任课教师: 朱洪强 序号: 班级: B200303 学号: B20030327 姓名: [illegible]

《概率论与数理统计》大作业（A） 答题纸

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

第一题（10 分）解答：

(1) $P(X=0)=\dfrac{C_4^2+C_3^2+C_2^2}{C_3^1\cdot C_5^2}=\dfrac{1}{3}$

$P(X=1)=\dfrac{C_4^1+C_2^1\cdot C_3^1+C_3^1C_2^1}{C_3^1\cdot C_5^2}=\dfrac{8}{15}$

$P(X=2)=\dfrac{C_2^2+C_3^2}{C_3^1\cdot C_5^2}=\dfrac{2}{15}$

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

(2) 设事件A为取到1黑1白

事件B为取球来自盒2

$P(A)=P(X=1)=\dfrac{8}{15}$

$P(AB)=\dfrac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_3^1\cdot C_5^2}=\dfrac{1}{5}$

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{3}{8}$

∴ 来自第2个盒子概率为$\frac{3}{8}$

第二题（10 分）解答：

(1) ∵ $X\sim U(0,1)$

∴ $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$F(x)=P\{X=x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

∴ $P\{X>\frac{1}{3}\}=1-P\{X\le\frac{1}{3}\}=\frac{2}{3}$

设事件A为对X进行5次独立观测，直到第5次才第三次观测

∴ $P(A)=C_4^1\cdot(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})^3\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{243}$

(2) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|\ln X|\le y\}$

∵ $Y=|\ln X|\ge 0$

∴ $y\le 0$时，$P_Y(y)=0$

当$y>0$时

$F_Y(y)=P\{-y\le \ln X\le y\}=P\{e^{-y}\le X\le e^{y}\}=F_X(e^y)-F_X(e^{-y})$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=e^y f_X(e^y)+e^{-y}f_X(e^{-y})$

∵ $y>0$

∴ $e^y>1$, $0<e^{-y}<1$

又∵ $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

∴ $f_Y(y)=e^{-y}$

综上

$Y=|\ln X|$的概率密度函数为

$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

任课教师: 朱洪强　序号: ____　班级: B200303　学号: B20030327　姓名: [illegible]

第三题（10分）解答：

(1) $\because f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$\therefore f(x,y) = f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x) = \begin{cases} 12y^2, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(2) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$= \int_y^1 12y^2\,dx = 12y^2x\Big|_y^1 = 12y^2(1-y)$, $0<y<1$

综上, $f_Y(y) = \begin{cases} 12y^2(1-y), & 0<y<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(3) $1>x>2y>0$

$\therefore y<\frac{1}{2}$

$\therefore P(x>2y) = \iint\limits_{x>2y} f(x,y)\,dx\,dy$

$= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} 12y^2\,dy = \int_0^1 4y^3\Big|_0^{\frac{x}{2}} dx$

$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{1}{8}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$

$\therefore P(x>2y) = \frac{1}{8}$

第四题（10分）解答：

$\because U=\max(X,Y)$, $V=\min(X,Y)$

$P(U=1, V=1) = P(X=1, Y=1) = \frac{4}{9}$

$P(U=2, V=1) = P(X=2, Y=1) + P(X=1, Y=2) = \frac{4}{9}$

$P(U=2, V=2) = P(X=2, Y=2) = \frac{1}{9}$

$P(U=1, V=2) = 0$

V \ U	1	2	$P_{i\cdot}$
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	1

$P(U=1) = \frac{4}{9}$

$P(U=2) = \frac{5}{9}$

$P(V=1) = \frac{8}{9}$

$P(V=2) = \frac{1}{9}$

$\because P(V=2)\cdot P(U=2) \neq \frac{1}{9}$

$\therefore$ U与V不独立

第五题（10分）解答：

(1) $L(\lambda)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i}, & x_i>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

$\ln L(\lambda) = n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

$\therefore \lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$

∴最大似然估计 $\hat{\lambda}_L = \frac{1}{\bar{x}}$

(2) ∵X服从参数为λ的指数分布

又 $x_1 \cdots x_n$ 独立同分布

$E(x_i)=E(x)=\frac{1}{\lambda}$

由辛钦大数定律

∴对任意 $\varepsilon>0$

$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\lambda}|<\varepsilon\}=1$

$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{\hat{\lambda}}-\frac{1}{\lambda}|<\varepsilon\}=1$

$=\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\hat{\lambda}\lambda}|<\varepsilon\}=1$ ∴ $\hat{\lambda}$ 为λ的相合估计

第六题（10分）解答：

(1) ∵ $x \sim N(0,\sigma^2)$

∴ $E(x_n)=0$

$D(x_n)=\sigma^2$

$E(\bar{x})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i)=0$

$D(\bar{x})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(x_i)=\frac{\sigma^2}{n}$

由性质得

$E(Y_1)=E(x_1-2\bar{x})$

$=E(x_1)-2E(\bar{x})=0$

$E(Y_2)=E(x_n-2\bar{x})=0$

$Cov(Y_1,Y_2)=Cov(x_1-2\bar{x}, x_n-2\bar{x})$

原式 $=Cov(x_1,x_n)-2Cov(\bar{x},x_n)-2Cov(x_1,\bar{x})+4Cov(\bar{x},\bar{x})$

∵ $x_1 \cdots x_n$ 独立

$Cov(\bar{x},\bar{x})=D(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$

∴ $Cov(x_i,x_j)=0$ ($i\neq j$ 且 $1<i,j<n$)

$Cov(\bar{x}, x_n)=Cov(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, x_n)=\frac{1}{n}Cov(\sum_{i=1}^{n} x_i, x_n)$

$=\frac{1}{n}D(X_n)=\frac{\sigma^2}{n}$

$Cov(x_1,\bar{x})=\frac{1}{n}D(x_1)=\frac{\sigma^2}{n}$

$Cov(Y_1,Y_2)=0$

∴ $\rho_{Y_1Y_2}=0$

∴不相关

又∵若 x_1 变化则 $\bar{x}$ 变化，Y_2 变化

$\bar{x}$ 变化，则 Y_2 变化

Y_1 同理

∴ Y_1 与 Y_2 有关，∴并不独立

第七题（10分）解答：

(1) $\mu_1 = E(x) = -1\cdot\frac{1-\theta}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1+\theta}{4}$

$= \frac{\theta}{2}$

$\theta = 2\mu_1$

∴矩估计量 $\hat{\theta}_{矩} = 2A_1 = 2\bar{x}$

若已知样本 $x_1=1, x_2=1, x_3=0, x_4=-1$

∴ $\bar{x} = \frac{1}{4}$

∴ $\hat{\theta}_{矩} = \frac{1}{2}$

(2) ∵ $x_1 \cdots x_n$ 独立同分布

∴ $E(x_i) = E(x) = \frac{\theta}{2}$

$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{\theta}{2}$

$E(x^2) = (\frac{1-\theta}{4} + \frac{1+\theta}{4})\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$

$D(x) = E(x^2) - E^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\theta^2}{4} = D(x_i)$

$D(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(x_i) = \frac{2-\theta^2}{4n}$

$E(\hat{\theta}^2) = E(4\bar{x}^2) = 4E(\bar{x}^2)$

$= 4[D(\bar{x}) + E^2(\bar{x})] = \frac{2-\theta^2}{n} + \theta^2$

∵ $E(\hat{\theta}^2) \neq \theta^2$　∴ $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计

第八题（10分）解答：

(1) ∵ $X \sim U(1,3)$

$Y \sim U(1,2)$

∴ $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1<x<3 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 1<y<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

设利润 W

$W = \begin{cases} 3Y & x \geq Y \\ Y + 2x & x < Y \end{cases}$

∵ X与Y相互独立

$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$E(W) = \iint_{x\geq y} 3y f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{x<y} y f(x,y)\,dx\,dy$

$= \int_1^2 dy \int_y^3 \frac{3}{2} y\,dx + \int_1^2 dy \int_1^y \frac{y}{2} + x\,dx$

$= \int_1^2 \frac{9y}{2} - \frac{3y^2}{2}\,dy + \int_1^2 y^2 - \frac{y}{2} - \frac{1}{2}\,dy$

$= \frac{13}{3}$

∴每月平均利润为 $\frac{13}{3}$ 百万元

(2) 设A表示正常设备数量

$A \sim B(30, 0.25)$

∴ $E(A) = np = \frac{15}{2}$

$D(A) = np(1-p) = \frac{45}{8}$

∴ $\frac{A - \frac{15}{2}}{\sqrt{\frac{45}{8}}} \sim N(0,1)$

∴ $A \sim N(\frac{15}{2}, \frac{45}{8})$

设所有设备正常工作为事件C

$P(C) = P(\frac{A - \frac{15}{2}}{\sqrt{\frac{45}{8}}} \leq a) = \Phi(a) = 0.99$

$a = 2.33$

∴ $\frac{A - \frac{15}{2}}{\sqrt{\frac{45}{8}}} \leq 2.33$

$A \leq 13.03$

∴ $E = 3A = 39\,(kw)$

至少供应39kw电力，有99%把握使这批设备正常工作

第九题（10分）解答：

(1) ①提出假设 $H_0: \mu=1000$, $H_1: \mu\neq1000$

②检验统计量 $z=\frac{\bar{x}-1000}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

③拒绝域：$|z|=\left|\frac{\bar{x}-1000}{s/\sqrt{n}}\right|>t_{\alpha/2}(n-1)=2.262$

④实测值：$|z|=\left|\frac{\bar{x}-1000}{s/\sqrt{n}}\right|=0.2094$

⑤判断 $0.2094<2.262$

∴未落入拒绝域

故接受 H_0，即可认为自动包装机平均净重正常，为1000g

(2) $1-\alpha=0.95$

$n=10$

$s=912.04$

∵ $x_1 \cdots x_n$ 来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本

∴ $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$P\left\{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}<\chi^2_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha$ $\chi^2_{0.05}(9)=16.919$

$P\left\{\sigma^2>\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}\right\}=\alpha=0.95$

∴ $\sigma^2=\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}=485.16$

∴置信水平为95%的置信下限为485.16

第十题（10分）解答：

(1) 设事件A为此人有大量象牙产品

事件B为此人会伤害大象

(2) 小王：$P(B|A)=0.9$

小李：$P(B|A)=0.9$

(3) 能，获取象牙这种行为最终还是对大象的一种伤害，假设拥有大量象牙的人想要拥有更多象牙的可能性较小是正确的，即此事件为小概率事件。

但是，在这次中，小王和小李目睹了此人有大量象牙，那么此人肯定对大象做出伤害，即一个小概率事件发生了，所以怀疑原假设的真实性，拥有大量象牙的人想要更多象牙并非小概率事件，所以此人很有可能会对大象做出伤害。

总结，拒绝原假设，小李的观点又与之矛盾，所以是错误的。