1. 由拉格朗日插值公式 $p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}f(x_i)$ 可知，6 个数据点的插值多项式次数至多为 5 次，其中

表（1）得到的插值多项式为 3 次：

$$p_{(1)}(x)=x^3-x+1$$

表（2）得到的插值多项式为 2 次：

$$p_{(2)}(x)=x^2-1$$

2. 设 $p(x)=ax^2+bx+c$，得到方程组：

$$\begin{cases}c=1\\a+b+c=2\\b=0\end{cases}$$

解得 $a=1,b=0,c=1$，于是所求多项式为

$$p(x)=x^2+1$$

3. 设 $p(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$，得到方程组

$$\begin{cases}a_4=-1\\a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=0\\a_3=-2\\4a_0+3a_1+2a_2+a_3=10\\12a_0+6a_1+2a_2=40\end{cases}$$

解得 $a_0=5,a_1=-4,a_2=2,a_3=-2,a_4=-1$，于是所求多项式为

$$p(x)=5x^4-4x^3+2x^2-2x-1$$

4. 设 $\varphi_0(x)=ax(x-1)(x-x_0)$，$\varphi_1(x)=bx(x-1)(x-x_1)$，则

$\varphi_0'(x)=3ax^2-2a(x_0+1)x+ax_0$，$\varphi_1'(x)=3bx^2-2b(x_1+1)x+bx_1$

代入题目条件，解得

$$\varphi_0(x)=x(x-1)^2，\varphi_1(x)=-x^2(x-1)$$