1. （1）该公式等步长把区间二等分，精度最高的情况为 Simpson 公式，于是得到

$$A_0=\frac{h}{3},A_1=\frac{4h}{3},A_2=\frac{h}{3}$$

求积公式 $\int_{-h}^{h}f(x)dx\approx\frac{h}{6}[f(h)+4f(0)+f(h)]$ 具有 3 阶精度

（2）在 $y=1$ 的情况下得到方程 $\frac{1}{4}+A_0=1$，解得 $A_0=\frac{3}{4}$，

在 $y=x$ 的情况下得到方程 $A_0x_0=\frac{1}{2}$，解得 $x_0=\frac{2}{3}$，

求积公式 $\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{4}f(0)+\frac{3}{4}f\left(\frac{2}{3}\right)$ 具有 1 阶精度

2. 考虑到求积公式具有对称性，得到求积节点 $x_1=\frac{1}{2}$，该问题归结成 Simpson 公式：

$$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{6}[f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)]$$

3. 二分前后的中矩形公式至少具有 1 阶精度，通过适当调节 ω 可以具有 2 阶精度，设

$$(1+\omega)\cdot\frac{b-a}{2}\cdot\left[\left(\frac{3a+b}{4}\right)^2+\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2\right]-\omega(b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{b^3-a^3}{3}$$

对比方程两边，解得 $\omega=\frac{1}{3}$，得到求积公式：

$$\int_a^b f(x)dx\approx M_2+\frac{1}{3}(M_2-M_1)$$

4. 令上式对 $y=x^k$，$k=0,1,2,3,4$ 成立，得到方程组：

$$\begin{cases}\frac{1}{12h}(1-8+8-1)=0\\ \frac{1}{12h}\left[(x_0-2h)-8(x_0-h)+8(x_0+h)-(x_0+2h)\right]=1\\ \frac{1}{12h}\left[(x_0-2h)^2-8(x_0-h)^2+8(x_0+h)^2-(x_0+2h)^2\right]=2x_0\\ \frac{1}{12h}\left[(x_0-2h)^3-8(x_0-h)^3+8(x_0+h)^3-(x_0+2h)^3\right]=3x_0^2\\ \frac{1}{12h}\left[(x_0-2h)^4-8(x_0-h)^4+8(x_0+h)^4-(x_0+2h)^4\right]=4x_0^3\end{cases}$$

分别将方程表示为 $g_n(x_0)=h_n(x_0),n=0,1,2,3,4$，容易验证 $n=0,1$ 时方程成立，对于 $n\ge1$ 的情形，$g_n'(x_0)=ng_{n-1}(x_0)$，$h_n'(x_0)=nh_{n-1}(x_0)$，这说明 $\forall n\in\mathbb{N},g_n'(x_0)=h_n'(x_0)$，接

下去验证 $g_n(0)=h_n(0)=0, n=2,3,4$，而 $g_5(0)=-4h^4\neq h_5(0)$，这就证明了方程对于 4 次以下多项式都成立，对 5 次多项式不成立，从而近似公式具有 4 阶精度。