# 单纯形法

Simplex Method To Solve Linear Programming Problem | SPA

Reporter: Jiakai Gu
Date: Dec 11th, 2023

# Table of contents

# Q: 线性规划的标准形统一为最小化问题，还是最大化问题?

**3 个回答** 默认排序

JH CHEN ＋关注

4 人赞同了该回答

所谓的线性规划问题的标准型就是为了某些“便利”而定义的统一形式。这里的“便利”有，便于计算推导，或者便于保证至少有一个极点存在等等。基本可以肯定的是，这些“便利”，一般只跟约束条件有关，而与目标函数到底是min还是max并没有太大的关系。

所以回到你的疑惑，其实标准型是max还是min其实并不是一个很重要的事。所以你可以看到有些教程用的是max，有些用的是min。但。。。。，标准型的约束形式一般一定是：

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$$

这个才是你应该关注的。当然，如果按照我看过的教科书来说，一般标准型的目标是min。所以我建议你记住，线性规划的标准型为：

$$\begin{aligned}\min: \quad & \mathbf{c'x}\\ s.t. \quad & \mathbf{Ax}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq\mathbf{0}\end{aligned}$$

发布于 2020-09-19 13:25

via: 运筹学线性规划问题化标准型目标函数到底变最大还是最小?

2 Answers 2 个回答

Sorted by: 排序: Highest score (default)

6

I have seen both the min and max forms of an LP frequently, it seems to be an author preference sort of thing. The only difference is a minus sign in the objective ($-c^T x$ instead of $c^T x$).

我经常看到 min 和 max形式的LP，这似乎是作者的偏好之类的事情。唯一的区别是目标中的减号（$-c^T x$而不是 $c^T x$）。

Regarding the constraints, I have more often seen the first form (your Bertsimas reference) referred to as standard or canonical. The two forms are equivalent in some sense.

关于限制，我更经常看到第一种形式（您的 Bertsimas 参考）被称为标准或规范。这两种形式在某种意义上是等价的。

Since $Ax=b$ can be written as the pair of inequality constraints $Ax\le b$ and $(-A)x\le(-b)$, it is clear that the first form can be expressed directly as a problem of the second form.

由于 $Ax=b$ 可以写成一对不等式约束 $Ax\leqslant b$和 $(-A)x\leqslant(-b)$

The inequality $Ax\le b$ can be written as a combination of an equality $Ax+\sigma=b$ and an inequality $\sigma\ge 0$. Hence by increasing the number of variables (ie, using the variables $x$ and $\sigma$), we can express the second form as a problem of the first form, ie, $\begin{bmatrix}A & I\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \sigma\end{pmatrix}=b$, $\begin{pmatrix}x\\ \sigma\end{pmatrix}\ge 0$.

不等式 $Ax\leqslant b$可以写成等式 $Ax+\sigma=b$ 和不等式 的组合 < b5> 。因此，通过增加变量的数量（即使用变量 $x$ 和 $\sigma$ ），我们可以表达第二种形式作为第一种形式的问题，即 $\begin{bmatrix}A & I\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \sigma\end{pmatrix}=b$ 、$\begin{pmatrix}x\\ \sigma\end{pmatrix}\geqslant 0$。

The problem $\min\{c^T x|Ax\le b\}$ is sometimes referred to as an inequality form LP. Again, it is equivalent to the other two forms.

问题 $\min\{c^T x|Ax\leqslant b\}$ 有时被称为LP不等式。同样，它与其他两种形式等效。

via: What is the standard form of a linear programming (LP) problem?

# 什么是单纯形

在线性规划的单纯形法中，单纯形通常指的是算法探索的那部分几何结构，尤其是在可行域内移动的过程中，从一个顶点到另一个顶点的路径。

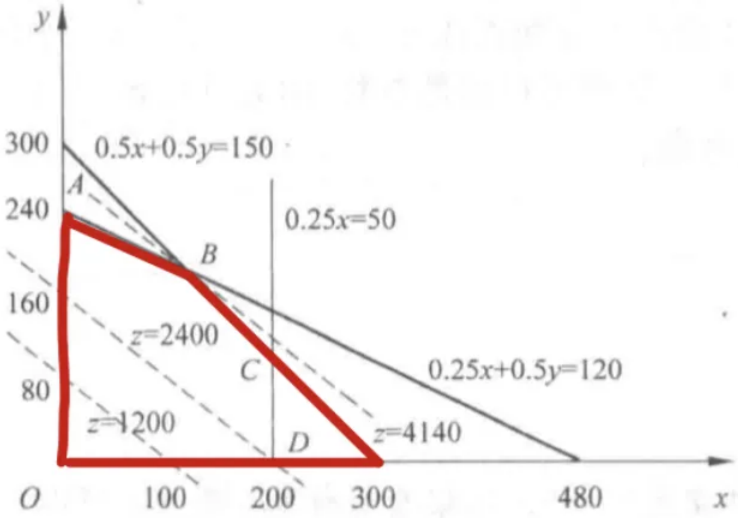

图 6.1

什么是单纯形?

# 单纯形法的基本概念

### 单纯形法概览

- 发明者：美国数学家乔治·丹齐格（George Bernard Dantzig，1918～2005），1947年，他在从事军事资源分配工作时发明了单纯形法。
- 适用性：高效处理多变量和多约束的线性规划问题。

### 核心思想

简单来说，单纯形法就是通过系统地遍历可行域顶点来寻找最大化或最小化问题的答案。

2001年3月，媒体采访乔治·丹齐格的画面

# 单纯形法例题1

注：以仅引入松弛变量为例，标准形统一为最小化问题

例题6.1 生产计划问题

甲公司用3种原料混合制成2种清洁剂。每千克清洁剂A由0.25千克原料1、0.5千克原料2和0.25千克原料3混合而成，每千克清洁剂B由0.5千克原料1和0.5千克原料2混合而成。

每吨清洁剂A和B的售价分别是12万元和15万元。公司现有120吨原料1、150吨原料2和50吨原料3. 这两种清洁剂应各配制多少才能使得总价值最大?

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 12x + 15y \\
&\text{s.t.} \\
&0.25x + 0.50y \le 120 \\
&0.50x + 0.50y \le 150 \\
&0.25x \le 50 \\
&x \ge 0, \quad y \ge 0
\end{aligned}
$$

- 第一步：化标准形
- 第二步：列初始单纯形表(数据填入，决定基变量)
- 第三步：Zj，σj=Cj=Zj—>检验数—>入基变量
- 第四步：θ=b/入基系数—>出基变量
- 第五步：产生新基，初等行变换—>新的系数（使得基所对应的位置—单位阵列）
- 第六步：持续迭代，直至检验数满足要求

字母说明：

- X1,X2:决策变量
- X3,X4,X5: 松弛变量
- XB：基变量
- CB：基变量的系数
- b：资源系数
- Zj：CB*A矩阵的每一列，反映当前基解下，若非基变量Xj增加一个单位，目标函数的变化
- σj：Cj-Zj，检验数，确定入基
- θ：b/入基系数，确定出基

# 单纯形法例题2

注：以仅引入松弛变量为例，标准形统一为最大化问题

- 第一步：化标准形
- 第二步：列初始单纯形表(数据填入，决定基变量)
- 第三步：Zj，σj=Cj=Zj—>检验数—>入基变量
- 第四步：θ=b/入基系数—>出基变量
- 第五步：产生新基，初等行变换—>新的系数（使得基所对应的位置—单位阵列）
- 第六步：持续迭代，直至检验数满足要求

**例1.** 已知线性规划问题：

$$\max z = 8x_1 + 6x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1）用单纯形法求解；

# 现实意义

学习单纯形法，可以

- 锻炼大脑
- 提高数学和解决实际问题的能力（数学建模+应用算法求最优解）

“Then why lift weights?”

“那为什么要举重呢？”

“Because it makes us stronger,” said Tim.

“因为它让我们变得更强大，”蒂姆说。

“Bingo!!” said the teacher. “It’s the same thing with calculus. You’re not here because you’re going to use calculus in your everyday life. *You’re here because calculus is weightlifting for your brain.*”

“答对了！！”老师说。“微积分也是一样的。你来这里不是因为你要在日常生活中使用微积分。你来到这里是因为微积分可以为你的大脑举重。”

学微积分的主要意义在于锻炼大脑

# 补充资料

有关单纯形法的原理、人工变量和两阶段法的内容可见西电—黄丽娟老师视频。


举一反三

教材习题6 6.10用单纯形法解下列线性规划5道小题。

Thank you for listening!