

1. 对方程作牛顿迭代方程:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10}$$

设初值 $x_1=1$ ，经四次迭代得到 $x_5=1.368808107$

2. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$ 可由方程 $\frac{1}{x^2} - a = 0$ 的解得到，作牛顿迭代方程:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{ax_n^3 - x_n}{-2} = 0.5x_n + 0.5ax_n^3$$

该方程经迭代收敛到 $\frac{1}{\sqrt{a}}$

3. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$ 可由如下迭代方程无穷次迭代表达:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad x_1 = 1$$

设方程 $x = \varphi(x) = \frac{1}{1+x}$ ，则在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上 $|\varphi'(x)| = \frac{1}{(x+1)^2} < 1$ ，于是迭代过程具有局部

收敛性，设迭代收敛至 x^* ，由方程 $x^* = \frac{1}{1+x^*}$ 解得 $x^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

4. 由弦截法公式:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}(x_n - x_0)$$

因为方程 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ 的零点在 $[1, 2]$ 之间，取 $x_0 = 1$ ， $x_1 = 2$ 迭代次

数会比较少，经过 8 次迭代得到 $x_9 = 1.368808122$ ，误差在 10^{-6} 以内

由快速弦截法公式:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

取 $x_1 = 3$ ， $x_2 = 2$ 向根逼近，经计算 $x_7 = 1.368808122$ ，误差在 10^{-6} 以内，计算过程如图:

```
>> f=@(x)x^3+2*x^2+10*x-20;
>> for i=1:10
X(i+2)=X(i+1)-feval(f,X(i+1))*(X(i+1)-X(i))/(feval(f,X(i+1))-feval(f,X(i)));
end
>> X

X =

1 至 6 列

3.000000000000000    2.000000000000000    1.589743589743590    1.404900474397222    1.371041132979572    1.368831323991820

7 至 12 列

1.368808122823229    1.368808107821474    1.368808107821373    1.368808107821373             NaN             NaN
```