Rozwiązania Zadań z książki

D.Halliday, R.Resnick, J.Walker
Podstawy Fizyki
PWN Warszawa 2012

Grzegorz Wierzchowski

31 stycznia 2016

Podziękowania

Niniejsza publikacja została stworzona wyłacznie przy użyciu programów i narzędzi open source:

- System składu tekstu LaTeX
- Biblioteka graficzna wspólpracująca z LaTeX: `tikz`
- Edytor tekstu wyspecjalizowany do pisania w LaTeX: Kile
- Programy graficzne: Kig, KAlgebra, Inkscape
- Programy obliczeniowe: Octave, Maxima

Dziękuję autorom, twórcom i współtwórom tych programów za ich wkład pracy wniesiony w stworzenie i dopracowanie tych narzędzi.

Uwagi to tego dokumentu, znalezione błędy lub sugestie proszę zgłaszać poprzez stronę domową projektu: `https://github.com/gwierzchowski/math-phis` gdzie też należy szukać najnowszej wersji dokumentu.

Spis treści

Tom 1

1 Pomiar

1. s.10

a) $1\,\text{km} = 1000\,\text{m} = 1000 \cdot 10^6\,\text{m} = 10^9\,\text{m}$

b) $1\,\text{m} = 10^{-6}\,\text{m} = 10^{-6} \cdot 10^2\,\text{cm} = 10^{-4}\,\text{cm}$

c) $1\,\text{jard} = 0{,}914\,399\,\text{m}^* = 0{,}914\,399 \cdot 10^6\,\text{m} = 9{,}14 \cdot 10^5\,\text{m}$

2. s.10

$20 \cdot (1\text{ beczułka do jabłek} - 1\text{ beczułka do żurawin}) = 20 \cdot (7056\text{ cal}^3 - 5826\text{ cal}^3) = 20 \cdot 1230\text{ cal}^3 = 24\,600\text{ cal}^3 = 24\,600 \cdot (2{,}54\text{cm})^3 = 24\,600 \cdot 16{,}39\text{cm}^3 = 403\,194 \cdot 10^{-3}\text{dm}^3 = 403{,}2\text{l}$

3. s.10

a) $4\text{ furlongi} = 4 \cdot 201{,}168\text{m} = 804{,}672\text{m} = 804{,}672\text{m}\frac{1}{5{,}0292}\frac{\text{żerdź}}{\text{m}} = 160\text{ żerdzi}$

b) $4\text{ furlongi} = 4 \cdot 201{,}168\text{m} = 804{,}672\text{m} = 804{,}672\text{m}\frac{1}{20{,}117}\frac{\text{łańcuch}}{\text{m}} = 40\text{ łańcuchów}$

4. s.10

a) $0{,}8\text{cm} = 0{,}8 \cdot 39{,}4 \cdot 10^{-2}\,\text{cal} = 31{,}52 \cdot 10^{-2} \cdot 6/1{,}07\,\text{cycer} = 1{,}77 \cdot 12\,\text{pt} = 21{,}24\,\text{pt}$

b) $0{,}8\text{cm} = 0{,}8 \cdot 39{,}4 \cdot 10^{-2}\,\text{cal} = 31{,}52 \cdot 10^{-2} \cdot 6/1{,}07\,\text{cycer} = 1{,}77\,\text{cycer}$

5. s.10

a) $2\pi\, 6{,}37 \cdot 10^6\text{m} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}37 \cdot 10^3\text{km} = 4 \cdot 10^4\text{km}$

b) $4\pi(6{,}37 \cdot 10^6\text{m})^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}37 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\text{km}^2 = 5{,}1 \cdot 10^8\text{km}^2$

c) $4/3\pi(6{,}37 \cdot 10^6\text{m})^3 = 4/3 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}37 \cdot 6{,}37 \cdot 6{,}37 \cdot 10^9\text{km}^3 = 1{,}1 \cdot 10^{12}\text{km}^3$

---

*`http://pl.wikipedia.org/wiki/Jard`

6. s.10

$1\,\text{akr} = 40\,\text{prętów} \cdot 4\,\text{prętów} = 160\,\text{prętów}^2$
$1\,\text{krzyż} = 40\,\text{prętów} \cdot 1\,\text{pręt} = 40\,\text{prętów}^2$
$1\,\text{pręt} = 16{,}5\,\text{stopy}$
$1\,\text{m} = 3{,}28\,\text{stopy}$

a) $3\,\text{akry}+25\,\text{pręty}\cdot 4\,\text{pręty} = 3\,\text{akry}+100\,\text{prętów}^2 = 3\,\text{prętów}^2 \cdot 160\,\text{prętów}^2+100\,\text{prętów}^2 = 580\,\text{prętów}^2 = 580/40\,\text{krzyży} = 145\,\text{krzyży}$

b) $3\,\text{akry}+25\,\text{pręty}\cdot 4\,\text{pręty} = 3\,\text{akry}+100\,\text{prętów}^2 = 3\,\text{prętów}^2 \cdot 160\,\text{prętów}^2+100\,\text{prętów}^2 = 580\,\text{prętów}^2 = 580 \cdot (16{,}5)^2\,\text{stopy}^2 = 157\,905\,\text{stopy}^2 = 157\,905/(3{,}28)^2\,\text{m}^2 = 14\,677{,}4\,\text{m}^2$

7. s.10

$V = 1/2\pi(2000\,\text{km})^2 \cdot 3000\,\text{m} = 1{,}9 \cdot 10^7\,\text{km}^3 = 1{,}9 \cdot 10^{22}\,\text{cm}^3$

8. s.10

$V = 20\,\text{m} \cdot 12\,\text{m} \cdot 6\,\text{m} + 1/2(20\,\text{m} \cdot 12\,\text{m} \cdot 3\,\text{m}) = (1440 + 360)\,\text{m}^3 = 1800\,\text{m}^3$

a) $V_l = V/(12^3) = 1800/1728\,\text{m}^3 = 1{,}04\,\text{m}^3$

b) $V_{ll} = V_l/(12^3) = 1{,}04/1728\,\text{m}^3 = 6{,}03 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3$

9. s.10

$1\,\text{m} = 39{,}4\,\text{cale} = 3{,}28\,\text{stopy}$
$1\,\text{akr} = 40\,\text{prętów} \cdot 4\,\text{prętów} = 40 \cdot 16{,}5\,\text{stopy} \cdot 4 \cdot 16{,}5\,\text{stopy} = 160 \cdot (16{,}5/3{,}28\,\text{m})^2 = 4049\,\text{m}^2$
Rozwiązanie:
$26\,\text{km}^2 \cdot 2\,\text{cale} = 26 \cdot 10^6/4049\,\text{akr} \cdot 2 \cdot 3{,}28/39{,}4\,\text{stopy} = 6421{,}3\,\text{akr} \cdot 0{,}1665\,\text{stopy} = 1069\,\text{akrostóp}$

10. s.10

a) $1\,\text{mikrostulecie} = 10^{-4}\,\text{lat} = 365 \cdot 10^{-4}\,\text{dni} = 0{,}876\,\text{godzin} = 52{,}56\,\text{minut}$

b) $\frac{52{,}56\,\text{minut}-45\,\text{minut}}{52{,}56\,\text{minut}} 100\,\% = 14{,}9\,\%$

11. s.10

$c = 3 \cdot 10^8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

a) $c = 0{,}3\,\text{m}\,\text{ns}^{-1} = 0{,}984\,\text{stopy/ns}$

b) $c = 3 \cdot 10^{-4}\,\text{m}\,\text{ps}^{-1} = 0{,}3\,\text{mm}\,\text{ps}^{-1}$

12. s.10

a) $1\,\text{s} = 10^8$ shake. $1\,\text{rok} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{s} = 3{,}15 \cdot 10^7$ s. A więc sekunda ma więcej shake'ów.

b) $1\,\text{dzień} = 24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{s} = 86\,400\,\text{s}$. Wiek człowieka to 10^{-4} wieku wszechświata. Zatem wiek człowieka w tej skali, to $10^{-4} \cdot 86\,400\,\text{s} = 8{,}6\,\text{s}$.

13. s.10

Po dwudziestu stuleciach długość dnia wydłuży się o $20 \cdot 0{,}001\,\mathrm{s} = 0{,}02\,\mathrm{s}$. A zatem sumaryczna niedokładność pomiaru czasu (względem długości dnia) wyniesie: $0{,}01\,\mathrm{s} \cdot 2000 = 2\,\mathrm{s}$. W ostatnim równaniu skorzystano z tego, że suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa jego środkowemu wyrazowi pomnożonemu przez ilość wyrazów.
Wydłużenie dnia nie wpłynie to na pomiar czasu bezwzględnego, ponieważ obecna definicja sekundy jest niezależna od długości dnia.
UWAGA: Wyliczona wartość nie zgadza się z odpowiedzią podaną w książce.

14. s.11

Stosunek wskazań zegara A do zegara B wynosi: $(512\,\mathrm{s} - 312\,\mathrm{s})/(290\,\mathrm{s} - 125\,\mathrm{s}) = 1{,}21$.
Stosunek wskazań zegara B do zegara C wynosi: $(200\,\mathrm{s} - 25\,\mathrm{s})/(142\,\mathrm{s} - 92\,\mathrm{s}) = 3{,}5$.
Stosunek wskazań zegara A do zegara C wynosi: $1{,}21 \cdot 3{,}5 = 4{,}235$.

a) $600\,\mathrm{s} \cdot \dfrac{1}{1{,}21} = 495{,}9\,\mathrm{s}.$

b) $600\,\mathrm{s} \cdot \dfrac{1}{4{,}235} = 141{,}7\,\mathrm{s}.$

c) $290\,\mathrm{s} - (512\,\mathrm{s} - 400\,\mathrm{s})/1{,}21 = 197{,}4\,\mathrm{s}.$

d) $25\,\mathrm{s} - (92\,\mathrm{s} - 15\,\mathrm{s}) \cdot 3{,}5 = -244{,}5\,\mathrm{s}.$

15. s.11

$$c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 60 \cdot 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,min^{-1}} \frac{1\,\mathrm{j.a.}}{1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}} = 0{,}12\,\mathrm{j.a./min}$$

16. s.11

$360^\circ/24\,\mathrm{h} = 15\,^\circ\,\mathrm{h}^{-1}$

17. s.11

Poniższa tabela podaje różnice we wskazaniach czasu między poszczególnymi pomiarami, średnią z tych różnic oraz średnie odchylenie poszczególnych pomiarów od tej średniej:

Zegar	Nd-Pn	Pn-Wt	Wt-Śr	Śr-Cz	Cz-Pt	Pt-Sb	Średnia	Średnie odchylenie $\times$ 1000
A	-00:00:17	-00:00:15	-00:00:15	-00:00:17	-00:00:15	-00:00:15	-00:00:15,67	0,0103
B	-00:00:03	00:00:05	-00:00:10	00:00:05	00:00:06	-00:00:07	-00:00:00,67	0,0694
C	-00:00:58	-00:00:58	-00:00:58	-00:00:58	-00:00:58	-00:00:58	-00:00:58	0,0000
D	00:01:07	00:01:07	00:01:07	00:01:07	00:01:07	00:01:07	00:01:07	0,0000
E	00:01:10	00:00:55	00:00:02	00:00:20	00:00:10	00:00:10	00:27,83	0,2675

Za dobry przyjmujemy zegar, który jest przewidywalny, tzn. jeżeli nawet wykazuje błąd, to jest on stały (średnie odchylenie) i można na niego uwzględnić poprawkę w obliczeniach. Dopiero w następnej kolejności zwracany uwagę na bezwzględną dokładność pomiaru czasu (średnia).
Według tych kryteriów zegary można uszeregować następująco — od najlepszych do najgorszych: C, D, A, B, E.

18. s.11

Okres obrotu pulsara PSR 1937+21: $f = 1{,}557\,806\,448\,872\,75 \pm 3\,\mathrm{ms}$.

a) $7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s} \cdot (1/f) = 604\,800\,\mathrm{s}/(1{,}557\,806\,448\,872\,75 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}) = 3{,}9 \cdot 10^8$.

b) $10^6 \cdot f = 1\,557\,806{,}448\,872\,75\,\mathrm{ms} = 1557{,}8\,\mathrm{s} = 26\,\mathrm{min}$

c) $10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{ms} = 3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{ms}$

19. s.11

$$\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{40\,\mathrm{u}} = \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{\frac{40}{6{,}02 \cdot 10^{26}}\mathrm{kg}} = 9 \cdot 10^{49}$$

20. s.11

a) Objętość uncji złota wynosi: $27{,}63/19{,}32\,\mathrm{cm}^3 = 1{,}43\,\mathrm{cm}^3$.

Pole powierzchni folii o grubości 1 m i wadze jednej uncji wynosi: $\dfrac{1{,}43\,\mathrm{cm}^3}{10^{-4}\,\mathrm{cm}} = 1{,}43 \cdot 10^4\,\mathrm{cm}^2 = 1{,}43\,\mathrm{m}^2$

b) Pole powierzchni przekroju wynosi: $3{,}14 \cdot (2{,}5\,\mathrm{m})^2 = 19{,}6\,\mathrm{m}^2$.

Długość kabla o tym polu powierzchni zrobionego z uncji złota wynosi: $\dfrac{1{,}43\,\mathrm{cm}^3}{19{,}6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm}^2} = 7{,}3 \cdot 10^6\,\mathrm{cm} = 73\,\mathrm{km}$.

21. s.11

a) $1\,\mathrm{m}^3 = 10^6\,\mathrm{cm}^3$ ma masę $10^6\,\mathrm{g} = 1000\,\mathrm{kg}$.

b) Korzystając z poprzedniego punktu obliczamy: $\dfrac{5700\,\mathrm{m}^3}{10\,\mathrm{h}} = \dfrac{5700 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}}{10 \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s}} = 158{,}3\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$

22. s.11

$26\,\mathrm{km}^2 \cdot 2\,\mathrm{cale} = 26 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^2 \cdot 2/39{,}4\,\mathrm{m} = 1{,}39 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^3$ waży $1{,}39 \cdot 10^9\,\mathrm{kg}$.

23. s.11

Ilość atomów żelaza w $1\,\mathrm{cm}^3$: $\dfrac{7{,}87\,\mathrm{g}}{9{,}27 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}} = 8{,}49 \cdot 10^{22}$.

Stosunek objętości kuli do objętości sześcianu o boku takim jak średnica kuli: $\frac{4}{3}\pi\frac{1}{2^3} = \frac{\pi}{6} = 0{,}52$.

a) $\dfrac{1\,\mathrm{cm}^3}{8{,}49 \cdot 10^{22}} \cdot 0{,}52 = 6{,}16 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{cm}^3$.

b) $\sqrt[3]{6{,}16 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{cm}^3\,\frac{6}{3{,}14}} = \sqrt[3]{11{,}77 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{cm}^3} = 2{,}315 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm} = 0{,}2315\,\mathrm{nm}$.

UWAGA: Odpowiedzi w książce są błędne — nie uwzględniają tego, że atom jest kulą.

24. s.11

Pole powierzchni sześcianu o boku $1\,\mathrm{m}$ wynosi $6\,\mathrm{m}^2$.
Pole powierzchni ziarnka piasku: $4\pi \cdot (50\,\mathrm{m})^2 = 31{,}4\,\mathrm{mm}^2$.
Masa ziarnka piasku: $\frac{4}{3}\pi(50\,\mathrm{m})^3 \cdot \frac{2600\,\mathrm{kg}}{1\,\mathrm{m}^3} = 477{,}707 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}^3 \cdot \frac{2600 \cdot 10^3\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{m}^3} = 1{,}24 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g}$.
Rozwiązanie: $\frac{6\,\mathrm{m}^2}{31{,}4\,\mathrm{mm}^2} \cdot 1{,}24 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g} = 0{,}24\,\mathrm{g}$.

25. s.11

S/W= $258/212 = 1{,}217$

S/Z $= (216 - 60)/(212 - 32) = 156/180 = 0{,}867$

$50\,\mathrm{S} = 50 \cdot 1{,}217\,\mathrm{W} = 60{,}85\,\mathrm{W}$

$50\,\mathrm{S} = 50 \cdot 0{,}867\,\mathrm{Z} = 43{,}35\,\mathrm{Z}$

26. s.12

a) $11 \cdot 2\,\mathrm{garnce} = 22\,\mathrm{garnce}$.

b) $11 \cdot 0{,}5\,\mathrm{buszla} = 5{,}5\,\mathrm{buszla}$.

c) $5{,}5 \cdot 36{,}3687\,\mathrm{l} = 200{,}03\,\mathrm{l}$.

27. s.12

Kąt o który przesunęło się słońce: $\theta = 360° \cdot \frac{38\,\mathrm{min}}{24\,\mathrm{h}} = 9{,}5° = 0{,}165\,83\,\mathrm{rad}$.
Stosując wzory z przykładu 1.4 nie możemy tutaj przyjąć, że h^2 jest zaniedbywalnie małe, zatem mamy równanie kwadratowe:

$$h^2 + 2rh - r^2 \operatorname{tg}^2\theta = 0$$

gdzie r jest promieniem ziemi. Obliczamy:

$$\Delta = 4r^2 + 4r^2 \operatorname{tg}^2\theta = 4r^2(1 + \operatorname{tg}^2\theta), \quad \sqrt{\Delta} = 2r\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}$$

Jedno z rozwiązań jest ujemne. Uwzględniamy tylko dodatnie rozwiązanie:

$$h = \frac{-2r + \sqrt{\Delta}}{2} = r(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta} - 1)$$

Podstawiając dane z zadania dostajemy:

$$h = 6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \cdot (\sqrt{1 + 0{,}028} - 1) = 88{,}6\,\mathrm{km}$$

28. s.12

Ilość schodów: $\frac{4{,}57\,\mathrm{m}}{19\,\mathrm{cm}} = 457/19 \approx 24$. Wydłużeniu ulegną tylko schody wewnętrzne (nie łączące się na tym samym poziomie z podłogą), a tych jest 23.
Rozwiązanie: $(28\,\mathrm{cm} - 23\,\mathrm{cm}) \cdot 23 = 115\,\mathrm{cm}$.

29. s.12

$1\,\mathrm{wapentake} = 100 \cdot 100\,\mathrm{akrów} = 40{,}47 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^2$.
$25\,\mathrm{wapentake}/11\,\mathrm{barnów} = 40{,}47 \cdot 10^6/10^{-28} = 4{,}047 \cdot 10^{35}$.

2 Ruch prostoliniowy

Podstawowe równania ruchu ze stałym przyspieszeniem (patrz s. 25 w książce):

$$v = v_0 + at \tag{2.1}$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{2.2}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{2.3}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t \tag{2.4}$$

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2 \tag{2.5}$$

1. s.32

Przyjmując, że prędkość piłki jest stała (równa prędkości początkowej), mamy: $t = x/v$. Podstawiając dane otrzymujemy: $t = \frac{18{,}4\,\mathrm{m}}{160\,\mathrm{km/h}} = \frac{18{,}4\,\mathrm{m}}{44{,}4\,\mathrm{m/s}} = 0{,}414\,\mathrm{s}$.

2. s.32

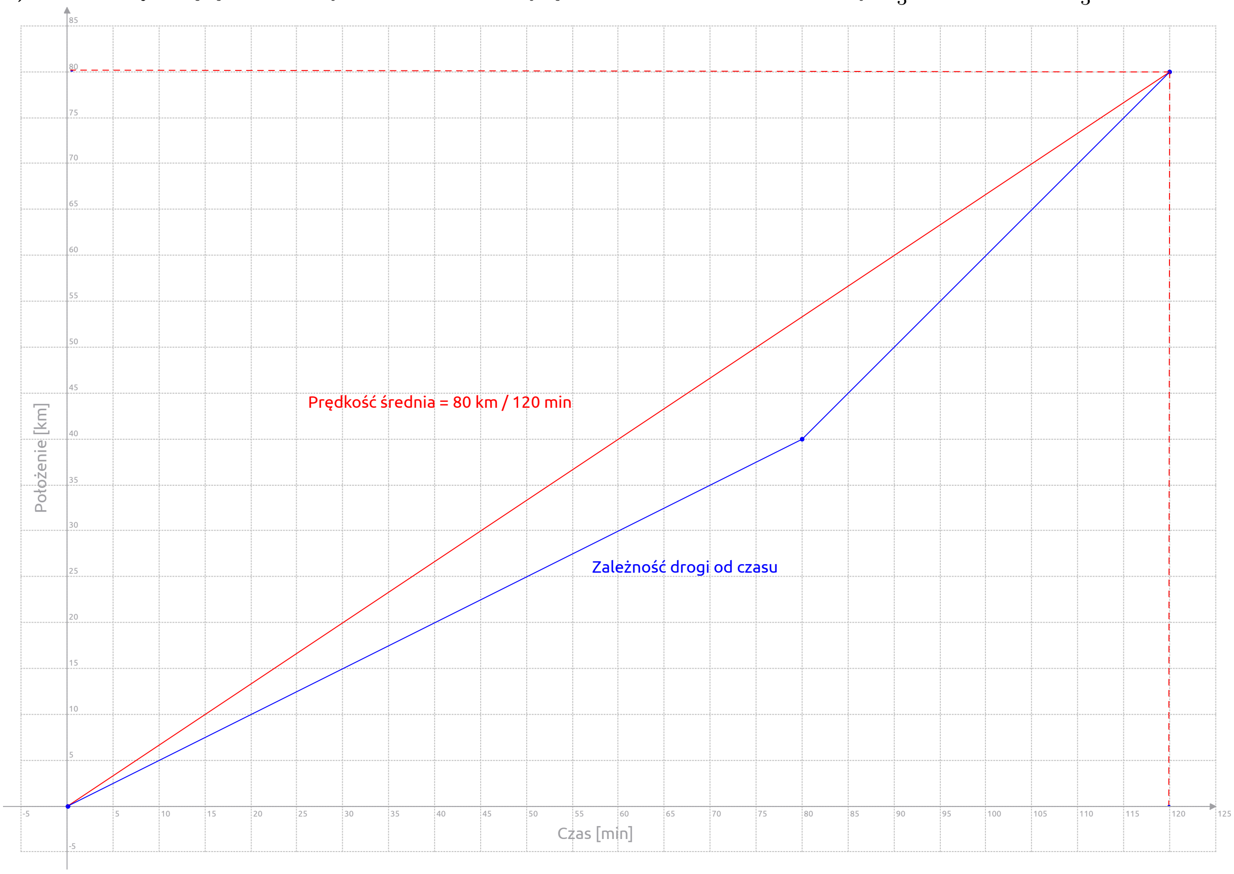
Z tego samego wzoru co w poprzednim zadaniu otrzymujemy: $t = \frac{200\,\mathrm{m}}{110{,}6\,\mathrm{km/h}} = \frac{200\,\mathrm{m}}{30{,}7\,\mathrm{m/s}} = 6{,}51\,\mathrm{s}$.

3. s.32

a) Czas podróży samochodu wynosi: $\frac{40\,\mathrm{km}}{30\,\mathrm{km/h}} + \frac{40\,\mathrm{km}}{60\,\mathrm{km/h}} = \frac{4}{3}\mathrm{h} + \frac{2}{3}\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h}$.
Średnia prędkość na całym dystansie: $\frac{+80\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{h}} = +40\,\mathrm{km/h}$.

b) Średnia wartość bezwzględna prędkości: $\frac{80\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{h}} = 40\,\mathrm{km/h}$.

c) Dla większej jasności rysunku zamieńmy jednostki czasu na minuty: $\frac{4}{3}\text{h} = 80\,\text{min}$ $\frac{2}{3}\text{h} = 40\,\text{min}$.



4. s.32

Odległość jaka dzieli samolot od zderzenia z ziemią: $x = 35\,\text{m} \cdot \text{ctg}(4{,}3°) \approx 465\,\text{m}$.
Czas na skorygowanie lotu: $\frac{0{,}465\,\text{km}}{1300\,\text{km/h}} = 1{,}29\,\text{s}$.

5. s.32

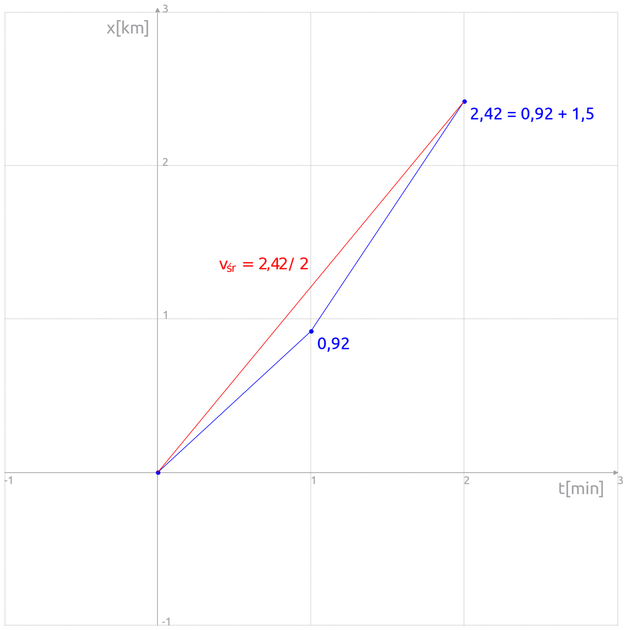
a) $(55\,\text{km/h} + 90\,\text{km/h})/2 = 72{,}5\,\text{km/h}$.

b) Oznaczmy przez t_{55} czas jazdy z prędkością $55\,\text{km/h}$, oraz odpowiednio t_{90} czas jazdy z prędkością $90\,\text{km/h}$. W tym wypadku taką samą drogę (połowę całej drogi) przemierzamy z prędkościami 55 i 90 km/h. Tak więc możemy napisać równanie: $55\,\text{km/h} \cdot t_{55} = 90\,\text{km/h} \cdot t_{90}$ z którego otrzymujemy stosunek $\frac{t_{55}}{t_{90}} = \frac{90}{55} = 1{,}64$ korzystając z tego, że oba czasy są niezerowe.
Średnia prędkość bezwzględna wynosi: $\frac{\text{cała droga}}{t_{55}+t_{90}} = \frac{2\cdot(90\,\text{km/h}\cdot t_{90})}{t_{55}+t_{90}}$.
Dzieląc licznik i mianownik ostatniego ułamka przez t_{90}, dostajemy: $\frac{2\cdot 90\,\text{km/h}}{t_{55}/t_{90}+1} = \frac{180\,\text{km/h}}{2{,}64} = 68{,}18\,\text{km/h}$.

c) Przypadek całej podróży możemy sprowadzić do przypadku **b)** przyjmując, że połowę całej podróży (drogę tam) przemierzyliśmy z wyliczoną w punkcie **a)** prędkością średnią, a drugą połowę (drogę z powrotem) z prędkością średnią wyliczoną w punkcie **b)**.
Oznaczmy czasy przejazdów tam i z powrotem odpowiednio przez t_t i t_p.
Korzystając z wzorów punktu **b)** mamy: $\frac{t_t}{t_p} = \frac{68{,}18}{72{,}5} = 0{,}94$.
Średnia prędkość bezwzględna drogi tam i z powrotem wynosi: $\frac{2\cdot 68{,}18\,\text{km/h}}{t_t/t_p+1} = \frac{136{,}36\,\text{km/h}}{1{,}94} = 70{,}29\,\text{km/h}$.

d) 0 km/h ponieważ całkowite przemieszczenie wynosi 0 (wróciliśmy do punktu wyjścia).

e) Dla większej czytelności rysunku zmieńmy jednostki prędkości:
$55\,\mathrm{km/h} = 0{,}92\,\mathrm{km/min}, \quad 90\,\mathrm{km/h} = 1{,}5\,\mathrm{km/min}.$

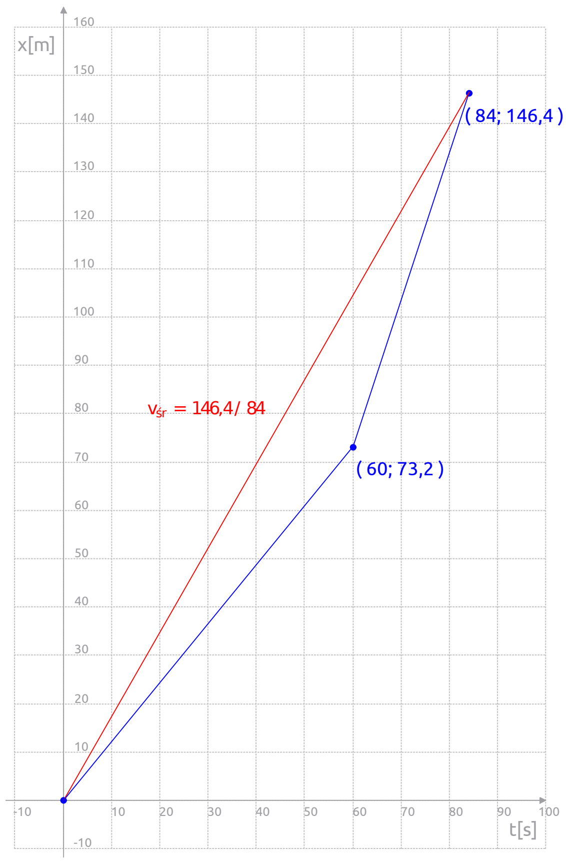


6. s.32

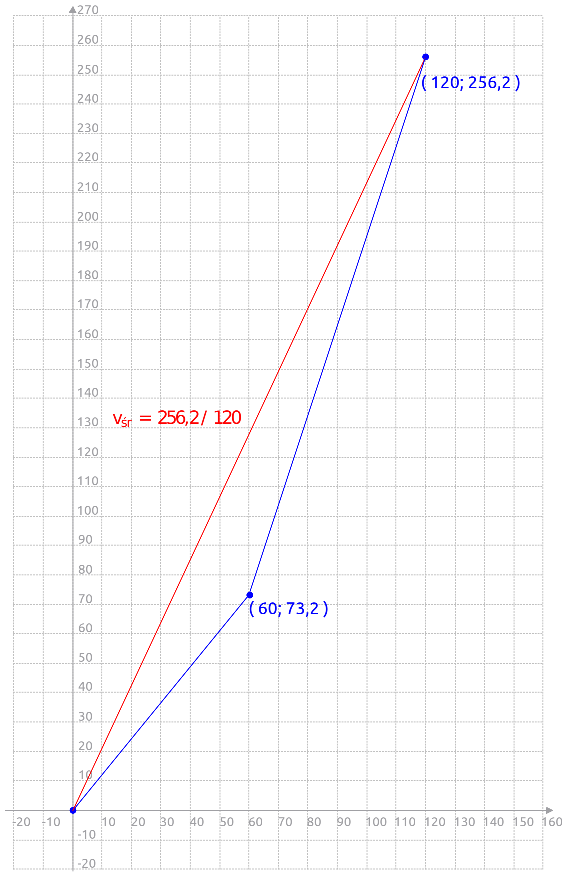
a) Czas chodu ścieżką: $\frac{73{,}2\,\mathrm{m}}{1{,}22\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 60\,\mathrm{s}$.
Czas biegu ścieżką: $\frac{73{,}2\,\mathrm{m}}{3{,}05\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 24\,\mathrm{s}$.
Prędkość średnia: $\frac{73{,}2\,\mathrm{m}+73{,}2\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}+24\,\mathrm{s}} = \frac{146{,}4\,\mathrm{m}}{84\,\mathrm{s}} = 1{,}74\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) Prędkość średnia: $(1{,}22\,\mathrm{m\,s^{-1}} + 3{,}05\,\mathrm{m\,s^{-1}})/2 = 2{,}135\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

c)



Wykres dla przypadku a)



Wykres dla przypadku b)

7. s.32

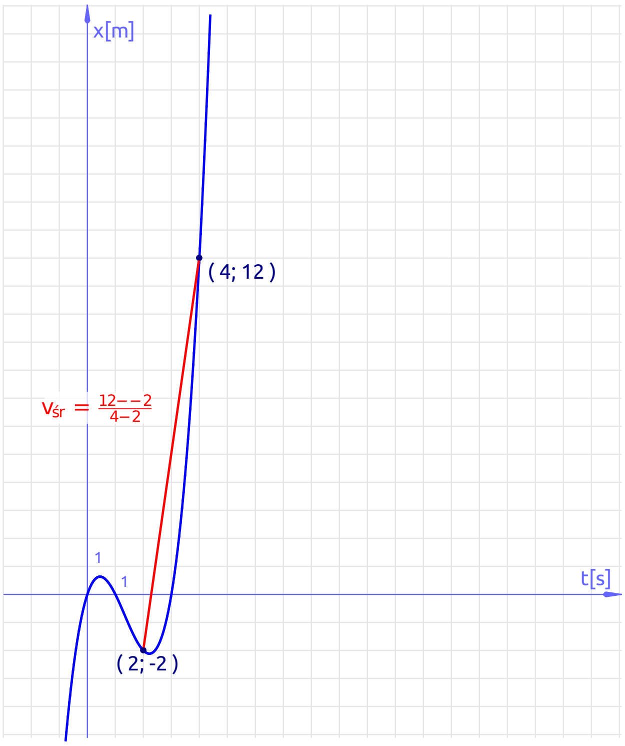
$x(t) = 3t - 4t^2 + t^3$

a) $x(1) = 3 - 4 + 1 = 0\text{m}$. $x(2) = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 + 2^3 = -2\text{m}$. $x(3) = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 3^2 + 3^3 = 0\text{m}$. $x(4) = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4^2 + 4^3 = +12\text{m}$.

b) $x(4) - x(0) = +12\text{m} - 0\text{m} = +12\text{m}$.

c) $v_{\acute{s}r} = (x(4) - x(2))\,/\,2\,\text{s} = (12 - -2)\,/\,2\text{m}\,\text{s}^{-1} = +7\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

d)



8. s.32

Pociągi będące w początkowej odległości 60 km miną się po czasie wynoszącym: $\frac{60\,\mathrm{km}}{30\,\mathrm{km\,h^{-1}}+30\,\mathrm{km\,h^{-1}}} = 1\,\mathrm{h}$. Ptak lecący z prędkością o wartości bezwzględnej $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ przeleci w czasie 1 godziny odległość 60 km.

9. s.32

Obliczmy prędkość średnią pierwszego biegacza: $\frac{1\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{min}27{,}95\,\mathrm{s}} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{147{,}95\,\mathrm{s}} = 6{,}76\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Drugi biegacz, gdyby biegł z taką samą prędkością średnią przebyłby odległość: $6{,}76\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 148{,}15\,\mathrm{s} = 1001{,}35\,\mathrm{m}$. Gdyby biegł z mniejszą prędkością przebiegłby mniejszą odległość, zatem maksymalna różnica długości trasy zawodników przy założeniu, że zawodnik pierwszy biegnie nie wolniej niż drugi wynosi: $1001{,}35\,\mathrm{m} - 1000\,\mathrm{m} = 1{,}35\,\mathrm{m}$.

10. s.32

a) Tak, między 2-gą a 4-tą sekundą.

b) Tak, do 3-ciej sekundy.

c) Tak, powyżej 3-ciej sekundy.

d) Tak w 3-ciej sekundzie.

11. s.33

$$x = 4 - 12t + 3t^2$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -12 + 6t$$

a) $-6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) W ujemnym, bo prędkość jest ujemna.

c) $6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

d) Mniejsza, aż do momentu osiągnięcia prędkości zerowej. Wynika to z tego, że funkcja prędkości od czasu jest funkcją rosnącą, i dopóki jest ujemna, to jej wartość bezwzględna jest malejąca.

e) Tak, bo prędkość w chwili początkowej jest ujemna i wzrasta liniowo.

f) Nie, ponieważ w chwili $t = 3\,\mathrm{s}$ wartość prędkości jest dodatnia a prędkość wzrasta liniowo.

12. s.33

$$x = 9{,}75 + 1{,}5t^3$$
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4{,}5t^2$$

a) $v_{\text{śr}} = (x(3) - x(2))\,\mathrm{cm}/1\,\mathrm{s} = (50{,}25 - 21{,}75)\,\mathrm{cm}/1\,\mathrm{s} = 28{,}5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$.

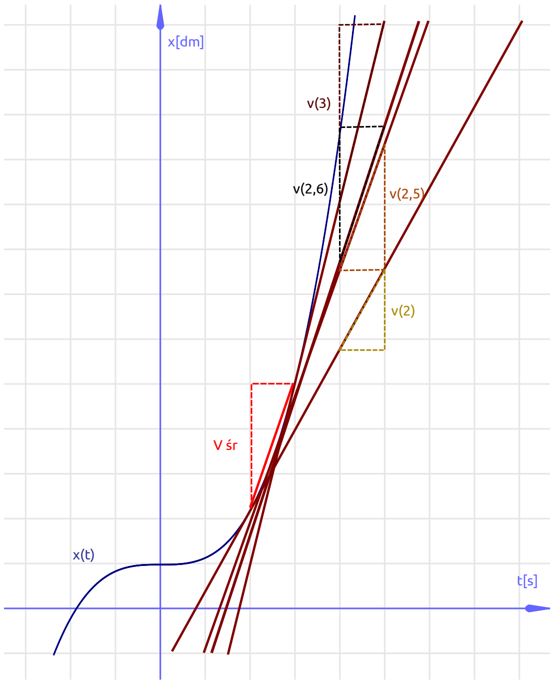
b) $v = v(2) = 18\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$.

c) $v = v(3) = 40{,}5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$.

d) $v = v(2{,}5) = 28{,}125\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$.

e) Połowa drogi pomiędzy zadanymi punktami: $21{,}75\,\mathrm{cm} + (50{,}25 - 21{,}75)/2\,\mathrm{cm} = 36\,\mathrm{cm}$. Czas w którym cząstka osiąga ten punkt: $\sqrt[3]{\frac{36-9{,}75}{1{,}5}} = 2{,}6\,\mathrm{s}$. Prędkość w tym punkcie: $v = v(2{,}6) = 30{,}33\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$.

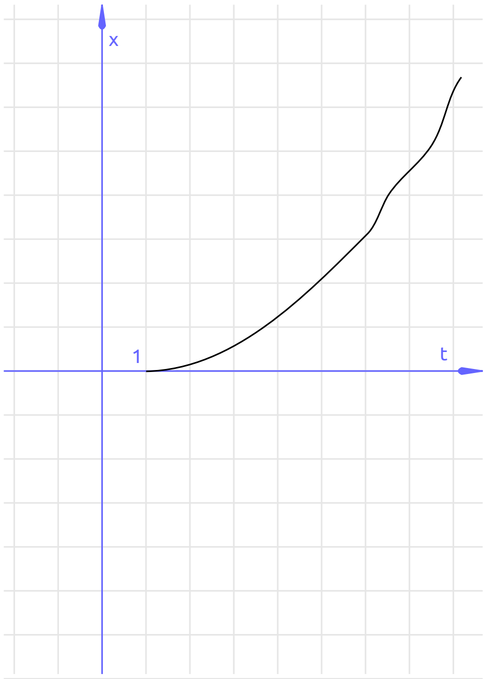
f) Dla większej czytelności wykresu zmieńmy jednostki długości na decymetry, wzory na położenie i prędkość będą wyglądać wtedy: $x = 0{,}975 + 0{,}15t^3, \quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0{,}45t^2$.



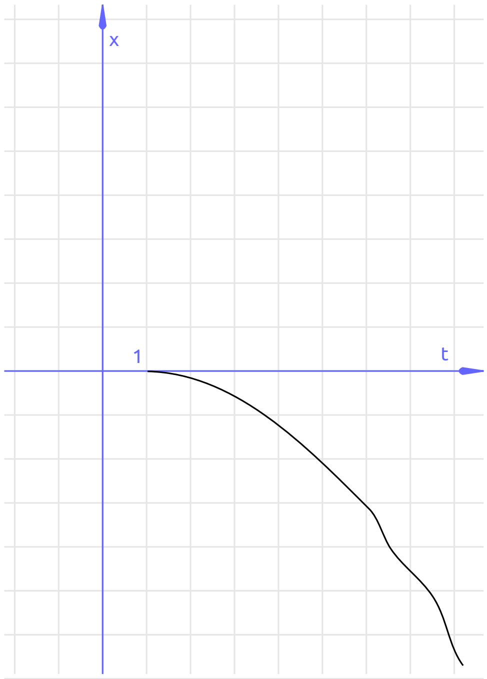
13. s.33

W przedziale czasu 0–2 s biegacz porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a_{0-2} = \frac{8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{2\,\mathrm{s}} = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ oraz zerową prędkością początkową. Przebytą drogę obliczamy ze wzoru 2.2: $x_{0-2} = \frac{1}{2} \cdot 4\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (2\,\mathrm{s})^2 = 8\,\mathrm{m}$.
W przedziale czasu 2–10 s biegacz porusza się ze stałą prędkością wynoszącą $v_{2-10} = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Przebędzie zatem drogę: $x_{2-10} = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 8\,\mathrm{s} = 64\,\mathrm{m}$.
W przedziale czasu 10–12 s biegacz porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym z przyspieszeniem $a_{10-12} = \frac{(4-8)\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{2\,\mathrm{s}} = -2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ oraz prędkością początkową v_{2-10}. Przebytą drogę obliczamy ze wzoru 2.2: $x_{10-12} = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 2\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \cdot (-2\,\mathrm{m\,s^{-2}}) \cdot (2\,\mathrm{s})^2 = 12\,\mathrm{m}$.
W przedziale czasu 12–16 s biegacz porusza się ze stałą prędkością wynoszącą $v_{12-16} = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Przebędzie zatem drogę: $x_{12-16} = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 4\,\mathrm{s} = 16\,\mathrm{m}$.
Zatem całkowita droga przebyta przez biegacza wynosi: $x = x_{0-2} + x_{2-10} + x_{10-12} + x_{12-16} = (8 + 64 + 12 + 16)\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{m}$.

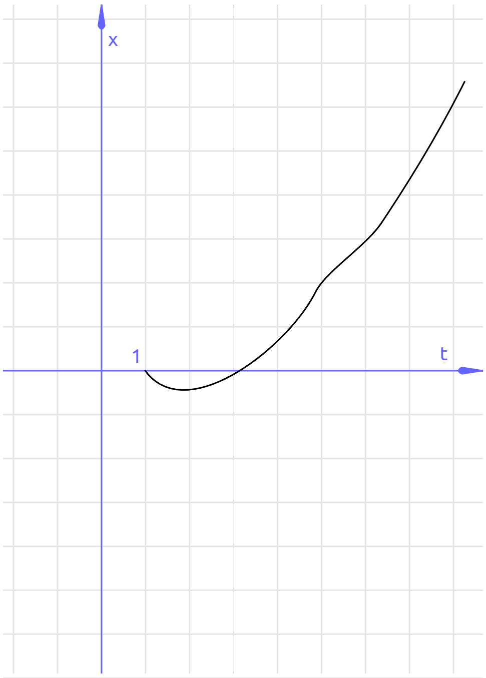
14. s.33



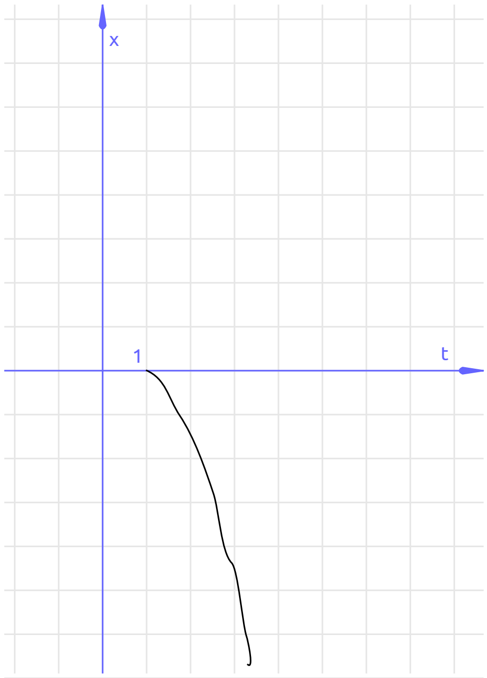
a)



b)



c)



d)

e) W przypadkach a), b) i d).

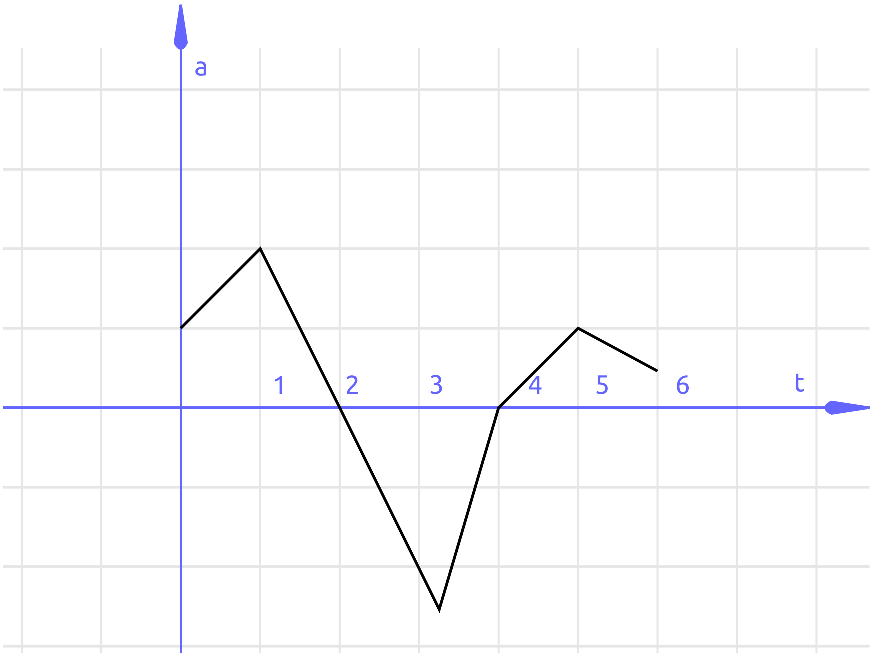
15. s.33

a) Kwadrat prędkości.

b) Przyspieszenie.

c) Odpowiednio: $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$, $\mathrm{m\,s^{-2}}$.

16. s.33



17. s.33

Jeżeli cząstka porusza się w przeciwnym kierunku, to jedna z podanych prędkości musi być ujemna. Przyjmijmy taki kierunek osi x, że prędkość pierwsza jest ujemna. Przyspieszenie średnie: $a_{\text{śr}} = \frac{30\,\mathrm{m\,s^{-1}} - -18\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{2{,}4\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Przyspieszenie średnie jest skierowane w kierunku zgodnym z prędkością końcową.

18. s.33

Odległość przebyta przez człowieka do 10 minuty: $x_{10} = 2{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 300\,\mathrm{s} = 660\,\mathrm{m}$.
Odległość przebyta przez człowieka do 9 minuty: $x_9 = 2{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 240\,\mathrm{s} = 528\,\mathrm{m}$.

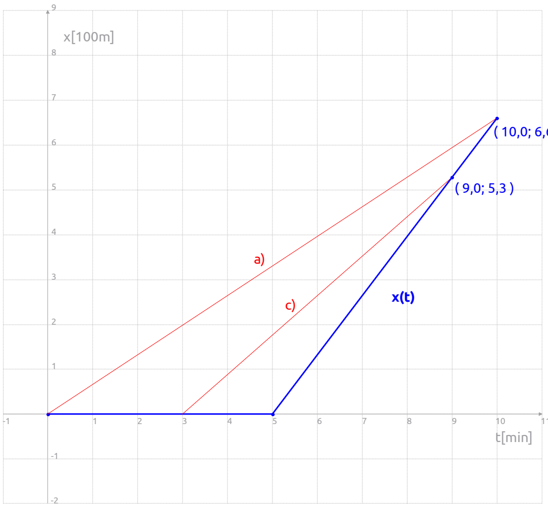
a) $v_{\text{śr}} = \frac{660\,\mathrm{m}}{600\,\mathrm{s}} = 1{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

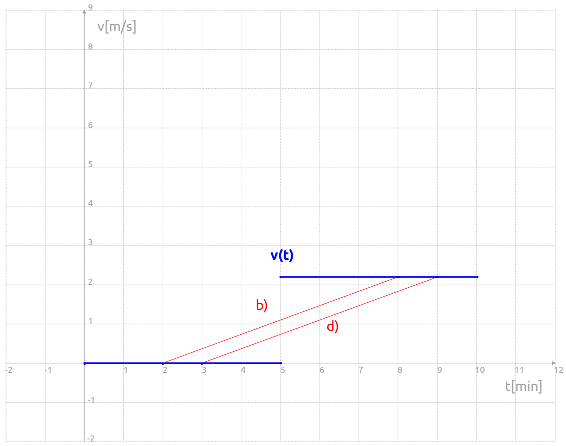
b) $a_{\text{śr}} = \frac{2{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{360\,\mathrm{s}} = 6{,}11\,\mathrm{mm\,s^{-2}}$.

c) $v_{\text{śr}} = \frac{528\,\mathrm{m}}{360\,\mathrm{s}} = 1{,}47\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

d) $a_{\text{śr}} = \frac{2{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{360\,\mathrm{s}} = 6{,}11\,\mathrm{mm\,s^{-2}}$.

e)





19. s.33

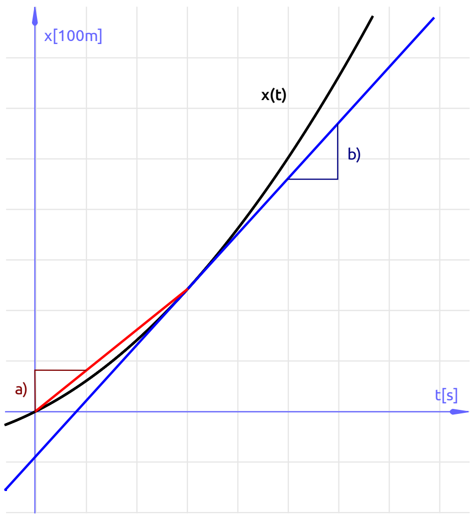
$x = 50t + 10t^2, \quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 50 + 20t, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 20.$

a) $v_{\text{śr}} = (x(3) - x(0))\,\mathrm{m}/3\,\mathrm{s} = 240\,\mathrm{m}/3\,\mathrm{s} = 80\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$

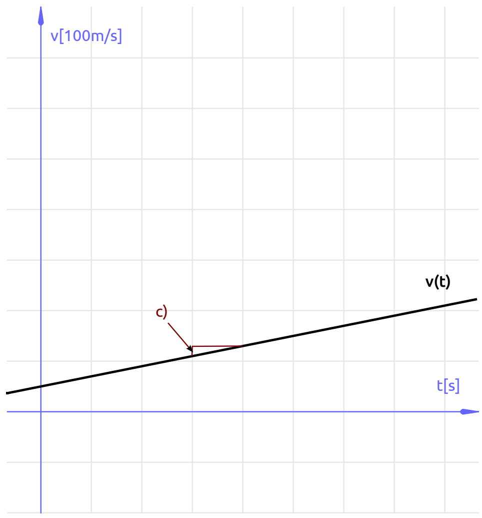
b) $v(3) = 110\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$

c) $a(3) = 20\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$

d), e)



f)



20. s.33

$x = 16t\mathrm{e}^{-t}, \quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 16(1-t)\mathrm{e}^{-t}.$
Z powyższego wzoru na v wynika, ze elektron na chwilę traci prędkość w chwili $t = 1\,\mathrm{s}$.

21. s.33

$x = ct^2 - bt^3, \quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2ct - 3bt^2, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2c - 6bt.$

a) $c = 3\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \quad b = 2\,\mathrm{m\,s^{-3}}$.
Po podstawieniu tych wartości: $x = 3t^2 - 2t^3, \quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t - 6t^2, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6 - 12t$.

b) W miejscu zerowym funkcji v, czyli w punkcie $t = 1\,\mathrm{s}$.

c) $x(0) = 0\,\mathrm{m}, \quad x(1\,\mathrm{s}) = 1\,\mathrm{m}, \quad x(4\,\mathrm{s}) = -80\,\mathrm{m}$.
Droga przebyta przez cząstkę: $82\,\mathrm{m}$.

d) Przemieszczenie cząstki: $-80\,\mathrm{m}$.

e) $v(1\,\mathrm{s}) = 0,\ v(2\,\mathrm{s}) = -12\,\mathrm{m\,s^{-1}},\ v(3\,\mathrm{s}) = -36\,\mathrm{m\,s^{-1}},\ v(4\,\mathrm{s}) = -72\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

f) $a(1\,\mathrm{s}) = -6\,\mathrm{m\,s^{-2}},\ a(2\,\mathrm{s}) = -18\,\mathrm{m\,s^{-2}},\ a(3\,\mathrm{s}) = -30\,\mathrm{m\,s^{-2}},\ a(4\,\mathrm{s}) = -42\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

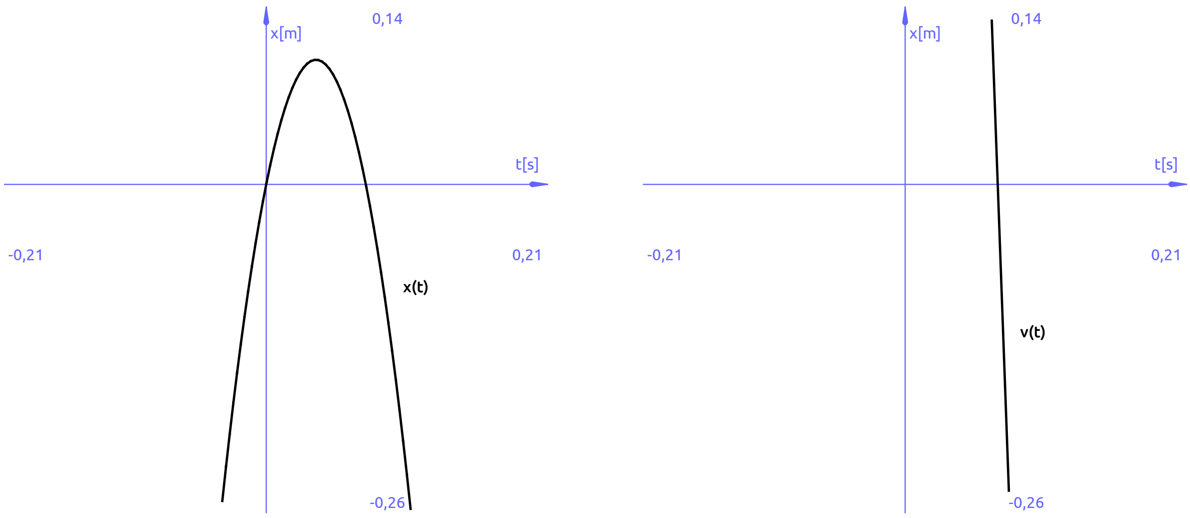
22. s.33

Ze wzoru 2.1: przyspieszenie samochodu: $a_s = \frac{30\,000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}\cdot 30\,\mathrm{s}} = 0{,}28\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, przyspieszenie roweru będzie takie samo, bo taka sama jest różnica prędkości oraz czas przyspieszania.

23. s.34

a) Ze wzoru 2.3 przyjmując $v = 0$, $v_0 = 5 \cdot 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $a = -1{,}25 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $x_0 = 0$, obliczamy $x = 25 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m^2\,s^{-2}} \,/\, 2{,}5 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 0{,}1\,\mathrm{m}$.

b)



24. s.34

Ze wzoru: 2.1 przy takim przyspieszeniu czas rozpędzania byłby równy: $t = \frac{100\,\mathrm{km\,h^{-1}}}{50\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = \frac{100\,\mathrm{km\,h^{-1}}}{50\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 0{,}55\,\mathrm{s}$.

25. s.34

Korzystamy ze wzoru: 2.1.

a) Prędkość w chwili $t = -2{,}5\,\mathrm{s}$ wynosiła $9{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 3{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 2{,}5\,\mathrm{s} = 1{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) Prędkość w chwili $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ wynosiła $9{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}} + 3{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 2{,}5\,\mathrm{s} = 17{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

26. s.34

Ze wzoru: 2.4 $t = \frac{2{,}4\,\mathrm{m}}{640\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 3{,}75\,\mathrm{ms}$.

27. s.34

a) $t = \frac{3\cdot 10^{7}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 850{,}34\,\mathrm{h} = 35{,}43\,\mathrm{d}$.

b) $x = (1/2)\cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot(850{,}34\,\mathrm{h})^2 = 4{,}6\cdot 10^{13}\,\mathrm{m}$.

28. s.34

Ze wzoru: 2.3 szukane przyspieszenie, to $a = \frac{(360\,\mathrm{km\,h^{-1}})^2}{2\cdot 1{,}8\,\mathrm{km}} = 36\,000\,\mathrm{km\,h^{-2}} = 2{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

29. s.34

Ze wzoru: 2.3 szukane przyspieszenie, to $a = \frac{(5{,}7\cdot 10^{6}\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2-(1{,}5\cdot 10^{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2\cdot 0{,}01\,\mathrm{m}} = 1{,}62\cdot 10^{15}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

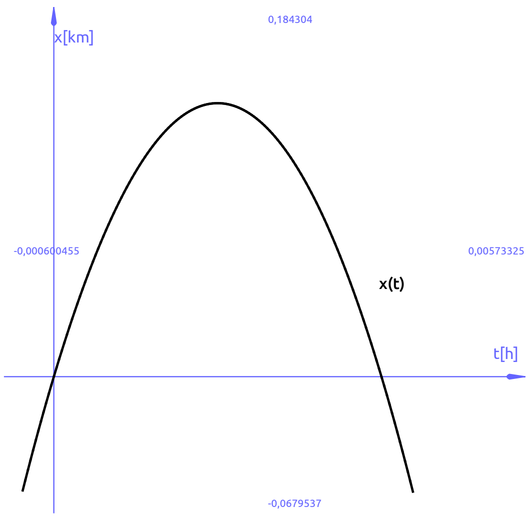
30. s.34

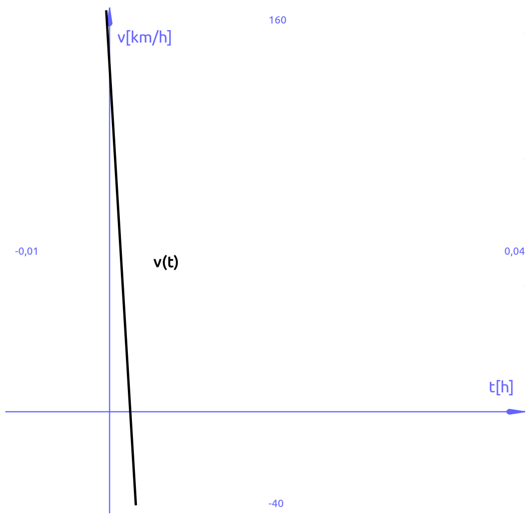
Szukane przyspieszenie: $a = \frac{0-1020\,\mathrm{km\,h^{-1}}}{1{,}4\,\mathrm{s}} = -\frac{283{,}3\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{1{,}4\,\mathrm{s}} = -202{,}38\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Wyrażając to w jednostkach przyspieszenia grawitacyjnego: $a = -\frac{202{,}38\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}g = 20{,}65g$.

31. s.34

a) Szukany czas wynosi: $t = \frac{137\,\mathrm{km\,h^{-1}}-90\,\mathrm{km\,h^{-1}}}{5{,}3\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = \frac{47\,\mathrm{km\,h^{-1}}}{5{,}3\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 2{,}46\,\mathrm{s}$.

b)





32. s.34

Odczytując z wykresu wartości położenia dla trzech punktów w czasie, z równania 2.2 otrzymujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} -2 = x_0 & ,t=0 \\ 0 = x_0 + v_0 + \frac{1}{2}a & ,t=1 \\ 6 = x_0 + 2v_0 + \frac{1}{2}4a & ,t=2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest: $x_0 = -2\,\mathrm{m},\ v_0 = 0,\ a = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Przyspieszenie jest skierowane w kierunku oso x.

33. s.34

a) Zmieńmy jednostkę prędkości pojazdu: $56\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 15{,}56\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Podstawiając dane do wzoru 2.2 otrzymujemy: $24\,\mathrm{m} = 15{,}56\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 2\,\mathrm{s} + \frac{1}{2}a(2\,\mathrm{s})^2$ z czego obliczamy $a = -\frac{7{,}11\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}^2} = -3{,}56\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

b) Podstawiając dane do wzoru 2.4 otrzymujemy: $24\,\mathrm{m} = \frac{1}{2}(v + 15{,}56\,\mathrm{m\,s^{-1}}) \cdot 2\,\mathrm{s}$ z czego obliczamy $v = 24\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 15{,}56\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 8{,}44\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

34. s.34

Zmieńmy jednostki prędkości: $72\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $144\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Ze wzoru 2.3 obliczymy odległości potrzebne do zatrzymania pociągów. Pociąg czerwony: $x = \frac{(20\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2\cdot 1\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 200\,\mathrm{m}$. Pociąg zielony: $x = \frac{(40\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2\cdot 1\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 800\,\mathrm{m}$. $200\,\mathrm{m} + 800\,\mathrm{m} > 950\,\mathrm{m}$ a więc dojdzie do zderzenia. Zdawałoby się, że czas po jakim dojdzie do zderzenia wyznaczymy z układu równań z których drugie i trzecie równanie są oparte na wzorze 2.2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 950\,\mathrm{m} \\ \qquad x_1 = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t - \dfrac{1}{2} 1\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t^2 \\ \qquad x_2 = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t - \dfrac{1}{2} 1\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t^2 \end{cases}$$

gdzie x_1 i x_2 oznaczają odpowiednio drogi przebyte przez pociągi czerwony i zielony do momentu zderzenia. Tymczasem układ ten nie ma rzeczywistych rozwiązań! Przyczyną tej pozornej sprzeczności jest fakt, że w układzie tym zakładamy, że przyspieszenie związane z hamowaniem działa przez cały czas na oba pociągi. Przy tym założeniu pociąg jadący wolniej (czerwony) zatrzymał by się, a następnie zacząłby cofać ze stałym przyspieszeniem i w efekcie zdołałby uciec przez pociągiem zielonym. Natomiast rzeczywisty scenariusz wygląda tak, że pociąg czerwony zatrzymuje się wcześniej i stoi, a następnie po jakimś czasie uderza w niego pociąg zielony. Zweryfikujmy ten scenariusz. Obliczmy najpierw po jakim czasie zatrzyma się każdy z pociągów. Pociąg czerwony: $t = \frac{20\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{1\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 20\,\mathrm{s}$. Pociąg zielony: $t = \frac{40\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{1\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 40\,\mathrm{s}$. Następnie obliczmy, w jakim miejscu znajdzie się pociąg zielony (ile drogi przebędzie) w momencie kiedy pociąg czerwony wyhamuje — czyli po 20 sekundach: $x = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 20\,\mathrm{s} - \frac{1}{2} 1\,\mathrm{m\,s^{-2}}(20\,\mathrm{s})^2 = 600\,\mathrm{m}$. $200\,\mathrm{m} + 600\,\mathrm{m} < 950\,\mathrm{m}$ a więc rzeczywiście w 20-tej sekundzie pociąg czerwony stoi, a pociąg zielony zmierza w jego kierunku (nie doszło jeszcze do zderzenia). A zatem w momencie zderzenia prędkość pociągu czerwonego wynosi 0, a prędkość pociągu zielonego jest jego prędkością po 750 metrach hamowania, czyli wynosi (ze wzoru 2.3): $v = \sqrt{(40\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2 - 2 \cdot 1\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 750\,\mathrm{m}} = \sqrt{1600 - 1500}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 36\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

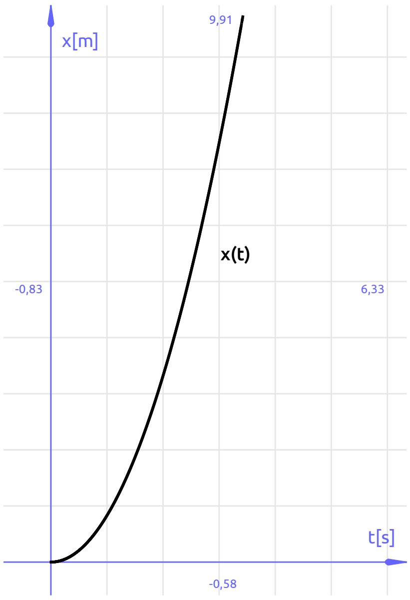
35. s.34

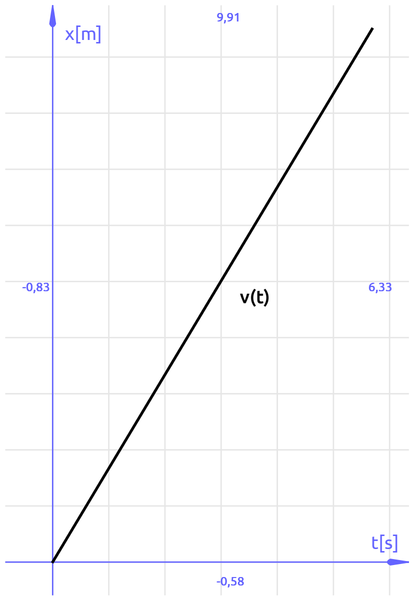
a) Prędkość początkową obliczymy ze wzoru 2.4: $v_0 = \frac{2\cdot 60\,\mathrm{m}}{6\,\mathrm{s}} - 15\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) $a = \frac{15\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{6\,\mathrm{s}} = 1{,}67\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

c) Ze wzoru 2.3 szukana odległość, to: $\Delta x = \frac{(5\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2\cdot 1{,}67\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 7{,}485\,\mathrm{m}$.

d)





36. s.34

a) Szukaną odległość i czas wyznaczymy z układu równań w którym każde z równań opisuje ruch poszczególnego samochodu:

$$\begin{cases} x = 9{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t \\ x = \frac{1}{2} 2{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t^2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem niezerowym jest (w przybliżeniu): $x = 82\,\mathrm{m}, t = 8{,}6\,\mathrm{s}$.

b) $v = 2{,}2\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 8{,}6\,\mathrm{s} = 18{,}92\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

37. s.34

Zmieńmy najpierw jednostki prędkości: $80{,}5\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 22{,}36\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $48{,}3\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 13{,}42\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
Wprowadźmy następujące oznaczenia: t_0 - czas reakcji kierowcy (wspólny dla obu przypadków), t_1 - czas hamowania w przypadku pierwszym, t_2 - czas hamowania w przypadku drugim, a - wartość bezwzględna opóźnienia hamowania (wspólna dla obu przypadków). Formułując równania na prędkość oraz położenie dla obu przypadków otrzymamy układ czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi, który możemy rozwiązać otrzymując szukane wartości:

$$\begin{cases} 0 = 22{,}36\,\mathrm{m\,s^{-1}} - at_1 & \text{wzór 2.1 dla przypadku pierwszego} \\ 56{,}7\,\mathrm{m} = 22{,}36\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t_0 + \frac{1}{2} 22{,}36\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t_1 & \text{wzór 2.4 dla przypadku pierwszego} \\ 0 = 13{,}42\,\mathrm{m\,s^{-1}} - at_2 & \text{wzór 2.1 dla przypadku drugiego} \\ 24{,}4\,\mathrm{m} = 13{,}42\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t_0 + \frac{1}{2} 13{,}42\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t_2 & \text{wzór 2.4 dla przypadku drugiego} \end{cases}$$

a) $t_0 = 0{,}74\,\mathrm{s}$.

b) $a = 6{,}23\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

38. s.35

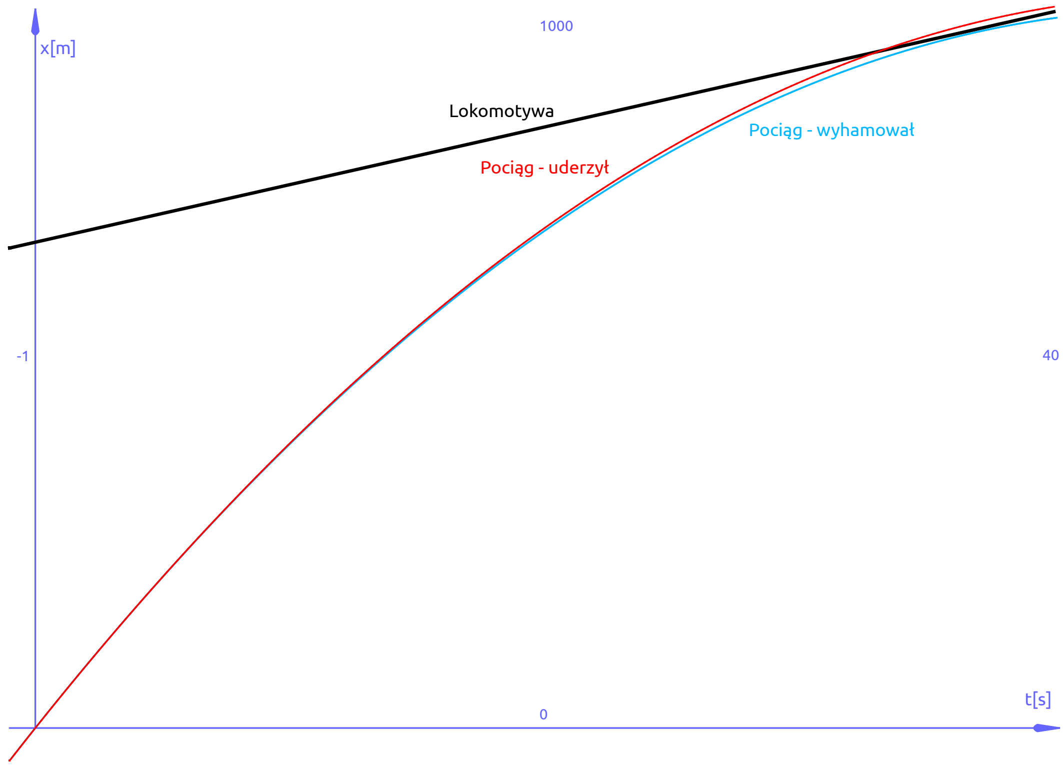
Zmieńmy najpierw jednostki prędkości: $161\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 44{,}72\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $29\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 8{,}06\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
Ułóżmy układ równań dla przypadku granicznego, kiedy pociąg pasażerski (zwany dalej pociągiem) oraz lokomotywa z bocznicy (zwana dalej lokomotywą) stykają się (ale nie zderzają), co oznacza, że prędkość pociągu w momencie zetknięcia jest równa prędkości lokomotywy. Załóżmy, że zetknięcie nastąpiło po czasie t oraz w odległości x od wyjazdu z bocznicy a wartość bezwzględna opóźnienia wynosi a.

$$\begin{cases} x = 8{,}06\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t & \text{równanie ruchu lokomotywy} \\ 8{,}06\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 44{,}72\,\mathrm{m\,s^{-1}} - at & \text{wzór 2.1 dla pociągu} \\ 676\,\mathrm{m} + x = \dfrac{1}{2}(8{,}06\,\mathrm{m\,s^{-1}} + 44{,}72\,\mathrm{m\,s^{-1}}) \cdot t & \text{wzór 2.4 dla pociągu} \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest $x = 297{,}25\,\mathrm{m}, t = 36{,}88\,\mathrm{s}, a = 0{,}994\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

a) Wartość bezwzględna opóźnienia musi wynosić co najmniej $1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

b)



39. s.35

Zmieńmy najpierw jednostki prędkości: $305\,\mathrm{m\,min^{-1}} = 5{,}08\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

a) Ze wzoru 2.3: $x_r = \frac{(5{,}08\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2\cdot 1{,}22\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 10{,}59\,\mathrm{m}$.

b) Przyjmując, że wagonik hamuje z taką samą wartością bezwzględną przyspieszenia, jak przyspiesza, jego drogę możemy podzielić, na czas przyspieszania, czas ruchu ze stałą, maksymalną prędkością, oraz czas hamowania (równy czasowi przyspieszania). Droga po której wagonik porusza się ruchem jednostajnym wynosi: $x_j = 190\,\mathrm{m} - 2 \cdot 10{,}59\,\mathrm{m} = 168{,}82\,\mathrm{m}$, a czas tego ruchu: $t_j = \frac{168{,}82\,\mathrm{m}}{5{,}08\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 33{,}23\,\mathrm{s}$. Czas rozpędzania i hamowania wagonika: $t_r = \frac{5{,}08\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{1{,}22\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 4{,}16\,\mathrm{s}$. Wreszcie czas pełnego przejazdu wagonika: $t = 2t_r + t_j = 41{,}56\,\mathrm{s}$.

40. s.35

a) $v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 1700\,\mathrm{m}} = 182{,}63\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 657{,}47\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

b) Nie.

41. s.35

a) $x = \frac{(24\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 29{,}36\,\mathrm{m}$.

b) $t = \frac{24\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 2{,}45\,\mathrm{s}$.

42. s.35

a) $30\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t + \frac{1}{2} 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t^2$. Rozwiązując to równanie otrzymamy: $t = 1{,}54\,\mathrm{s}$.

b) $v = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}} + 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 1{,}54\,\mathrm{s} = 27{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

43. s.35

a) $v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 50\,\mathrm{m}} = 31{,}32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) $t = 2\frac{31{,}32\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 6{,}4\,\mathrm{s}$.

44. s.35

a) $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 145\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 5{,}44\,\mathrm{s}$.

b) $v = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 5{,}44\,\mathrm{s} = 53{,}37\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

c) $x = \frac{(53{,}37\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2 \cdot 25 \cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 5{,}8\,\mathrm{m}$.

45. s.35

a) $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 50\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 3{,}19\,\mathrm{s}$.

b) Prędkość po 50 m wynosi: $v = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 3{,}19\,\mathrm{s} = 31{,}29\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Czas przebycia kolejnych 50 m wyznaczamy z równania ruchu: $50\,\mathrm{m} = 31{,}29\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t + \frac{1}{2} 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} t^2$. Jego dodatnim rozwiązaniem jest: $t = 1{,}32\,\mathrm{s}$.

46. s.35

a) $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

b) $t = \frac{v - v_0}{g} = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0}{g}$.

c) Prędkość byłaby taka sama jak w punkcie a). Wzór nie zależy od kierunku prędkości.

d) Czas byłby dłuższy o wartość $2\frac{v_0}{g}$, czyli o czas potrzebny na wyhamowanie i opadniecie piłki. Ponadto wynika to też ze wzoru przedstawionego w puncie b) kiedy odwrócimy znak v_0.

47. s.35

a) Z równania 2.2 $v_0 = \frac{0{,}544\,\mathrm{m}+(1/2)\cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot(0{,}2\,\mathrm{s})^2}{0{,}2\,\mathrm{s}} = 3{,}701\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) $v = 3{,}701\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 0{,}2\,\mathrm{s} = 1{,}739\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
Maksymalna wysokość na jaką wzniesie się zając, to: $\frac{(3{,}701\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2\cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 0{,}698\,\mathrm{m}$. Czyli jeszcze $0{,}154\,\mathrm{m} = 15{,}4\,\mathrm{cm}$.

48. s.35

Czas po którym kamień spadnie na ziemię: $t = \sqrt{\frac{2\cdot 60\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 3{,}5\,\mathrm{s}$. Czyli $1{,}2\,\mathrm{s}$ przed upadkiem — tj. po $2{,}3\,\mathrm{s}$ ruchu będzie on się znajdował $60\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}(2{,}3\,\mathrm{s})^2 = 34{,}05\,\mathrm{m}$ nad ziemią.

49. s.35

Czas po którym klucz spadnie do wody: $t = \sqrt{\frac{2\cdot 45\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 3{,}03\,\mathrm{s}$. Prędkość łódki wynosi $\frac{12\,\mathrm{m}}{3{,}03\,\mathrm{s}} = 3{,}96\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

50. s.35

Z równania 2.5: $v = \frac{36{,}6\,\mathrm{m}-12{,}2\,\mathrm{m}+(1/2)\cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot(2\,\mathrm{s})^2}{2\,\mathrm{s}} = 22{,}01\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

51. s.35

Prędkość kuli w momencie zetknięcia z ziemią: $v = \sqrt{2\cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot 15\,\mathrm{m}} = 17{,}16\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
Przyspieszenie przy zatrzymywaniu kuli: $a = -\frac{17{,}16\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{0{,}02\,\mathrm{s}} = -857{,}76\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

52. s.35

a) Prędkość którą uzyskuje rakieta w momencie kiedy kończy jej się paliwo wynosi: $v_1 = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot 6\,\mathrm{s} = 24\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Następuje to na wysokości: $x_1 = \frac{1}{2}4\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot(6\,\mathrm{s})^2 = 72\,\mathrm{m}$. Wysokość dalszego, swobodnego lotu rakiety wynosi: $x_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(24\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2\cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 29{,}36\,\mathrm{m}$. Zatem całkowita wysokość na jaką wzniesie się rakieta wynosi: $x = x_1 + x_2 = 101{,}36\,\mathrm{m}$.

b) $t = 6\,\mathrm{s} + \frac{24\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} + \sqrt{\frac{2\cdot 101{,}36\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 13\,\mathrm{s}$.

53. s.35

Prędkość tuż przed upadkiem piłki na ziemię: $v_1 = \sqrt{2\cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot 4\,\mathrm{m}} = 8{,}86\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ skierowana w dół.
Prędkość tuż po odbiciu piłki od ziemi: $v_2 = \sqrt{2\cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}\cdot 2\,\mathrm{m}} = 6{,}26\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ skierowana w górę.
Zatem średnie przyspieszenie w czasie zetknięcia z ziemią wynosi: $a_{\text{śr}} = \frac{8{,}86\,\mathrm{m\,s^{-1}}+6{,}26\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{12\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}} = 1260\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

54. s.36

W zadaniu korzystamy ze wzoru 2.5 przyjmując prędkość końcową zerową.

a) $t_{76-15+} = 2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 15\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 0{,}11\,\mathrm{s}$.

b) Czas całego wyskoku: $t = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 76 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 0{,}25\,\mathrm{s}$.
Czas na wysokości ponad 15 cm: $t_{15+} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (76 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} - 15 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 0{,}22\,\mathrm{s}$.
Odpowiedź (czas na wysokości do 15 cm): $t_{15-} = t - t_{15+} = 0{,}03\,\mathrm{s}$.

55. s.36

Czas upadku kropli na ziemię: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 0{,}64\,\mathrm{s}$.
Czas między wypłynięciem kolejnych kropel z prysznica: $\Delta t = t/3 = 0{,}21\,\mathrm{s}$.
Położenie drugiej kropli (od ziemi): $x_2 = x_1 - \frac{1}{2}g(t - \Delta t)^2 = 2\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (0{,}43\,\mathrm{s})^2 = 1{,}09\,\mathrm{m}$.
Położenie trzeciej kropli (od ziemi): $x_3 = x_1 - \frac{1}{2}g(t - 2\Delta t)^2 = 2\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (0{,}21\,\mathrm{s})^2 = 1{,}78\,\mathrm{m}$.

56. s.36

a) Z równania 2.5: $a = \frac{2 \cdot 25\,\mathrm{m}}{(2{,}5\,\mathrm{s})^2} = 8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

b) $v_0 = 8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 2{,}5\,\mathrm{s} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

57. s.36

Położenie pierwszego brylantu jest opisane równaniem: $x_1 = \frac{1}{2}gt^2$.
Położenie drugiego brylantu jest opisane równaniem: $x_2 = \frac{1}{2}g(t-1)^2$.
Rozwiązanie (jednostki są zgodne, więc je pomijamy):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 + 10 && \text{(z warunków zadania)} \\ \frac{1}{2}gt^2 &= \frac{1}{2}g(t-1)^2 + 10 \\ t &= \frac{1}{2} + \frac{10}{g} \end{aligned}$$

Podstawiając $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ otrzymujemy $t = 1{,}52\,\mathrm{s}$.

58. s.36

Wysokość na jaką wznosi się kula zależy od kwadratu czasu jaki kula spędzi w powietrzu: $h \sim t^2$, więc aby kula spędziła dwa razy więcej czasu w powietrzu należy wyrzucić ją na czterokrotną wysokość.

59. s.36

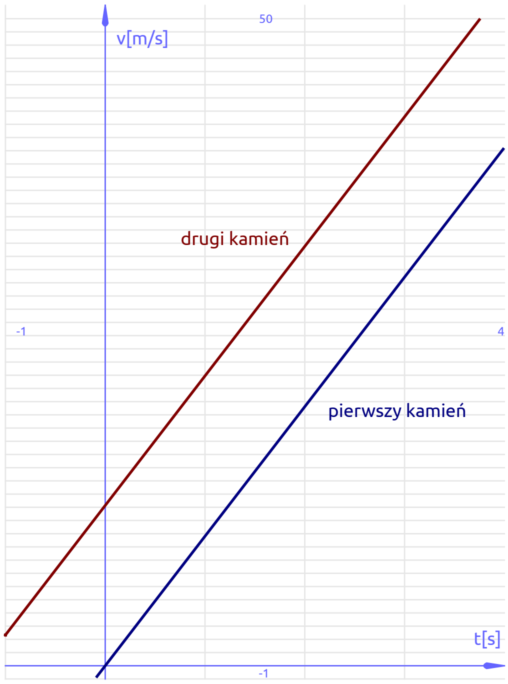
a) Przyjmując położenie balonu w momencie zrzutu pakunku za początek układu współrzędnych oraz czas zero, mamy równanie: $-80\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t - \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t^2$ którego dodatnie rozwiązanie: $t = 5{,}44\,\mathrm{s}$ jest szukaną wartością.

b) $v = \sqrt{(12\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2 + 2 \cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 80\,\mathrm{m}} = 41{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

60. s.36

Czas spadku pierwszego kamienia: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot 43{,}9\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 3\,\mathrm{s}$.

a) Czas spadku drugiego kamienia jest o 1 s krótszy, mamy więc: $v_0 = \frac{43{,}9\,\mathrm{m} - (1/2)9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (2\,\mathrm{s})^2}{2\,\mathrm{s}} = 12{,}14\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) 

61. s.36

a) Ze wzoru 2.3: $h = 30\,\mathrm{m} + \frac{(30\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2\cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 75{,}87\,\mathrm{m}$.

b) Przyjmując za początek układu współrzędnych położenie podłogi windy w momencie wystrzału, oraz chwilę wystrzału za czas 0, mamy równania ruchu (określające położenie) dla podłogi windy i kuli odpowiednio:

$$x = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t$$
$$x = 2\,\mathrm{m} + 30\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t - \frac{1}{2} 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t^2$$

Przyrównując te równania stronami otrzymamy równanie kwadratowe na t, którego dodatnim rozwiązaniem jest: $t = 4{,}175\,\mathrm{s}$.

62. s.36

Przyjmując za początek układu współrzędnych punkt A możemy zapisać wzór na prędkość 2.3 w punkcie B: $(\frac{1}{2}v)^2 = v^2 - 2 \cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 3\,\mathrm{m}$.

a) Z powyższego równania wyznaczamy $v = \sqrt{8\,\mathrm{m} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 8{,}86\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) $x = \frac{(8{,}86\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2\cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} - 3\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}$.

63. s.36

a) Położenie kreski oznaczającej czas reakcji 50 ms: $\frac{1}{2} 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}(50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s})^2 = 0{,}012\,26\,\mathrm{m} = 12{,}26\,\mathrm{mm}$.

b) Kreska oznaczająca dwukrotnie dłuższy czas reakcji powinna być czterokrotnie dalej, a trzykrotnie dłuższy czas reakcji — dziewięciokrotnie dalej. Wynika to z proporcji: $x \sim t^2$.

64. s.36

Prędkość w momencie otwarcia spadochronu: $v_1 = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 50\,\mathrm{m}} = 31{,}32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
Czas do otwarcia spadochronu: $t_1 = \frac{31{,}32\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 3{,}19\,\mathrm{s}$.

a) Czas lotu ze spadochronem: $t_2 = \frac{31{,}32\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{2\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 14{,}16\,\mathrm{s}$. Całkowity czas w powietrzu: $t = 3{,}19\,\mathrm{s} + 14{,}16\,\mathrm{s} = 17{,}35\,\mathrm{s}$.

b) Długość lotu ze spadochronem: $\frac{(31{,}32\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2 - (3\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2 \cdot 2\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 243\,\mathrm{m}$. Długość lotu (wysokość skoku): $50\,\mathrm{m} + 243\,\mathrm{m} = 293\,\mathrm{m}$.

65. s.36

Prędkość końcową doniczki (przy górnej krawędzi okna) wyznaczamy ze wzoru 2.5: $v = \frac{2\,\mathrm{m} - (1/2) \cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (0{,}25\,\mathrm{s})^2}{0{,}25\,\mathrm{s}} = 6{,}77\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Wysokość na jaką wzniesie się doniczka: $\frac{(6{,}77\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2 \cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 2{,}34\,\mathrm{m}$.

3 Wektory

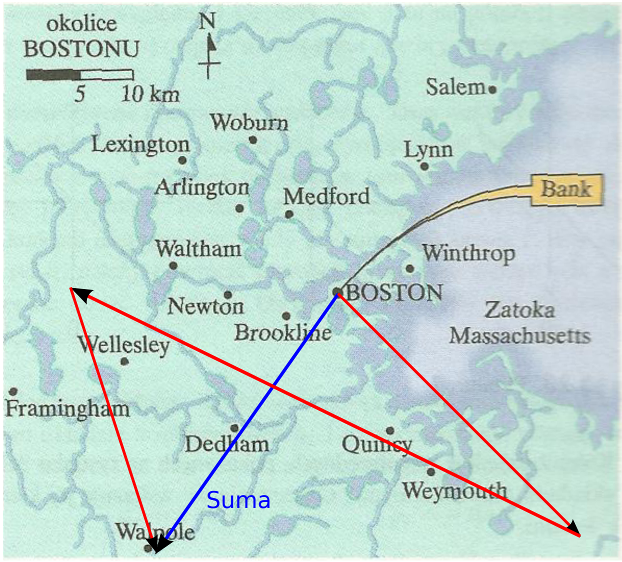
1. s.54

a) Równolegle i w zgodnym kierunku.

b) Równolegle i w przeciwnych kierunkach (t.j. antyrównoległe).

c) Prostopadle — z twierdzenia Pitagorasa.

2. s.54



3. s.54

a) $a_x = a\cos(250°) \approx -2{,}5\,\mathrm{m}$.

b) $a_y = a\sin(250°) \approx -6{,}86\,\mathrm{m}$.

4. s.54

a) $20° = 20° \frac{\pi}{180°}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{9}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}35\,\mathrm{rad}$

b) $50° = 50° \frac{\pi}{180°}\,\mathrm{rad} = \frac{5\pi}{18}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}87\,\mathrm{rad}$

c) $100° = 100° \frac{\pi}{180°}\,\mathrm{rad} = \frac{5\pi}{9}\,\mathrm{rad} \approx 1{,}745\,\mathrm{rad}$

d) $0{,}33\,\mathrm{rad} = 0{,}33 \frac{180°}{\pi\,\mathrm{rad}} \approx 18{,}9°$

e) $2{,}1\,\mathrm{rad} = 2{,}1 \frac{180°}{\pi\,\mathrm{rad}} \approx 120{,}32°$

f) $7{,}7\,\mathrm{rad} = 7{,}7 \frac{180°}{\pi\,\mathrm{rad}} \approx 81{,}18°$

5. s.54

a) $A = \sqrt{(-25)^2 + 40^2}\,\mathrm{m} \approx 47{,}17\,\mathrm{m}$.

b) $\theta = \arctan(\frac{40}{-25}) \approx 122°$.

6. s.54

a) $r_x = r\cos(30°) \approx 13\,\mathrm{m}$.

b) $r_y = r\sin(30°) \approx 7{,}5\,\mathrm{m}$.

7. s.54

a) Przemieszczenie w poziomie: $x = \pi \cdot 45\,\mathrm{cm} \approx 141{,}37\,\mathrm{cm}$.
Przemieszczenie w pionie: $y = 2 \cdot 45\,\mathrm{cm} = 90\,\mathrm{cm}$.
Długość przemieszczenia: $p = \sqrt{x^2 + y^2} \approx 167{,}6\,\mathrm{cm}$.

b) Kąt przemieszczenia: $\theta = \arctan(\frac{y}{y}) = \arctan(\frac{90}{141.37}) \approx 34{,}1°$.

8. s.54

a) $AB = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{22^2 + 17^2}\,\mathrm{m} \approx 27{,}8\,\mathrm{m}$.

b) $AB_y = AD\sin(52°) \approx 13{,}4\,\mathrm{m}$.

9. s.55

a) Długość przemieszczenia w poziomie (w płaszczyźnie podłogi): $a = \sqrt{3{,}7^2 + 4{,}3^2}\,\mathrm{m} = 5{,}67\,\mathrm{m}$.
Długość przemieszczenia: $b = \sqrt{5{,}67^2 + 3^2}\,\mathrm{m} = 6{,}42\,\mathrm{m}$.

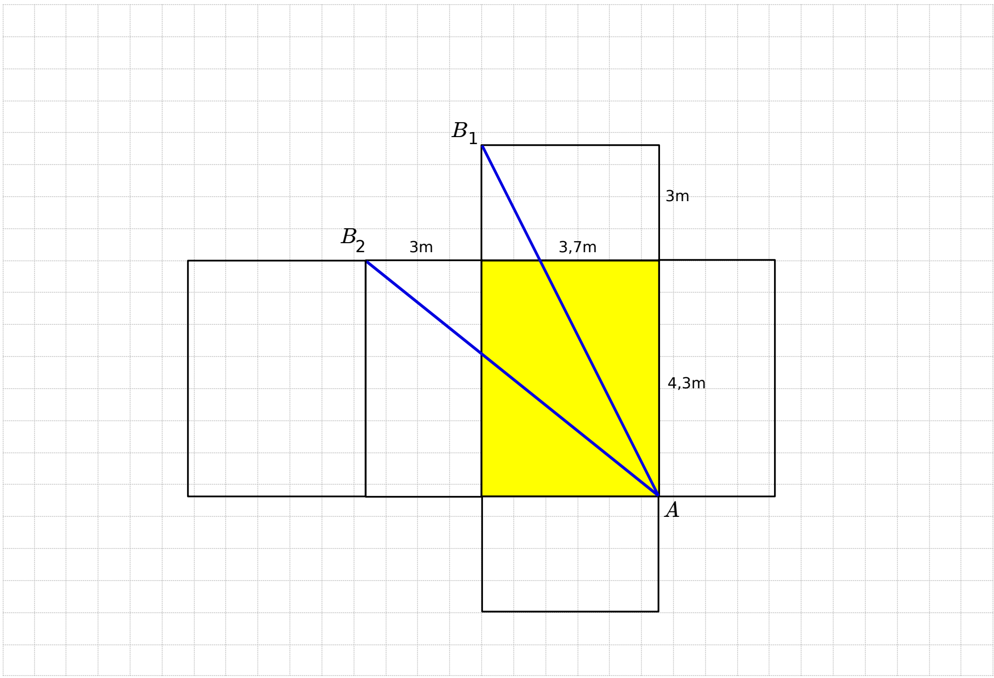
b) Nie.

c) Tak.

d) Tak.

e) Ponieważ pokój ma kształt prostopadłościenny (ściany są do siebie prostopadłe) to składowe są wymiarami pokoju podanymi na początku zadania.

f)

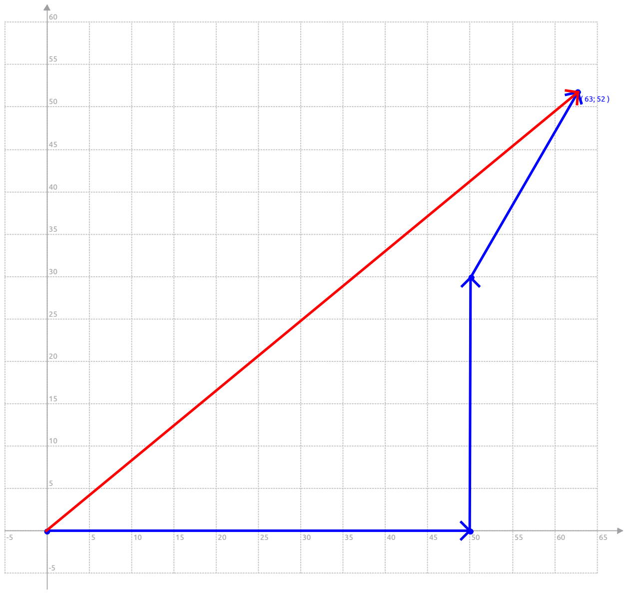


Rysunek przedstawia siatkę pokoju. Po jej złożeniu punkty B_1 i B_2 stają się tym samym punktem, który jest punktem docelowym przemieszczenia muchy. Punktem startowym jest punkt A. Wszystkie drogi przemieszczenia się muchy po podłodze i ścianach mogą być przedstawione na tym rysunku jako krzywe nie wychodzące poza obręb siatki, zaczynające się w punkcie A i kończące w B_1 lub B_2. Jak widać z rysunku najkrótsze takie krzywe to odcinki $\overline{AB_1}$ i $\overline{AB_2}$ zaznaczone na rysunku. Obliczymy teraz ich długości:

$$|\overline{AB_1}| = \sqrt{3{,}7^2 + (4{,}3 + 3)^2}\,\mathrm{m} = 8{,}18\,\mathrm{m}$$
$$|\overline{AB_2}| = \sqrt{(3{,}7 + 3)^2 + 4{,}3^2}\,\mathrm{m} = 7{,}96\,\mathrm{m}$$

Zatem najkrótsza droga muchy ma długość 7,96 m.

10. s.55



Przyjmując układ współrzędnych jak na rysunku wektory poszczególnych przemieszczeń możemy zapisać jako:

$$\vec{a} = (50\,\mathrm{km})\hat{\imath} + (0\,\mathrm{km})\hat{\jmath}$$
$$\vec{b} = (0\,\mathrm{km})\hat{\imath} + (30\,\mathrm{km})\hat{\jmath}$$
$$\vec{c} = (25\,\mathrm{km}\cos 60^\circ)\hat{\imath} + (25\,\mathrm{km}\sin 60^\circ)\hat{\jmath} = (12{,}5\,\mathrm{km})\hat{\imath} + (21{,}65\,\mathrm{km})\hat{\jmath}$$

Całkowite przemieszczenie wypadkowe:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (62{,}5\,\mathrm{km})\hat{\imath} + (51{,}65\,\mathrm{km})\hat{\jmath}$$

a) $|d| = \sqrt{62{,}5^2 + 51{,}65^2}\,\mathrm{km} = 81{,}08\,\mathrm{km}.$

b) $\theta = \arctan(\frac{51{,}65}{62{,}5}) = 39{,}57^\circ.$

11. s.55

Przyjmując układ współrzędnych z wektorem $\hat{\imath}$ skierowanym na wschód a $\hat{\jmath}$ na północ, poszczególne odcinki spaceru można zapisać:

$$\vec{a} = (250\,\mathrm{m}\cos 60^\circ)\hat{\imath} + (250\,\mathrm{m}\sin 60^\circ)\hat{\jmath} = (125\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (216{,}5\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$$
$$\vec{b} = (175\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (0\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$$

Całkowite przemieszczenie wypadkowe:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (300\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (216{,}5\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$$

a) $|c| = \sqrt{300^2 + 216{,}5^2}\,\mathrm{m} = 369{,}96\,\mathrm{m}.$

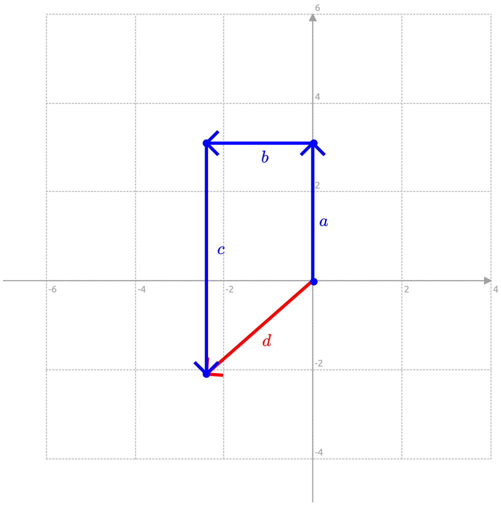
b) $\theta = \arctan(\frac{216{,}5}{300}) = 35{,}81^\circ$ na północ od kierunku wschodniego.

c) $c = |a| + |b| = 250\,\mathrm{m} + 175\,\mathrm{m} = 425\,\mathrm{m}.$

d) Droga jest dłuższa od przemieszczenia. Zawsze droga jest dłuższa lub równa przemieszczeniu.

12. s.55

a)



Przyjmując układ współrzędnych jak na rysunku wektory poszczególnych przemieszczeń możemy zapisać jako:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} =& (0\,\mathrm{km})\hat{\imath} + (3{,}1\,\mathrm{km})\hat{\jmath} \\
\vec{b} =& (-2{,}4\,\mathrm{km})\hat{\imath} + (0\,\mathrm{km})\hat{\jmath} \\
\vec{c} =& (0\,\mathrm{km})\hat{\imath} + (-5{,}2\,\mathrm{km})\hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

Całkowite przemieszczenie wypadkowe:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (-2{,}4\,\mathrm{km})\hat{\imath} + (-2{,}1\,\mathrm{km})\hat{\jmath}$$

b) $|d| = \sqrt{(-2{,}4)^2 + (-2{,}1)^2}\,\mathrm{km} = 3{,}19\,\mathrm{km}.$

c) $\theta = 180^\circ + \arctan(\frac{2{,}1}{2{,}4}) = 221{,}19^\circ.$

13. s.55

a) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (4\,\mathrm{m} + -13\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (3\,\mathrm{m} + 7\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = (-9\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (10\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$

b) $|c| = \sqrt{(-9)^2 + 10^2}\,\mathrm{m} = 13{,}45\,\mathrm{m}.$

b) $\theta = 180^\circ + \arctan(\frac{10}{-9}) = 131{,}99^\circ.$

14. s.55

a) $r_x = 7{,}4\,\mathrm{m} + 4{,}4\,\mathrm{m} = 11{,}8\,\mathrm{m}.$

b) $r_y = -3{,}8\,\mathrm{m} + -2{,}0\,\mathrm{m} = -5{,}8\,\mathrm{m}.$

c) $r_z = -6{,}1\,\mathrm{m} + 3{,}3\,\mathrm{m} = -2{,}8\,\mathrm{m}.$

15. s.55

Przyjmując układ współrzędnych z wektorem $\hat{\imath}$ skierowanym na wschód a $\hat{\jmath}$ na północ, podane wektory można zapisać jako:

$$\vec{a} = (0\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (5\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$$
$$\vec{b} = (4\,\mathrm{m}\cos(90^\circ + 35^\circ))\hat{\imath} + (4\,\mathrm{m}\sin(90^\circ + 35^\circ))\hat{\jmath} = (-2{,}3\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (3{,}28\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$$

Suma wektorów:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (-2{,}3\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (8{,}28\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$$

Różnica wektorów:

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (-2{,}3\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-1{,}72\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$$

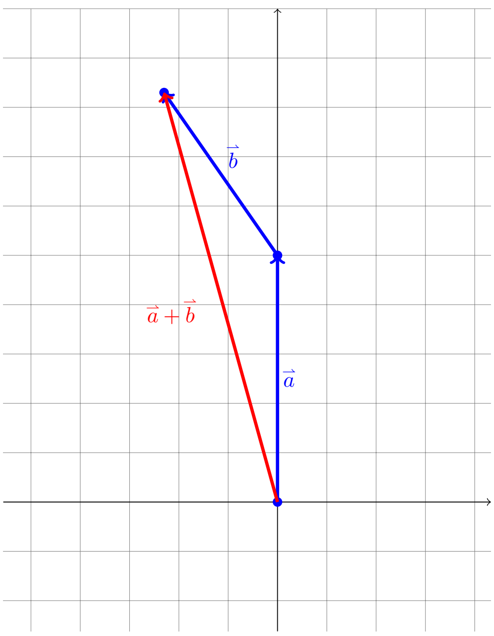
a) $|c| = \sqrt{(-2{,}3)^2 + 8{,}28^2}\,\mathrm{m} = 8{,}6\,\mathrm{m}.$

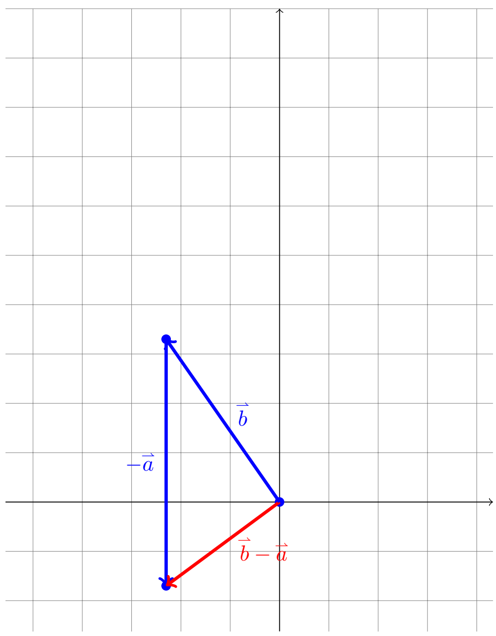
b) $\theta_c = 180^\circ + \arctan(\frac{8{,}28}{-2{,}3}) = 105{,}52^\circ.$

c) $|d| = \sqrt{(-2{,}3)^2 + (-1{,}72)^2}\,\mathrm{m} = 2{,}87\,\mathrm{m}.$

d) $\theta_d = 180^\circ + \arctan(\frac{1{,}72}{2{,}3}) = 216{,}8^\circ.$

e)





16. s.55

a) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (3\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (4\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = (8\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (2\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$

b) $|c| = \sqrt{8^2 + 2^2}\,\mathrm{m} = 8{,}25\,\mathrm{m}.$

c) $\theta_c = \arctan(\frac{2}{8}) = 14{,}03^\circ.$

d) $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (5\,\mathrm{m} - 3\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-2\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = (2\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-6\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$

e) $|d| = \sqrt{2^2 + 6^2}\,\mathrm{m} = 6{,}32\,\mathrm{m}$.

f) $\theta_d = 360^\circ + \arctan(\frac{-6}{2}) = 288{,}44^\circ$.

17. s.55

$$\begin{aligned}\vec{a} =& (4\,\mathrm{m})\hat{\imath} - (3\,\mathrm{m})\hat{\jmath} + (1\,\mathrm{m})\hat{k}\\ \vec{b} =& (-1\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (1\,\mathrm{m})\hat{\jmath} + (4\,\mathrm{m})\hat{k}\end{aligned}$$

a)

$$\vec{a} + \vec{b} = (4\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-3\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m})\hat{\jmath} + (1\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{m})\hat{k} = (3\,\mathrm{m})\hat{\imath} - (2\,\mathrm{m})\hat{\jmath} + (5\,\mathrm{m})\hat{k}$$

b)

$$\vec{a} - \vec{b} = (4\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-3\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m})\hat{\jmath} + (1\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m})\hat{k} = (5\,\mathrm{m})\hat{\imath} - (4\,\mathrm{m})\hat{\jmath} - (3\,\mathrm{m})\hat{k}$$

c)

$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a} = (-1\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (1\,\mathrm{m} - -3\,\mathrm{m})\hat{\jmath} + (4\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m})\hat{k} = (-5\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (4\,\mathrm{m})\hat{\jmath} + (3\,\mathrm{m})\hat{k}$$

18. s.55

$$\begin{aligned}\vec{a} =& (4\,\mathrm{m})\hat{\imath} - (3\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\\ \vec{b} =& (6\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (8\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

a) $|a| = \sqrt{4^2 + 3^2}\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$.

b) $\theta_a = \arctan(\frac{3}{4}) = 36{,}87^\circ$.

c) $|b| = \sqrt{6^2 + 8^2}\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}$.

d) $\theta_b = \arctan(\frac{8}{6}) = 53{,}14^\circ$.

e)

$$\begin{gathered}\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (4\,\mathrm{m} + 6\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (3\,\mathrm{m} + 8\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = (10\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (11\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\\ |c| = \sqrt{10^2 + 11^2}\,\mathrm{m} = 14{,}87\,\mathrm{m}\end{gathered}$$

.

f) $\theta_c = \arctan(\frac{11}{10}) = 47{,}73^\circ$.

g)

$$\begin{gathered}\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = (6\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (8\,\mathrm{m} - 3\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = (2\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (5\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\\ |d| = \sqrt{2^2 + 5^2}\,\mathrm{m} = 5{,}39\,\mathrm{m}\end{gathered}$$

.

h) $\theta_d = \arctan(\frac{5}{2}) = 68{,}2°$.

i)

$$\vec{e} = \vec{a} - \vec{b} = (4\,\mathrm{m} - 6\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (3\,\mathrm{m} - 8\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = (-2\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-5\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$$
$$|e| = \sqrt{2^2 + 5^2}\,\mathrm{m} = 5{,}39\,\mathrm{m}$$

.

j) $\theta_e = 180° + \arctan(\frac{5}{2}) = 248{,}2°$.

k) 180°.

19. s.55

Współrzędne opisanych wektorów wynoszą:

$$\begin{aligned}
\vec{a} =& (50\,\mathrm{m}\cos(30°))\hat{\imath} + (50\,\mathrm{m}\sin(30°))\hat{\jmath} = (43{,}3\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (25\,\mathrm{m})\hat{\jmath} \\
\vec{b} =& (50\,\mathrm{m}\cos(195°))\hat{\imath} + (50\,\mathrm{m}\sin(195°))\hat{\jmath} = (-48{,}3\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-12{,}95\,\mathrm{m})\hat{\jmath} \\
\vec{c} =& (50\,\mathrm{m}\cos(315°))\hat{\imath} + (50\,\mathrm{m}\sin(315°))\hat{\jmath} = (35{,}36\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-35{,}36\,\mathrm{m})\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

a) $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (43{,}3\,\mathrm{m} + -48{,}3\,\mathrm{m} + 35{,}36\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (25\,\mathrm{m} + -12{,}95\,\mathrm{m} + -35{,}36\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = (30{,}36\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-23{,}3\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$
$|e| = \sqrt{30{,}36^2 + 23{,}3^2}\,\mathrm{m} = 38{,}27\,\mathrm{m}$

b) $\theta_e = \arctan(\frac{-23{,}3}{30{,}36}) = -37{,}5°$

c) $\vec{f} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (43{,}3\,\mathrm{m} - -48{,}3\,\mathrm{m} + 35{,}36\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (25\,\mathrm{m} - -12{,}95\,\mathrm{m} + -35{,}36\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = (126{,}95\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (2{,}59\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$
$|f| = \sqrt{126{,}95^2 + 2{,}59^2}\,\mathrm{m} = 126{,}98\,\mathrm{m}$

d) $\theta_f = \arctan(\frac{2{,}59}{126{,}95}) = 1{,}17°$

e) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} - \vec{d} \Rightarrow \vec{d} = \vec{c} - \vec{a} + \vec{b}$
$\vec{d} = (35{,}36\,\mathrm{m} - 43{,}3\,\mathrm{m} + -48{,}3\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-35{,}36\,\mathrm{m} - 25\,\mathrm{m} + -12{,}95\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = (-56{,}24\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-73{,}3\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$
$|d| = \sqrt{56{,}24^2 + 73{,}3^2}\,\mathrm{m} = 92{,}39\,\mathrm{m}$

f) $\theta_d = \arctan(\frac{-73{,}3}{-56{,}24}) = -127{,}5°$

20. s.55

Współrzędne opisanych wektorów wynoszą:

$$\begin{aligned}
\vec{E} =& (6\,\mathrm{m}\cos(0{,}9\,\mathrm{rad}))\hat{\imath} + (6\,\mathrm{m}\sin(0{,}9\,\mathrm{rad}))\hat{\jmath} = (3{,}73\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (4{,}7\,\mathrm{m})\hat{\jmath} \\
\vec{F} =& (5\,\mathrm{m}\cos(-75°))\hat{\imath} + (5\,\mathrm{m}\sin(-75°))\hat{\jmath} = (1{,}29\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-4{,}8\,\mathrm{m})\hat{\jmath} \\
\vec{G} =& (4\,\mathrm{m}\cos(1{,}2\,\mathrm{rad}))\hat{\imath} + (4\,\mathrm{m}\sin(1{,}2\,\mathrm{rad}))\hat{\jmath} = (1{,}45\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (3{,}73\,\mathrm{m})\hat{\jmath} \\
\vec{H} =& (6\,\mathrm{m}\cos(-210°))\hat{\imath} + (6\,\mathrm{m}\sin(-210°))\hat{\jmath} = (-5{,}2\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (3\,\mathrm{m})\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

a) $\vec{I} = \vec{E} + \vec{F} + \vec{G} + \vec{H} = (3{,}73\,\mathrm{m} + 1{,}29\,\mathrm{m} + 1{,}45\,\mathrm{m} + -5{,}2\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (4{,}7\,\mathrm{m} + -4{,}8\,\mathrm{m} + 3{,}73\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = (1{,}28\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (6{,}6\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$

b) $|I| = \sqrt{1{,}28^2 + 6{,}6^2}\,\mathrm{m} = 6{,}72\,\mathrm{m}$
$\theta_I = \arctan(\frac{6{,}6}{1{,}28}) = 1{,}38\,\mathrm{rad} = 79{,}05°$

21. s.55

Współrzędne pokazanych wektorów wynoszą:

$$\begin{aligned}\vec{a} =&(10\,\mathrm{m}\cos(30°))\hat{\imath} + (10\,\mathrm{m}\sin(30°))\hat{\jmath} = (8{,}66\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (5\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\\ \vec{b} =&(10\,\mathrm{m}\cos(30° + 105°))\hat{\imath} + (10\,\mathrm{m}\sin(30° + 105°))\hat{\jmath} = (-7{,}07\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (7{,}07\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

a) $r_x = 8{,}66\,\mathrm{m} + -7{,}07\,\mathrm{m} = 1{,}59\,\mathrm{m}.$

b) $r_y = 5\,\mathrm{m} + 7{,}07\,\mathrm{m} = 12{,}07\,\mathrm{m}.$

c) $|r| = \sqrt{1{,}59^2 + 12{,}07^2}\,\mathrm{m} = 12{,}18\,\mathrm{m}.$

d) $\theta_r = \arctan(\frac{12{,}07}{1{,}59}) = 82{,}5°.$

22. s.56

Współrzędne opisanych wektorów wynoszą:

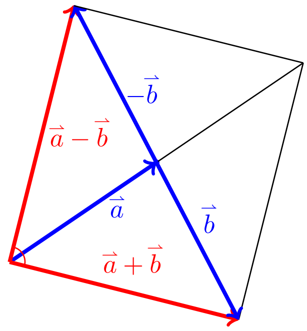
$$\begin{aligned}\vec{A} =&(12\,\mathrm{m}\cos(40°))\hat{\imath} + (12\,\mathrm{m}\sin(40°))\hat{\jmath} = (9{,}19\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (7{,}71\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\\ \vec{C} =&(15\,\mathrm{m}\cos(180° + 20°))\hat{\imath} + (15\,\mathrm{m}\sin(180° + 20°))\hat{\jmath} = (-14{,}1\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-5{,}1\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\\ \vec{B} =&\vec{C} - \vec{A} = (-14{,}1\,\mathrm{m} - 9{,}19\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-5{,}1\,\mathrm{m} - 7{,}71\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = (-23{,}29\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-12{,}84\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

a) $|B| = \sqrt{23{,}29^2 + 12{,}84^2}\,\mathrm{m} = 26{,}6\,\mathrm{m}.$

b) $\theta_B = 180° + \arctan(\frac{-12{,}84}{-23{,}29}) = 208{,}9°.$

23. s.56

Dowód geometryczny:



Z założenia mamy:

- Kąt między wektorami $\vec{a}+\vec{b}$ a $\vec{a}-\vec{b}$ wynosi 90°.
- Długości wektorów $\vec{b}$ i $-\vec{b}$ są równe.

Zatem jak widać z rysunku, koniec wektora $\vec{a}$ leży w środku przekątnej prostokąta. Ponieważ przekątne prostokąta są sobie równe, to wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mają jednakowe długości.

Dowód algebraiczny:
Jeżeli dwa wektory są prostopadłe, to ich iloczyn skalarny jest równy zero.

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) &= 0\\ \vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b} &= 0\\ \vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b} &= 0\\ a^2-b^2 &= 0\\ a &= b\end{aligned}$$

24. s.56

Współrzędne opisanych wektorów wynoszą:

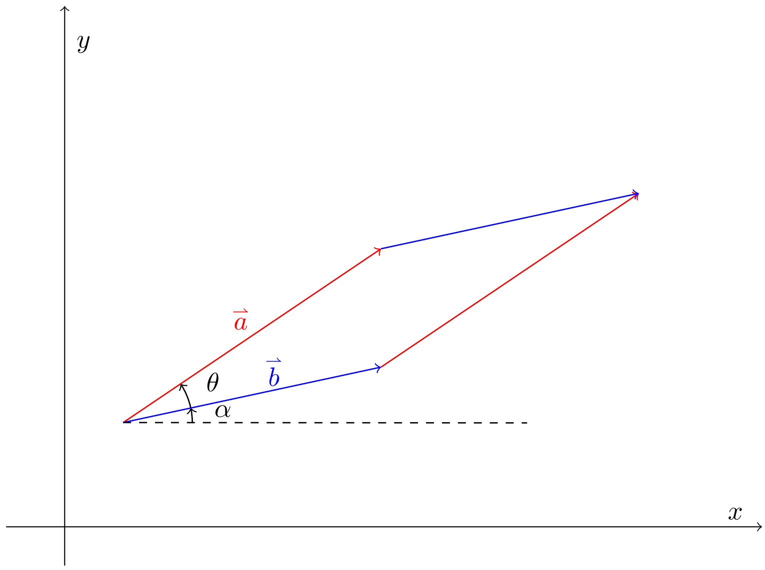
$$\begin{aligned}\vec{P} =&(10\,\mathrm{m}\cos(25^\circ))\hat{\imath}+(10\,\mathrm{m}\sin(25^\circ))\hat{\jmath} = (9{,}06\,\mathrm{m})\hat{\imath}+(4{,}23\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\\ \vec{Q} =&(12\,\mathrm{m}\cos(90^\circ+10^\circ))\hat{\imath}+(12\,\mathrm{m}\sin(90^\circ+10^\circ))\hat{\jmath} = (-2{,}08\,\mathrm{m})\hat{\imath}+(11{,}82\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\\ \vec{R} =&(8\,\mathrm{m}\cos(270^\circ-20^\circ))\hat{\imath}+(8\,\mathrm{m}\sin(270^\circ-20^\circ))\hat{\jmath} = (-2{,}74\,\mathrm{m})\hat{\imath}+(-7{,}52\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\\ \vec{S} =&(9\,\mathrm{m}\cos(270^\circ+40^\circ))\hat{\imath}+(9\,\mathrm{m}\sin(270^\circ+40^\circ))\hat{\jmath} = (5{,}79\,\mathrm{m})\hat{\imath}+(-6{,}9\,\mathrm{m})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

a) $\vec{T}=\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}+\vec{S}=(9{,}06\,\mathrm{m}+-2{,}08\,\mathrm{m}+-2{,}74\,\mathrm{m}+5{,}79\,\mathrm{m})\hat{\imath}+(4{,}23\,\mathrm{m}+11{,}82\,\mathrm{m}+-7{,}52\,\mathrm{m}+-6{,}9\,\mathrm{m})\hat{\jmath}=(10{,}03\,\mathrm{m})\hat{\imath}+(1{,}63\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$

b) $|T|=\sqrt{10{,}03^2+1{,}63^2}\,\mathrm{m}=10{,}16\,\mathrm{m}$
$\theta_T=\arctan(\frac{1{,}63}{10{,}03})=9{,}24^\circ$

25. s.56

$$
\begin{aligned}
a_x &= a\cos(\theta+\alpha) \\
a_y &= a\sin(\theta+\alpha) \\
b_x &= b\cos\alpha \\
b_y &= b\sin\alpha \\
\vec{r} &= \vec{a}+\vec{b}
\end{aligned}
$$



W wyprowadzeniu wzoru skorzystamy ze wzorów na sinus i cosinus sumy kątów:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r^2 &= (a\cos(\theta+\alpha) + b\cos\alpha)^2 + (a\sin(\theta+\alpha) + b\sin\alpha)^2 \\
&= a^2\cos^2(\theta+\alpha) + 2ab\cos(\theta+\alpha)\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2(\theta+\alpha) + 2ab\sin(\theta+\alpha)\sin\alpha + b^2\sin^2\alpha \\
&= a^2 + b^2 + 2ab(\cos(\theta+\alpha)\cos\alpha + \sin(\theta+\alpha)\sin\alpha) \\
&= a^2 + b^2 + 2ab((\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)\cos\alpha + (\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)\sin\alpha) \\
&= a^2 + b^2 + 2ab(\cos\theta\cos^2\alpha - \sin\theta\sin\alpha\cos\alpha + \sin\theta\cos\alpha\sin\alpha + \cos\theta\sin^2\alpha) \\
&= a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta
\end{aligned}
$$

26. s.56

Współrzędne opisanych wektorów wynoszą:

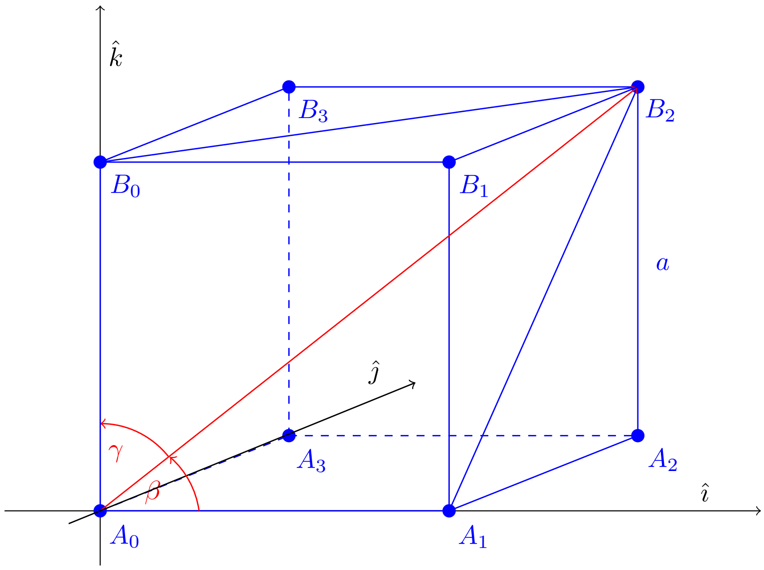
$$
\begin{aligned}
\vec{A} =& (2\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (3\,\mathrm{m})\hat{\jmath} \\
\vec{B} =& (4\,\mathrm{m}\cos(65^\circ))\hat{\imath} + (4\,\mathrm{m}\sin(65^\circ))\hat{\jmath} = (1{,}69\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (3{,}63\,\mathrm{m})\hat{\jmath} \\
\vec{C} =& (-4\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (-6\,\mathrm{m})\hat{\jmath} \\
\vec{D} =& (5\,\mathrm{m}\cos(-235^\circ))\hat{\imath} + (5\,\mathrm{m}\sin(-235^\circ))\hat{\jmath} = (-2{,}87\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (4{,}1\,\mathrm{m})\hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

a) $\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = (2\,\mathrm{m} + 1{,}69\,\mathrm{m} + -4\,\mathrm{m} + -2{,}87\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (3\,\mathrm{m} + 3{,}63\,\mathrm{m} + -6\,\mathrm{m} + 4{,}1\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = (-3{,}18\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (4{,}72\,\mathrm{m})\hat{\jmath}$

b) $\left|\vec{E}\right| = \sqrt{-3{,}18^2 + 4{,}72^2}\,\mathrm{m} = 5{,}7\,\mathrm{m}$

c) $\theta_E = \arctan(\frac{4{,}72}{-3{,}18}) = 123{,}94°$

27. s.56



a) Przekątne sześcianu wynoszą odpowiednio:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{A_0B_2} &= a\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + a\hat{k} \\
\overrightarrow{A_1B_3} &= -a\hat{\imath} + a\hat{\jmath} + a\hat{k} \\
\overrightarrow{A_2B_0} &= -a\hat{\imath} - a\hat{\jmath} + a\hat{k} \\
\overrightarrow{A_3B_1} &= a\hat{\imath} - a\hat{\jmath} + a\hat{k}
\end{aligned}
$$

b) Z twierdzenia Pitagorasa długość każdej z przekątnych ścian sześcianu:

$$|B_0B_2| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

Zatem kąt jaki tworzy przekątna sześcianu z jego bokami wynosi:

$$\beta = \gamma = \arctan\left(\frac{|B_0B_2|}{|B_0A_0|}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}a}{a}\right) = \arctan(\sqrt{2}) = 54{,}74°$$

c) Z twierdzenia Pitagorasa długość przekątnej sześcianu:

$$|A_0B_2| = \sqrt{|A_0B_0|^2 + |B_0B_2|^2} = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{3}a$$

28. s.56

Przy takich zadaniach ja to (związane z obrotem układu współrzędnych) wygodnie jest się posługiwać współrzędnymi biegunowymi, czyli określać wektor (na płaszczyźnie) jako parę liczb: długość i kąt nachylenia w stosunku do dodatniego kierunku osi x, czyli jako r i θ. W układzie xy współrzędne biegunowe wektorów podanych w zadaniu wynoszą:

$$
\begin{aligned}
r_A &= 12\,\mathrm{m} \\
\theta_A &= 60^\circ \\
r_B &= \sqrt{12^2+8^2}\mathrm{m} = 14{,}42\,\mathrm{m} \\
\theta_B &= \arctan(\frac{8}{12}) = 33{,}7^\circ
\end{aligned}
$$

Po dokonaniu obrotu naszego układu współrzędnych o kąt 20° współrzędne biegunowe w nowym układzie $x'y'$ wynoszą:

$$
\begin{aligned}
r'_A &= r_A = 12\,\mathrm{m} \\
\theta'_A &= \theta_A - 20^\circ = 40^\circ \\
r'_B &= r_B = 14{,}42\,\mathrm{m} \\
\theta'_B &= \theta_B - 20^\circ = 13{,}7^\circ
\end{aligned}
$$

Współrzędne kartezjańskie w tym układzie współrzędnych wynoszą:

$$
\begin{aligned}
A_{x'} &= r'_A \cos(\theta'_A) = 9{,}19\,\mathrm{m} \\
A_{y'} &= r'_A \sin(\theta'_A) = 7{,}71\,\mathrm{m} \\
B_{x'} &= r'_B \cos(\theta'_B) = 14\,\mathrm{m} \\
B_{y'} &= r'_B \sin(\theta'_B) = 3{,}42\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

29. s.56

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos(60^\circ) = 30$

b) $|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin(60^\circ) = 51{,}96$

30. s.56

W przypadku wektorów jednostkowych, ich iloczyn skalarny jest równy 1, jeżeli mnożymy te same wektory (bo $\cos(0^\circ) = 1$) lub 0 jeżeli są to różne wektory (bo $\cos(90^\circ) = 0$). Korzystając z tego mamy:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) \\
&= a_xb_x\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + a_xb_y\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} + a_xb_z\hat{\imath}\cdot\hat{k} + a_yb_x\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} + a_yb_y\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} + a_yb_z\hat{\jmath}\cdot\hat{k} + a_zb_x\hat{k}\cdot\hat{\imath} + a_zb_y\hat{k}\cdot\hat{\jmath} + a_zb_z\hat{k}\cdot\hat{k} \\
&= a_xb_x\cdot 1 + a_xb_y\cdot 0 + a_xb_z\cdot 0 + a_yb_x\cdot 0 + a_yb_y\cdot 1 + a_yb_z\cdot 0 + a_zb_x\cdot 0 + a_zb_y\cdot 0 + a_zb_z\cdot 1 \\
&= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z
\end{aligned}
$$

31. s.56

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{3^2+3^2+4^2} = 5{,}83 \\
|\vec{b}| &= \sqrt{2^2+1^2+3^2} = 3{,}74 \\
\vec{a}\cdot\vec{b} &= 21 \\
\cos\theta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \frac{21}{5{,}83\cdot 3{,}74} = 0{,}96 \\
\theta &= \arccos(0{,}96) = 15{,}61^\circ
\end{aligned}
$$

32. s.56

Skorzystamy ze wzorów na iloczyny wektorów jednostkowych (Dodatek E, str. A 12 w książce).

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) \\
&= a_x b_x(\hat{\imath} \times \hat{\imath}) + a_x b_y(\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) + a_x b_z(\hat{\imath} \times \hat{k}) + \\
&\quad a_y b_x(\hat{\jmath} \times \hat{\imath}) + a_y b_y(\hat{\jmath} \times \hat{\jmath}) + a_y b_z(\hat{\jmath} \times \hat{k}) + \\
&\quad a_z b_x(\hat{k} \times \hat{\imath}) + a_z b_y(\hat{k} \times \hat{\jmath}) + a_z b_z(\hat{k} \times \hat{k}) \\
&= a_x b_x \cdot 0 + a_x b_y \hat{k} - a_x b_z \hat{\jmath} - a_y b_x \hat{k} + a_y b_y \cdot 0 + a_y b_z \hat{\imath} + a_z b_x \hat{\jmath} - a_z b_y \hat{\imath} + a_z b_z \cdot 0 \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}
\end{aligned}$$

33. s.56

Zauważmy (patrz rysunek w książce przy zadaniu), że wysokość naszego trójkąta jest równa $b \sin\theta$. Podstawiając to do wzoru na pole trójkąta mamy $P = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ co z definicji iloczynu wektorowego jest równe $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

34. s.56

Podstawiając podane wartości liczbowe mamy:

$$4\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} + 12\hat{k} = 2(2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 6\hat{k}) \times (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k})$$

Korzystając z równania (3.30) (str. 51 w książce):

$$\begin{aligned}
4\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} + 12\hat{k} &= (8B_z - 12B_y)\hat{\imath} + (12B_x - 4B_z)\hat{\jmath} + (4B_y - 8B_x)\hat{k} \\
\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 3\hat{k} &= (2B_z - 3B_y)\hat{\imath} + (3B_x - B_z)\hat{\jmath} + (B_y - 2B_x)\hat{k}
\end{aligned}$$

co jest równoważne:

$$\begin{cases} 2B_z - 3B_y = 1 \\ 3B_x - B_z = -5 \\ B_y - 2B_x = 3 \end{cases}$$

Podstawiając podaną zależność $B_y = B_x$ do trzeciego równania:

$$\begin{aligned}
B_x - 2B_x &= 3 \\
-B_x &= 3 \\
B_x &= -3
\end{aligned}$$

Podstawiając do drugiego równania:

$$\begin{aligned}
-3 \cdot 3 - B_z &= -5 \\
-B_z &= -5 + 9 = 4 \\
B_z &= -4
\end{aligned}$$

Rozwiązanie jest poprawne gdyż pierwsze równanie jest spełnione.

Zatem $\vec{B} = -3\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 4\hat{k}$.

35. s.56

a) Wektor $\vec{b} \times \vec{a}$ jest zawsze prostopadły do $\vec{a}$, a zatem jego iloczyn skalarny z tym wektorem jest równy zero.

b) Wektor $\vec{b} \times \vec{a}$ jest zawsze prostopadły do $\vec{a}$, a jego długość wynosi $ab\sin\phi$. A zatem jego iloczyn wektorowy z tym wektorem ma długość $a^2b\sin\phi$ (ponieważ $\sin 90° = 1$).

36. s.56

Korzystając ze wzorów (3.30) (str. 51 w książce):

$$\begin{aligned} 2\vec{A} \times \vec{B} &= (4\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 8\hat{k}) \times (-3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 2\hat{k}) \\ &= (6 \cdot 2 + 8 \cdot 4)\hat{\imath} + (-8 \cdot -3 - 4 \cdot 2)\hat{\jmath} + (4 \cdot 4 - 6 \cdot -3)\hat{k} \\ &= 44\hat{\imath} + 16\hat{\jmath} + 34\hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B}) &= 3(7\hat{\imath} - 8\hat{\jmath}) \cdot (44\hat{\imath} + 16\hat{\jmath} + 34\hat{k}) \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 44 - 3 \cdot 8 \cdot 16 = 540 \end{aligned}$$

Możemy to obliczyć również przy użyciu programu Maxima:

```
(%i1) load(vect);
(%o1)            /usr/share/maxima/5.32.1/share/vector/vect.mac
(%i2) A:[2,3,-4]$

(%i3) B:[-3,4,2]$

(%i4) C:[7,-8,0]$

(%i5) 3*C.(2*A~B);
(%o5)            - 6 ([7, - 8, 0] . ([- 3, 4, 2] ~ [2, 3, - 4]))
(%i6) express(%);
(%o6)                                   540
(%i7)
```

37. s.56

a) $a_x = 3\,\mathrm{m}$.

b) $a_y = 0\,\mathrm{m}$.

c) $b_x = 4\,\mathrm{m}\cos(30°) = 3{,}46\,\mathrm{m}$.

d) $b_y = 4\,\mathrm{m}\sin(30°) = 2\,\mathrm{m}$.

e) $c_x = 10\,\mathrm{m}\cos(120°) = -5\,\mathrm{m}$.

f) $c_y = 10\,\mathrm{m}\sin(120°) = 8{,}66\,\mathrm{m}$.

g), h) Podstawiając obliczone wcześniej wartości do równania i rozbijając na współrzędne dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} -5 = 3p + 3{,}46q \\ 8{,}66 = 0p + 2q \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $p = -6{,}67, \quad q = 4{,}33$.

38. s.56

a)

$$\theta = \arccos(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}) = \arccos(0{,}54) = 57{,}09^\circ$$

Podstawiając współrzędne, z warunku na prostopadłość (iloczyn wektorowy równy zero) mamy równanie pierwsze poniżej, a z warunku na długość wektora mamy równanie drugie:

$$\begin{cases} 3{,}2p + 1{,}6q = 0 \\ p^2 + q^2 = 25 \end{cases}$$

Ten układ równań posiada dwa rozwiązania:

$$p = -\frac{1{,}6}{3{,}2}q = -\frac{1}{2}q$$
$$\frac{1}{4}q^2 + q^2 = 25$$
$$\frac{5}{4}q^2 = 25$$
$$q^2 = 20$$
$$q = \sqrt{20} \quad \text{lub} \quad q = -\sqrt{20}$$
$$p = -\frac{\sqrt{20}}{2} = -\sqrt{5} \quad \text{lub} \quad p = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

b) $c_x = \sqrt{5} \approx 2{,}24$.

c) $c_y = -\sqrt{20} \approx -4{,}47$.

d) $d_x = -\sqrt{5} \approx -2{,}24$.

e) $d_y = \sqrt{20} \approx 4{,}47$.

4 Ruch w dwóch i trzech wymiarach

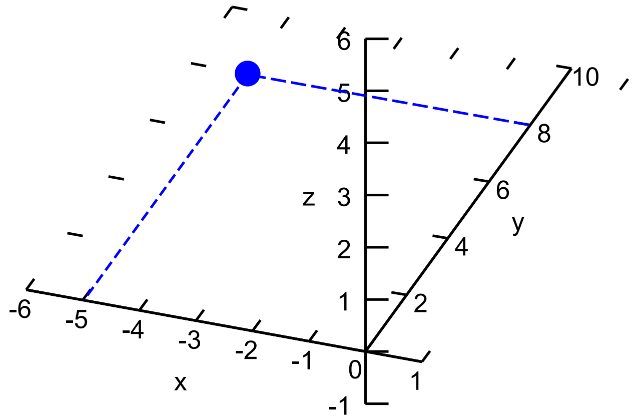
1. s.80

a) $\vec{r} = -5\,\mathrm{m}\hat{\imath} + 8\,\mathrm{m}\hat{\jmath}$.

b) $r = \sqrt{(-5)^2 + 8^2}\,\mathrm{m} = 9{,}43\,\mathrm{m}$.

c) $\theta_{\vec{r}} = \arctan(\frac{8}{-5}) = 122^\circ$.

d)



e) $\Delta\vec{r} = (3\,\mathrm{m} - -5\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (0\,\mathrm{m} - 8\,\mathrm{m})\hat{\jmath} = 8\,\mathrm{m}\hat{\imath} - 8\,\mathrm{m}\hat{\jmath}$.

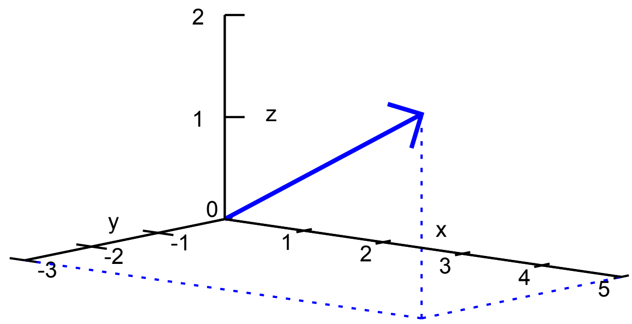
f) $\Delta r = \sqrt{(8)^2 + (-8)^2}\,\mathrm{m} = 11{,}31\,\mathrm{m}$.

g) $\theta_{\Delta\vec{r}} = \arctan(\frac{8}{-8}) = -45°$.

2. s.80

a) $r = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2}\,\mathrm{m} = 6{,}16\,\mathrm{m}$.

b)



3. s.80†

a) $\Delta\vec{r} = (-2\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m})\hat{\imath} + (6\,\mathrm{m} - -6\,\mathrm{m})\hat{\jmath} + (-2\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m})\hat{k} = -7\,\mathrm{m}\hat{\imath} + 12\,\mathrm{m}\hat{\jmath} - 4\,\mathrm{m}\hat{k}$.

b) Do żadnej z płaszczyzn podstawowych układu współrzędnych.

4. s.80

W trójkącie jaki tworzą: początkowa pozycja samolotu, pozycja radaru i końcowa pozycja samolotu mamy dane długości dwóch boków (odpowiednio: 360 m i 790 m) oraz kąt pomiędzy nimi (123°). Z tych danych da się wyznaczyć jednoznacznie długość trzeciego boku (czyli przemieszczenie samolotu), podana dodatkowa dana: wysokość kątowa samolotu nad horyzontem w pozycji początkowej (40°) nie jest niezbędna, jednak jej

†Poniższe rozwiązania nie są zgodne z rozwiązaniami podanymi w książce. Prawdopodobnie w książce jest pomyłka w danych wejściowych.

znajomość może uprościć obliczenia. W rozwiązaniu zadania skorzystamy z tożsamości trygonometrycznej ważnej dla każdego trójkąta (podanej też w sekcji "Trójkąty" Dodatku H w książce):

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Sprawdźmy najpierw czy zgodnie z tym co sugeruje rysunek w książce samolot w czasie lotu między pierwszym a drugim pomiarem nie zmienił swojej wysokości. Wtedy jeden z kątów w naszym trójkącie wynosiłby $40°$ i zachodziłaby równość: $\frac{\sin(40°)}{790} \stackrel{?}{=} \frac{\sin(180°-40°-123°)}{360}$. Prawa strona tej równości wynosi: $8{,}13 \cdot 10^{-4}$ natomiast lewa: $8{,}12 \cdot 10^{-4}$. Można wiec przyjąć, że są równe, czyli samolot nie zmienił wysokości. Oznaczając jako c nieznaną długość przelotu samolotu (bok trójkąta) mamy: $\frac{\sin(123°)}{c} = \frac{\sin(40°)}{790}$ z czego obliczymy $c = 1032{,}7\,\mathrm{m}$.

5. s.80

Wartość prędkości pociągu wynosi: $60\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 1\,\mathrm{km\,min^{-1}}$. Całkowity czas podróży: $t = 40\,\mathrm{min} + 20\,\mathrm{min} + 50\,\mathrm{min} = 110\,\mathrm{min}$. Całkowite przemieszczenie:

$\Delta\vec{r} = 1\,\mathrm{km\,min^{-1}} \cdot ((\hat{\imath}+0\hat{\jmath}) \cdot 40\,\mathrm{min} + (\cos(40°)\hat{\imath} + \sin(40°)\hat{\jmath}) \cdot 20\,\mathrm{min} + (-1\hat{\imath}+0\hat{\jmath}) \cdot 50\,\mathrm{min}) == 5{,}32\,\mathrm{km}\hat{\imath} + 12{,}86\,\mathrm{km}\hat{\jmath}$

Prędkość średnia:

$$\vec{v}_{\text{śr}} = \frac{\Delta\vec{r}}{t} = 0{,}048\,\mathrm{km\,min^{-1}}\hat{\imath} + 0{,}12\,\mathrm{km\,min^{-1}}\hat{\jmath} = 2{,}85\,\mathrm{km\,h^{-1}}\hat{\imath} + 7{,}01\,\mathrm{km\,h^{-1}}\hat{\jmath}$$

Wyrażając to jako wartość i kierunek: $v_{\text{śr}} = 7{,}57\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, $\theta_v = \arctan(\frac{7.01}{2.85}) = 67{,}87°$ (na północ od wschodu) ‡.

6. s.80

$\Delta\vec{r} = (-2\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - 2\hat{k})\,\mathrm{m} - (5\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 2\hat{k})\,\mathrm{m} = (-7\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k})\,\mathrm{m}$.
$\vec{v}_{\text{śr}} = (-7\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k})\,\mathrm{m}/10\,\mathrm{s} = (-0{,}7\hat{\imath} + 0{,}2\hat{\jmath} - 0{,}4\hat{k})\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

7. s.80

$\vec{r}(t) = 3t\hat{\imath} - 4t^2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$.

a) $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = 3\hat{\imath} - 8t\hat{\jmath}$.

b) $\vec{v}(2\,\mathrm{s}) = (3\hat{\imath} - 16\hat{\jmath})\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

c) $v(2\,\mathrm{s}) = \sqrt{3^2 + (-16)^2}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 16{,}28\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

d) $\theta_{v(2\,\mathrm{s})} = \arctan(\frac{-16}{3}) = -79{,}38°$.

8. s.80

Przemieszczenie w pierwszym etapie podróży: $\vec{r_1} = 75\,\mathrm{km}(\cos(37°)\hat{\imath} + \sin(37°)\hat{\jmath}) = 59{,}9\,\mathrm{km}\hat{\imath} + 45{,}14\,\mathrm{km}\hat{\jmath}$.
Przemieszczenie w drugim etapie podróży: $\vec{r_2} = -65\,\mathrm{km}\hat{\jmath}$.

a) $\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{r_2} = 59{,}9\,\mathrm{km}\hat{\imath} - 19{,}86\,\mathrm{km}\hat{\jmath}$.

‡Odpowiedź w książce jest niepoprawna.

b) $\vec{v}_{\text{śr}} = \vec{r}/(50\,\text{h} + 35\,\text{h} + 5\,\text{h}) = 0{,}67\,\text{km}\,\text{h}^{-1}\hat{\imath} - 0{,}22\,\text{km}\,\text{h}^{-1}\hat{\jmath}$.

c) $v_{\text{śr}} = (75\,\text{km} + 65\,\text{km})/(50\,\text{h} + 35\,\text{h} + 5\,\text{h}) = 1{,}56\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$.

d) $\vec{v}_{B\,\text{śr}} = (\vec{r}_B - \vec{r})/(120\,\text{h} - 90\,\text{h}) = (90\,\text{km}\hat{\imath} - (59{,}9\,\text{km}\hat{\imath} - 19{,}86\,\text{km}\hat{\jmath}))/30\,\text{h} = 1\,\text{km}\,\text{h}^{-1}\hat{\imath} + 0{,}66\,\text{km}\,\text{h}^{-1}\hat{\jmath}$
$v_{B\,\text{śr}} = 1{,}22\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$
$\theta_{v_{B\,\text{śr}}} = \arctan(0{,}66) = 33{,}51°$ (na północ od kierunku wschodniego)

9. s.80

$$\vec{r}(t) = (\hat{\imath} + 4t^2\hat{\jmath} + t\hat{k})\,\text{m}$$
$$\vec{v}(t) = \frac{\text{d}\vec{r}(t)}{\text{d}t} = (8t\hat{\jmath} + \hat{k})\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{\text{d}\vec{v}(t)}{\text{d}t} = 8\hat{\jmath}\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$$

10. s.80

a) $\vec{a}_{\text{śr}} = ((-2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}) - (4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}))\text{m}\,\text{s}^{-1}/4\,\text{s} = (-6\hat{\imath} + 2\hat{k})\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

b) $a_{\text{śr}} = \sqrt{(-6)^2 + 2^2}\text{m}\,\text{s}^{-2} = 6{,}32\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.
$\theta_{a_{\text{śr}}} = \arctan(\frac{2}{-6}) = 161{,}57°$ (względem kierunku dodatniego osi x).

11. s.80

$$\vec{r}(t) = ((2t^3 - 5t)\hat{\imath} + (6 - 7t^4)\hat{\jmath})\,\text{m}$$
$$\vec{v}(t) = \frac{\text{d}\vec{r}(t)}{\text{d}t} = ((6t^2 - 5)\hat{\imath} - 28t^3\hat{\jmath})\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{\text{d}\vec{v}(t)}{\text{d}t} = (12t\hat{\imath} - 84t^2\hat{\jmath})\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$$

a) $\vec{r}(2\,\text{s}) = (6\hat{\imath} - 106\hat{\jmath})\,\text{m}$.

b) $\vec{v}(2\,\text{s}) = (19\hat{\imath} - 224\hat{\jmath})\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

c) $\vec{a}(2\,\text{s}) = (24\hat{\imath} - 336\hat{\jmath})\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

d) $\theta = \arctan(\frac{-224}{19}) = -85{,}15°$ (względem kierunku dodatniego osi x).

12. s.80

$\vec{a}_{\text{śr}} = (0 - (6{,}3\hat{\imath} - 8{,}42\hat{\jmath}))\,\text{m}\,\text{s}^{-1}/3\,\text{s} = (-2{,}1\hat{\imath} + 2{,}8\hat{\jmath})\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

13. s.80

Składowa prędkości cząstki wzdłuż osi x jest opisana równaniem: $v_x(t) = 3 - 1t$, natomiast wzdłuż osi y: $v_y(t) = -0{,}5t$. Prędkość cząstki wzdłuż osi x najpierw jest dodatnia (r_x wzrasta) a następnie staje się ujemna (r_x maleje). Zatem składowa x położenia cząstki jest największa w chwili gdy składowa prędkości w tym kierunku staje się równa zeru: $0 = 3 - 1t \Rightarrow t = 3\,\text{s}$.

a) Prędkość cząstki w tej chwili wynosi: $\vec{v}(3\,\text{s}) = -1{,}5\hat{\jmath}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

b) Składowe położenia cząstki są opisane równaniami: $r_x(t) = 3t - 0{,}5t^2 \quad r_y(t) = -0{,}25t^2$. Zatem ich wektor położenia w punkcie $t = 3\,\mathrm{s}$ wynosi $\vec{r}(3\,\mathrm{s}) = (4{,}5\hat{\imath} - 2{,}25\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$.

14. s.81

$\vec{v}(t) = (6t - 4t^2)\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$.

a) $\vec{a}(t) = (6 - 8t)\hat{\imath}$.
$\vec{a}(3\,\mathrm{s}) = -18\hat{\imath}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

b) Tak. $6 - 8t = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{4}\,\mathrm{s} = 0{,}75\,\mathrm{s}$.

c) Nie, ponieważ składowa prędkości wzdłuż osi $\hat{\jmath}$ jest niezerowa i niezależna od czasu.

d) Tak.

$$v(t) = 2\sqrt{(3t - 2t^2)^2 + 4^2} = 10$$
$$(3t - 2t^2)^2 + 16 = 25$$
$$(3t - 2t^2)^2 = 9$$
$$3t - 2t^2 = 3 \text{ lub } 3t - 2t^2 = -3$$
$$t = 2{,}19\,\mathrm{s}$$

15. s.81

Składowa prędkości cząstki wzdłuż kierunku $\hat{\imath}$ wynosi $4t$ a składowa położenia (współrzędna x): $2t^2$. Zatem cząstka przekracza linię $x = 29\,\mathrm{m}$ w chwili t spełniającej równanie: $2t^2 = 29$, czyli $t = 3{,}8\,\mathrm{s}$. Z kolei składowa prędkości cząstki wzdłuż kierunku $\hat{\jmath}$ wynosi $8 + 2t$ a składowa położenia (współrzędna y): $8t + t^2$.

a) Zatem w wyliczonej chwili wartość współrzędnej $y = 44{,}96\,\mathrm{m}$.

b) W wyliczonej chwili prędkość: $\vec{v} = (15{,}2\hat{\imath} + 15{,}6\hat{\jmath})\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $v = 21{,}78\,\mathrm{m\,s^{-1}}$,

16. s.81

Składowa położenia cząstki A w kierunku x wynosi: $3t$. Składowa położenia cząstki B w kierunku x wynosi: $\frac{1}{2}0{,}4\sin\theta t^2$. Składowa położenia cząstki B w kierunku y wynosi: $\frac{1}{2}0{,}4\cos\theta t^2$. Zatem cząstka B przecina tor cząstki A ($y = 30\,\mathrm{m}$) w chwili $0{,}2\cos\theta t^2 = 30 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{150}{\cos\theta}}$. Podstawiając to do równań opisujących położenia cząstek w kierunku x dostajemy:

$$3\sqrt{\frac{150}{\cos\theta}} = 0{,}2\sin\theta\frac{150}{\cos\theta}$$
$$9\frac{150}{\cos\theta} = 0{,}04\sin^2\theta\frac{150\cdot 150}{\cos^2\theta}$$
$$225 = \sin^2\theta\frac{150}{\cos\theta}$$
$$1{,}5 = (1 - \cos^2\theta)\frac{1}{\cos\theta}$$
$$\cos^2\theta + 1{,}5\cos\theta - 1 = 0$$
$$\cos\theta = 0{,}5$$
$$\theta = \arccos(0{,}5) = 60^\circ$$

17. s.81

Lot kuli w kierunku pionowym (w dół) jest spadkiem swobodnym z zerową prędkością początkową (zakładamy, że lufa karabinu jest skierowana poziomo — t.j. tarcza jest położona na tej samej wysokości co karabin). Zatem przemieszczenie w zależności od czasu jest opisane równaniem: $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$. Ponieważ mamy dane odchylenie pocisku od poziomu, więc z tego wzoru możemy obliczyć czas lotu pocisku.

a) $-1{,}9\,\mathrm{cm} = -0{,}019\,\mathrm{m} = -\frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}t^2 \Rightarrow t^2 = 0{,}003\,87\,\mathrm{s}^2 \Rightarrow t = 0{,}062\,\mathrm{s} = 62\,\mathrm{ms}$.

b) Ruch w poziomie (zaniedbując opór powietrza) natomiast jest ruchem jednostajnym ze stałą prędkością. Położenie jest opisane równaniem $x(t) = v_0 t$. Wykorzystując dane w zadaniu oraz czas obliczony w poprzednim punkcie możemy wyznaczyć tą prędkość: $30\,\mathrm{m} = v_0 0{,}062\,\mathrm{s} \Rightarrow v_0 = 482\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 1735{,}2\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

18. s.81

Lot kuli w kierunku pionowym (w dół) jest spadkiem swobodnym z zerową prędkością początkową (pomijamy nachylenie stołu). Zatem przemieszczenie w zależności od czasu jest opisane równaniem: $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$. Ponieważ mamy daną wysokość stołu (przemieszczenie pionowe kulki), więc z tego wzoru możemy obliczyć czas lotu kulki.

a) $-1{,}2\,\mathrm{m} = -\frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}t^2 \Rightarrow t^2 = 0{,}245\,\mathrm{s}^2 \Rightarrow t = 0{,}5\,\mathrm{s}$.

b) Ruch w poziomie (zaniedbując opór powietrza) natomiast jest ruchem jednostajnym ze stałą prędkością. Położenie jest opisane równaniem $x(t) = v_0 t$. Wykorzystując dane w zadaniu oraz czas obliczony w poprzednim punkcie możemy wyznaczyć tą prędkość: $1{,}52\,\mathrm{m} = v_0 0{,}5\,\mathrm{s} \Rightarrow v_0 = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 0{,}85\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

19. s.81

a) W kierunku poziomym piłka porusza się ruchem jednostajnym z prędkością: $161\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 44{,}722\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Pierwszą połowę drogi do gracza, czyli dystans 9,15 m przebywa ona w czasie $\frac{9{,}15\,\mathrm{m}}{44{,}722\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 0{,}2\,\mathrm{s}$.

b) Tyle samo co w poprzednim punkcie, bo piłka w poziomie porusza się ruchem jednostajnym.

c) W kierunku pionowym, w pierwszej części drogi piłka spada swobodnie z zerową prędkością początkową. Zmiana wysokości wynosi zatem $\frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (0{,}2\,\mathrm{s})^2 = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Natomiast składowa pionowa prędkości na końcu (w połowie drogi) wynosi $9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 0{,}2\,\mathrm{s} = 1{,}96\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

d) W kierunku pionowym, w drugiej części drogi piłka spada swobodnie z prędkością początkową jak w połowie drogi (obliczoną w poprzednim punkcie). Zmiana wysokości wynosi zatem $1{,}96\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 0{,}2\,\mathrm{s} + \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (0{,}2\,\mathrm{s})^2 = 0{,}6\,\mathrm{m}$.

e) Zmiana wysokości w drugim przypadku jest większa, ponieważ spadek swobodny następuje tu z niezerową prędkością skierowaną zgodnie z kierunkiem ruchu.

20. s.81

a) W kierunku poziomym mamy spadek swobodny z zerowa prędkością. Odległość punktów P, Q (obniżka wysokości) wynosi: $\frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (0{,}19\,\mathrm{s})^2 = 0{,}18\,\mathrm{m}$.

b) Lotka w kierunku tarczy (składowa pozioma ruchu) porusza się ruchem jednostajnym, zatem odległość od tarczy wynosi: $10\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 0{,}19\,\mathrm{s} = 1{,}9\,\mathrm{m}$.

21. s.81

a) Ruch elektronu w poziomie jest cały czas ruchem jednostajnym z prędkością $10^9\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$. Czas potrzebny na przebycie odległości $2\,\mathrm{cm}$ wynosi $\frac{2\,\mathrm{cm}}{10^9\,\mathrm{cm\,s^{-1}}} = 2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{ns}$.

b) Droga przebyta w pionie wynosi $\frac{1}{2}10^{17}\,\mathrm{cm\,s^{-2}} \cdot (2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s})^2 = 0{,}2\,\mathrm{cm} = 2\,\mathrm{mm}$.

c) $v_x = 10^9\,\mathrm{cm\,s^{-1}}\hat{\imath}$.

d) $v_y = -10^{17}\,\mathrm{cm\,s^{-2}} \cdot 2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}\hat{\jmath} = 2 \cdot 10^8\,\mathrm{cm\,s^{-1}} = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

22. s.81

Zasięg poziomy rzutu ciała w polu grawitacyjnym z pominięciem oporu powietrza wynosi $R = \frac{{v_0}^2}{g} \sin 2\theta_0$ (wzór (4.26) str. 78 w książce). Jest on maksymalny przy kącie rzutu $45°$ i wynosi $\frac{{v_0}^2}{g}$. Zatem dla $v_0 = 9{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ wynosi on $9{,}21\,\mathrm{m}$ i jest o $26\,\mathrm{cm}$ dłuższy od skoku Powell'a.

23. s.81

Składowe pozioma i pionowa prędkości początkowej wynoszą odpowiednio:

$$
\begin{aligned}
v_{0x} &= 20\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \cos(40°) = 15{,}32\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\
v_{0y} &= 20\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \sin(40°) = 12{,}86\,\mathrm{m\,s^{-1}}
\end{aligned}
$$

Tor kamienia jest opisany równaniem:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= (v_{0x}t)\hat{\imath} + (v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{\jmath} \\
&= (15{,}32\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t)\hat{\imath} + (12{,}86\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t - 4{,}9\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t^2)\hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

Podstawiając odpowiednie czasy obliczamy:

a) $r_x(1{,}1\,\mathrm{s}) = 16{,}85\,\mathrm{m}$.

b) $r_y(1{,}1\,\mathrm{s}) = 8{,}22\,\mathrm{m}$.

c) $r_x(1{,}8\,\mathrm{s}) = 27{,}58\,\mathrm{m}$.

d) $r_y(1{,}8\,\mathrm{s}) = 7{,}27\,\mathrm{m}$.

e) W chwili $5\,\mathrm{s}$ kamień spadł już na ziemię (r_y wyliczona według powyższego wzoru jest ujemna) zatem jego składowa pozioma jest równa zasięgowi rzutu (wzór (4.26) str. 78 w książce): $r_x(5\,\mathrm{s}) = \frac{(20\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} \sin(80°) = 40{,}2\,\mathrm{m}$.

f) W chwili $5\,\mathrm{s}$ kamień spadł już na ziemię zatem jego składowa pionowa jest równa zeru.

24. s.81

Zauważmy, że składowa pionowa prędkości piłki zmniejsza się, osiąga wartość zero w chwili $2{,}5\,\mathrm{s}$ następnie zwiększa się. W chwili $2{,}5\,\mathrm{s}$ kiedy składowa pionowa prędkości jest równa zeru, wartość prędkości równa $19\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ jest równa składowej poziomej prędkości, która to składowa jest stała przez cały czas ruchu piłki. Z tego oraz z czasu lotu piłki ($5\,\mathrm{s}$) możemy obliczyć zasięg lotu:

a) $R = 19\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 5\,\mathrm{s} = 95\,\mathrm{m}$.

b) Wysokość lotu możemy wyznaczyć na podstawie faktu, że piłka z najwyższego pułapu osiągniętego w 2,5 sekundzie lotu spada do 5 sekundy spadkiem swobodnym. $H = \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (2{,}5\,\mathrm{s})^2 = 30{,}625\,\mathrm{m}$.

25. s.81

Czas po którym pocisk doleci do tarczy wynosi: $\frac{45{,}7\,\mathrm{m}}{460\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 0{,}1\,\mathrm{s}$. W tym czasie pocisk spadając swobodnie przemieści się w dól o: $\frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (0{,}1\,\mathrm{s})^2 = 0{,}05\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{cm}$. O taką też odległość nad środkiem celu należy mierzyć.

26. s.82

Składowa pozioma prędkości (stała w czasie całego ruchu) wynosi: $v_{0x} = \frac{16\,\mathrm{m}}{5 \cdot 0{,}25\,\mathrm{s}} = 12{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Składową pionową prędkości początkowej możemy obliczyć z równania: $1{,}6\,\mathrm{m} = v_{0y} \cdot 0{,}25\,\mathrm{s} - \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (0{,}25\,\mathrm{s})^2 \Rightarrow v_{0y} = 7{,}625\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

a) $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 14{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) Jest równa składowej poziomej prędkości początkowej, czyli $12{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

c) Maksymalna wysokość zostanie osiągnięta w połowie lotu: $t = 1{,}25\,\mathrm{s}/2 = 0{,}625\,\mathrm{s}$. Wynosi ona $1{,}2\,\mathrm{m} + 7{,}625\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 0{,}625\,\mathrm{s} - \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (0{,}625\,\mathrm{s})^2 = 4{,}05\,\mathrm{m}$.

27. s.82

Składowa pionowa prędkości początkowej wynosi:

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta \tag{4.1}$$

Zależność składowej pionowej prędkości od czasu wynosi:

$$v_y(t) = v_{0y} - gt \tag{4.2}$$

Zatem położenie maksymalne zostanie osiągnięte dla:

$$v_y = 0 \text{ dla } t_{\max} = \frac{v_{0y}}{g} \tag{4.3}$$

Zależność składowej pionowej położenia od czasu wynosi:

$$r_y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{4.4}$$

Podstawiając wcześniej wyliczony czas obliczamy położenie maksymalne:

$$r_y(t_{\max}) = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_{0y}^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g} \tag{4.5}$$

28. s.82

Składowe pozioma i pionowa prędkości początkowej wynoszą: $v_{0x} = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \cos(40^\circ) = 19{,}15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $v_{0y} = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \sin(40^\circ) = 16{,}07\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Czas po którym piłka doleci do ściany to: $\frac{22\,\mathrm{m}}{19{,}15\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 1{,}15\,\mathrm{s}$. Wykorzystując wzory podane w poprzednim zadaniu, mamy:

a) Piłka uderzy w ścianę na wysokości: $16{,}07\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 1{,}15\,\mathrm{s} - \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (1{,}15\,\mathrm{s})^2 = 12\,\mathrm{m}$.

b) $v_x = v_{0x} = 19{,}15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $v_y = 16{,}07\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 1{,}15\,\mathrm{s} = 4{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

c) Nie, ponieważ składowa pionowa prędkości w momencie uderzenia w ścianę jest dodatnia.

29. s.82

Piłka w momencie osiągnięcia wysokości 9,1 m posiada składową pionową prędkości równą $6{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Zatem wzniesie się jeszcze na wysokość (ze wzoru (4.5)) $\frac{(6{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2\cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 1{,}9\,\mathrm{m}$.

a) $9{,}1\,\mathrm{m} + 1{,}9\,\mathrm{m} = 11\,\mathrm{m}$.

b) Ze wzoru (4.5) składowa pionowa prędkości początkowej wynosi $\sqrt{2 \cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 11\,\mathrm{m}} = 14{,}68\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Następnie ze wzoru (4.3) wyliczamy czas lotu piłki, który jest równy dwukrotności czasu wznoszenia do najwyższego położenia: $2\frac{14{,}68\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 3\,\mathrm{s}$. Zatem odległość przebyta przez piłkę w poziomie wynosi $7{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 3\,\mathrm{s} = 22{,}8\,\mathrm{m}$.

c) W poprzednim punkcie obliczyliśmy składową pionową prędkości początkowej, Składowa pionowa prędkości końcowej ma taką samą wartości tylko jest przeciwnie skierowana. Składowa pozioma zaś jest podana i się nie zmienia. Zatem wartość prędkości końcowej wynosi $\sqrt{(14{,}68\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2 + (7{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2} = 16{,}53\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

d) $\theta = -\arctan(\frac{14{,}68}{7{,}6}) = -62{,}63^\circ$

30. s.82

a) $v_{0x} = \frac{40\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) $53\,\mathrm{m} = v_{0y} \cdot 2\,\mathrm{s} - \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}(2\,\mathrm{s})^2 \Rightarrow v_{0y} = 36{,}3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

c) Ze wzoru (4.3) $t_{\max} = \frac{36{,}3\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 3{,}7\,\mathrm{s}$. Oraz szukana odległość $20\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 3{,}7\,\mathrm{s} = 74{,}09\,\mathrm{m}$.

31. s.82

Składowa pozioma prędkości piłki wynosi: $v_{0x} = \frac{46\,\mathrm{m}}{4{,}5\,\mathrm{s}} = 10{,}22\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Aby wyznaczyć składową pionową prędkości początkowej piłki podzielmy czas lotu piłki na dwa czasy: t_1 — czas po którym piłka osiągnie z powrotem wysokość na której została kopnięta (czyli $H := 150\,\mathrm{cm}$), oraz t_2 — pozostały czas po którym uderzy ona w ziemię. Z treści zadania znamy sumę tych czasów $T := 4{,}5\,\mathrm{s}$. Korzystając z równania (4.3) oraz z faktu, że w chwili t_1 składowa pionowa prędkości wynosi $-v_{0y}$ możemy sformułować następujący układ trzech równań z trzema niewiadomymi $(t_1,\ t_2,\ v_{0y})$:

$$\begin{cases} t_1 = 2 \cdot \frac{v_{0y}}{g} \\ H = v_{0y} t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2 \\ t_1 + t_2 = T \end{cases}$$

Eliminując po kolei t_1 i t_2 dostajemy równianie na v_{0y}:

$$\begin{cases} H = v_{0y} t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2 \\ t_2 = T - 2 \cdot \frac{v_{0y}}{g} \end{cases}$$

$$H = v_{0y}\left(T - 2\cdot\frac{v_{0y}}{g}\right) + \frac{1}{2}g\left(T - 2\cdot\frac{v_{0y}}{g}\right)^2$$
$$H = v_{0y}T - 2\cdot\frac{v_{0y}^2}{g} + \frac{gT^2}{2} - 2Tv_{0y} + 2\cdot\frac{v_{0y}^2}{g}$$
$$H = \frac{gT^2}{2} - Tv_{0y}$$
$$v_{0y} = \frac{gT}{2} - \frac{H}{T}$$
$$v_{0y} = 21{,}72\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 24\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$
$$\theta = \arctan(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}) = 64{,}8^\circ$$

32. s.82

Zakładamy że pływak podczas skoku do wody wybija się z podestu jedynie w kierunku poziomym, t.j. składowa pionowa prędkości jest równa zeru. Składowa pionowa położenia wyraża się zatem wzorem: $r_y(t) = -\frac{1}{2}gt_2$, natomiast pozioma $r_x(t) = v_0t$.

a) $r_x(0{,}8\,\mathrm{s}) = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 0{,}8\,\mathrm{s} = 1{,}6\,\mathrm{m}$.

b) $r_y(0{,}8\,\mathrm{s}) = -\frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (0{,}8\,\mathrm{s})^2 = -3{,}14\,\mathrm{m}$. Czyli 6,86 m nad lustrem wody.

c) $-10\,\mathrm{m} = -\frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{20\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 1{,}43\,\mathrm{s}$. $r_x(1{,}43\,\mathrm{s}) = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 1{,}43\,\mathrm{s} = 2{,}86\,\mathrm{m}$.

33. s.82

Składowe prędkości samolotu w momencie wypuszczenia pocisku wynoszą: $v_{0x} = 290\,\mathrm{km\,h^{-1}} \cdot \cos(30^\circ) = 251{,}15\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 69{,}76\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $v_{0y} = -290\,\mathrm{km\,h^{-1}} \cdot \sin(30^\circ) = -145\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 40{,}28\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

a) $t = \frac{700\,\mathrm{m}}{69{,}76\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 10{,}03\,\mathrm{s}$.

b) $h = -(v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2) = 40{,}28\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 10{,}03\,\mathrm{s} + \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (10{,}03\,\mathrm{s})^2 = 897{,}46\,\mathrm{m}$.

34. s.82

Wartość prędkości w momencie najwyższego wzniesienia jest równa składowej poziomej tej prędkości, która jest stała. Zatem many równianie $v_0 = 5v_0\cos\theta$, $\cos\theta = \frac{1}{5}$, $\theta = \arccos(0{,}2) = 78{,}46^\circ$.

35. s.82

Z danych w zadaniu wynika, że krawędzie schodów tworzą linie prostą nachyloną o kąt 45° w dól od poziomu. Ruch piłki jest spadkiem swobodnym z prędkością początkową poziomą. Z równań takiego ruchu wynika, że nachylenie prędkości będzie się stale powiększać od początkowej wartości zero aż do upadku piłki na schody. Z tego wynika, że jeżeli przez d oznaczymy odległość w poziomie po jakiej tor piłki przetnie linię wyznaczoną przez krawędzie schodów, to piłka upadnie na schód którego stopień obejmuje tą odległość w poziomie od początku schodów. Wyznaczmy czas po którym nastąpi to przecięcie: $\frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}t^2 = 1{,}52\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t$,

$t = 2\frac{1{,}52\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 0{,}31\,\mathrm{s}$. Z tego obliczamy: $d = 1{,}52\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 0{,}31\,\mathrm{s} = 0{,}47\,\mathrm{m}$. A zatem piłka upadnie na 3-ci schód.

36. s.82

Na podstawie wzoru (4,26) (str. 78 w książce) zasięg lotu piłki wynosi: $R = \frac{(19{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} \sin(2 \cdot 45°) = 38{,}8\,\mathrm{m}$. Natomiast czas lotu: $t = \frac{38{,}8\,\mathrm{m}}{19{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}\cos 45°} = 2{,}81\,\mathrm{s}$. Zatem zawodnik z odległości 55 m musi biec z prędkością $v = \frac{55\,\mathrm{m} - 38{,}8\,\mathrm{m}}{2{,}81\,\mathrm{s}} = 5{,}76\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

37. s.82

Równanie na składową pionową położenia pocisku wynosi: $r_y(t) = v_0 \cos\theta t + \frac{1}{2}gt^2$. Po podstawieniu danych: $730\,\mathrm{m} = v_0 \cos 53° \cdot 5\,\mathrm{s} + \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}(5\,\mathrm{s})^2$.

a) Z czego $v_0 = 201{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) $r_x = 201{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \sin 53° \cdot 5\,\mathrm{s} = 806{,}2\,\mathrm{m}$.

c) $v_x = 201{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \sin 53° = 161{,}24\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

d) $v_y = -201{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \cos 53° - 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} 5\,\mathrm{s} = -170{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

38. s.82

a) Aby piłka uderzona poziomo przeszła nad siatką musi w czasie pokonania odległości 8 m obniżyć się maksymalnie o $3\,\mathrm{m} - 2{,}24\,\mathrm{m} = 0{,}76\,\mathrm{m}$. Pomijamy średnicę piłki, która nie jest podana. Czas lotu piłki do siatki w zależności od prędkości początkowej wyliczmy ze wzoru $v_0 t = 8\,\mathrm{m} \Rightarrow t = \frac{8\,\mathrm{m}}{v_0}$. Z kolei obniżenie piłki (spadek swobodny) wyraża się wzorem $\frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t^2 = 0{,}76\,\mathrm{m}$. Podstawiając wyliczony czas mamy: $\frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot \frac{64\,\mathrm{m}^2}{{v_0}^2} = 0{,}76\,\mathrm{m} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 32\,\mathrm{m}^2}{0{,}76\,\mathrm{m}}} = 20{,}31\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 73{,}13\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Jest to minimalna prędkość potrzebna żeby piłka przeleciała nad siatką.

b) Obliczenia są analogiczne, tylko piłka przelatując odległość $8\,\mathrm{m} + 9\,\mathrm{m} = 17\,\mathrm{m}$ musi obniżyć się o co najmniej 3 m. $\frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot \frac{289\,\mathrm{m}^2}{{v_0}^2} = 3\,\mathrm{m} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 289\,\mathrm{m}^2}{6\,\mathrm{m}}} = 21{,}73\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 78{,}215\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Jest to maksymalna prędkość potrzebna żeby piłka upadła w pole gry.

39. s.83

Na podstawie wzoru na zasięg rzutu (4,26) (str. 78 w książce) możemy wyliczyć wartość prędkości początkowej: $v_0 = \sqrt{107\,\mathrm{m} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 32{,}38\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Składowe pozioma i pionowa prędkości początkowej wynoszą: $v_{0x} = v_{0y} = v_0 \sin(45°) = 22{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Czas po jakim piłka doleci do płotu: $t = \frac{97{,}5\,\mathrm{m}}{22{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 4{,}26\,\mathrm{s}$.

a) i b) Odległość piłki od ziemi w momencie gdy znajdzie się ona w odległości płotu: $h = 1{,}22\,\mathrm{m} + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 1{,}22\,\mathrm{m} + 22{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 4{,}26\,\mathrm{s} - \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (4{,}26\,\mathrm{s})^2 = 9{,}85\,\mathrm{m}$. A zatem piłka przeleci 2,53 m nad płotem.

40. s.83

a) i b) Piłka doleci do płaszczyzny siatki po czasie $t = \frac{12\,\mathrm{m}}{23{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 0{,}5\,\mathrm{s}$. W tym czasie spadając swobodnie jej wysokość obniży się do: $y = 2{,}37\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (0{,}5\,\mathrm{s})^2 = 1{,}145\,\mathrm{m}$. A zatem przeleci ona 24 cm nad siatką.

c) i d) Piłka doleci do płaszczyzny siatki po czasie $t = \frac{12\,\mathrm{m}}{23{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \cos(5^\circ)} = 0{,}51\,\mathrm{s}$. W tym czasie spadając z prędkością początkową $-23{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \sin(5^\circ) = -2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ jej wysokość obniży się do: $y = 2{,}37\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 0{,}51\,\mathrm{s} - \frac{1}{2} 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (0{,}51\,\mathrm{s})^2 = 0{,}08\,\mathrm{m}$. A zatem piłka trafi w siatkę 82 cm poniżej taśmy.

41. s.83[§]

Czas po którym piłka doleci do bramki: $t = \frac{50\,\mathrm{m}}{25\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \cos\theta} = \frac{2\,\mathrm{s}}{\cos\theta}$.
Wysokość (składowa pionowa położenia) piłki po tym czasie:

$$h = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \sin\theta t - \frac{1}{2} 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} t^2 = 50\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{tg}\,\theta - 19{,}6\,\mathrm{m} \frac{1}{\cos\theta^2} =$$
$$50\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{tg}\,\theta - 19{,}6\,\mathrm{m}(\mathrm{tg}\,\theta^2 + 1) = -19{,}6\,\mathrm{m}\,\mathrm{tg}\,\theta^2 + 50\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{tg}\,\theta - 19{,}6\,\mathrm{m}$$

Piłka (bez odbicia) wpadnie w światło bramki jeżeli $0 \leqslant h \leqslant 3{,}44\,\mathrm{m}$. Rozwiążmy zatem powyższe równanie kwadratowe względem $\mathrm{tg}\,\theta$ dla krańcowych przypadków.

$h = 0$) Równanie

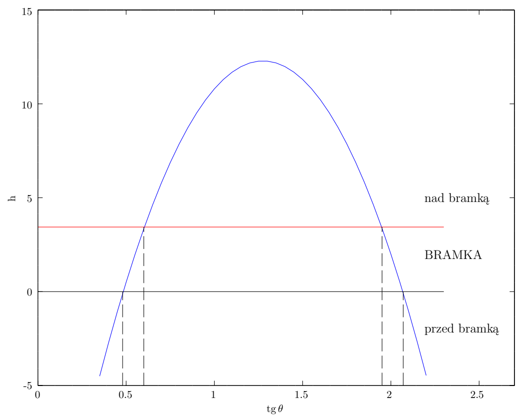
$$-19{,}6\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{tg}\,\theta^2 + 50\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{tg}\,\theta - 19{,}6\,\mathrm{m} = 0$$

posiada dwa rozwiązania: $\mathrm{tg}\,\theta = 2{,}07$, $\mathrm{tg}\,\theta = 0{,}48$. Odpowiadają temu kąty: 64,19° i 25,81°.

$h = 3{,}44\,\mathrm{m}$) Równanie

$$-19{,}6\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{tg}\,\theta^2 + 50\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{tg}\,\theta - 19{,}6\,\mathrm{m} = 3{,}44\,\mathrm{m}$$

posiada dwa rozwiązania: $\mathrm{tg}\,\theta = 1{,}95$, $\mathrm{tg}\,\theta = 0{,}6$. Odpowiadają temu kąty: 62,82° i 31,11°.



Zatem piłka uderzona pod kątem między 25,81° a 31,11° oraz 62,82° a 64,19° trafi w światło bramki.

42. s.83

$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(10\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{25\,\mathrm{m}} = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

43. s.83

Średni promień Ziemi: 6370 km.

a) $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot (6370+640)\mathrm{km}}{98\,\mathrm{min}} = \frac{4{,}4 \cdot 10^4\,\mathrm{km}}{1{,}63\,\mathrm{h}} = 2{,}7 \cdot 10^4\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 7{,}5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

b) $a = \frac{(2{,}7 \cdot 10^4\,\mathrm{km\,h^{-1}})^2}{(6370+640)\mathrm{km}} = 1{,}04 \cdot 10^5\,\mathrm{km\,h^{-2}} = 8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

44. s.83

a) $s = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}15\,\mathrm{m} = 0{,}94\,\mathrm{m}$.

b) $v = \frac{0{,}94\,\mathrm{m}}{(60/1200)\,\mathrm{s}} = 18{,}84\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

c) $a = \frac{(18{,}84\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{0{,}15\,\mathrm{m}} = 2366{,}3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

[§] Poniższe rozwiązanie nie jest zgodne z rozwiązaniem podanym w książce. Prawdopodobnie w książce jest pomyłka.

d) $T = \frac{s}{v} = \frac{0{,}94\,\mathrm{m}}{18{,}84\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 0{,}05\,\mathrm{s}$.

45. s.83

a) $v = \sqrt{ar} = \sqrt{7 \cdot 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 5\,\mathrm{m}} = 18{,}52\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

c) $T = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5\,\mathrm{m}}{18{,}52\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 1{,}7\,\mathrm{s}$.

b) $\frac{60\,\mathrm{s}}{1{,}7\,\mathrm{s}} = 35{,}37$. Zatem wirówka wykona około 35 obrotów na minutę.

46. s.83

$a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v^2}{a}$.

a) $r = \frac{(3{,}66\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{1{,}83\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 7{,}32\,\mathrm{m}$ na zachód od środka karuzeli.

b) $r = 7{,}32\,\mathrm{m}$ na północ od środka karuzeli.

47. s.83

Średni promień Ziemi: 6370 km.

a) $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6370\,\mathrm{km}}{24\,\mathrm{h}} = 1666{,}8\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Przyspieszenie: $g = \frac{(1666{,}8\,\mathrm{km\,h^{-1}})^2}{6370\,\mathrm{km}} = 436{,}15\,\mathrm{km\,h^{-2}} = 0{,}034\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

b) $a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{a}} = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 5063{,}1\,\mathrm{s} = 84{,}385\,\mathrm{min}$.

48. s.83

a) $v_{\mathrm{nom}} = 216\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $0{,}05g = 0{,}49\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Minimalny promień skrętu: $r_{\mathrm{min}} = \frac{v_{\mathrm{nom}}^2}{0{,}05g} = \frac{(60\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{0{,}49\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 7346{,}9\,\mathrm{m} = 7{,}4\,\mathrm{km}$.

b) $v_{\mathrm{min}} = \sqrt{0{,}49\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 1000\,\mathrm{m}} = 22{,}14\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 79{,}7\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

49. s.83

a) $T = \frac{60\,\mathrm{s}}{5} = 12\,\mathrm{s}$. Prędkość na brzegu młyna: $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 15\,\mathrm{m}}{12\,\mathrm{s}} = 7{,}85\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) $a = \frac{(7{,}85\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{15\,\mathrm{m}} = 4{,}11\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ skierowane w dół.

c) $a = 4{,}11\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ skierowane w górę.

50. s.83

a) $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}} = 333{,}33\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

b) $a = \frac{(333{,}33\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{20 \cdot 10^3\,\mathrm{m}} = 5{,}56\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

c) Obie wartości zwiększą się.

51. s.83

Obliczmy najpierw czas jaki upłynął od zerwania sznurka do upadnięcia kamienia na ziemię: $2\,\mathrm{m} = \frac{1}{2} 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} = 0{,}64\,\mathrm{s}$. Wartość prędkości w ruchu poziomym po okręgu (prędkość w momencie zerwania sznurka): $v = \frac{10\,\mathrm{m}}{0{,}64\,\mathrm{s}} = 15{,}65\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Przyspieszenie w ruchu po okręgu: $a = \frac{(15{,}65\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{1{,}5\,\mathrm{m}} = 163{,}33\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

52. s.83

Wartość prędkości cząstki w ruchu po okręgu: $v = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{s}} = 0{,}942\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

a) $r_x = 3\,\mathrm{m}$, $r_y = 3\,\mathrm{m}$, $r = (\sqrt{3^2 + 3^2})\mathrm{m} = 4{,}24\,\mathrm{m}$, $\theta = 45°$.

b) $r_x = 3\,\mathrm{m} \cdot \cos(45°) = 2{,}12\,\mathrm{m}$, $r_y = 3\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m} \cdot \sin(45°) = 5{,}12\,\mathrm{m}$, $r = (\sqrt{2{,}12^2 + 5{,}12^2})\mathrm{m} = 5{,}54\,\mathrm{m}$, $\theta = \arctan(\frac{5{,}12\,\mathrm{m}}{2{,}12\,\mathrm{m}}) = 67{,}5°$.

c) $r_x = 0\,\mathrm{m}$, $r_y = 6\,\mathrm{m}$, $r = 6\,\mathrm{m}$, $\theta = 90°$.

d) $r_x = 0\,\mathrm{m} - 3\,\mathrm{m} = -3\,\mathrm{m}$, $r_y = 6\,\mathrm{m} - 3\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}$, $r = (\sqrt{(-3)^2 + 3^2})\mathrm{m} = 4{,}24\,\mathrm{m}$, $\theta = 90° + 45° = 135°$.

e) $v_{\text{śr}} = \frac{4{,}24\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{s}} = 0{,}85\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\theta = 135°$ (tak jak przemieszczenie).

f) Jak obliczono na początku zadania, prędkość chwilowa: $v = 0{,}942\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\theta = 90°$.

g) Podobnie: $v = 0{,}942\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\theta = 180°$.

h) $a = \frac{(0{,}942\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{3\,\mathrm{m}} = 0{,}3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\theta = 180°$.

i) $a = 0{,}3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\theta = -90°$.

53. s.84

a) Z punktu widzenia operatora prędkość początkowa geparda wynosi: $-30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a prędkość końcowa: $20\,\mathrm{km\,h^{-1}} + 45\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 65\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. A zatem średnie przyspieszenie od początku do końca manewru zawrotu wynosi: $a_{\mathrm{sr}} = \frac{\Delta v}{t} = \frac{65\,\mathrm{km\,h^{-1}} - -30\,\mathrm{km\,h^{-1}}}{2\,\mathrm{s}} = \frac{26{,}39\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{2\,\mathrm{s}} = 13{,}19\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ skierowane na wschód.

b) Z punktu widzenia członka ekipy (stacjonarnego) prędkość początkowa geparda wynosi: $-30\,\mathrm{km\,h^{-1}} - 20\,\mathrm{km\,h^{-1}} = -50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a prędkość końcowa: $45\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Ponieważ operator porusza się względem członka ekipy ruchem jednostajnym (z zerowym przyspieszeniem), to średnie przyspieszenie geparda będzie takie samo, co mogą łatwo potwierdzić rachunki (różnica prędkości będzie taka sama).

54. s.84

a) $v = 14\,\mathrm{km\,h^{-1}} - 9\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

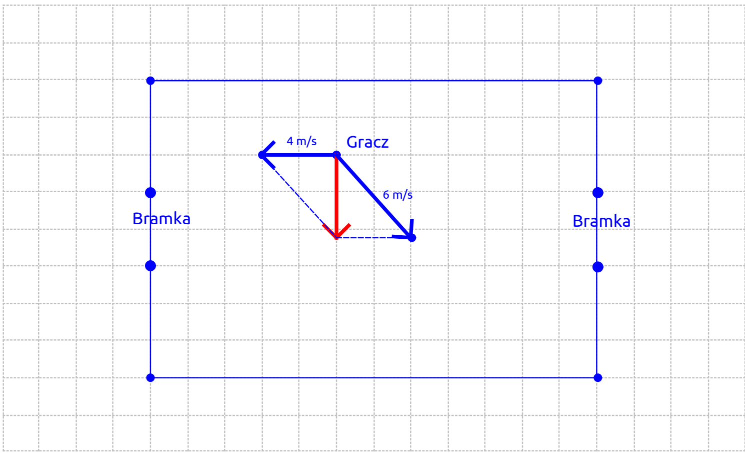
b) $v = 5\,\mathrm{km\,h^{-1}} - 6\,\mathrm{km\,h^{-1}} = -1\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

55. s.84

Prędkość schodów: $v_s = \frac{l}{t_s} = \frac{15\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}} = 0{,}25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Prędkość wchodzenia osoby: $v_o = \frac{l}{t_o} = \frac{15\,\mathrm{m}}{90\,\mathrm{s}} = 0{,}17\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Prędkość wchodzenia osoby po ruchomych schodach: $v = v_s + v_o = l(\frac{1}{t_s} + \frac{1}{t_o}) = l\frac{t_s+t_o}{t_s t_o} = 0{,}42\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Czas wejścia osoby po ruchomych schodach: $t = \frac{l}{v} = \frac{l}{l\frac{t_s+t_o}{t_s t_o}} = \frac{t_s t_o}{t_s+t_o} = 36\,\mathrm{s}$. Przy danych czasach 60 s i 90 s czas ten nie zależy od długości schodów.

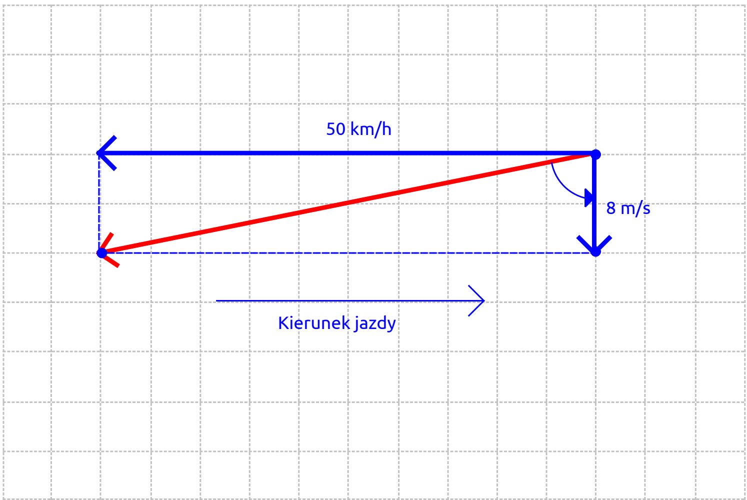
56. s.84

Minimalny kąt (patrz rysunek) wynosi: $\alpha = 90° + \arcsin(\frac{4}{6}) = 131{,}81°$.



57. s.84

Prędkość samochodu: $v = 50\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 13{,}89\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Kąt (od pionu) wynosi: $\alpha = \arctan(\frac{13{,}89}{8}) = 60°$.



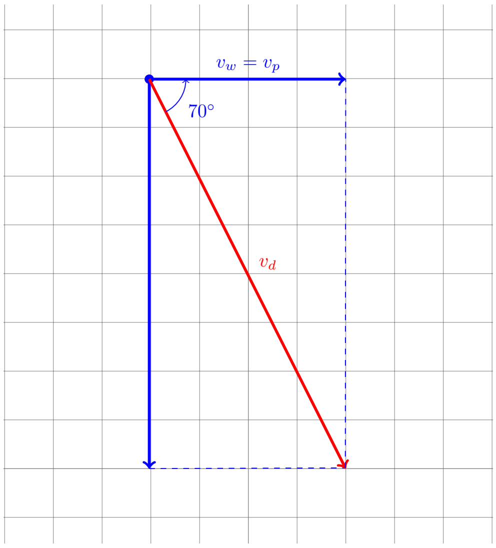
58. s.84

a) $v = (80\,\mathrm{km\,h^{-1}})\hat{\imath} + (-60\,\mathrm{km\,h^{-1}})\hat{\jmath}$.

b) Kierunek prędkości podanej w punkcie a) pokrywa się z kierunkiem linii łączącej pojazdy i nie zmieni się (z Twierdzenia Talesa) jeżeli przynajmniej jeden samochód nie zmieni prędkości. Samochody zmierzają do zderzenia.

59. s.84[¶]

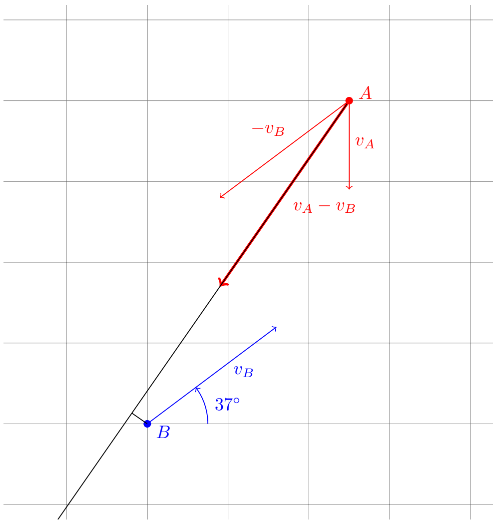
Ponieważ krople widziane z pociągu opadają pionowo, oznacza to, że prędkość pociągu jest równa prędkości poziomej wiatru: $v_w = v_p$.
Prędkość opadania kropel v_d obliczamy z zależności (rysunek): $\frac{v_p}{v_d} = \cos 70° \Rightarrow v_d = \frac{v_p}{\cos 70°} = \frac{30\,\mathrm{km\,h^{-1}}}{\cos 70°} = 87{,}71\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 24{,}36\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.



Obserwator na ziemi.

60. s.84

a) Oznaczając prędkości statków A i B względem ziemi odpowiednio przez $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$, prędkość względna A względem B wynosi: $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = (-40\,\mathrm{km\,h^{-1}} \cdot \cos 37°)\hat{\imath} + (-22\,\mathrm{km\,h^{-1}} - 40\,\mathrm{km\,h^{-1}} \cdot \sin 37°)\hat{\jmath} = (-31{,}94\,\mathrm{km\,h^{-1}})\hat{\imath} - (46{,}07\,\mathrm{km\,h^{-1}})\hat{\jmath}$.
b) $\vec{r}_{AB}(t) = \vec{r}_{AB}(0) + \vec{v}_{AB}t = (2{,}5\,\mathrm{km})\hat{\imath} + (4\,\mathrm{km})\hat{\jmath} - (31{,}94\,\mathrm{km\,h^{-1}})t\hat{\imath} - (46{,}07\,\mathrm{km\,h^{-1}})t\hat{\jmath} = (2{,}5\,\mathrm{km} - 31{,}94\,\mathrm{km\,h^{-1}} \cdot t)\hat{\imath} + (4\,\mathrm{km} - 46{,}07\,\mathrm{km\,h^{-1}} \cdot t)\hat{\jmath}$.
c) Zakładając, że czas podajemy w godzinach: $r_{AB}(t) = \sqrt{(2{,}5 - 31{,}94t)^2 + (4 - 46{,}07t)^2}\,\mathrm{km} = \sqrt{3142{,}6t^2 - 528{,}26t + 22{,}25}\,\mathrm{km}$.
Funkcja kwadratowa pod pierwiastkiem osiąga minimum dla wartości: $t = 0{,}084\,\mathrm{h} = 5\,\mathrm{min}$.
Minimalne zbliżenie statków: $r_{AB}(0{,}084\,\mathrm{h}) = 0{,}22\,\mathrm{km}$.



Obserwator na ziemi.

61. s.84[‖]

Wartość prędkości statku A: 24 węzły $= 24 \cdot 1{,}852\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 44{,}45\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Wartość prędkości statku B: 28 węzłów $= 28 \cdot 1{,}852\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 51{,}86\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Prędkość statku A: $\vec{v}_A = (44{,}45\,\mathrm{km\,h^{-1}})\hat{\jmath}$. Prędkość statku B: $\vec{v}_B = -(51{,}86\,\mathrm{km\,h^{-1}} \cdot \sin 40°)\hat{\imath} - (51{,}86\,\mathrm{km\,h^{-1}} \cdot \cos 40°)\hat{\jmath} = -(33{,}33\,\mathrm{km\,h^{-1}})\hat{\imath} - (39{,}72\,\mathrm{km\,h^{-1}})\hat{\jmath}$.

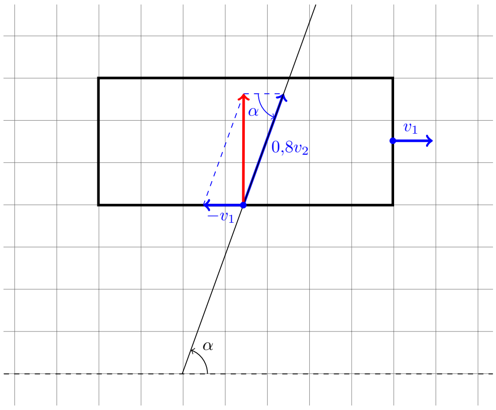
a) Prędkość względna A względem B wynosi: $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = (44{,}45\,\mathrm{km\,h^{-1}})\hat{\jmath} - (-(33{,}33\,\mathrm{km\,h^{-1}})\hat{\imath} - (39{,}72\,\mathrm{km\,h^{-1}})\hat{\jmath}) = (33{,}33\,\mathrm{km\,h^{-1}})\hat{\imath} + (84{,}17\,\mathrm{km\,h^{-1}})\hat{\jmath}$.
Wartość: $v_{AB} = \sqrt{33{,}33^2 + 84{,}17^2}\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 90{,}53\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 48{,}88$ mili/h.
Kierunek: $\theta_{AB} = \arctan(\frac{84{,}17}{33{,}33}) = 68{,}4°$ (na północ od kierunku wschodniego).

[¶] Poniższe rozwiązanie nie jest zgodne z odpowiedzią podaną w książce. Prawdopodobnie w książce jest pomyłka.
[‖] Poniższe rozwiązanie nie jest zgodne z odpowiedzią podaną w książce.

b) Odległość 160 mili morskich osiągną po czasie: $t = \frac{160\,\text{mili}}{48{,}88\,\text{mili/h}} = 3{,}2733\,\text{h} = 3\,\text{h i } 16\,\text{min}$.

c) W kierunku przeciwnym niż prędkość $\vec{v}_{AB}$.

62. s.84



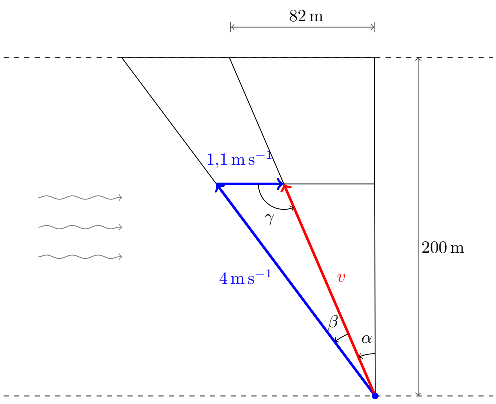
Jak widać z rysunku warunkiem aby tor pocisku był prostopadły do ruchu wagonu (z punktu widzenia obserwatora w wagonie) jest by kierunek prędkości wypadkowej był prostopadły czyli: $\frac{v_1}{0{,}8v_2} = \cos\alpha$.
Zatem $\alpha = \arccos(\frac{v_1}{0{,}8v_2}) = \arccos(\frac{23{,}61\,\text{m}\,\text{s}^{-1}}{0{,}8\cdot 650\,\text{m}\,\text{s}^{-1}}) = 87{,}4°$.
Do powyższego wzoru podstawiono przeliczoną wartość prędkości $85\,\text{km}\,\text{h}^{-1} = 23{,}61\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

63. s.84

Obliczmy najpierw kąt α pod którym powinna płynąć łódź aby dotrzeć dokładnie na przeciwległą łączkę: $\alpha = \arctan(\frac{82}{200}) = 22{,}29°$. Znając ten kąt, możemy obliczyć kąt: $\gamma = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha = 112{,}29°$. Teraz skorzystamy ze stałego stosunku sinusów kątów do przeciwległych boków w dowolnym trójkącie (patrz Dodatek E w książce): $\frac{\sin\gamma}{4\,\text{m}\,\text{s}^{-1}} = \frac{\sin\beta}{1{,}1\,\text{m}\,\text{s}^{-1}} \Rightarrow \sin\beta = \frac{1{,}1}{4}\sin 112{,}29° = 0{,}254$. Zatem $\beta = 14{,}74°$.

a) Zatem kąt pod jakim powinna wypłynąć łódka wynosi: $\alpha + \beta = 37{,}03°$ względem osi prostopadłej do rzeki.

b) Ponownie skorzystamy z prawa sinusów aby obliczyć wartość prędkości wypadkowej łodzi: $\frac{\sin\gamma}{4\,\text{m}\,\text{s}^{-1}} = \frac{\sin(180° - \gamma - \beta)}{v} \Rightarrow v = \frac{\sin 52{,}97°}{\sin 112{,}29°}\,4\,\text{m}\,\text{s}^{-1} = 3{,}45\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Natomiast odległość do przebycia to $\sqrt{82^2 + 200^2}\,\text{m} = 216{,}16\,\text{m}$. Zatem potrzebny czas to: $\frac{216{,}16\,\text{m}}{3{,}45\,\text{m}\,\text{s}^{-1}} = 62{,}65\,\text{s}$.



64. s.84

Odłamek wyrzucony z prędkością v_0 i pod kątem ϕ porusza się po torze parabolicznym opisanym równaniem parametrycznym w zależności od czasu: $r_x(t) = v_0\cos\phi\cdot t$, $r_y(t) = v_0\sin\phi\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2$.
Poniżej przedstawiony jest listing komend programu Octave, które wykonują obliczenia przedstawione w punkcie a) oraz rysunek z punktu b).

```
#! /bin/octave -qf

function [rx, ry] = pozycja (v, fi_deg, t)
  rx=v.*cos(fi_deg*pi/180).*t;
  ry=v.*sin(fi_deg*pi/180).*t - 0.5*9.8.*t.^2;
endfunction
```

```
function [vx, vy] = predkosc (v, fi_deg, t)
  vx=v;
  vy=v - 9.8.*t;
endfunction


v0 = [520 630 750 870 1000];
fi0 = [14 16 18 20 24];

[rx, ry] = pozycja(v0, fi0, 20);
rx_ja = 20000.-rx;

[vx, vy] = predkosc(v0, fi0, 20);
vx = -vx;

printf ("Współrzędne x:")
rx_ja
printf ("Współrzędne y:")
ry

# plot z opcją "-o" narysuje wykres punktów połączonych odcinkami.
# Jednak można użyć funkcji dostępnych w Octave żeby uzyskać gładką linię:
xx = rx_ja(1):(rx_ja(5)-rx_ja(1))/100:rx_ja(5);
yy = interp1 (rx_ja, ry, xx, "spline");

plot (rx_ja, ry, "or", xx, yy, "r");
hold on;
quiver (rx_ja, ry, vx, vy , 0.4);

print -depsc2 t1s4z64;
```

a) Wynik obliczeń (współrzędne punktów):

```
Współrzędne x:rx_ja =
   9908.9   7888.1   5734.2   3649.3   1729.1

Współrzędne y:ry =
    555.99   1513.03   2675.25   3991.15   6174.73
```

b) Na wykresie oprócz punktów w jakich względem obserwatora znajdą się wyrzucone odłamki skorupy ziemskiej, zaznaczono również wektory prędkości, które określają w jakim kierunku przemieszczają się te punkty.