

## Rozwiązania Zadań z książki

Czesław Platt, *Problemy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*  
PWN Warszawa 1978

Grzegorz Wierzchowski

25 kwietnia 2016

# Licencja

©Copyright by Grzegorz M. Wierzchowski 2016.

© Ta publikacja jest udostępniona na licencji “Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International Public License”. Pełna kopia licencji jest dostępna na stronie: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>.

You are free to:

**Share** — copy and redistribute the material in any medium or format.

**Adapt** — remix, transform, and build upon the material for any purpose, even commercially.

The licensor cannot revoke these freedoms as long as you follow the license terms.

Under the following terms:

**Attribution** — You must give appropriate credit, provide a link to the license, and indicate if changes were made. You may do so in any reasonable manner, but not in any way that suggests the licensor endorses you or your use.

**ShareAlike** — If you remix, transform, or build upon the material, you must distribute your contributions under the same license as the original.

**No additional restrictions** — You may not apply legal terms or technological measures that legally restrict others from doing anything the license permits.

Notices:

You do not have to comply with the license for elements of the material in the public domain or where your use is permitted by an applicable exception or limitation. No warranties are given. The license may not give you all of the permissions necessary for your intended use. For example, other rights such as publicity, privacy, or moral rights may limit how you use the material.

# Podziękowania

Niniejsza publikacja została stworzona wyłącznie przy użyciu programów i narzędzi „open source“:

- System składu tekstu  $\text{\LaTeX}$
- Edytor tekstu wyspecjalizowany do pisania w  $\text{\LaTeX}$ : Kile
- Programy graficzne: Inkscape
- Programy obliczeniowe: R, Maxima, Octave
- Interfejs do programów obliczeniowych: Jupyter

Dziękuję autorom, twórcom i współtwórcom tych programów za ich wkład pracy wniesiony w stworzenie i dopracowanie tych narzędzi.

Uwagi to tego dokumentu, znalezione błędy lub sugestie proszę zgłaszać poprzez stronę domową projektu: <https://github.com/gwierzchowski/math-phs> gdzie też należy szukać najnowszej wersji dokumentu.

# Spis treści

I	Zdarzenia Losowe i Prawdopodobieństwo	4
II	Zmienne losowe jednowymiarowe i ich rozkłady	6

# Wstęp

Ten dokument zawiera rozwiązania tylko niektórych (losowo wybranych) zadań z książki wymienionej w tytule. Celem stworzenia tego dokumentu (i zabrania się za te zadania) było odświeżenie sobie wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa, nauka programu R ([1, Wersja 3.0.2]) oraz utrzymanie biegłości w korzystaniu z  $\text{\LaTeX}$  ([2, Wersja TeX Live 2013]). Dlatego gdzie tylko się da starałem się używać R, nawet gdy czasami wygląda to trochę „na siłę”. Przedstawione listingi kodu są przeznaczone dla programu R, chyba że zaznaczono inaczej. Listingi R zakładają, że pewne moduły są ładowane automatycznie przy starcie:

```
> search()
[1] ".GlobalEnv"          "package:stats"      "package:graphics"
[4] "package:grDevices"   "package:utils"      "package:datasets"
[7] "package:methods"     "Autoloads"          "package:base"
```

Przyjęto również konwencję stosowania znaku równości w wypadku zaokrągleń numerycznych, natomiast znaku przybliżonej równości w wypadku gdy jawnie korzystamy z przybliżenia (n.p. z twierdzenia o rozkładzie granicznym).

# Rozdział I

## Zdarzenia Losowe i Prawdopodobieństwo

### 1.1.9

$$(A \cup B)' \quad x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ i } x \notin B \Leftrightarrow x \in A' \text{ i } x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' \quad x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ lub } x \notin B \Leftrightarrow x \in A' \text{ lub } x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cup B'$$

### 1.1.47

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

Żeby wykazać tą równość udowodnimy najpierw lemat pomocniczy.

**Lemat.**

$$\forall_{n>1} \forall_{m<n} \quad \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$$

*Dowód.* Zakładamy, że mamy jakieś ustalone  $n > 1$ , przeprowadzimy dowód indukcyjny względem  $m$ .

$$m = 1) \quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 1 - n = (-1)^{-1} \binom{n-1}{1}.$$

**Krok indukcyjny)** Zakładamy, że równość jest spełniona dla pewnego  $m < n - 1$  i przechodzimy do  $m + 1$ . Korzystamy z założenia indukcyjnego oraz z własności:  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} + (-1)^{m+1} \binom{n}{m+1} \\ &= (-1)^m \binom{n-1}{m} + (-1)^{m+1} \left( \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m+1} \right) \\ &= (-1)^{m+1} \left( \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m+1} - \binom{n-1}{m} \right) \\ &= (-1)^{m+1} \binom{n-1}{m+1} \end{aligned}$$

□

Teraz przechodzimy do właściwej równości.

**$n$  nieparzyste)** Korzystamy z naszego lematu przyjmując za  $m = n - 1$ . Zauważmy, że  $n - 1$  jest parzyste.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} + (-1)^n \binom{n}{n} \\ &= (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} + (-1)^n \cdot 1 \\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

**$n$  parzyste)** Podobnie jak poprzednio, tylko tu  $n - 1$  jest nieparzyste.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} + (-1)^n \binom{n}{n} \\ &= (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} + (-1)^n \cdot 1 \\ &= -1 + 1 = 0\end{aligned}$$

## Rozdział II

# Zmienne losowe jednowymiarowe i ich rozkłady

### 2.1.4

Tekst sesji programu R obliczającego zadane wielkości:

```
In [1]: jaj <- 0:5;
In [2]: kur <- c(6,8,5,19,4,0);
In [3]: skur <- sum(kur);
In [4]: pkur <- kur / skur;
In [5]: lkur <- length(kur);
```

Rozkład prawdopodobieństwa:

```
In [6]: print(pkur)
[1] 0.1428571 0.1904762 0.1190476 0.4523810 0.0952381 0.0000000
In [7]: kumul <- 0;
In [8]: distkur <- rep(0, lkur);
In [9]: for (i in 1:lkur) {
      kumul <- kumul + pkur[i]
      distkur[i] <- kumul
    };
```

Dystrubuanty:

```
In [10]: print(distkur)
[1] 0.1428571 0.3333333 0.4523810 0.9047619 1.0000000 1.0000000
In [11]: sr <- sum(jaj*pkur)
```

Średnia:

```
In [12]: print(sr)
[1] 2.166667
In [13]: sig <- sqrt(sum((jaj-sr)^2*pkur))
```

Odchylenie standardowe:

```
In [14]: print(sig)
[1] 1.251983
```

Ponadto: mediana (na podstawie dystrybuanty)  $m_e = 3$ , modalna  $m_o = 3$ .

### 2.1.7

Ze wzorów na miary rozkładu wielomianowego:

$$m = np = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.89$$

Krótki program w R w celu obliczenia modalnej:

```
In [1]: 2/sqrt(5)
Out[1]: 0.894427190999916
In [3]: d <- dbinom(0:5, 5, 0.2)
In [4]: Max <- max(d)
In [12]: for (i in 0:5) {
          if (d[i+1] == Max) {
            print('Modalna: '); print(i); break
          }
        }
[1] "Modalna: "
[1] 1
```

### 2.1.11

Hipotetyczny rozkład prawdopodobieństwa (dla  $n = 1, 2, \dots$ ):

$$f(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$$

Dystrybuenta (dla  $m > 1$ ):

$$F(m) = f(1) + f(2) + \dots + f(m-1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{m}$$

Ostatnią równość można łatwo wykazać przez indukcję. Zatem:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} f(n) = \lim_{m \rightarrow \infty} F(m) = 1$$

Czyli  $f$  prawidłowo opisuje rozkład prawdopodobieństwa.

$$F(3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad F(4) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

### 2.1.12

Hipotetyczna wartość średnia:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} n f(n) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = -1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Dla każdego  $n > 1$  mamy następujące oszacowanie:  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ . Zatem szereg  $\sum \frac{1}{n}$  nie spełnia warunku Cauchy'ego, co jest równoważne<sup>1</sup> z tym że jest rozbieżny. A więc średnia nie istnieje, zatem nie istnieje też wariancja.

### 2.1.13

Przyjmujemy, że trafienia poszczególnych strzelców do tarczy są od siebie niezależne.

Wyliczenie rozkładu w programie R:

```
In [2]: p1 <- 0.6; p2 <- 0.7; p3 <- 0.8
In [4]: p <- numeric()

p(0 trafień):
In [8]: p[1] <- (1-p1)*(1-p2)*(1-p3); p[1]
Out[8]: 0.024

p(1 trafień):
```

---

<sup>1</sup>Dokładny dowód można znaleźć w każdym podręczniku Analizy Matematycznej — n.p. [3, §23. Szeregi, punkt 2.]



```

In [9]: p[2] <- p1*(1-p2)*(1-p3) + (1-p1)*p2*(1-p3) + (1-p1)*(1-p2)*p3; p[2]
Out[9]: 0.188
p(2 trafień):
In [10]: p[3] <- p1*p2*(1-p3) + (1-p1)*p2*p3 + p1*(1-p2)*p3; p[3]
Out[10]: 0.452
p(3 trafień):
In [11]: p[4] <- p1*p2*p3; p[4]
Out[11]: 0.336
Test:
In [12]: sum(p)
Out[12]: 1

```

## 2.1.17

Rozpatrujemy rozkład geometryczny o funkcji gęstości:

$$p(\xi = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots, \quad p + q = 1$$

Zanim przejdziemy do obliczenia miar tego rozkładu wyprowadzimy potrzebne wzory na sumy szeregów. Z równości:  $(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = 1 - q^n$  wynika znany w matematyce szkolnej wzór:  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$  prawdziwy dla  $|q| < 1$ . Różniczkując to równanie dostajemy <sup>2</sup>:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad (*)$$

dla  $|q| < 1$  pod warunkiem, że szereg po lewej stronie jest zbieżny. A jest on zbieżny na podstawie kryterium d'Alemberta[4, T.2, akapit 368.] lub [5]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{n}q = q < 1$$

Powtórnie różniczkując (\*) dostajemy <sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} &= \frac{2}{(1-q)^3} \\
\sum_{n=2}^{\infty} n^2q^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} nq^{n-2} &= \frac{2}{(1-q)^3} \\
\sum_{n=2}^{\infty} n^2q^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} nq^{n-1} &= \frac{2q}{(1-q)^3} \\
1^2q^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n^2q^{n-1} - (1q^0 + \sum_{n=2}^{\infty} nq^{n-1}) &= \frac{2q}{(1-q)^3} \\
\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} &= \frac{2q}{(1-q)^3} \\
\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^{n-1} &= \frac{2q}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{2q + (1-q)}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{(1-q)^3} \quad (**)
\end{aligned}$$

Sprawdzenie wyników przy pomocy programu Maxima ([6, Wersja 5.32.1]):

```

(%i1) A1(q,n):=sum(i*q^(i-1),i,1,n);
(%o1) A1(q,n):= \sum_{i=1}^n i q^{i-1}

```

<sup>2</sup>Ten sam wynik możemy otrzymać mnożąc przez siebie sposobem Cauchy'ego (patrz [4, T.2, akapit 389.]) szereg  $\sum q^n$ .

<sup>3</sup>Ten sam wynik możemy otrzymać mnożąc sposobem Cauchy'ego szereg  $\sum q^n$  przez  $\sum nq^{n-1}$ .

```
(%i2) B1(q):=1/(1-q)^2;
(%o2) B1(q):= 1
(1-q)^2
(%i3) probb:makelist(i,i,0.1,0.9,0.1);
(%o3) [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.7999999999999999, 0.8999999999999999]

(%i4) A1probb:A1(probb,200)$
(%i5) B1probb:B1(probb)$
(%i7) lmax(abs(A1probb-B1probb));
(%o7) 1.481566528127587 10^-6

(%i8) A2(q,n):=sum(i^2*q^(i-1),i,1,n);
(%o8) A2(q,n):= \sum_{i=1}^n i^2 q^{i-1}

(%i15) B2(q):=(1+q)/(1-q)^3;
(%o15) B2(q):= \frac{1+q}{(1-q)^3}

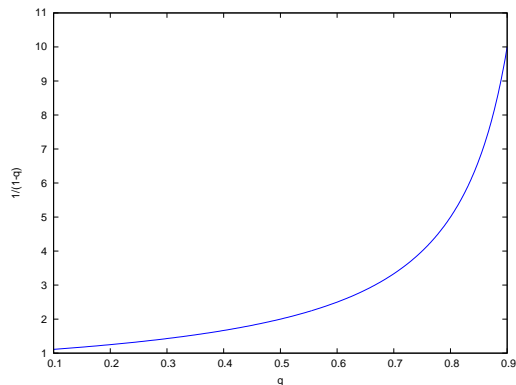
(%i16) A2probb:A2(probb,200)$
(%i17) B2probb:B2(probb)$
(%i18) lmax(abs(A2probb-B2probb));
(%o18) 3.1176394645626715 10^-4
```

Zatem szukane miary rozkładu geometrycznego wynoszą:

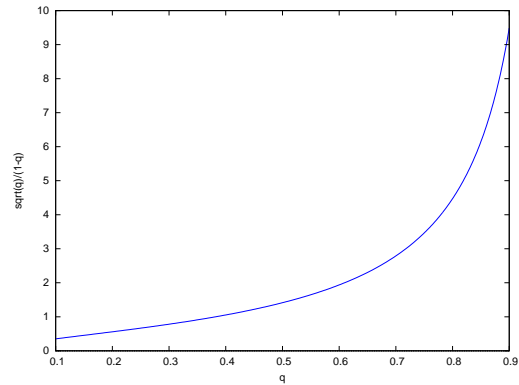
$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

$$D^2(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p - \left( \frac{1}{1-q} \right)^2 = \frac{(1+q)(1-q)}{(1-q)^3} - \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Wykresy:



Wartość oczekiwana



Odchylenie standardowe

## 2.1.23

Opisana sytuacja podpada pod schemat Bernoullego opisany rozkładem:

$$p(k \text{ kul czarnych}) = \binom{4}{k} p^k q^{4-k}$$

gdzie  $p = \frac{1}{3}$  - prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej,  $q = \frac{2}{3}$  - prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

Listing R:

```
In [1]: p <- dbinom(0:4, 4, 1/3)
a)  $p(0) = \binom{4}{0} 0.33^0 0.66^4$ 
```

```

In [2]: print(p[1])
[1] 0.1975309
b)  $p(1) = \binom{4}{1} 0.33^1 0.66^3$ 
In [3]: print(p[2])
[1] 0.3950617
c)  $p(2) = \binom{4}{2} 0.33^2 0.66^2$ 
In [4]: print(p[3])
[1] 0.2962963
d)  $p(3) = \binom{4}{3} 0.33^3 0.66^1$ 
In [5]: print(p[4])
[1] 0.09876543
e)  $p(4) = \binom{4}{4} 0.33^4 0.66^0$ 
In [6]: print(p[5])
[1] 0.01234568

```

### 2.1.26

Opisana sytuacja podpada pod schemat Bernoullego z prawdopodobieństwem sukcesu w postaci wylosowania asa  $p = \frac{1}{13}$ . Przy 20-tu próbach wartość oczekiwana liczby wylosowanych asów wynosi:  $m = \frac{20}{13} \approx 1.53846$ . Zatem podejrzewamy że najbardziej prawdopodobną wartością będzie albo 1 albo 2, ale trzeba to policzyć:

```

In [2]: d <- dbinom(0:20, 20, 1/13)
In [3]: Max <- max(d)
In [4]: for (i in 0:20) {
      if (d[i+1] == Max) {
        print('Modalna: '); print (i); break
      }
    }
[1] "Modalna: "
[1] 1
In [5]: d[1:5]
Out[5]:
1. 0.201724141011762
2. 0.336206901686269
3. 0.266163797168297
4. 0.133081898584148
5. 0.0471331724152192

```

Uwaga: Gdybyśmy to mieli w praktyce liczyć ręcznie, to wystarczy liczyć do momentu aż prawdopodobieństwo zacznie się zmniejszać, ponieważ funkcja gęstości prawdopodobieństwa w rozkładzie dwumianowym ma tylko jedno lokalne maksimum.

### 2.1.31

Skorzystamy z rozkładu Poissona przyjmując  $\lambda = np = 10000 \cdot 0.005 = 50$ .

$$P(\xi = 55) = \frac{50^{55}}{55!} e^{-50} \approx 0.042$$

```

In [1]: dpois(55, 50)
Out[1]: 0.0421643521851174

```

### 2.2.3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} x \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Najpierw sprawdzimy, że funkcja spełnia warunki gęstości prawdopodobieństwa. Całkując przez części ( $-\cos' x = \sin x$ ):

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \sin x - x \cos x + C$$

Zatem

$$\int_0^\pi \frac{1}{\pi} x \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} (\sin \pi - \pi \cos \pi - \sin 0) = \frac{1}{\pi} \pi = 1$$

Dystrybuanta:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x t \sin t \, dt = \frac{1}{\pi} (\sin t - t \cos t)|_0^x = \frac{1}{\pi} (\sin x - x \cos x)$$

Aby obliczyć wartość oczekiwaną, obliczmy całkę, całkując dwukrotnie przez części ( $\sin' x = \cos x$ ):

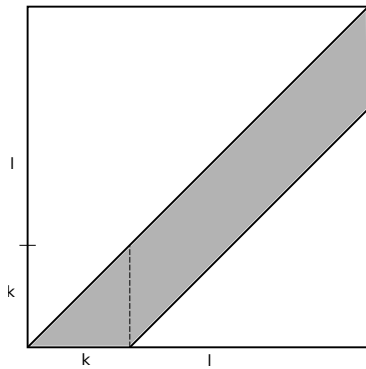
$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x = 2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + C$$

Wartość oczekiwana:

$$E\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} (-2 + \pi^2 - 2) = \pi - \frac{4}{\pi}$$

### 2.2.5

Opisany w zadaniu wybór dwóch punktów na odcinku możemy potraktować jako ciąg dwu niezależnych zdarzeń. (każde opisane rozkładem jednostajnym) i przedstawić na rysunku jako losowy wybór punktu w kwadracie  $l \times l$ . Ze względu na symetrię (kolejność punktów nie ma znaczenia) naszą przestrzeń możemy ograniczyć do dolnej połówki kwadratu — poniżej przekątnej. Przyjmujemy  $0 \leq k \leq l$ .



Dystrybuanta:

$$\begin{aligned} P(\xi < k) = F(k) &= \frac{\frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{2}(l-k)^2}{\frac{1}{2}l^2} = 1 - \frac{l^2 - 2lk + k^2}{l^2} \\ &= 1 - (1 - \frac{2}{l}k + \frac{1}{l^2}k^2) = -\frac{1}{l^2}k^2 + \frac{2}{l}k \end{aligned}$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(k) = F'(k) = \frac{2}{l} - \frac{2}{l^2}k$$

Wartość oczekiwana:

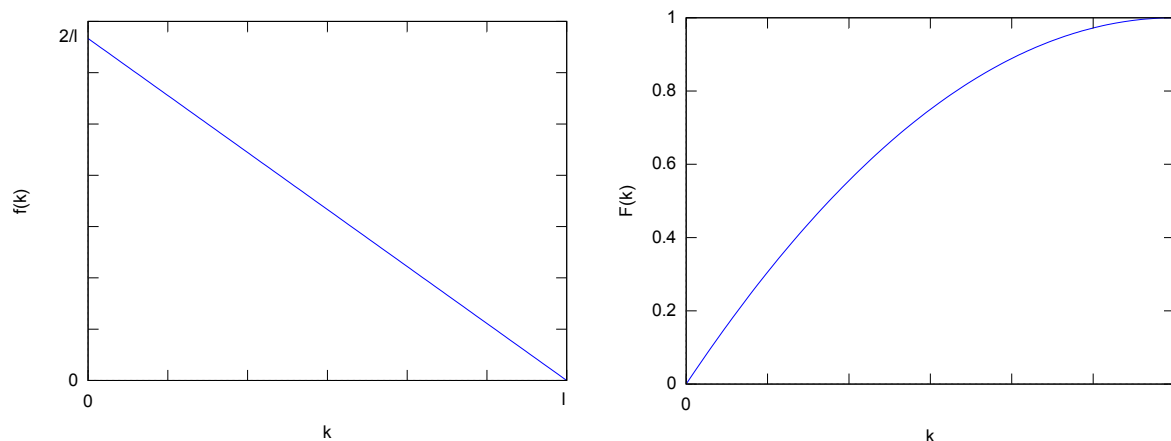
$$E\xi = \int_0^l k f(k) \, dk = \int_0^l \frac{2}{l} k \, dk - \int_0^l \frac{2}{l^2} k^2 \, dk = \frac{2}{l} \cdot \frac{1}{2} l^2 - \frac{2}{l^2} \cdot \frac{1}{3} l^3 = l - \frac{2}{3} l = \frac{1}{3} l$$

Rozwiązując równanie kwadratowe:  $F(k) = -\frac{1}{l^2}k^2 + \frac{2}{l}k = \frac{1}{2}$  względem  $k$  otrzymamy medianę:

$$m_e = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})l \approx 0.2929 \cdot l$$

Eksperyment z losowaniem dwóch punktów na odcinku o długości 1:

```
In [82]: ran <- runif(1000)
In [83]: pointa <- runif(2000,1,1001)
In [84]: pointb <- runif(2000,1,1001)
In [85]: d <- abs(ran[floor(pointa)]-ran[floor(pointb)])
In [86]: print(mean(d))
[1] 0.3321274
In [118]: hist(d,50)
```

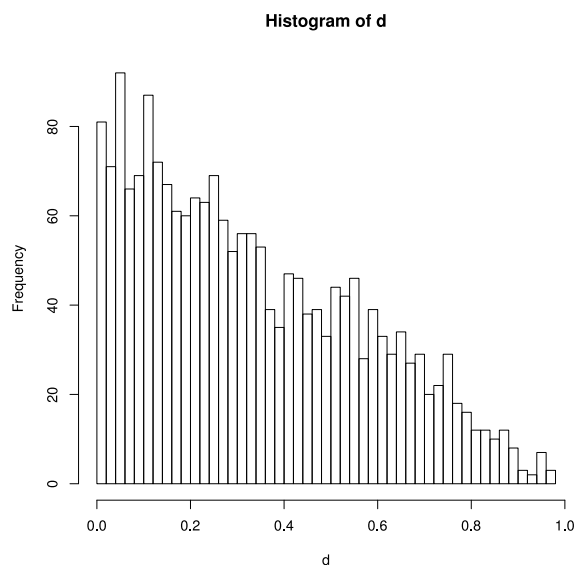


(a) Gęstość prawdopodobieństwa

(b) Dystrybuanta

Rysunek II.1: Rozkład odległości między losowo wybranymi punktami na odcinku długości  $l$

Wielokrotne wykonanie tego skryptu daje podobne wyniki, które są bardziej zbliżone do teoretycznie wyliczonej wartości oczekiwanej niż do mediany. Natomiast zastąpienie w powyższym skrypcie wywołania `mean` przez `median` daje wyniki bardziej zbliżone do mediany. Zatem dobrą miarą przybliżającą wartość oczekiwaną jest średnia natomiast medianę mediany. Natomiast patrząc na histogram, który zgodnie z oczekiwaniami jest zbliżony do kształtu funkcji gęstości możemy powiedzieć, że najczęściej występujące wartości odległości między punktami mieszczą się w przedziale  $[0.0, 2.6]$ .



Rysunek II.2: Histogram z eksperymentu

## 2.2.11

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

**$f(x) \leq 1$**  Rozwijając  $e^x$  w szereg Taylora (patrz [3, §28. Pochodne wyższych rzędów ..., punkt 4.] lub [7]) mamy:

$$x \leq e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

a zatem  $xe^{-x} \leq 1$  dla  $x \geq 0$ .

**$F(+\infty) = 1$**  Całkując przez części ( $(e^{-x})' = -e^{-x}$ ):

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C$$

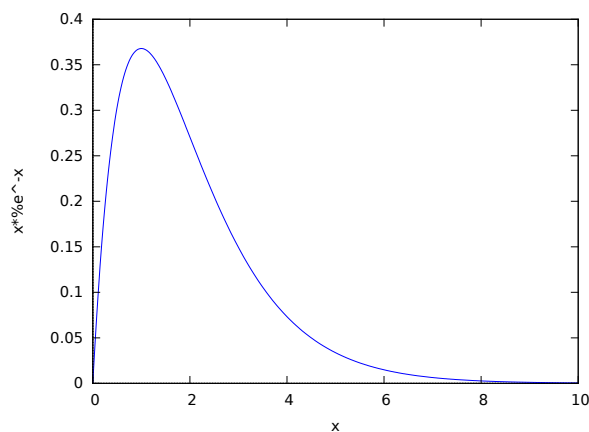
Dystrybuanta:

$$F(n) = \int_0^n xe^{-x} dx = -(n+1)e^{-n} + 1 = 1 - ne^{-n} - e^{-n}$$

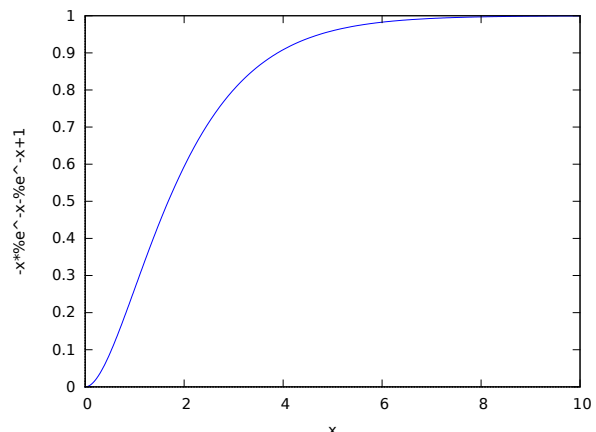
Aby wykazać, że  $a_n = ne^{-n} \rightarrow 0$  rozważmy stosunek kolejnych wyrazów tego ciągu:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)e^{-(n+1)}}{ne^{-n}} = \frac{n+1}{n} \frac{e^n}{e^{n+1}} = \frac{n+1}{n} \frac{1}{e} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

zatem od pewnego  $n$  dla wszystkich następnych ten stosunek jest mniejszy od 1, zatem  $a_n$  jest malejący i ograniczony od dołu przez 0 a zatem zbieżny. Jeżeli teraz mielibyśmy  $\lim a_n = a > 0$  to jest to sprzeczne z tym, że  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , bo  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim a_{n+1}}{\lim a_n} = 1$ . Zatem musi być  $\lim a_n = 0$ . Czyli  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = 1$  co było do pokazania.



(a) Gęstość prawdopodobieństwa



(b) Dystrybuanta

Rysunek II.3: Wykresy dotyczące rozkładu rozpatrywanego w zadaniu 2.2.11

**Porównanie z rozkładem  $\chi^2$**  Zauważmy, że dla  $p = 2$  wartość funkcji Gamma wynosi:

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty xe^{-x} dx = 1$$

Zatem dla  $x > 0$  i  $n = 4$  funkcja gęstości rozkładu  $\chi^2$  wynosi:

$$k_4(x) = \frac{1}{2^2 \Gamma(2)} e^{-\frac{1}{2}x} x^{2-1} = \frac{x}{4} e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

### 2.3.5

Z warunków zadania mamy:  $p = 0.01$ ,  $q = 0.99$ ,  $n = 1000$ ,  $np = 10$ ,  $\sqrt{npq} = \sqrt{9.9} = 3.146$ .

Korzystamy z Twierdzenia integralnego Laplace'a (akapit 2.3.4 w książce) <sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} P(\xi_{1000} \geq 15) &= 1 - P(0 \leq \xi_{1000} < 15) = 1 - P(-10 \leq \xi_{1000} - 10 < 5) = 1 - P\left(-\frac{10}{\sqrt{9.9}} \leq \frac{\xi_{1000} - 10}{\sqrt{9.9}} < \frac{5}{\sqrt{9.9}}\right) = \\ &= 1 - P\left(-3.178 \leq \frac{\xi_{1000} - 10}{\sqrt{9.9}} < 1.589\right) \approx 1 - F(1.589) + F(-3.178) = 1 - 0.94408 + (1 - 0.99926) = 0.05666 \end{aligned}$$

W programie R można to obliczyć jednym wyrażeniem:

```
In [1]: 1-pnorm(15,10,sqrt(9.9))+pnorm(0,10,sqrt(9.9))
Out[1]: 0.056759362230142
```

<sup>4</sup>Uwaga: W odpowiedziach do zadań jest podane prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

### 2.3.11

Z warunków zadania mamy:

$$p = 0.2, q = 0.8, n = 10000, np = 2000, \sqrt{npq} = \sqrt{1600} = 40, \epsilon = 0.4\% = 0.004$$

Korzystamy ze wzoru (2.3.4) - str 69. w książce:

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| < \epsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\epsilon n}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0.3413 = 0.6826$$

### 2.4.3

Oznaczmy przez  $p$  prawdopodobieństwo wylosowania przedmiotu pierwszego gatunku, przez  $q$  drugiego, a przez  $r$  wadliwego.

$$p = 0.4, \quad q = 0.55, \quad r = 0.05$$

Zakładamy, że ilość przedmiotów w magazynie jest na tyle duża, że pobranie próby pięciu rzeczy można traktować jako zdarzenia niezależne, czyli tak jakbyśmy te przedmioty pobierali ze zwracaniem. Wtedy rozkład prawdopodobieństwa obliczymy ze wzoru:

$$P(j \text{ przedmiotów pierwszego gatunku, } i \text{ przedmiotów drugiego gatunku}) = p^j \binom{5}{i} q^i \binom{5-i}{5-j-i} r^{5-j-i}$$

dla  $j + i \leq 5$  i zero w pozostałych przypadkach.

Obliczenie parametrów rozkładu:

```
In [2]: p<-40/100; q<-55/100; r<-5/100
In [6]: prob<- matrix(0,6,6)
In [19]: for (i in 1:6) {
          for (j in 1:6) {
            if (5-j-i+2 >= 0)
              prob[i,j]<-p^(j-1)*choose(5,i-1)*q^(i-1)*choose(5-i+1,5-j-i+2)*r^(5-j-i+2)
            else
              prob[i,j]<-0
          }
        }
```

Rozkład zmiennej dwuwymiarowej. W rzędach dla stałej liczby wylosowanych przedmiotów drugiego gatunku. W kolumnach dla stałej liczby wylosowanych przedmiotów pierwszego gatunku.

```
In [20]: print(prob)
[,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]
[1,] 0.0000003125 0.0000125 0.0002 0.0016 0.0064 0.01024
[2,] 0.0000171875 0.0005500 0.0066 0.0352 0.0704 0.00000
[3,] 0.0003781250 0.0090750 0.0726 0.1936 0.0000 0.00000
[4,] 0.0041593750 0.0665500 0.2662 0.0000 0.0000 0.00000
[5,] 0.0228765625 0.1830125 0.0000 0.0000 0.0000 0.00000
[6,] 0.0503284375 0.0000000 0.0000 0.0000 0.0000 0.00000
```

```
In [22]: sum(prob) #kontrola
```

```
Out [22]: 1
```

```
In [23]: prob1<-prob2<-array(0,6)
```

```
In [24]: for (i in 1:6) prob1[i]<-sum(prob[,i])
```

```
In [25]: for (i in 1:6) prob2[i]<-sum(prob[i,])
```

Rozkład brzegowy liczby wylosowanych przedmiotów pierwszego gatunku.

```
In [26]: print(prob1)
```

```
[1] 0.07776 0.25920 0.34560 0.23040 0.07680 0.01024
```

Rozkład brzegowy liczby wylosowanych przedmiotów drugiego gatunku.

```

In [27]: print(prob2)
[1] 0.01845281 0.11276719 0.27565313 0.33690938 0.20588906 0.05032844
In [31]: m01<-5*p; m01 #średnia pierwszego gatunku
Out[31]: 2
In [32]: m10<-5*q; m10 #średnia drugiego gatunku
Out[32]: 2.75
In [33]: mi02<-5*p*(q+r); mi02 #wariancja pierwszego gatunku
Out[33]: 1.2
In [35]: mi20<-5*q*(p+r); mi20 #wariancja drugiego gatunku
Out[35]: 1.2375
Obliczenie momentu mieszanego
In [37]: m11<-0;
        for (i in 1:6) {
            for (j in 1:6) m11 <- m11 + (j-1)*(i-1)*prob[i,j]
        }
In [38]: mi11 <- m11 - m01*m10; mi11 #kowariancja
Out[38]: -1.1
In [39]: ro <- mi11/sqrt(mi02*mi20); ro #współczynnik korelacji
Out[39]: -0.902670933848438

```

#### 2.4.4

Zmienna  $\xi$  ma rozkład opisany funkcją stałą:  $f(x) = \frac{1}{2}$  dla  $x \in (0, 2)$  i zero poza tym. Podobnie zmienna  $\eta$  ma rozkład  $g(x) = \frac{1}{3}$  dla  $x \in (-2, 1)$  i zero poza tym. Zmienne te jako, że mają rozkłady jednostajne, są od siebie niezależne, zatem rozkład łączny jest opisany:  $f(x, y) = f(x)g(y) = \frac{1}{6}$  dla  $(x, y) \in (0, 2) \times (-2, 1)$  oraz zero poza tym.

Dystrybuenta:

$$F(x, y) = \int_0^x \int_{-2}^y \frac{1}{6} dx dy = \frac{1}{6}x(y+2)$$

dla  $(x, y) \in (0, 2) \times (-2, 1)$  oraz 1 dla  $x \geq 2$  i  $y \geq 1$  oraz 0 w pozostałych przypadkach.

#### 2.4.9

Mamy funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu dwuwymiarowego określoną na całej płaszczyźnie  $XY$ :

$$f(x, y) = \frac{c}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

a) W celu dobrania  $c$  musimy obliczyć całkę (pole pod wykresem) z tej funkcji. W tym obliczeniu wykorzystamy symetrię wykresu funkcji względem osi  $z$ , czyli to, że w jednakowych odległościach od osi  $z$  funkcja przyjmuje jednakowe wartości. Czyli, że przecięciami wykresu płaszczyznami prostopadłymi do osi  $z$  są okręgi o środku leżącym na  $z$ . Całkowanie po  $xy$  zastąpimy całkowaniem po promieniach tych okręgów  $r$  z przemnożeniem wartości funkcji przez obwód okręgu  $2\pi r$ . W obliczeniu wykorzystamy też metodę całkowania przez podstawienie.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1 + (x^2 + y^2)^2} dx dy = c \int_0^{\infty} \frac{2\pi r}{1 + r^4} dr = c \int_0^{\infty} \frac{\pi}{1 + r^4} dr^2 = \\ &= c \int_0^{\infty} \frac{\pi}{1 + t^2} dt = \pi c (\arctan t) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi^2}{2} c \end{aligned}$$

Zatem  $c = \frac{2}{\pi^2}$ .

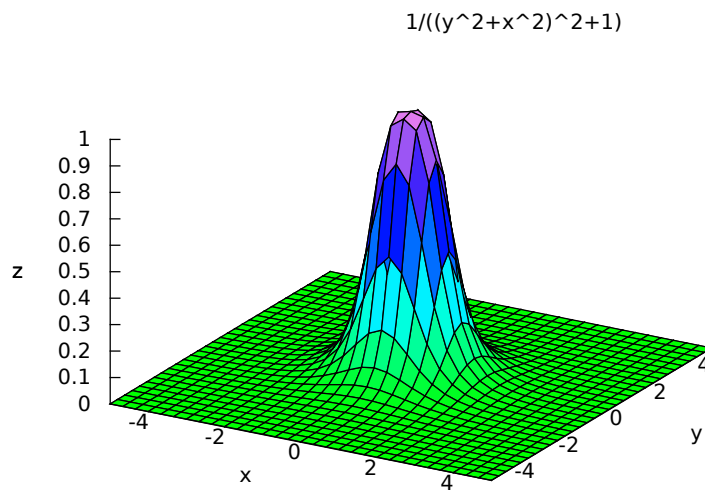
Obliczenie próbowałem zweryfikować licząc całkę numerycznie przy pomocy programu Octave ([8]). Jak jednak widać w poniższym listingu, obliczania są bardzo wrażliwe na błędy numeryczne oraz zastosowany algorytm.



```

In [1]: pi^2/2
ans = 4.9348
In [2]: dblquad(@(x,y) 1/(1+(x.^2+y.^2).^2), -10,10,-10,10)
ans = 6.1674e-04
In [3]: dblquad(@(x,y) 1/(1+(x.^2+y.^2).^2), -5,5,-5,5)
ans = 0.0024708
In [4]: dblquad(@(x,y) 1/(1+(x.^2+y.^2).^2), -4,4,-4,4)
ans = 0.0038697
In [5]: dblquad(@(x,y) 1/(1+(x.^2+y.^2).^2), -4,4,-4,4, :, 'quadv')
ans = 4.7743
In [6]: dblquad(@(x,y) 1/(1+(x.^2+y.^2).^2), -5,5,-5,5, :, 'quadv')
ans = 4.8320
In [7]: dblquad(@(x,y) 1/(1+(x.^2+y.^2).^2), -10,10,-10,10, :, 'quadv')
ans = 4.9091

```



Rysunek II.4: Funkcja gęstości rozkładu z zadania

b) Wykorzystując podobne rozumowanie jak w punkcie a) mamy:

$$p = \frac{2}{\pi} \int_0^R \frac{2r}{1+r^4} dr = \frac{2}{\pi} \int_0^{R^2} \frac{1}{1+r^4} dr^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{R^2} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{2}{\pi} \arctg R^2$$

Stąd:  $R = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} p}$ .

#### 2.4.14

Mamy macierz kowariancji:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$|M| = 5$ .  $\rho_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ , a zatem zmienne nie są niezależne.

$$A = M^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \quad |A| = 1$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{2}{5}(x-2)^2 - \frac{2}{5}(x-2)(y-1) + \frac{3}{5}(y-1)^2 \right) \right) =$$

$$\frac{1}{2\pi^2} \exp \left( -\frac{1}{5} \left( (x-2)^2 - (x-2)(y-1) + \frac{3}{2}(y-1)^2 \right) \right)$$

### 2.4.15

Mamy funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu dwuwymiarowego określoną na całej płaszczyźnie  $XY$ :

$$f(x, y) = c \exp \left( -\frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2) \right)$$

Ze wzoru (2.4.26) w książce wnioskujemy, że jest to rozkład normalny o macierzy  $A$  odwrotnej do macierzy kowariancji:  $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ .

a)

$$c = \frac{\sqrt{|A|}}{(\sqrt{2\pi})^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

b)

$$M = A^{-1} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

### 2.4.16

Rozważamy obrót układu współrzędnych o kąt  $+45^\circ$ . Przy konwersji współrzędnych skorzystamy ze znanych, elementarnych tożsamości trygonometrycznych (patrz [9]) w szczególności z:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

Przejdźcie do nowego układu współrzędnych w układzie biegunowym możemy opisać równaniami:

$$\begin{cases} r' = r \\ \phi' = \phi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Przechodząc do układu kartezjańskiego:

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \\ \frac{y'}{r'} = \sin \phi' = \sin(\phi - \frac{\pi}{4}) = \sin \phi \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos \phi \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin \phi - \cos \phi) = \frac{1}{r\sqrt{2}}(y - x) \end{cases}$$

Korzystając z tego, że  $r' = r$  mamy:

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x) \end{cases}$$

Podnosząc drugie równanie do kwadratu i wykorzystując pierwsze mamy:

$$\begin{aligned} 2y'^2 &= (y - x)^2 = y^2 - 2xy + x^2 \\ 2y'^2 &= y'^2 - 2xy + x'^2 \\ xy &= \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) \end{aligned}$$

Podstawiając to do wzoru na funkcję gęstości z poprzedniego zadania:

$$f(x', y') = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \exp \left( -\frac{1}{2}(x'^2 - \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) + y'^2) \right) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \exp \left( -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2) \right)$$

co zgodnie ze wzorem (2.4.25) z książki opisuje dwuwymiarowy rozkład normalny ze współczynnikiem korelacji  $\rho = 0$ .

## 2.4.18

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}} \exp\left(-\frac{1}{230}(39x^2 + 36y^2 + 26z^2 - 44xy + 36xz - 38yz)\right)$$

Zgodnie ze wzorem (2.4.26) w książce określamy macierz:

$$A = \frac{1}{115} \begin{bmatrix} 39 & -22 & 18 \\ -22 & 36 & -19 \\ 18 & -19 & 26 \end{bmatrix}$$

Macierz kowariancji jest macierzą odwrotną do tej macierzy. Rachunki przeprowadzamy w R.

```
In [11]: A <- matrix(c(39,-22,18, -22,36,-19, 18,-19,26), nrow=3, ncol=3, byrow=TRUE)
In [12]: A
Out[12]:
  39  -22  18
 -22  36 -19
  18 -19  26
In [13]: ma <- det(A); ma
Out[13]: 13225
In [17]: ma/(115)^3 #wyznacznik A
Out[17]: 0.00869565217391303
In [18]: 1/115 #kontrola czynnika
Out[18]: 0.00869565217391304
In [20]: M <- solve(A); M*115 #macierz kowariancji
Out[20]:
  5  2 -2
  2  6  3
 -2  3  8
```

# Bibliografia

- [1] R Core Team (2013). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <http://www.R-project.org/>.
- [2] L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X— a high-quality typesetting system. <https://www.latex-project.org/>.
- [3] Witold Kołodziej, *Analiza Matematyczna*, PWN Warszawa 2009.
- [4] G.M.Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN Warszawa 1985.
- [5] [https://pl.wikipedia.org/wiki/Kryteria\\_zbie%C5%BCno%C5%9Bci\\_szereg%C3%B3w](https://pl.wikipedia.org/wiki/Kryteria_zbie%C5%BCno%C5%9Bci_szereg%C3%B3w)
- [6] Maxima CAS system. <http://maxima.sourceforge.net>. Distributed under the GNU Public License. Dedicated to the memory of William Schelter. Copyright (C) 1989, 1991 Free Software Foundation, Inc.
- [7] [https://pl.wikipedia.org/wiki/Wz%C3%B3r\\_Taylora](https://pl.wikipedia.org/wiki/Wz%C3%B3r_Taylora)
- [8] GNU Octave is a high-level language, primarily intended for numerical computations. GNU Octave, version 3.8.1 Copyright (C) 2014 John W. Eaton and others. URL <http://www.gnu.org/software/octave/>.
- [9] [https://pl.wikipedia.org/wiki/To%C5%BCsamo%C5%9Bci\\_trygonometryczne](https://pl.wikipedia.org/wiki/To%C5%BCsamo%C5%9Bci_trygonometryczne)