1. （1） $y_{n+1}=y_n+0.2\left(0.4n^2-y_n^2\right), y_0=1, n=0,1$

（2） $y_{n+1}=y_n+0.1\left[\left(\frac{y_n}{1+0.1n}\right)^2-\frac{y_n}{1+0.1n}\right], y_0=1, n=0,1$

2. 式中有四个待定参数，最多可以列出四个方程，所以将 $y=x^k, k=0,1,2,3$ 代入

$y_{n+1}=ay_n+by_{n-1}+h\left[cf(x_n,y_n)+df(x_{n-1},y_{n-1})\right]$ 得到方程组：

$$\begin{cases}1=a+b\\ x_n+h=ax_n+b(x_n-h)+h(c+d)\\ (x_n+h)^2=ax_n^2+b(x_n-h)^2+h\left[2cx_n+2d(x_n-h)\right]\\ (x_n+h)^3=ax_n^3+b(x_n-h)^3+h\left[3cx_n^2+3d(x_n-h)^2\right]\end{cases}$$

依次将方程记作 $g_k(x_n)=h_k(x_n), k=0,1,2,3$. $k=0$ 时 $g_0(x_n)=h_0(x_n)$ 方程成立，而 $k=1,2,3$ 时 $g_k{}'(x_n)=kg_{k-1}(x_n)$， $h_k{}'(x_n)=kh_{k-1}(x_n)$，所以 $g_k{}'(x_n)=h_k{}'(x_n)$ 成立，$k=0,1,2,3$，所以方程要么无解，要么对任意实数都成立，又有方程对于初值 x_0 成立，不妨代入 $x_n=0$，解得 $a=0, b=1, c=2, d=0$，得到公式：

$$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$$

接着代入 $y=x^4$ 公式依然成立，但 $y=x^5$ 时公式不成立，所以上式具有四阶精度。

3. 将 $y'+y=0$，$y(0)=1$ 代入梯形格式，得到递推式：

$$y_{n+1}=\frac{2-h}{2+h}y_n$$

于是通项公式为：

$$y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

而 $y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n=\left(1+\frac{-2h}{2+h}\right)^n=\left(1+\frac{-2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{-2h}\cdot\frac{-2h}{2+h}\cdot n}=\left[\left(1+\frac{-2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{-2h}}\right]^{\frac{-2hn}{2+h}}$，

于是 $\lim\limits_{h\to0}y_n=\lim\limits_{h\to0}\left[\left(1+\frac{-2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{-2h}}\right]^{\frac{-2hn}{2+h}}=\left[\lim\limits_{h\to0}\left(1+\frac{-2h}{2+h}\right)^{\frac{2+h}{-2h}}\right]^{\lim\limits_{h\to0}\frac{-2hn}{2+h}}=e^{-0}=1$，$y_n$ 收敛至原方程的精确解 $y(0)$，即 $\lim\limits_{h\to0}y_n=y(0)$.

4. 把 $y=x^k, k=0,1,2,3$ 代入公式，得到方程组 $g_k(x_n)=h_k(x_n), k=0,1,2,3$

$$\begin{cases} 1=1-b+b \\ x_n+h=(1-b)x_n+b(x_n-h)+\dfrac{h}{4}(b+3+3b+1) \\ (x_n+h)^2=(1-b)x_n^2+b(x_n-h)^2+\dfrac{h}{4}\left[(2b+6)(x_n+h)+(6b+2)(x_n-h)\right] \\ (x_n+h)^3=(1-b)x_n^3+b(x_n-h)^3+\dfrac{h}{4}\left[(3b+9)(x_n+h)^2+(9b+3)(x_n-h)^2\right] \end{cases}$$

与第 2 题同理得到 $g_k'(x_n)=h_k'(x_n)$，所以方程 $g_k(x_n)=h_k(x_n)$ 要么无解，要么对任意实数都成立，不妨代入 $x_n=0$，则 $g_k(x_n)=h_k(x_n), k=0,1,2$，而当 $k=3$ 时：

$$h^3=-bh^3+3h^2(b+1)$$

当且仅当 $b=-1$ 时 $g_3(x_n)=h_3(x_n)$ 成立.

代入 $b=-1$， $y=x^4$， $x_n=0$，得到方程：

$$h^4=-h^4+2h\left[h^3-(-h)^3\right]$$

此方程不成立，所以 $b\neq-1$ 时，原式具有二阶精度，$b=-1$ 时，原式具有三阶精度.