w punkcie **a)** równoważności metryk ρ_a i ρ wynika, że $\lim_\rho a_n = a$.

Zupełność: Z dowiedzionej równoważności metryk wynika, że dla metryki ρ_b prawdziwe jest też Twierdzenie 1 (str. 53 w książce) a w związku z tym i następne Twierdzenie 2.

2. s.54

$\Rightarrow$) Niech $\sup\{\rho(x,y) : x,y \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k\} =: S \in \mathbb{R}$.
Z nierówności (4) (str. 53 w książce) mamy, że:

$$\begin{aligned} \forall_{x,y\in X_1\times\cdots\times X_k}\forall_i \quad & \rho(x_i,y_i) \leqslant \rho(x,y) \\ \forall_i \quad & \sup\{\rho(x_i,y_i) : x_i,y_i \in X_i\} \leqslant S \\ \forall_i \quad & X_i \text{ jest ograniczona} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Oznaczmy $S_i := \delta(X_i) \in \mathbb{R}$ — średnice przestrzeni (supremum odległości między punktami - patrz str. 32 w książce). Mamy $\forall_{x,y\in X_1\times\cdots\times X_k}$:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \rho(x_i,y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} S_i^2}$$

A zatem: $\delta(X_1 \times \cdots \times X_k) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} S_i^2} \in \mathbb{R}$.

§ 9 Granica funkcji

1. s.63

a) $f(x_1,x_2) := \frac{x_1^3-x_2^3}{x_1^2+x_2^2}$.
Weźmy dowolny ciąg $(x_n) \to 0$. Wtedy $((x_n,x_n)) \to (0,0)$ oraz $f(x_n,x_n) = 0$. Zatem granica jeżeli istnieje, to jest równa zero.
Weźmy dowolne $\epsilon > 0$ i niech $\delta := \frac{1}{2}\epsilon$ oraz dowolne $x_1,x_2 \in (-\delta;\delta)$ takie, że $(x_1,x_2) \neq (0,0)$. Możliwe są następujące przypadki:

- $x_1 = x_2$.
$$\left|\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}\right| = 0 < \epsilon$$
- $x_1 = -x_2$.
$$\left|\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}\right| = \left|\frac{2x_2^3}{x_2^2}\right| = 2|x_2| < 2\delta = \epsilon$$
- $x_1 = 0$ albo $x_2 = 0$.
Zakładając pierwszy przypadek (drugi analogicznie):
$$\left|\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}\right| = \left|\frac{-x_2^3}{x_2^2}\right| = |x_2| < \delta < \epsilon$$
- $0 < |x_2| < |x_1|$. Niech $k := \frac{x_2}{x_1}$ czyli $x_2 = kx_1$. Wtedy:
$$\begin{aligned} k &\in (-1;1) \setminus \{0\} \\ |1+k^2| &\in (1;2) \\ |1-k^3| &\in (0;2) \\ \frac{|1-k^3|}{|1+k^2|} &\in (0;2) \end{aligned}$$
Zatem:
$$\left|\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}\right| = \left|\frac{1-k^3}{1+k^2}\right| |x_1| < 2|x_1| < 2\delta = \epsilon$$
- $0 < |x_1| < |x_2|$. Niech $k := \frac{x_1}{x_2}$ czyli $x_1 = kx_2$. Dalej jak w poprzednim punkcie.

Zatem z twierdzenia 1 oraz 3 (str. 55–56 w książce) wynika zbieżność naszego wyrażenia $f(x_1,x_2)$ do zera.

b) $f(x_1, x_2) := \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$.
Weźmy dowolny ciąg $(x_n) \to 0$. Wtedy $((x_n, x_n)) \to (0,0)$.

$$f(x_n, x_n) = \frac{x_n x_n^2}{x_n^2 + x_n^4} = \frac{1}{\frac{1}{x_n} + x_n} \to 0 \text{ przy } x_n \to 0 \quad \text{(dowód elementarny)}$$

Również $((x_n, \sqrt{x_n})) \to (0,0)$.

$$f(x_n, \sqrt{x_n}) = \frac{x_n \sqrt{x_n}^2}{x_n^2 + \sqrt{x_n}^4} = \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_n^2} = \frac{1}{2}$$

Zatem dla dwóch różnych ciągów otrzymaliśmy różne granice, co dowodzi rozbieżności (nie istnienia granicy) wyrażenia f.

c) $f(x_1, x_2) := \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}$.
Weźmy dowolny ciąg $(x_n) \to 0$. Wtedy $((x_n, x_n)) \to (0,0)$.

$$f(x_n, x_n) = \frac{x_n^2 + x_n^2}{x_n^2 + x_n^2 + x_n^2} = \frac{2}{3}$$

Również $((x_n, -x_n)) \to (0,0)$.

$$f(x_n, -x_n) = \frac{x_n^2 + x_n^2}{x_n^2 - x_n^2 + x_n^2} = 2$$

Zatem dla dwóch różnych ciągów otrzymaliśmy różne granice, co dowodzi rozbieżności (nie istnienia granicy) wyrażenia f.

d) $f(x_1, x_2) := \frac{\sqrt[3]{x_1^2 + x_2^2}}{|x_1| + |x_2|}$.
Weźmy dowolny ciąg $(x_n) \to 0$. Wtedy $((x_n, x_n)) \to (0,0)$ oraz:

$$f(x_n, x_n) = \frac{\sqrt[3]{x_n^2 + x_n^2}}{2|x_n|} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \frac{|x_n|^{2/3}}{|x_n|} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} |x_n|^{-\frac{1}{3}} \to +\infty$$

Zatem granica jeżeli istnieje, to jest nieskończona.
Weźmy dowolne $E > 0$ i niech $\delta := \frac{1}{8E^3}$ $(E = \frac{1}{2\sqrt[3]{\delta}})$ oraz dowolne $x_1, x_2 \in (-\delta; \delta)$ takie, że $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.
Możliwe są następujące przypadki:

- $x_1 = 0$ albo $x_2 = 0$.
  Zakładając pierwszy przypadek (drugi analogicznie):

$$f(0, x_2) = \frac{\sqrt[3]{x_2^2}}{|x_2|} = \frac{1}{\sqrt[3]{|x_2|}} > \frac{1}{\sqrt[3]{\delta}} > E$$

- $0 < |x_2| \leqslant |x_1|$. Niech $k := \frac{x_2}{x_1}$ czyli $x_2 = k x_1$. Wtedy:

$$\begin{aligned}
k &\in \langle -1; 1 \rangle \setminus \{0\} \\
|k| + 1 &\in (1; 2\rangle \\
k^2 + 1 &\in (1; 2\rangle \\
\sqrt[3]{k^2 + 1} &\in (1; \sqrt[3]{2}\rangle \\
\frac{\sqrt[3]{k^2 + 1}}{|k| + 1} &\in (\frac{1}{2}; \sqrt[3]{2}\rangle \\
\frac{\sqrt[3]{k^2 + 1}}{|k| + 1} &> \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Zatem:

$$f(x_1, kx_1) = \frac{\sqrt[3]{x_1^2 + k^2 x_1^2}}{|x_1| + k|x_1|} = \frac{\sqrt[3]{1+k^2}}{1+|k|}\frac{1}{\sqrt[3]{|x_1|}} > \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{|x_2|}} > \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{\delta}} = E$$

- $0 < |x_1| \leqslant |x_2|$. Niech $k := \frac{x_1}{x_2}$ czyli $x_1 = kx_2$. Dalej jak w poprzednim punkcie.

Zatem z twierdzenia 8 (str. 58 w książce) wynika zbieżność naszego wyrażenia $f(x_1, x_2)$ do $+\infty$.

2. s.63

Rozwiązanie analogiczne do dowodu twierdzenia 11 (str. 59 w książce).

$\Rightarrow$) Oczywiste.

$\Leftarrow$) Niech $\lim_{x\to a} f_1(x) = b = \lim_{x\to a} f_2(x)$ i niech będzie dowolne $\epsilon > 0$.

$$\exists_{\delta_1} |x-a| < \delta_1 \wedge x \in A_1 \Rightarrow |f_1(x) - b| = |f(x) - b| < \epsilon$$
$$\exists_{\delta_2} |x-a| < \delta_2 \wedge x \in A_2 \Rightarrow |f_2(x) - b| = |f(x) - b| < \epsilon$$

Biorąc $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ mamy $x \in A \Rightarrow x \in A_1 \vee x \in A_2$ oraz $|x-a| < \delta_1 \wedge |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$.

§ 10 Funkcje ciągłe

1. s.67

Wykażemy, że f jest ciągła jedynie w punktach $\mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \dots\}$.

Niech $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \dots\}$ oznaczmy $\underline{x} := \sup\{a_i : a_i < x, i = 1, 2, \dots\}$, $\overline{x} := \inf\{a_i : x < a_i, i = 1, 2, \dots\}$. Mamy następujące przypadki:

- $\underline{x} < x < \overline{x}$. Przyjmując $\delta := \min\{x - \underline{x}, \overline{x} - x\}$ mamy

$$\forall_{x-\delta<y<x+\delta} \quad f(y) = 0 = f(x)$$

  czyli funkcja f jest ciągła w x.

- $\underline{x} = x$. Niech będzie dowolne $\epsilon > 0$.

$$N_0 := \min\{N : 0 < x - a_N < \epsilon\}$$
$$N_k := \min\{N : 0 < x - a_N < x - a_{N_{k-1}}\}$$

  Z definicji supremum oraz tego, że $x \notin \{a_1, \dots\}$ wynika, że każdy ze zbiorów z którego bierzemy minimum jest niepusty oraz, że $N_k > N_{k-1}$. Czyli mamy: $N_k \to +\infty$ oraz $\frac{1}{N_k} \to 0$ zatem:

$$\exists_{k_\epsilon} \quad \frac{1}{N_{k_\epsilon}} < \epsilon$$

  Z definicji ciągu N_k mamy:

$$\forall_i \quad 0 < x - a_i < x - a_{N_{k_\epsilon}} \Rightarrow i > N_{k_\epsilon} \Rightarrow f(a_i) < f(a_{N_{k_\epsilon}}) = \frac{1}{N_{k_\epsilon}} < \epsilon$$

  Zatem:

$$\forall_y \quad 0 < x - y < x - a_{N_{k_\epsilon}} \Rightarrow |f(y)| < \epsilon$$

Jeżeli teraz $\overline{x} = x$ to przyjmując:

$$M_0 := \min\{M : 0 < a_M - x < \epsilon\}$$
$$M_k := \min\{M : 0 < a_M - x < a_{M_{k-1}} - x\}$$

W podobny sposób znajdujemy M_{k_ϵ} i przyjmujemy $\delta := \min\{x - a_{N_{k_\epsilon}}, a_{M_{k_\epsilon}} - x\}$. Jeżeli $\overline{x} > x$ to przyjmujemy $\delta := \min\{x - a_{N_{k_\epsilon}}, \overline{x} - x\}$. Jeżeli $\underline{x} < x$ i $\overline{x} = x$ to $\delta := \min\{x - \underline{x}, a_{M_{k_\epsilon}} - x\}$. Wtedy $\forall_y |x - y| < \delta \Rightarrow |f(y)| < \epsilon$ zatem wykazaliśmy ciągłość funkcji w punkcie $x \notin \{a_1, \dots\}$.

Niech teraz $x = a_i$ dla pewnego i.
Z twierdzenia 1 (str. 25 w książce) wynika, że $\forall_{\delta>0}\ (a_i - \delta; a_i + \delta)$ jest nieprzeliczalny. Ponieważ $\{a_1, a_2, \dots\}$ jest przeliczalny, to

$$\forall_\delta \exists_{y \in (a_i - \delta; a_i + \delta) \setminus \{a_i\}} y \notin \{a_1, \dots\} \Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{i}\right| > \epsilon$$

dla pewnego ϵ.

2. s.68[1]

$$\rho(x, y) := \sup\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots\} \quad x, y \text{ – ograniczone}$$
$$f(x) := (x, x^2, x^3, \dots) =: (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots) \quad x \in \langle 0; 1\rangle$$

Mamy zatem: $f_n(x) = x^n, \quad f_n'(x) = nx^{n-1}$. Ponadto obie funkcje są ciągłe i rosnące (dla każdego n).
Mamy dla $x \in \langle 0; 1)$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} nx^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} nx^n - \lim_{n\to+\infty} x^n = 0 - 0 = 0$$

Dowód – patrz przykład 3. (str. 39 w książce).
Zatem:

$$\forall_{\epsilon>0} \forall_{x\in\langle 0;1)} \exists_N \forall_{n>N} \quad f_n'(x) < \epsilon$$

Z powyższego wynika, że:

$$\forall_{x\in\langle 0;1)} \exists_{N_x} \quad g(x) := f_{N_x}'(x) = \max\{f_1'(x), f_2'(x), \dots\}$$

Ponadto z faktu, że dla każdego n f_n' jest rosnąca wynika, że i g jest rosnąca. Zauważmy, że z ciągłości każdej z funkcji f_i' wynika, że w pewnym otoczeniu x maksimum (w definicji funkcji g) może być brane ze skończonej liczby elementów. To wobec ćwiczenia 3. s.68 oznacza, że funkcja g jest ciągła w przedziale $\langle 0; 1)$.

Ciągłość w $\langle 0; 1)$) Niech mamy dowolne $x \in \langle 0; 1)$ oraz $\epsilon > 0$.
Z ćwiczenia 3. s.68 oraz ciągłości funkcji g:

$$\exists_{0<\delta<1-x} \quad \max\{1, g(x + \delta)\}\delta < \epsilon$$

Niech teraz będzie x' takie, że $|x - x'| < \delta$. Z tego, że f_n, f_n' oraz g są rosnące (patrz również ćwiczenie 4. s.49 – str. 15):

$$\begin{aligned}
\rho(f(x), f(x')) &= \sup\{|x - x'|, |f_2(x) - f_2(x')|, |f_3(x) - f_3(x')|, \dots\} \\
&\leqslant \sup\{|x - x'|, f_2'(x + \delta)|x - x'|, f_3'(x + \delta)|x - x'|, \dots\} \\
&\leqslant \sup\{|x - x'|, g(x + \delta)|x - x'|, g(x + \delta)|x - x'|, \dots\} \\
&= \max\{1, g(x + \delta)\}|x - x'| \\
&\leqslant \max\{1, g(x + \delta)\}\delta \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Dobraliśmy δ do ϵ co oznacza, że f jest ciągła w przedziale $\langle 0; 1)$.

[1] Mam wrażenie, że istnieje znacznie prostszy dowód ćwiczenia.

Nieciągłość w 1) Mamy $f(1) = (1, 1, \dots)$.
Zachodzi: $(1+\frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n \to e$. Zatem $(\frac{n-1}{n})^n = (\frac{n-1}{n})^{n-1}(\frac{n-1}{n}) \to \frac{1}{e}1 = \frac{1}{e}$. Czyli w szczególności:

$$\exists_N \forall_{n \geqslant N} \quad \left| \left(\frac{n-1}{n}\right)^n - \frac{1}{e} \right| < \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{e}\right|$$

Z nierówności trójkąta (dla $n \geqslant N$):

$$\begin{aligned} \left|1-\frac{1}{e}\right| &\leqslant \left|\left(\frac{n-1}{n}\right)^n - 1\right| + \left|\left(\frac{n-1}{n}\right)^n - \frac{1}{e}\right| \\ &< \left|\left(\frac{n-1}{n}\right)^n - 1\right| + \frac{1}{2}\left|1-\frac{1}{e}\right| \end{aligned}$$

Czyli:

$$\exists_N \forall_{n \geqslant N} \quad \left| \left(\frac{n-1}{n}\right)^n - 1 \right| > \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{e}\right|$$

Z czego wynika:

$$\forall_n \exists_{N > n} \quad \left| \left(\frac{n-1}{n}\right)^n - 1 \right| > \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{e}\right|$$

Niech teraz $x_n := \frac{n-1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Spełnia on warunek: $(x_n) \to 1$.
Z ostatniej nierówności wynika:

$$\forall_n \quad \rho(f(x_n), f(1)) = \sup\left\{ \left|\frac{n-1}{n} - 1\right|, \left|\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - 1\right|, \dots \right\} > \frac{1}{2}\left|1-\frac{1}{e}\right| > 0$$

Czyli $f(x_n) \nrightarrow f(1)$.

3. s.68

max) $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$
Niech $X_f := \{x \in X : h(x) = f(x)\}$, analogiczne X_g. Mamy $X = X_f \cup X_g$.
Niech $a \in X$. Jeżeli a nie jest punktem skupienia zbioru X_f, to każdy ciąg $(x_n) \to a$ posiada jedynie wyrazy należące do (powyżej pewnego indeksu) do X_g zatem z ciągłości funkcji g i h jest ciągła w a. Podobnie rozumujemy w odwrotnym przypadku.
Załóżmy zatem, że a jest punktem skupienia zarówno zbioru X_f jaki i X_g. Przypuśćmy, że $f(a) < g(a)$. Z ciągłości f:

$$\exists_\delta \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}(g(a) - f(a)) \Rightarrow f(x) < g(a)$$

co przeczy temu, że a jest punktem skupienia X_f (wobec definicji funkcji h i zbioru X_f). Podobnie rozumujemy gdyby $f(a) > g(a)$. Zatem musi być $f(a) = g(a)$, a to oznacza (patrz ćw. 2. s.63 – str. 25), że h jest ciągła w a.

min) $k(x) := \min\{f(x), g(x)\}$
Niech $X_f := \{x \in X : k(x) = f(x)\}$, analogiczne X_g. Mamy $X = X_f \cup X_g$.
Niech $a \in X$. Jeżeli a nie jest punktem skupienia zbioru X_f, to każdy ciąg $(x_n) \to a$ posiada jedynie wyrazy należące do (powyżej pewnego indeksu) do X_g zatem z ciągłości funkcji g i k jest ciągła w a. Podobnie rozumujemy w odwrotnym przypadku.
Załóżmy zatem, że a jest punktem skupienia zarówno zbioru X_f jaki i X_g. Przypuśćmy, że $f(a) < g(a)$. Z ciągłości g:

$$\exists_\delta \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{1}{2}(g(a) - f(a)) \Rightarrow f(a) < g(x)$$

co przeczy temu, że a jest punktem skupienia X_g (wobec definicji funkcji k i zbioru X_g). Podobnie rozumujemy gdyby $f(a) > g(a)$. Zatem musi być $f(a) = g(a)$, a to oznacza (patrz ćw. 2. s.63 – str. 25), że k jest ciągła w a.

4. s.68

Niech $A \subset X,\ A \neq \emptyset,\ d(x, A) := \inf_{y \in A} \rho(x, y)$.
Wykażemy najpierw pewną nierówność, która będzie bardzo przydatna w rozwiązaniu ćwiczenia. Z nierówności trójkąta, dla dowolnego $a \in A$ oraz $x_1, x_2 \in X$:

$$\begin{cases} \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, a) \geqslant \rho(x_1, a) \\ \rho(x_1, x_2) + \rho(x_1, a) \geqslant \rho(x_2, a) \end{cases}$$

Z czego wynika:

$$\rho(x_1, x_2) \geqslant |\rho(x_1, a) - \rho(x_2, a)|$$

Przechodząc do infimum po A:

$$|d(x_1, A) - d(x_2, A)| \leqslant \rho(x_1, x_2)$$

Niech teraz $x \in X,\ \epsilon > 0$ będą dowolne. Przyjmując $\delta := \epsilon$ mamy:

$$\forall_y \quad \rho(x, y) < \delta \Rightarrow |d(x, A) - d(y, A)| \leqslant \rho(x, y) < \delta = \epsilon$$

5. s.68

Ciągłość g w punktach zbioru A wynika wprost z ciągłości f i definicji g. Przypuśćmy zatem, ze $x \in B \setminus A$ oraz $\epsilon > 0$ dowolne. Z ciągłości f mamy:

$$\exists_{\delta_{x,\epsilon}} \forall_{y \in A} \quad \rho(y, x) < \delta_{x,\epsilon} \Rightarrow \rho(f(y), f(x)) < \frac{1}{2}\epsilon \tag{*}$$

$$\forall_{x' \in B} \exists_{\delta_{x',\epsilon}} \forall_{y \in A} \quad \rho(y, x') < \delta_{x',\epsilon} \Rightarrow \rho(f(y), f(x')) < \frac{1}{2}\epsilon \tag{**}$$

Niech teraz $x' \in B$ będzie takie, że $\rho(x, x') < \frac{1}{2}\delta_{x,\epsilon}$. Z definicji zbioru B (jako punktów skupienia A) wynika, że:

$$\exists_{y \in A} \quad \rho(y, x') < \min\{\frac{1}{2}\delta_{x,\epsilon}, \delta_{x',\epsilon}\}$$

Mamy wtedy z nierówności trójkąta:

$$\rho(y, x) \leqslant \rho(x, x') + \rho(y, x') < \delta_{x,\epsilon}$$

Teraz korzystając z (*) i (**) mamy:

$$\rho(g(x), g(x')) = \rho(\lim_{y \to x} f(y), \lim_{y \to x'} f(y)) \leqslant \rho(f(y), \lim_{y \to x} f(y)) + \rho(f(y), \lim_{y \to x'} f(y)) < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

Zatem do dowolnego ϵ dobraliśmy takie $\delta := \frac{1}{2}\delta_{x,\epsilon}$, że $\rho(x, x') < \delta \Rightarrow \rho(g(x), g(x')) < \epsilon$, czyli g jest ciągła w dowolnym punkcie zbioru B.

6. s.68

$\Rightarrow$) Ciągłość f wynika z nierówności (4) - str. 53 w książce.

$\Leftarrow$) Niech $\epsilon > 0$ i $x \in X$ będą dowolne.
Z ciągłości f:

$$\exists_\delta \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| = |g(x, y) - g(x', y)| < \epsilon$$

Ciągłość g wykażemy w metryce: $\overline{\rho}((x, y), (x', y')) := \max\{|x - x'|, |y - y'|\}$ która jest równoważna metryce naturalnej (patrz ćw. 1.b) s.54 – str. 22). A to oznacza, że ciągłość w metryce $\overline{\rho}$ jest równoważna ciągłości

w metryce naturalnej.
Niech $(x, y),\ (x', y')$ będą takie, że:

$$\overline{\rho}((x,y),(x',y')) < \delta$$
$$\max\{|x-x'|,|y-y'|\} < \delta$$
$$|x-x'| < \delta \text{ i } |y-y'| < \delta$$

Czyli:
$$|g(x,y)-g(x',y')| = |f(x)-f(x')| < \epsilon$$

§ 11 Ciągi funkcyjne

1. s.71

a) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{x+n+1} - \sqrt{x+n}$
Dla $\epsilon > 0$ szukamy takiego N, ze $\forall_{n>N}\forall_x\ f_n(x) < \epsilon$.

$$\sqrt{x+n+1} - \sqrt{x+n} =$$
$$\frac{(\sqrt{x+n+1} - \sqrt{x+n})(\sqrt{x+n+1} + \sqrt{x+n})}{\sqrt{x+n+1} + \sqrt{x+n}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{x+n+1} + \sqrt{x+n}} < \frac{1}{2\sqrt{x+n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon$$

Zatem: $N := \lfloor \frac{1}{4\epsilon^2} \rfloor$.

b) $f_n : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to \mathbb{C}, \quad f_n(z) = z^n(1-|z|)$
Dla $\epsilon > 0$ szukamy takiego N, ze $\forall_{n>N}\forall_z\ |f_n(z) - 0| = |f_n(z)| < \epsilon$.

$$|f_n(z)| = |z|^n(1-|z|) < \epsilon$$

Jeżeli $\epsilon \geqslant 1$ to $N := 1$. Załóżmy więc, ze $\epsilon < 1$. Mamy dwa przypadki.
Dla $1 - \epsilon < |z| < 1$ zachodzi:
$$|z|^n(1-|z|) < 1 - |z| < \epsilon$$
W tym wypadku $N := 1$.
Dla $|z| \leqslant 1 - \epsilon$:
$$|z|^n(1-|z|) \leqslant (1-\epsilon)^n(1-|z|) \leqslant (1-\epsilon)^n < \epsilon$$
Tutaj: $N := \lfloor \log_{1-\epsilon} \epsilon \rfloor = \lfloor \frac{\log \epsilon}{\log(1-\epsilon)} \rfloor$.

c) $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_n(x_1, x_2) = \frac{1}{|x_1|+|x_2|+1} \sin \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{n}$
Jak pokazano w przykładzie 3 str. 61 oraz wzór (13) str. 67 w książce: $|\sin\alpha| \leqslant \alpha$ dla każdego α. Z tego oraz z nierówności trójkąta wynika:

$$\frac{1}{|x_1|+|x_2|+1} \sin \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{n} \leqslant \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{|x_1|+|x_2|+1}\frac{1}{n} \leqslant \frac{|x_1|+|x_2|}{|x_1|+|x_2|+1}\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$$

Zatem dla zbieżności jednostajnej wystarczy dla danego $\epsilon > 0$ dobrać $N := \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$.

2. s.71

Z nierówności trójkąta wynika nierówność (patrz dowód Twierdzenia 1 na str. 34 w książce):

$$\forall_{z_1,z_2\in\mathbb{C}} \quad ||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1-z_2|$$

Mamy zatem:

$$\forall_z \quad ||f_n(z)|-|f(z)|| \leqslant |f_n(z)-f(z)|$$

Zatem dla danego ϵ, N dobieramy ze zbieżności jednostajnej (f_n).

3. s.71

±) Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolne.
Ze zbieżności jednostajnej (f_n) i (g_n):

$$\exists_N \forall_{n>N} \forall_x \quad |f_n(x)-f(x)| < \frac{1}{2}\epsilon$$
$$\exists_M \forall_{n>M} \forall_x \quad |g_n(x)-g(x)| < \frac{1}{2}\epsilon$$

Mamy zatem:

$$\forall_{n>\max\{N,M\}} \forall_x \quad |f_n(x)+g_n(x)-(f(x)+g(x))| \leqslant |f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)| < \frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\epsilon$$

Dla minus'a podobnie.

min/max) Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolne.
Ze zbieżności jednostajnej (f_n) i (g_n):

$$\begin{aligned} &\exists_{N_{f,\frac{\epsilon}{8}}} \forall_{n>N_{f,\frac{\epsilon}{8}}} \forall_x \quad |f_n(x)-f(x)| < \frac{\epsilon}{8} \\ &\exists_{N_{g,\frac{\epsilon}{8}}} \forall_{n>N_{g,\frac{\epsilon}{8}}} \forall_x \quad |g_n(x)-g(x)| < \frac{\epsilon}{8} \end{aligned} \tag{I.1}$$

Przyjmując $N := \max\{N_{f,\frac{\epsilon}{8}}, N_{g,\frac{\epsilon}{8}}\}$ z nierówności trójkąta mamy dla $n > N$ i dla każdego x:

$$|f_n(x)-g_n(x)-(f(x)-g(x))| \leqslant |f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)| < \frac{\epsilon}{4} \tag{I.2}$$

Ponadto z nierówności jak w poprzednim ćwiczeniu:

$$||f_n(x)-g_n(x)|-|f(x)-g(x)|| \leqslant |f_n(x)-g_n(x)-(f(x)-g(x))|$$

Czyli:

$$||f_n(x)-g_n(x)|-|f(x)-g(x)|| < \frac{\epsilon}{4} \tag{I.3}$$

Zauważmy, że z (I.2) wynikają następujące implikacje (dla $n > N$ i dla każdego x):

$$\begin{aligned} g(x)-f(x) > \frac{\epsilon}{4} &\Rightarrow g_n(x) > f_n(x) \\ f(x)-g(x) > \frac{\epsilon}{4} &\Rightarrow f_n(x) > g_n(x) \end{aligned} \tag{I.4}$$

Oznaczmy:

$$X_{f,\frac{\epsilon}{4}} := \{x \in X : g(x)-f(x) > \frac{\epsilon}{4}\}$$
$$X_{g,\frac{\epsilon}{4}} := \{x \in X : f(x)-g(x) > \frac{\epsilon}{4}\}$$
$$X_{0,\frac{\epsilon}{4}} := X \setminus (X_{f,\frac{\epsilon}{4}} \cup X_{g,\frac{\epsilon}{4}})$$

Zauważmy, że dla $x \in X_{f,\frac{\epsilon}{4}}$ i $n > N$ z (I.4) wynika $\min\{f_n(x), g_n(x)\} = f_n(x)$ oraz $\min\{f(x), g(x)\} = f(x)$ co wobec (I.1) oznacza, że $|\min\{f_n(x), g_n(x)\} - \min\{f(x), g(x)\}| < \epsilon$. Podobnie dla $x \in X_{g,\frac{\epsilon}{4}}$.
Dla $x \in X_{0,\frac{\epsilon}{4}}$ (z definicji tego zbioru) mamy:

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{4}$$

Co wobec (I.3) implikuje:

$$\forall_{n>N} \quad |f_n(x) - g_n(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

Z powyższych dwóch nierówności wynikają:

$$|\min\{f(x), g(x)\} - g(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{4}$$

$$\forall_{n>N} \quad |\min\{f_n(x), g_n(x)\} - g_n(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

Ostatecznie:

$$\begin{aligned}\forall_{n>N} \quad & |\min\{f_n(x), g_n(x)\} - \min\{f(x), g(x)\}| = \\ & |\min\{f_n(x), g_n(x)\} - g_n(x) + g_n(x) - g(x) + g(x) - \min\{f(x), g(x)\}| \leqslant \\ & |\min\{f_n(x), g_n(x)\} - g_n(x)| + |g_n(x) - g(x)| + |g(x) - \min\{f(x), g(x)\}| < \\ & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon\end{aligned}$$

Zatem wcześniej określone N jest „dobre” dla wszystkich $x \in X$.
W przypadku max wykazujemy podobnie.

4. s.71

⇒) Zbieżność jednostajna każdej z funkcji f_{in} do f_i wynika z nierówności (4) - str. 53 w książce.

⇐) Załóżmy, że każda z funkcji f_{in} jest zbieżna jednostajnie do f_i. Dla dowolnego $\epsilon > 0$ mamy:

$$\forall_{i=1,\ldots,k} \exists_{N_i} \forall_{n>N_i} \forall_x \quad \rho(f_{in}(x), f_i(x)) < \frac{\epsilon}{\sqrt{k}}$$

Biorąc $N := \max\{N_1, \ldots, N_k\}$ mamy:

$$\forall_{n>N} \forall_x \quad \rho(F_n(x), F(x)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \rho(f_{in}(x), f_i(x))^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{\epsilon^2}{k}} = \epsilon$$

a to oznacza zbieżność jednostajną (F_n) do F.

§ 12 Przestrzenie topologiczne

1. s.77

a) $\emptyset, \mathbb{R}, (a; +\infty)$

(a₁) Z definicji.

($\mathbf{a_2}$)

- $(a;+\infty)\cap\emptyset=\emptyset\in\mathcal{T}_1$.
- $(a;+\infty)\cap\mathbb{R}=(a;+\infty)\in\mathcal{T}_1$.
- $(a;+\infty)\cap(b;+\infty)=(\max\{a,b\};+\infty)\in\mathcal{T}_1$.

($\mathbf{a_3}$)

- Włączenie $\emptyset$ do sumy zbiorów otwartych nie zmienia sumy.
- Włączenie $\mathbb{R}$ do sumy zbiorów otwartych powoduje, że suma jest równa $\mathbb{R}$, a więc jest otwarta.
- Niech $\forall_{s\in S}\ U_s\in\mathcal{T}_1$. Z powyższych podpunktów możemy założyć, że dla każdego s $U_s\neq\emptyset$ i $U_s\neq\mathbb{R}$. Zatem $\forall_{s\in S}\exists_{a_s\in\mathbb{R}}\ U_s=(a_s;+\infty)$. Niech $a:=\inf_{s\in S}a_s\in\widetilde{\mathbb{R}}$.
  Jeżeli $a=-\infty$, to $\bigcup_{s\in S}U_s=(-\infty;+\infty)\in\mathcal{T}_1$.
  Dowód: $\forall_{s\in S}\ U_s\subset(-\infty;+\infty)\Rightarrow\bigcup_{s\in S}U_s\subset(-\infty;+\infty)$; niech $x\in(-\infty;+\infty)$, z założenia (że infimum jest $-\infty$) $\exists_{s_x\in S}\ a_{s_x}<x\Rightarrow x\in(a_{s_x};+\infty)\Rightarrow x\in\bigcup_{s\in S}U_s$.
  Jeżeli $a\in\mathbb{R}$, to $\bigcup_{s\in S}U_s=(a;+\infty)$.
  Dowód: z założenia $\forall_{s\in S}\ U_s=(a_s;+\infty)\subset(a;+\infty)$ (bo $a_s\geqslant a$); niech $x\in(a;+\infty)\Rightarrow x>a$, z definicji infimum $\exists_{s\in S}\ x>a_s\geqslant a$, zatem $\exists_{s\in S}\ x\in(a_s;+\infty)$ czyli $x\in\bigcup_{s\in S}(a_s;+\infty)$.

b) $\emptyset,\exists_{a,b}\ (-\infty;a\rangle\cup\langle b;+\infty)\subset U$

($\mathbf{a_1}$) Z definicji.

($\mathbf{a_2}$) Niech $U_1,U_2\in\mathcal{T}_2$, czyli $\exists_{a_1,b_1,a_2,b_2}\ (-\infty;a_1\rangle\cup\langle b_1;+\infty)\subset U_1\wedge(-\infty;a_2\rangle\cup\langle b_2;+\infty)\subset U_2$. Wtedy przyjmując $a:=\min\{a_1,a_2\}$, $b:=\max\{b_1,b_2\}$ mamy $(-\infty;a\rangle\subset(-\infty;a_1\rangle\wedge(-\infty;a\rangle\subset(-\infty;a_2\rangle\wedge\langle b;+\infty)\subset\langle b_2;+\infty)\wedge\langle b;+\infty)\subset\langle b_2;+\infty)$ czyli $(-\infty;a\rangle\cup\langle b;+\infty)\subset U_1\wedge(-\infty;a\rangle\cup\langle b;+\infty)\subset U_2$, czyli $(-\infty;a\rangle\cup\langle b;+\infty)\subset U_1\cap U_2\Rightarrow U_1\cap U_2\in\mathcal{T}_2$.

($\mathbf{a_3}$) Jeżeli $\exists_{a,b}\ (-\infty;a\rangle\cup\langle b;+\infty)\subset U$, to ta sama suma przedziałów jest zawarta też w dowolnej sumie zawierającej U.

c) $\emptyset,\forall_{x\in U}\exists_{r>0}\ (x-r;x+r)\cap\mathbb{Q}\subset U$

($\mathbf{a_1}$) Z definicji.

($\mathbf{a_2}$) Niech $U_1,U_2\in\mathcal{T}_3$, $U_1\cap U_2\neq\emptyset$. Niech $x\in U_1\cap U_2$

$$\exists_{r_1>0}\ (x-r_1;x+r_1)\cap\mathbb{Q}\subset U_1$$
$$\exists_{r_2>0}\ (x-r_2;x+r_2)\cap\mathbb{Q}\subset U_2$$

Przyjmując $r:=\min\{r_1,r_2\}$ mamy $(x-r;x+r)\cap\mathbb{Q}\subset U_1\cap U_2$, czyli $U_1\cap U_2\in\mathcal{T}_3$.

($\mathbf{a_3}$) Niech $U=\bigcup_{s\in S}U_s$, gdzie S dowolne, oraz $\forall_{s\in S}\ U_s\in\mathcal{T}_3$.
Niech $x\in U\Rightarrow\exists_{s\in S}\ x\in U_s\Rightarrow\exists_r\ (x-r;x+r)\cap\mathbb{Q}\subset U_s\Rightarrow\exists_r\ (x-r;x+r)\cap\mathbb{Q}\subset\bigcup_{s\in S}U_s=U$, czyli $U\in\mathcal{T}_3$.

2. s.77

a) Niech $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1\neq x_2$. Każde otoczenie punktu x_1 jest postaci $(a;+\infty)$ gdzie $a<x_1$. Jeżeli $x_2>x_1$ to wtedy każde takie otoczenie będzie zawierało również punkt x_2.

b)

$\Rightarrow$) Niech $x \in X$. Mamy wykazać, że $X \setminus \{x\}$ jest otwarty. Niech $x' \in X,\ x' \neq x$ czyli $x' \in X \setminus \{x\}$. Z założenia (X jest H_0-przestrzenią) oraz tego, że $x' \neq x$ wynika, że istnieje otoczenie U' takie, że $x \notin U'$ czyli $U' \subset X \setminus \{x\}$. Wobec dowolności x' oznacza to, że $X \setminus \{x\}$ jest otwarty (Twierdzenia 2 i 3 – str. 73 w książce), czyli $\{x\}$ jest domknięty.

$\Leftarrow$) Niech $x, x' \in X,\ x \neq x'$. Ponieważ z założenia $X \setminus \{x\}$ jest otwarty, a $x' \in X \setminus \{x\}$, więc istnieje otoczenie x' – U' takie, że $U' \subset X \setminus \{x\}$ czyli $x \notin U'$ co oznacza spełnienie warunku H_0-przestrzeni przez X.

3. s.77

a) Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Mamy $x > y$ albo $x < y$; umówmy się, że zachodzi ta druga nierówność. Otoczeniem x nie zawierającym y jest $(-\infty; \frac{1}{2}(x+y)\rangle \cup \langle y+1; +\infty)$. Otoczeniem y nie zawierającym x jest $(-\infty; x-1\rangle \cup \langle \frac{1}{2}(x+y); +\infty)$. Zatem $\mathbb{R}$ z topologią $\mathcal{T}_2$ jest H_0-przestrzenią.
Niech teraz będą dowolne $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_2,\ U_1, U_2 \neq \emptyset$. Zatem

$$\exists_{a_1,a_2,b_1,b_2}\ (-\infty; a_1\rangle \cup \langle b_1; +\infty) \subset U_1 \wedge (-\infty; a_2\rangle \cup \langle b_2; +\infty) \subset U_2$$

Przyjmując $a := \min\{a_1, a_2\},\ b := \min\{b_1, b_2\}$ mamy $(-\infty; a\rangle \cup \langle b; +\infty) \subset U_1 \cap U_2$, a zatem $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Czyli dowolne dwa niepuste zbiory otwarte (n.p. otoczenia x i y) mają niepustą część wspólną, co dowodzi, że $\mathbb{R}$ z $\mathcal{T}_2$ nie jest H-przestrzenią.

b) Zdefiniujmy w X topologię tak jak w punkcie 3 (str. 74 w książce). Niech $x, y \in X$, $x \neq y$. Wykażemy, że $K(x,r) \cap K(y,r) = \emptyset$ gdzie $r := \frac{1}{2}\rho(x,y)$. Przypuśćmy, że $z \in K(x,r) \cap K(y,r)$ co oznacza, że $\rho(x,z) < \frac{1}{2}\rho(x,y)$ oraz $\rho(y,z) < \frac{1}{2}\rho(x,y)$. Dodając nierówności stronami otrzymujemy $\rho(x,z) + \rho(y,z) < \rho(x,y)$ co jest sprzeczne z nierównością trójkąta.

c) Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. $K(x, \frac{1}{2}\rho(x,y))$ oraz $K(y, \frac{1}{2}\rho(x,y))$ spełniają warunki zbiorów otwartych w metryce $\mathcal{T}_3$ (przyjmując $r = \frac{1}{2}\rho(x,y)$). Ponadto jak wykazaliśmy w poprzednim punkcie są rozłączne, zatem $\mathbb{R}$ z topologią $\mathcal{T}_3$ jest przestrzenią Hausdorffa.
Weźmy teraz dla dowolnego $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oraz $r > 0$ zbiór $(x-r; x+r) \cap \mathbb{Q} =: U$. Zbiór ten jest otwarty w topologii $\mathcal{T}_3$. Warunkiem tego żeby topologia była wyznaczona przez metrykę jest $\exists_{r'}\ K(x,r') \subset U$. W szczególności $x \in U$, co jest sprzeczne z założeniem $x \notin \mathbb{Q}$.

4. s.77

Rozwiązanie zadania podzielimy na podpunkty, przy czym dwa ostatnie będą wynikały z poprzednich.

1) $\mathrm{Int}K(a,r) = K(a,r)$.
Z twierdzenia 10 (str. 75 w książce) wiemy, ze $K(a,r)$ jest zbiorem otwartym z czego wynika, że jest tożsamy ze swoim wnętrzem (twierdzenie 2 str. 73 w książce).

2) $\mathrm{Int}\overline{K}(a,r) = K(a,r)$.
$K(a,r)$ jest zbiorem otwartym i $K(a,r) \subset \overline{K}(a,r)$ zatem $K(a,r) \subset \mathrm{Int}\overline{K}(a,r)$.
Niech teraz $x \in \mathrm{Int}\overline{K}(a,r)$. Z twierdzenia 11 (str. 75 w książce) $\exists_{r'}\ K(x,r') \subset \mathrm{Int}\overline{K}(a,r)$. W tym momencie wykorzystamy to, że mamy do czynienia z przestrzenią $\mathbb{R}^k$ z metryką naturalną. Niestety nie udało mi się dowieść tego punktu w ogólnym przypadku. Weźmy dowolne $\lambda \in (1; 1 + \frac{r'}{r})$. Niech $y = (y_1, \ldots, y_k)$ oraz $y_i := \lambda(x_i - a_i) + a_i$. Mamy zatem (wykorzystując dobór λ):

$$\rho(y,a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |y_i - a_i|^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{k} |x_i - a_i|^2} = \lambda\rho(x,a) > \rho(x,a) \tag{I.5}$$

Mamy ponadto: $y_i - x_i = \lambda(x_i - a_i) + a_i - x_i = \lambda(x_i - a_i) - (x_i - a_i) = (\lambda - 1)(x_i - a_i)$. Czyli (wykorzystując dobór λ):

$$\rho(y,x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |y_i - x_i|^2} = \sqrt{(\lambda-1)^2 \sum_{i=1}^{k} |x_i - a_i|^2} = (\lambda - 1)\rho(x,a) \leqslant (\lambda - 1)r < r'$$

Zatem $y \in K(x, r')$ czyli $y \in \overline{K}(a,r)$ czyli $\rho(y,a) \leqslant r$. A z (I.5) $\rho(x,a) < \rho(y,a)$ czyli ostatecznie $\rho(x,a) < r \Leftrightarrow x \in K(a,r)$ a to trzeba było wykazać.

3) $\overline{K(a,r)} = \overline{K}(a,r)$.
$\overline{K}(a,r)$ jest zbiorem domkniętym (twierdzenie 14 str. 76 w książce) zatem z definicji domknięcia $\overline{K}(a,r) \subset \overline{K(a,r)}$.
Niech teraz $x \in \overline{K(a,r)}$ z twierdzenia 12 (str. 76 w książce) $\forall_{r'>0}\ K(x,r') \cap K(a,r) \neq \emptyset$. Niech $y \in K(x,r') \cap K(a,r)$, z nierówności trójkąta $\rho(a,x) \leqslant \rho(a,y) + \rho(y,x) < r + r'$. Przechodząc teraz w granicy z $r' \to 0^+$ mamy $\rho(a,x) \leqslant r$. Zatem $x \in \overline{K}(a,r)$.

4) $\overline{\overline{K}(a,r)} = \overline{K}(a,r)$.
Wynika to z tego, że $\overline{K}(a,r)$ jest zbiorem domkniętym.

5) $K(a,r)^\bullet = \overline{K(a,r)} \setminus \mathrm{Int}K(a,r) = \overline{K}(a,r) \setminus K(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^k : |x-a| = r\}$.

6) $\overline{K}(a,r)^\bullet = \overline{\overline{K}(a,r)} \setminus \mathrm{Int}\overline{K}(a,r) = \overline{K}(a,r) \setminus K(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^k : |x-a| = r\}$.

5. s.77

W zadaniu spełnione są następujące założenia co do przestrzeni i rodziny podzbiorów:

$$X \text{ - przestrzeń metryczna zupełna} \tag{I.6}$$
$$\forall_n \quad \emptyset \neq A_n \subset X \tag{I.7}$$
$$\forall_n \quad A_n \text{ - domknięty} \tag{I.8}$$
$$\forall_n \quad A_{n+1} \subset A_n \tag{I.9}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \delta(A_n) = 0 \tag{I.10}$$

Z (I.7) wynika, że możemy zdefiniować ciąg (x_n) w następujący sposób: $\forall_n\ x_n \in A_n$. Zauważmy. że z (I.9) oraz (I.10) wynika, że (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem z (I.6) wynika istnienie granicy:

$$\exists_{x\in X} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x \tag{I.11}$$

Wykażemy, że $x \in \bigcap_n A_n$.
Niech U będzie dowolnym otoczeniem x. Zgodnie z twierdzeniem 11 (str. 75 w książce) zawiera ono kulę o pewnym promieniu $\epsilon > 0$. Z (I.11) wynika, że:

$$\exists_{N_\epsilon}\forall_{n\geqslant N_\epsilon} \quad \rho(x_n, x) < \epsilon$$

Biorąc pod uwagę to jak wybraliśmy (x_n) mamy więc:

$$\exists_{N_\epsilon}\forall_{n\geqslant N_\epsilon} \quad U \cap A_n \supset \{x_n\}$$

$$\exists_{N_\epsilon} \quad U \cap \bigcap_{n\geqslant N_\epsilon} A_n \neq \emptyset$$

Uwzględniając (I.9):

$$U \cap \bigcap_{n \geqslant 1} A_n \neq \emptyset$$

Z dowolności U oraz twierdzenia 8 (str. 74 w książce):

$$x \in \overline{\bigcap_{n \geqslant 1} A_n}$$

Z (I.8), twierdzenia 4 (str. 73 w książce) oraz twierdzenia 7 (str. 74 w książce):

$$x \in \bigcap_{n \geqslant 1} A_n$$

Zatem zbiór ten nie jest pusty, co było do wykazania.

§ 13 Topologia w podzbiorze przestrzeni topologicznej

1. s.78

a) Jak łatwo wykazać spełniona jest pewna prosta zależność z rachunku zbiorów:

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) \tag{*}$$

Z twierdzenia 1 (str. 78 w książce) wynika, że każdy zbiór domknięty w przestrzeni Z jest postaci $Z \cap F$ gdzie F jest domknięty w X. Zatem dla każdego zbioru domkniętego F w X i zawierającego $Z \setminus A$, domknięty w Z jest też $F \cap Z$ oraz $F \cap Z \supset Z \setminus A$. Czyli domknięcia w Z i w X spełniają relację $\overline{Z \setminus A}^Z \cap Z = \overline{Z \setminus A}^X$. Z twierdzenia 6 (str. 74 w książce) mamy $\mathrm{Int}_Z A = Z \setminus \overline{Z \setminus A}^Z$. Ponieważ $\mathrm{Int}_Z A \subset A \subset Z$ więc korzystając z (*): $\mathrm{Int}_Z A = \mathrm{Int}_Z A \cap Z = (Z \setminus \overline{Z \setminus A}^Z) \cap Z = (Z \cap Z) \setminus (\overline{Z \setminus A}^Z \cap Z) = Z \setminus \overline{Z \setminus A}^X$.

b) Z twierdzenia 1 (str. 78 w książce) $Z \cap \overline{A}$ jest zbiorem domkniętym w Z i $A \subset Z \cap \overline{A}$ zatem $\overline{A}^Z \subset Z \cap \overline{A}$. Z drugiej strony każdy zbiór domknięty w Z jest postaci $Z \cap F$ gdzie F jest domknięty w X. Zatem domknięcie w Z:

$$\overline{A}^Z = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ - domknięty w } X}} Z \cap F = Z \cap \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ - domknięty w } X}} F = Z \cap \overline{A}$$

2. s.78

⇒) Z definicji $\{a\}$ jest otwarty w Z wtedy i tylko wtedy, gdy $\{a\} = Z \cap G$ gdzie G - otwarty w X (i $a \in G$) zatem $\exists_{r>0}\ K(a,r) \subset G$. Jeżeli teraz a byłby punktem skupienia zbioru Z, to $\exists_{b \in Z}\ b \in K(a,r) \subset G$ czyli $\{a,b\} \subset Z \cap G$ czyli $\{a\} \neq Z \cap G$. Zatem a nie może być punktem skupienia zbioru Z.

⇐) Jeżeli a nie jest punktem skupienia zbioru Z, to $\exists_{r>0}\ K(a,r) \cap Z = \{a\}$ czyli $\{a\}$ jest zbiorem otwartym jako część wspólna Z i zbioru otwartego w X.

§ 14 Produkt kartezjański przestrzeni topologicznych

1. s.80

a) $\mathrm{Int}(A_1 \times A_2) = \mathrm{Int} A_1 \times \mathrm{Int} A_2$.
Wprowadźmy następujące oznaczenia: $\mathcal{T}$ – topologia w $X_1 \times X_2$, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ – topologie odpowiednio w X_1, X_2.

$\subset$) $a \in \mathrm{Int}(A_1 \times A_2) \Rightarrow \exists_{U \in \mathcal{T}}\ a \in U \wedge U \subset A_1 \times A_2 \Rightarrow \exists_{U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2}\ (a_1, a_2) := a \in U_1 \times U_2 \subset U \subset A_1 \times A_2 \Rightarrow U_1 \subset A_1 \wedge U_2 \subset A_2 \Rightarrow a_1 \in \mathrm{Int}A_1 \wedge a_2 \in \mathrm{Int}A_2 \Rightarrow a \in \mathrm{Int}A_1 \times \mathrm{Int}A_2$.

$\supset$) $(a_1, a_2) := a \in \mathrm{Int}A_1 \times \mathrm{Int}A_2 \Rightarrow \exists_{U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2}\ a_1 \in U_1 \subset A_1 \wedge a_2 \in U_2 \subset A_2 \Rightarrow a \in U_1 \times U_2 \Rightarrow \mathcal{T} \ni U := U_1 \times U_2 \subset A_1 \times A_2 \Rightarrow a \in \mathrm{Int}(A_1 \times A_2)$.

b) $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.
Na wstępie zauważmy że prawdziwe są następujące równości z rachunku zbiorów:

$$X \times Y \setminus (A \times B) = X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y$$

$(x, y) \in X \times Y \setminus (A \times B) \Leftrightarrow x \in X \wedge y \in Y \wedge (x \notin A \vee y \notin B) \Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y \wedge x \notin A) \vee (x \in X \wedge y \in Y \wedge y \notin B) \Leftrightarrow (x \in X \setminus A \wedge y \in Y) \vee (x \in X \wedge y \in Y \setminus B) \Leftrightarrow (x, y) \in X \times (Y \setminus B) \cup (X \setminus A) \times Y$.

$$(X \setminus A) \times (Y \setminus B) = X \times Y \setminus (A \times Y \cup X \times B)$$

$(x, y) \in (X \setminus A) \times (Y \setminus B) \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin A \wedge y \in Y \wedge y \notin B \Leftrightarrow x \in X \wedge y \in Y \wedge x \notin A \wedge y \notin B \Leftrightarrow (x, y) \in X \times Y \wedge (x, y) \notin (A \times Y \cup X \times B) \Leftrightarrow (x, y) \in X \times Y \setminus (A \times Y \cup X \times B)$.

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

Prawo De Morgana (książka str. 15).

$\subset$) Korzystając z powyższych równości, własności udowodnionej w punkcie a), $\mathrm{Int}(X) = X$, Twierdzenia 6 (str. 74 w książce), oraz własności (b_3) z Twierdzenia 1 (str. 72 w książce) dostajemy:
$\overline{A_1 \times A_2} = X_1 \times X_2 \setminus \mathrm{Int}(X_1 \times X_2 \setminus (A_1 \times A_2)) =$
$X_1 \times X_2 \setminus \mathrm{Int}(X_1 \times (X_2 \setminus A_2) \cup (X_1 \setminus A_1) \times X_2) \subset$
$X_1 \times X_2 \setminus (\mathrm{Int}(X_1 \times (X_2 \setminus A_2)) \cup \mathrm{Int}((X_1 \setminus A_1) \times X_2)) =$
$X_1 \times X_2 \setminus (X_1 \times \mathrm{Int}(X_2 \setminus A_2) \cup \mathrm{Int}(X_1 \setminus A_1) \times X_2) =$
$(X_1 \times X_2 \setminus (X_1 \times \mathrm{Int}(X_2 \setminus A_2)) \cap (X_1 \times X_2 \setminus \mathrm{Int}(X_1 \setminus A_1) \times X_2) =$
$(X_1 \times (X_2 \setminus \mathrm{Int}(X_2 \setminus A_2)) \cup (X_1 \setminus X_1) \times X_2) \cap (X_1 \times (X_2 \setminus X_2) \cup (X_1 \setminus \mathrm{Int}(X_1 \setminus A_1) \times X_2)) =$
$X_1 \times (X_2 \setminus \mathrm{Int}(X_2 \setminus A_2)) \cap (X_1 \setminus \mathrm{Int}(X_1 \setminus A_1)) \times X_2 =$
$(X_1 \times \overline{A_2}) \cap (\overline{A_1} \times X_2) = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.

$\supset$)

$$(x, y) \in \overline{A_1} \times \overline{A_2} \Leftrightarrow x \in \overline{A_1} \wedge y \in \overline{A_2} \Leftrightarrow$$
$$(\forall_{U_1 \in \mathcal{T}_1}\ U_1 \cap A_1 = \emptyset \Rightarrow x \notin U_1) \wedge (\forall_{U_2 \in \mathcal{T}_2}\ U_2 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow y \notin U_2) \Rightarrow$$
$$\forall_{U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2}\ U_1 \times U_2 \cap A_1 \times A_2 = \emptyset \Rightarrow (x, y) \notin U_1 \times U_2 \tag{*}$$

Przypuśćmy, że $\exists_{U \in \mathcal{T}}\ U \cap A_1 \times A_2 = \emptyset \wedge (x, y) \in U$. Z definicji topologii w produkcie wynika, że $\exists_{U_1 \in \mathcal{T}_1, U_2 \in \mathcal{T}_2}\ U_1 \times U_2 \subset U \wedge (x, y) \in U_1 \times U_2$. Z $U_1 \times U_2 \subset U$ wynika, że $U_1 \times U_2 \cap A_1 \times A_2 = \emptyset$ więc jest to w sprzeczności z założeniem (*). Zatem $\forall_{U \in \mathcal{T}}\ U \cap A_1 \times A_2 = \emptyset \Rightarrow (x, y) \notin U$ a to oznacza, że $(x, y) \in \overline{A_1 \times A_2}$.

2. s.80

Niech $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ oraz $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Zachodzi $x_1 \neq x_2$ lub $y_1 \neq y_2$. Przypuśćmy, że mamy ten pierwszy przypadek (w drugim rozumujemy analogicznie). Z tego, że X jest przestrzenią Hausdorffa wynika, że istnieją U_1, U_2 – otoczenia x_1, x_2 takie, że $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Niech V_1, V_2 będą dowolnymi otoczeniami y_1, y_2. Wtedy $U_1 \times V_1 \cap U_2 \times V_2 = \emptyset$. To, że $U_1 \times V_1$ i $U_2 \times V_2$ są otwarte (są otoczeniami $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$) wynika z Twierdzenia 1 (str. 79 w książce).

3. s.80

$\Rightarrow$) Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa, oraz niech $(x,y) \in A := X \times X \setminus \{(x,x) : x \in X\}$. Wynika z tego, że $x \neq y$. Zatem z tego, że X jest przestrzenią Hausdorffa wynika, że $\exists_{U,V \text{ - otwarte}}\ x \in U, y \in V,\ U \cap V = \emptyset$. Przypuśćmy teraz, że $\exists_{x'}\ (x',x') \in U \times V$. Z tego wynika, że $x' \in U$ i $x' \in V$ co jest w sprzeczności z $U \cap V = \emptyset$. Zatem A jest zbiorem otwartym, czyli $\{(x,x) : x \in X\}$ jest zbiorem domkniętym.

$\Leftarrow$) Załóżmy, że $\{(x,x) : x \in X\}$ jest zbiorem domkniętym, czyli $A := X \times X \setminus \{(x,x) : x \in X\}$ jest zbiorem otwartym. Niech teraz $x, y \in X,\ x \neq y$. Zatem $(x,y) \in A$. Z otwartości A wynika, że istnieje W – otoczenie (x,y) takie, że $W \subset A$. Z definicji topologii w produkcie wynika, że istnieją U, V otwarte w X, takie że $(x,y) \in U \times V \subset W \subset A$. Z tego wynika, że $x \in U$ i $y \in V$ oraz $U \cap V = \emptyset$ bo $U \times V \subset A$. Zatem X jest przestrzenią Hausdorffa.

§ 15 Funkcje ciągłe w przestrzeniach topologicznych

1. s.82

Niech U będzie zbiorem otwartym w X. Zachodzi $f^{-1}(U) = U \times Y$ co jest oczywiste. Z Twierdzenia 1 (str. 79 w książce) $U \times Y$ jest otwarty.

2. s.82

Oznaczmy $A := X \setminus \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Chcemy wykazać, że A jest otwarty. Niech $x \in A$. Oznacza to, że $f(x) \neq g(x)$. Z tego, że Y jest przestrzenią Hausdorffa wynika, że $\exists_{U,V \text{ - otwarte w } Y}\ f(x) \in U,\ g(x) \in V,\ U \cap V = \emptyset$. Z tego, że f i g są ciągłe wynika, że $f^{-1}(U)$ i $g^{-1}(V)$ są otwarte. Jednocześnie $x \in f^{-1}(U)$ i $x \in g^{-1}(V)$, czyli $W := f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \neq \emptyset$ oraz z właściwości zbiorów otwartych W jest otwarty. Jednocześnie $\forall_{w \in W}\ f(w) \in U,\ g(w) \in V \Rightarrow f(w) \neq g(w) \Rightarrow w \in A$. Zatem znaleźliśmy W otoczenie x takie, że $W \subset A$, co oznacza, że A jest otwarty, czyli $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ jest domknięty.

3. s.82

Niech V będzie zbiorem otwartym w Y takim, że $f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Weźmy dowolne $v \in V$ i niech x' będzie takie, że $f(x') = v$. Z tego, że V jest otwarte: $\exists_{\epsilon > 0}\ K(v, \epsilon) \subset V$. Ze zbieżności jednostajnej ciągu funkcji: $\exists_N \forall_{x \in X}\ f_N(x) \in K(f(x), \frac{1}{2}\epsilon)$. Z ciągłości funkcji zbiór $U_v := f_N^{-1}(K(v, \frac{1}{2}\epsilon))$ jest otwarty oraz niepusty, bo $x' \in U_v$. Weźmy teraz dowolne $x'' \in U_v$. Jeżeli by $f(x'') \notin V$, to $\rho(v, f(x'')) \geqslant \epsilon$ (bo $K(v,\epsilon) \subset V$), a to jest sprzeczne z warunkami $f_N(x'') \in K(v, \frac{1}{2}\epsilon)$ (bo $x'' \in U_v$) oraz $f_N(x'') \in K(f(x''), \frac{1}{2}\epsilon)$ (z określenia N). Zatem $f(x'') \in V$. Czyli $U_v \subset f^{-1}(V)$. Z dowolności v zachodzi zatem $f^{-1}(V) = \bigcup_{v \in V} U_v$. Ten zbiór jest sumą zbiorów otwartych, więc jest otwarty, co było do wykazania.

4. s.82

Złożenie funkcji przedstawionych w przykładach 1 i 2 (str. 81, 82 w książce) jest potrzebnym homeomorfizmem.

5. s.82

Homeomorfizm we współrzędnych biegunowych: $(r, \phi) \rightarrow (\frac{r}{1-r}, \phi)$ gdzie $0 \leqslant r < 1$.
Albo w przestrzeni $\mathbb{C}$: $z \rightarrow \frac{|z|}{1-|z|} z$ gdzie $|z| < 1$.

§ 16 Przestrzenie ośrodkowe

1. s.85

Jeżeli by przestrzeń z Ćwiczenia 2. s.52 (strona 18) była ośrodkowa, to zgodnie z Twierdzeniem 3 (str. 83 w książce) był by nim także podzbiór ciągów o wyrazach z $\{0,1\}$ z metryką indukowaną. Ale podzbiór ten jest przestrzenią nieprzeliczalną (patrz Ćwiczenie 7. s.22 (strona 4)) z metryką dyskretną. A taka przestrzeń nie jest przestrzenią ośrodkową jak pokazano w przykładzie (str. 83 w książce).

2. s.85

Wykażemy, że $\mathbb{Q}$ jest ośrodkiem przestrzeni $\mathbb{R}$ z topologią $\mathcal{T}_3$ (patrz Ćwiczenie 1c. s.77 (strona 32)).
Niech $Z \supset \mathbb{Q}$ będzie zbiorem domkniętym. Czyli $\mathbb{R} \setminus Z$ jest otwarty oraz nie zawiera liczb wymiernych. Załóżmy że jest niepusty, czyli $\exists_x\ x \in \mathbb{R} \setminus Z$. Z definicji topologii $\exists_{r>0}\ (x-r; x+r) \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \setminus Z$. Ale z własności liczb wymiernych $\forall_{r>0}\ (x-r; x+r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Wobec tego, że $\mathbb{R} \setminus Z$ nie zawiera liczb wymiernych otrzymaliśmy sprzeczność, która oznacza, że $\mathbb{R} \setminus Z$ musi być puste, czyli $Z = \mathbb{R}$, czyli $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ w topologii $\mathcal{T}_3$.

Zauważmy następującą własność przestrzeni $\mathbb{R}$ z topologią $\mathcal{T}_3$: $\forall_{Z \subset \mathbb{R}}\ Z \cup \mathbb{Q}$ jest otwarty. Z tego wynika, że w przestrzeni $X := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ z topologią indukowaną z $\mathcal{T}_3$ każdy zbiór Z jest zbiorem otwartym, ponieważ można go przedstawić jako $Z \cap (Z \cup \mathbb{Q})$. Z tego wynika, że również każdy zbiór w tej przestrzeni jest zbiorem domkniętym. A to oznacza, że dla każdego $A \subset X :\ \overline{A} = A$. Zatem gdyby był w tej przestrzeni ośrodek to byłby całą przestrzenią, a przestrzeń ta jest nieprzeliczalna.

§ 17 Przestrzenie zwarte

1. s.91

Niech X – zwarta i $A \subset X$ domknięty. Niech $\{U_s : s \in S\}$ będzie pokryciem zbioru A zbiorami otwartymi w przestrzeni A. Z definicji topologii indukowanej każdy z tych zbiorów jest postaci: $U_s = A \cap G_s$ gdzie G_s jest otwarty w X. Weźmy dowolny $a \in A$, z tego ze $\{U_s\}$ jest pokryciem A wynika, że $\exists_{s \in S}\ a \in U_s$ z czego wynika, że $a \in G_s$. Zatem $A \subset \bigcup_{s \in S} G_s$. A to prowadzi do wniosku, że $\{G_s : s \in S\} \cup X \setminus A$ jest pokryciem otwartym X. A zatem ze zwartości X: $\exists_{S_0 \subset S}\ S_0$ – skończony i $X = \bigcup_{s \in S_0} G_s \cup X \setminus A$. Z tego wynika, że $A = \bigcup_{s \in S_0} U_s$ co oznacza zwartość A.

2. s.91

Niech ciąg (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego: $\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n,m>N}\ \rho(x_n, x_m) < \epsilon$. Ze zwartości X wnioskujemy o istnieniu podciągu (x_{n_k}) zbieżnego do $x \in X$. Zachodzi przy tym $n_k \geqslant k$. Weźmy teraz dowolne $\epsilon > 0$. Istnieje N_ϵ: $\forall_{n,m>N_\epsilon}\ \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\epsilon$ oraz Istnieje M_ϵ: $\forall_{k>M_\epsilon}\ \rho(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2}\epsilon$. Czyli dla $N := \max\{N_\epsilon, n_{M_\epsilon}\}$: $\forall_{n>N}\exists_k\ n_k > N$ i $\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x) \leqslant \epsilon$ co oznacza, że ciąg (x_n) jest zbieżny do x (t.j. przestrzeń X jest zupełna).

3. s.91

Weźmy (x_n) ciąg punktów zbieżny do $x \in X$. Rozważmy ciąg $((x_n, f(x_n))) \subset X \times Y$. Ze zwartości Y: istnieje podciąg taki, że $f(x_{n_k}) \to y \in Y$. Podciąg $((x_{n_k}, f(x_{n_k})))$ jest zatem zbieżny do $(x, y) \in X \times Y$ oraz z domkniętości wykresu funkcji należy też do tego wykresu, czyli: $y = f(x)$ co oznacza że funkcja f jest ciągła.
Dla wykazania konieczności warunku na zwartość przestrzeni weźmy przykład funkcji $f : \langle 0; \pi \rangle \to \langle 0; +\infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{dla } x \in \langle 0; \pi) \\ 0 & \text{dla } x = \pi \end{cases}$$

Wykres tej funkcji można przedstawić jako sumę zbiorów: $\{(x, \operatorname{tg} x) : x \in \langle 0;\pi)\} \cup \{(\pi;0)\}$ z których oba są domknięte (granica dowolnego ciągu zbieżnego z tych zbiorów należy do niego) a zatem ich suma jest również domknięta. Nasza funkcja f natomiast jest nieciągła w punkcie π.

4. s.91

Załóżmy że X – przestrzeń zwarta, $f : X \to Y$ ciągła.
Niech $\{V_s : s \in S\}$ będzie pokryciem otwartym zbioru $f(X)$: $\bigcup_{s\in S} V_s = f(X)$ zatem $\forall_{s\in S} V_s \subset f(X)$. Niech $U_s := f^{-1}(V_s)$. Z ciągłości f wynika, że U_s są otwarte. Jednocześnie $\bigcup_{s\in S} U_s = X$ bo $x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \exists_{s'}\ f(x) \in V_{s'} \Rightarrow x \in f^{-1}(V_{s'}) = U_{s'}$. Ze zwartości X istnieje S_0 – skończone: $\bigcup_{s\in S_0} U_s = X$. Niech $x \in X \Rightarrow \exists_{s'\in S_0}\ x \in U_{s'} \Rightarrow f(x) \in f(U_{s'}) = V_{s'}$ zatem $f(X) = \bigcup_{s\in S_0} V_s$ co oznacza zwartość $f(X)$.

5. s.91

Oznaczmy $y_0 := \lim_{x\to+\infty} f(x) \in Y$.
Weźmy dowolne $\epsilon > 0$: $\exists_{x_\epsilon}\ x > x_\epsilon \Rightarrow \rho(f(x), y_0) < \epsilon$. Zgodnie z Twierdzeniem 5 (str. 88 w książce) przedział $\langle a; x_\epsilon\rangle$ jest zbiorem zwartym w przestrzeni $\mathbb{R}$. Zatem z ciągłości funkcji i z Twierdzenia 6 (str. 88 w książce) $f(\langle a; x_\epsilon\rangle)$ jest zwarty w Y, czyli z Twierdzenia 3 (str. 87 w książce) jest domknięty i ograniczony. Oznaczmy $\delta_\epsilon := \operatorname{diam} f(\langle a; x_\epsilon\rangle)$ (średnica zbioru). Z określenia x_ϵ mamy ponadto: $f((x_\epsilon; +\infty)) \subset K(y_0, \epsilon)$. Zatem $f(\langle a; +\infty)) \subset f(\langle a; x_\epsilon\rangle) \cup K(y_0, \epsilon)$. Weźmy teraz dowolne $y_1' \in f(\langle a; x_\epsilon\rangle)$ i $y_2' \in K(y_0, \epsilon)$ oraz $d := \rho(y_1', y_2')$. Z nierówności trójkąta mamy dla dowolnych $y_1 \in f(\langle a; x_\epsilon\rangle)$ i $y_2 \in K(y_0, \epsilon)$: $\rho(y_1, y_2) \leqslant \delta_\epsilon + d + 2\epsilon$. A zatem $f(\langle a; x_\epsilon\rangle) \cup K(y_0, \epsilon)$ jest ograniczony czyli funkcja f jest ograniczona.

Zachowujemy oznaczenia jak z powyższego akapitu. Zgodnie z Twierdzeniem 10 (Heinego) (str. 90 w książce) funkcja $f|_{\langle a; x_{\frac{1}{2}\epsilon}\rangle}$ jest ciągła jednostajnie zatem: $\exists_{\delta>0}\ |x_1 - x_2| < \delta \wedge x_1, x_2 \in \langle a; x_{\frac{1}{2}\epsilon}\rangle \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Podobnie funkcja $f|_{\langle a; x_{\frac{1}{2}\epsilon} + \delta\rangle}$ jest ciągła jednostajnie: $\exists_{\delta'>0}\ |x_1 - x_2| < \delta' \wedge x_1, x_2 \in \langle a; x_{\frac{1}{2}\epsilon} + \delta\rangle \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Przyjmijmy $\delta'' := \min\{\delta, \delta'\}$. Jeżeli teraz mamy dowolne $x_1, x_2 \in \langle a; +\infty) \wedge |x_1 - x_2| < \delta''$, to zachodzi $x_1, x_2 \in \langle a; x_{\frac{1}{2}\epsilon} + \delta\rangle$ lub $x_1, x_2 \in (x_{\frac{1}{2}\epsilon}; +\infty)$. W obu tych wypadkach zachodzi (z powyższego oraz określenia x_ϵ) $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Do dowolnego ϵ dobraliśmy więc δ'' co oznacza ciągłość jednostajną funkcji f.

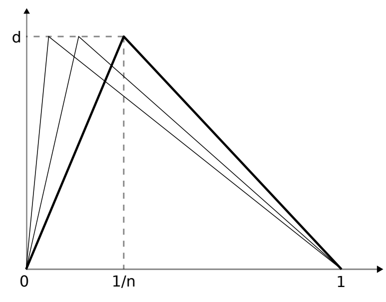
6. s.91

Kontrprzykładem jest funkcja $f : \langle 0;\pi) \to \langle 0; +\infty)$, $f(x) = \operatorname{tg} x$.

7. s.91

Niech będzie dana dowolna funkcja g ciągła na przedziale $\langle 0;1\rangle$ oraz dowolne $d > 0$.
Określmy ciąg funkcji (f_n) następująco:

$$f_n(x) = \begin{cases} g(x) + dnx & \text{dla } x \in \langle 0; \frac{1}{n}\rangle \\ g(x) + \frac{dn}{n-1}(1-x) & \text{dla } x \in (\frac{1}{n}; 1\rangle \end{cases}$$



Poglądowy rysunek dla $g(x) \equiv 0$

Wszystkie tak określone funkcje są ciągłe, oraz dla każdej z nich zachodzi $\rho_C(f_n, g) = d \Rightarrow f_n \in \overline{K}(g, d)$. Przypuśćmy więc, że istnieje podciąg tego ciągu zbieżny do funkcji ciągłej $h : \langle 0;1\rangle \to \mathbb{R}$.

Niech będzie dane dowolne $\epsilon > 0$.
Z ciągłości h w punkcie 0:
$$\exists_{\delta'>0}\ 0 \leqslant x < \delta' \Rightarrow |h(x) - h(0)| < \epsilon$$
Z ciągłości g w punkcie 0:
$$\exists_{\delta''>0}\ 0 \leqslant x < \delta'' \Rightarrow |g(x) - g(0)| < \epsilon$$
Zatem w szczególności dla dowolnego $0 < \delta < \min\{\delta', \delta''\}$:
$$|h(\delta) - h(0)| < \epsilon \quad \text{i} \quad |g(\delta) - g(0)| < \epsilon \tag{*}$$
Ze zbieżności podciągu (f_{n_k}) do h mamy: $\forall_{\epsilon'>0}\exists_N\forall_{k>N}\ \sup_{x\in\langle 0;1\rangle} |f_{n_k}(x) - h(x)| < \epsilon'$.
W szczególności: $\forall_{\epsilon'>0}\exists_N\forall_{k>N}\ |f_{n_k}(0) - h(0)| < \epsilon'$.
Ale ponieważ z definicji funkcji f_n: $\forall_n\ f_n(0) = g(0)$ zatem wobec dowolności ϵ' mamy:
$$h(0) = g(0) \tag{**}$$
Rozpatrzmy teraz k takie, że $\delta > \frac{1}{n_k}$ czyli $n_k > \frac{1}{\delta}$. Mamy wtedy $f_{n_k}(\delta) = g(\delta) + \frac{dn_k}{n_k-1}(1-\delta)$. Korzystając z (*) oraz (**) mamy:
$$|f_{n_k}(\delta) - h(\delta)| = |g(\delta) + \frac{dn_k}{n_k - 1}(1-\delta) - h(\delta)| =$$
$$|g(\delta) - g(0) + \frac{dn_k}{n_k - 1}(1-\delta) - (h(\delta) - h(0))| > |\frac{dn_k}{n_k - 1}(1-\delta) - 2\epsilon|$$
Widać, że ponieważ ϵ oraz δ mogą być dowolnie małe oraz $\frac{dn}{n-1} \to d$, to ostatnie wyrażenie nie może być dowolnie małe, co jest sprzeczne z $\lim_{k\to+\infty} \rho_C(f_{n_k}, h) = 0$. A zatem h nie może być funkcją ciągłą (przynajmniej w punkcie 0), czyli nie istnieje podciąg (f_n) zbieżny do funkcji z $C(\langle 0;1\rangle, \mathbb{R})$, a zatem kula $\overline{K}(g,d)$ nie jest zwarta w tej przestrzeni.

§ 18 Przestrzenie spójne

1. s.95

$\Rightarrow$) Dowód nie-wprost.
Przypuśćmy, że $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$ oraz że w przestrzeni X: $\overline{A_1} \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap \overline{A_2} = \emptyset$. Z tej drugiej równości wynika: $A_1 \subset X \setminus \overline{A_2}$ oraz zachodzi oczywiste $A_2 \cap (X \setminus \overline{A_2}) = \emptyset$. Zatem $A_1 = A \cap (X \setminus \overline{A_2})$ przy czym $X \setminus \overline{A_2}$ jest otwarty w X, zatem A_1 jest otwarty w A z topologią indukowaną z X. Podobnie można wykazać, że A_2 jest otwarty w A. Zatem A jest sumą dwu zbiorów otwartych niepustych, czyli nie jest spójny.

$\Leftarrow$) Dowód nie-wprost.
Przypuśćmy, że A jest niespójny, czyli $A = A_1 \cup A_2$ - otwarte w A, rozłączne i niepuste. Zauważmy, że $A_1' = A_2$ - otwarty, czyli że $A_1 = \overline{A_1}$ w A, podobnie $A_2 = \overline{A_2}$ w A, zatem $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$, czyli żaden ze zbiorów nie zawiera punktów domknięcia drugiego.

2. s.95

Niech $A = \bigcup_{s\in S} A_s$ oraz $\{a\} \subset \bigcap_{s\in S} A_s$.
Przypuśćmy, że A jest niespójny, czyli mamy podział $A = A' \cup A''$ - otwarte, rozłączne i niepuste. Oznaczmy $A_s' := A' \cap A_s$, $A_s'' := A'' \cap A_s$. Zauważmy, że każdy z A_s', A_s'' jest otwarty w A_s oraz $A_s' \cup A_s'' = A_s$ oraz $A_s' \cap A_s'' = \emptyset$ pozostaje wykazać, że $\exists_s\ A_s' \neq \emptyset \wedge A_s'' \neq \emptyset$.
Ustalmy, że $a \in A'$. Z nie-pustości A'' mamy $\exists_b\ b \in A''$. Z tego, że A jest sumą zbiorów mamy $\exists_s\ b \in A_s$, mamy też $a \in A_s$, a zatem $a \in A_s'$ i $b \in A_s''$. Czyli A_s musiałby być niespójny.

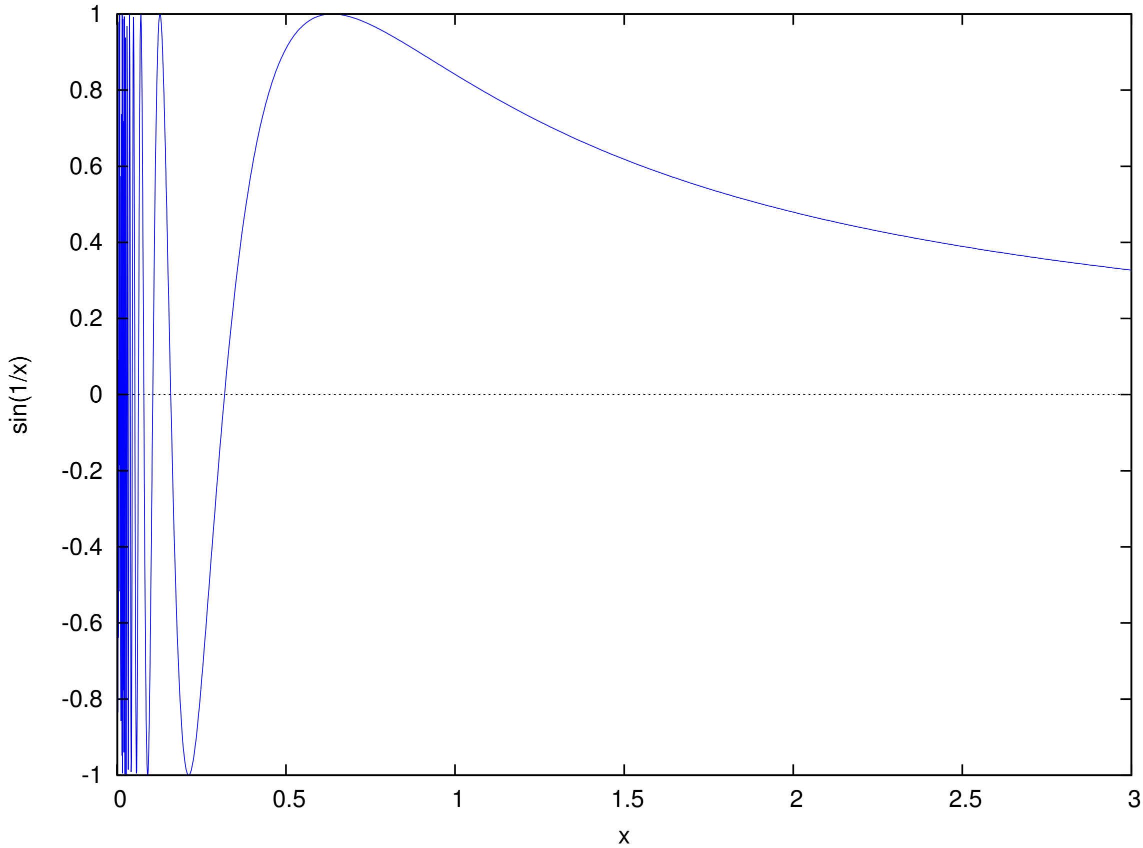
3. s.95

a) Niech A składa się z sumy kul domkniętych o promieniach r i odległości środków równej $2r$. Zatem zbiór A składa się z kul połączonych jednym punktem styczności. Jak łatwo wykazać dla dowolnych dwu punktów z tego zbioru można wyznaczyć drogę je łączącą przechodzącą przez ten punkt styczności, co wobec Twierdzenia 4 str. 93 w książce oznacza spójność zbioru A.
Z drugiej strony wnętrze tego zbioru składa się z sumy dwu kul otwartych o promieniu r, które są zbiorami otwartymi i nie mają punktu wspólnego.

b) Jeżeli A jest zbiorem spójnym i mamy jego dowolny podział na zbiory niepuste rozłączne: $A = A_1 \cup A_2$, to zgodnie z tezą udowodnioną w ćwiczeniu 1. s.95 (strona 40): $\overline{A_1} \cap A_2 \neq \emptyset$. Ponieważ $\overline{A_1} \subset \overline{A}$ oraz domknięcie zbioru A_1 w A zawiera się w domknięciu tego zbioru w $\overline{A}$, to również w $\overline{A}$ zachodzi $\overline{A_1} \cap A_2 \neq \emptyset$. A to z tego samego ćwiczenia oznacza, że również $\overline{A}$ jest zbiorem spójnym.

4. s.95

Wprowadźmy oznaczenia: $A_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y = \sin \frac{1}{x}\}$, $A_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$, $A := A_1 \cup A_2$.



a) Funkcja $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ jest złożeniem funkcji ciągłych (patrz przykłady na str. 65-67 w książce) a zatem na podstawie Twierdzenia 2 str. 81 w książce jest też ciągła. Funkcja zwracająca wykres $(x \mapsto (x, f(x)))$ jest z Twierdzenia 4 str. 64 w książce ciągła. A to oznacza z Twierdzenia 2 str. 92 w książce, że sam wykres (czyli zbiór A_1) jest spójny jako obraz ciągły przedziału. Chcemy teraz wykazać, że $A = \overline{A_1}$.
Zgodnie z Twierdzeniem 12 str. 76 w książce warunkiem równoważnym na należenie dowolnego punktu

zbioru do domknięcia tego zbioru jest istnienie ciągu punktów tego zbioru zbieżnego do tego punktu. Przypuśćmy więc, że $(x', y') \in A$. Jeżeli $x' > 0$ to $(x', y') \in A_1$ a zatem i do jego domknięcia. Przypuśćmy zatem, że $x' = 0$ a z definicji zbioru A many, że $y' \in \langle -1; 1\rangle$. Rozważmy zbiór $X' := \{x : f(x) = \sin\frac{1}{x} = y'\}$. Zgodnie z dywagacjami w przykładzie 3 str. 93 w książce, istnieje $x_0 \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$ taki, że $x_0 = \arcsin y'$. Ponadto funkcja sinus jest okresowa, mamy więc $\sin(x_0 \pm 2n\pi) = y'$. Zatem $X' \supset \{x : x > 0, \frac{1}{x} = x_0 + 2n\pi, n \in \mathbb{N}\} \supset \{\frac{1}{x_0+2n\pi} : n = 1, 2, \dots\}$. Widzimy zatem, że X' jest nieskończony i zawiera ciąg wartości zbieżny do zera. Zatem istnieje ciąg punktów z wykresu funkcji f (zbioru A_1) zbieżny do dowolnego punktu $(0, y')$ gdzie $y' \in \langle -1; 1\rangle$. Czyli rzeczywiście $\overline{A_1} = A$. A jak wcześniej wykazaliśmy zbiór A_1 jest spójny. To oznacza wobec podpunktu b) z poprzedniego ćwiczenia, że również zbiór A jest spójny.

b) Przypuśćmy, że mamy $a = (x_a, \sin\frac{1}{x_a}) \in A_1,\ b = (0, y_b) \in A_2$.
Przypuśćmy, że $\exists_{t_a<t_b}\exists_{\gamma\text{-ciągła}}\ \gamma(\langle t_a; t_b\rangle) \subset A \wedge \gamma(t_a) = a \wedge \gamma(t_b) = b$.
Zauważmy, że z tego wynika następująca własność funkcji γ (oznaczając $\gamma =: (\gamma_1, \gamma_2)$):

$$\forall_t\ \gamma_1(t) > 0 \Rightarrow \gamma_2(t) = f(\gamma_1(t)) = \sin\frac{1}{\gamma_1(t)} \tag{*}$$

Rozważmy teraz rzutowanie zbioru A na oś X: $r_X : A \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}_+$. Funkcja ta jest w sposób oczywisty ciągła (na przykład z Twierdzenia 1 str. 53 w książce).
Zatem również funkcja $\varphi := r_X \circ \gamma$ jest ciągła (Twierdzenie 2 str. 81 w książce).
Z założeń mamy: $\varphi(t_a) = x_a > 0,\ \varphi(t_b) = 0$. Zatem zgodnie z Twierdzeniem 3 str. 93 w książce ma ona własność Darboux.
Czyli w szczególności dla t_a, t_b:

$$\forall_x\ 0 < x < x_a \Rightarrow \exists_{t\in\langle t_a;t_b\rangle}\ \varphi(t) = x \tag{**}$$

Zdefiniujmy następujący ciąg punktów: $x_n := \frac{2}{\pi(4n+1)}$ dla $n = n_0, n_0+1, \dots$ gdzie n_0 jest takie, że $x_{n_0} < x_a$ (n_0 istnieje bo $x_n \to 0$). Ciąg ten ma następującą własność: $f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin(\frac{\pi}{2}(4n+1)) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Z (**) wynika, że $\forall_{0<x_n<x_a}\exists_{t_a\leqslant t\leqslant t_b}\ \varphi(t) = x_n$. Wybieramy t_n jako infimum takich t. Z ciągłości φ mamy: $\varphi(t_n) = x_n$. Ponieważ $x_n > 0$ więc z (*): $\gamma(t_n) = (x_n, f(x_n)) = (x_n, 1)$.
Podobnie definiując ciąg punktów: $x'_n := \frac{2}{\pi(4n-1)}$ dla $n = n'_0, n'_0+1, \dots$ dostajemy $f(x'_n) = -1$ i otrzymujemy analogiczny ciąg (t'_n) dla którego $\gamma(t'_n) = (x'_n, -1)$.
Rozważmy następujące przypadki:

- $\lim t_n = \lim t'_n =: t_c \leqslant t_b$.
  Prowadzi to do sprzeczności z ciągłością funkcji γ (w punkcie t_c), bo $\lim\gamma(t_n) = (0, 1) \neq (0, -1) = \lim\gamma(t'_n)$.

- $\lim t_n =: t_c < \lim t'_n =: t'_c \leqslant t_b$ (lub odwrotnie).
  Zauważmy, że z ciągłości φ mamy $\varphi(t_c) = 0$. Wtedy mamy własność analogiczną do (**) dla t_a i t_c (zamiast t_b). Definiujemy (x'_n) w ten sam sposób i powtarzamy rozumowanie. Prowadzi to do sprzeczności ponieważ wszystkie wartości (t'_n) w tym przypadku musiałyby być mniejsze lub równe t_c a granica ciągu równa $t'_c > t_c$.
  Uwaga: dobrane (t'_n) są w tym przypadku takie same jak dla przypadku $\langle t_a; t_b\rangle$ ponieważ jako t'_n braliśmy infimum ze wszystkich t spełniających warunek (**).

- Którychś z ciągów (t_n), (t'_n) (lub oba) nie ma granicy.
  W tym wypadku korzystamy z Twierdzenia Bolzano-Weierstrass'a (str. 39 w książce) i wybieramy odpowiednie podciągi zbieżne sprowadzając przypadek do jednego z poprzednich punktów.

Zatem w każdym z powyższych przypadków otrzymaliśmy sprzeczność, co oznacza, że nie może istnieć ciągła droga łącząca punkty ze zbiorów A_1 i A_2.

5. s.95

a) Przypuśćmy, że A i B są składowymi X i $A \cap B \neq \emptyset$. Z definicji składowej wynika, że $A \not\subseteq B$ i $B \not\subseteq A$, czyli, że $A \cup B \neq A$ i $A \cup B \neq B$. Zgodnie z tezą udowodnioną w ćwiczeniu 2. s.95 (strona 40): $A \cup B$ jest zbiorem spójnym i jest istotnym nadzbiorem A i B, co przeczy temu że są one składowymi.
Jeżeli $x \in X$, to z definicji składowej albo istnieje zbiór spójny: $x \in A \subset X$, albo $\{x\}$ jest składową, ponieważ $\{x\}$ jest zbiorem spójnym.

b) Wynika to wprost z ćwiczenia 3. s.95 (strona 41) punkt b).

c) ...

d) ...

6. s.95

Niech X i Y będą przestrzeniami spójnymi. Załóżmy, że $X \times Y$ nie jest przestrzenią spójną, czyli, że istnieją zbiory otwarte, niepuste A i B, takie że $A \cup B = X \times Y$ i $A \cap B = \emptyset$.
Niech $(x_a, y_a) \in A$ i $(x_b, y_b) \in B$. Jako, że $(x_b, y_a) \in X \times Y$, to:

$$\text{albo } (x_b, y_a) \in A \text{ albo } (x_b, y_a) \in B \tag{*}$$

Załóżmy, że zachodzi ten drugi przypadek.
Rozważmy teraz zbiory:

$$A_{y_a} = \{(x, y_a) \in X \times Y : (x, y_a) \in A\}$$
$$B_{y_a} = \{(x, y_a) \in X \times Y : (x, y_a) \in B\}$$

Zbiory te są zawarte w odpowiednio A i B, które są otwarte oraz rozłączne. Z tego wynika, że dla każdego z punktów tych zbiorów istnieje otoczenie zawarte odpowiednio w A i B. Z definicji topologii w produkcie możemy założyć, że te otoczenia są postaci $U \times V$ gdzie U jest otwarty w X a V w Y. Oznaczmy odpowiednio A'_{y_a} i B'_{y_a} sumę tych otoczeń dla punktów zbiorów A_{y_a} i B_{y_a}. Zbiory te są otwarte i zawarte odpowiednio w A i B.
Rozważmy funkcję rzutującą: $r_X : X \times Y \ni (x, y) \mapsto x \in X$. Funkcja ta (patrz ćwiczenie 1. s.82 (strona 37) jest ciągła. Zgodnie z twierdzeniem 2 str. 92 w książce: $X_A := r_X(A'_{y_a})$ i $X_B := r_X(B'_{y_a})$ są spójne.
Wykażemy teraz:

- X_A i X_B są niepuste.
  Oczywiste, bo $x_a \in X_A$ i $x_b \in X_B$.
- $X_A \cap X_B = \emptyset$.
  Niech $x' \in X_A \cap X_B$. Z definicji zbiorów X_A, X_B mamy: $\exists_{y', y'' \in Y}$ $(x', y') \in A'_{y_a}$ i $(x', y'') \in B'_{y_a}$. Ponadto mamy albo $(x', y_a) \in A_{y_a}$ albo $(x', y_a) \in B_{y_a}$. Przypuśćmy, że zachodzi ta pierwsza możliwość. Wtedy (x', y'') nie może należeć do B'_{y_a} bo jest on sumą otoczeń $U \times V$ czyli $\{x'\} \times V$ musiało by być zawarte w B'_{y_a} a V być otoczeniem y_a zawierającym y'' a to jest wykluczone, bo $(x', y_a) \in A_{y_a}$ czyli $\notin B_{y_a}$. Zatem takie x' nie istnieje.
- $X_A \cup X_B = X$.
  Niech $x \in X$. Mamy $(x, y_a) \in A \cup B$. Z tego wynika, że $(x, y_a) \in A_{y_a} \cup B_{y_a}$. Z tego wynika, że $(x, y_a) \in A'_{y_a} \cup B'_{y_a}$. Zatem $x \in r_X(A'_{y_a}) = X_A$ lub $x \in r_X(B'_{y_a}) = X_B$.

...

7. s.95

...

8. s.95

...