MANUAL DE SOLUÇÕES

TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO

1ª EDIÇÃO, REVISTA E ATUALIZADA

NELIO D. PIZZOLATO E ANDRÉ ALVES GANDOLPHO

Colaboradores: Guina Sotomayor Alzamora e Sergio Luis Franklin Jr.

<u>Anexo A</u>

Notação:

- A: versão corrente da matriz dos coeficientes (ou expandida, conforme o caso) após a aplicação das operações elementares informadas – método de Gauss-Jordan.
- $A_i(n)$: multiplicação da linha *i* da matriz *A* por *n*.
- $A_{i,j}(n)$: multiplicação da linha *i* da matriz *A* por *n* e soma deste resultado à linha *j*.
- Cs = Conjunto de soluções
- Sb = Solução básica

1) Determine a inversa da matriz ***A***

a)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_1(1/2) \\ A_{1,2}(-1) \\ A_{1,2}(-2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 7/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_2(-\tfrac{2}{3}) \\ A_{2,1}(-\tfrac{1}{2}) \\ A_{2,3}(-1) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{7}{3} & \tfrac{1}{3} & -\tfrac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \tfrac{19}{3} & -\tfrac{4}{3} & \tfrac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_3(\tfrac{3}{19}) \\ A_{3,1}(\tfrac{1}{3}) \\ A_{3,2}(\tfrac{7}{3}) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \tfrac{5}{19} & \tfrac{7}{19} & \tfrac{1}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -\tfrac{3}{19} & -\tfrac{8}{19} & \tfrac{7}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{4}{19} & \tfrac{2}{19} & \tfrac{3}{19} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \tfrac{5}{19} & \tfrac{7}{19} & \tfrac{1}{19} \\ -\tfrac{3}{19} & -\tfrac{8}{19} & \tfrac{7}{19} \\ -\tfrac{4}{19} & \tfrac{2}{19} & \tfrac{3}{19} \end{bmatrix}$$

b)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,3}(-1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_{2,3}(-2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_3(-1) \\ A_{3,1}(-1) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2) Verifique se os seguintes conjuntos de vetores formam uma base no $\Re^3$

a) $(1 \quad -1 \quad 2);\ (0 \quad 5 \quad 0);\ (2 \quad 0 \quad 6)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_{1,0}(1) \\ A_{1,3}(-2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2(1/5) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_3(1/2) \\ A_{3,1}(-2) \\ A_{3,2}(-2/5) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, os vetores são linearmente independentes e formam uma base no $\Re^3$.

Alternativamente, poderia ser calculado o determinante de $A(=D)$ e verificado que $D \neq 0$ (ou seja, A é uma matriz não singular), e portanto os vetores são linearmente independentes.

b) $(-1 \quad 5 \quad 1)$; $(2 \quad 0 \quad -2)$; $(1 \quad 0 \quad 4)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_1(-1) \\ A_{1,2}(-5) \\ A_{1,3}(-1) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_2(1/10) \\ A_{2,1}(2) \\ A_{2,3}(4) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_3(1/7) \\ A_{3,1}(-1/2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, os vetores são linearmente independentes e formam uma base no $\Re^3$.

c) $(1 \quad 0 \quad 0)$; $(1 \quad 1 \quad 0)$; $(1 \quad 1 \quad 1)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{2,1}(-1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{3,2}(-1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, os vetores são linearmente independentes e formam uma base no $\Re^3$.

3) Expresse o vetor $(1 \quad 1 \quad 1)$ em cada uma das bases do problema anterior.

a)

$$\alpha.(1 \quad -1 \quad 2) + \beta.(0 \quad 5 \quad 0) + \gamma.(2 \quad 0 \quad 6) = (1 \quad 1 \quad 1)$$

$$\begin{array}{llll} \alpha & & +2.\gamma & =1 \\ -\alpha & +5.\beta & & =1 \\ 2.\alpha & & +6.\gamma & =1 \end{array} \qquad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} A_{1,2}(1) \\ A_{1,3}(-2) \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} A_2(1/5) \\ A_3(1/2) \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} A_{3,1}(-2) \\ A_{3,2}(-2/5) \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

O vetor $(1 \quad 1 \quad 1)$ nesta base é $v=\left(2 \quad 3/5 \quad -1/2\right)$

b)

$\alpha.(-1 \quad 5 \quad 1)+\beta.(2 \quad 0 \quad -2)+\gamma.(1 \quad 0 \quad 4)=(1 \quad 1 \quad 1)$

$$\begin{array}{llll} -\alpha & +2.\beta & +\gamma & =1 \\ 5.\alpha & & & =1 \\ \alpha & -2.\beta & +4.\gamma & =1 \end{array} \qquad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} A_1(-1) \\ A_{1,2}(-5) \\ A_{1,3}(-1) \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} A_2(1/10) \\ A_{2,1}(2) \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} A_3(1/5) \\ A_{3,2}(-1/2) \end{array} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \end{bmatrix}$$

O vetor $(1 \quad 1 \quad 1)$ nesta base é $v=\left(1/5 \quad 2/5 \quad 2/5\right)$

c)

$\alpha.(1 \quad 0 \quad 0)+\beta.(1 \quad 1 \quad 0)+\gamma.(1 \quad 1 \quad 1)=(1 \quad 1 \quad 1)$

$$\begin{array}{llll} \alpha & +\beta & +\gamma & =1 \\ & \beta & +\gamma & =1 \\ & & +\gamma & =1 \end{array} \qquad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2,1}(-1) \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{3,2}(-1) \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ nesta base é $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) Ache todas as soluções básicas dos sistemas

a)

$$\begin{matrix} x_1 & -2.x_2 & +2.x_3 & -4.x_4 & =2 \\ 3.x_1 & -5.x_2 & +x_3 & +3.x_4 & =4 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a.1- Base = $\{x_1, x_2\}$:

$$A_{1,2}(-3) \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 15 & -2 \end{bmatrix} \quad A_{2,1}(2) \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 26 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

Cs: $\left(-2+8.x_3-26.x_4, -2+5.x_3-15.x_4, x_3, x_4\right)$

Sb: $x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a.2- Base = $\{x_1, x_3\}$:

$$A_{1,2}(-3) \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_2(-1/5) \\ A_{2,1}(-2) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -8/5 & 0 & 2 & 6/5 \\ 0 & -1/5 & 1 & -3 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Cs: $\left(6/5 + 8/5.x_2 - 2.x_4, x_2, 2/5 + 1/5.x_2 + 3.x_4, x_4\right)$

Sb: $x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6/5 & 0 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}$

a.3- Base = $\{x_1, x_4\}$:

$$A_{1,2}(-3) \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_2(1/15) \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1/15 & -1/3 & 1 & -2/15 \end{bmatrix}$$

$$A_{2,1}(4) \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -26/15 & 2/3 & 0 & 22/15 \\ 0 & 1/15 & -1/3 & 1 & -2/15 \end{bmatrix}$$

Cs: $\left(22/15 + 26/15 . x_2 - 2/3 . x_3, x_2, x_3, -2/15 - 1/15 . x_2 + 1/3 . x_3\right)$

Sb: $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 22/15 & 0 & 0 & -2/15 \end{pmatrix}$

a.4- Base = $\{x_2, x_3\}$:

$$\begin{matrix} A_1(-1/2) \\ A_{1,2}(5) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1/2 & 0 & -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_2(-1/4) \\ A_{2,1}(1) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -5/8 & 1 & 0 & -5/4 & -3/4 \\ -1/8 & 0 & 1 & -13/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Cs: $\left(x_1, -3/4 + 5/8 . x_1 + 5/4 . x_4, 1/4 + 1/8 . x_1 + 13/4 . x_4, x_4\right)$

Sb: $x_1 = x_4 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$

a.5- Base = $\{x_2, x_4\}$:

$$\begin{matrix} A_1(-1/2) \\ A_{1,2}(5) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1/2 & 0 & -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_2(1/13) \\ A_{2,1}(-2) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -15/26 & 1 & -5/13 & 0 & -11/13 \\ 1/26 & 0 & -4/13 & 1 & -1/13 \end{bmatrix}$$

Cs: $\left(x_1, -11/13 + 15/26 . x_1 + 5/13 . x_3, x_3, -1/13 - 1/26 . x_1 + 4/13 . x_3\right)$

Sb: $x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -11/13 & 0 & -1/13 \end{pmatrix}$

a.6- Base = $\{x_3, x_4\}$:

$$\begin{matrix} A_1(1/2) \\ A_{1,2}(-1) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 5/2 & -4 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_2(1/5) \\ A_{2,1}(2) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3/2 & -13/5 & 1 & 0 & 11/5 \\ 1/2 & -4/5 & 0 & 1 & 3/5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cs: } \left(x_1, x_2, 11/15 - 3/2.x_1 + 13/5.x_2, 3/5 - 1/2.x_1 + 4/5.x_2\right)$$

$$\text{Sb: } x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{matrix} 2.x_1 & +3.x_2 & +5.x_3 & =5 \\ x_1 & -4.x_2 & -2.x_3 & =3 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

b.1- Base = $\{x_1, x_2\}$:

$$\begin{matrix} A_1(1/2) \\ A_{1,2}(-1) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & 5/2 \\ 0 & -11/2 & -9/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_2(-2/11) \\ A_{2,1}(-3/2) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14/11 & 29/11 \\ 0 & 1 & 9/11 & -1/11 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cs: } \left(29/11 - 14/11.x_3, -1/11 - 9/11.x_3, x_3\right)$$

$$\text{Sb: } x_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 29/11 & -1/11 & 0 \end{pmatrix}$$

b.2- Base = $\{x_1, x_3\}$:

$$\begin{matrix} A_1(1/2) \\ A_{1,2}(-1) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & 5/2 \\ 0 & -11/2 & -9/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_2(-2/9) \\ A_{2,1}(-5/2) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -14/9 & 0 & 25/9 \\ 0 & 11/9 & 1 & -1/9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cs: } \left(25/9 + 14/9.x_2, x_2, -1/9 - 11/9.x_2\right)$$

Sb: $x_2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{25}{9} \quad 0 \quad -\frac{1}{9} \right)$

b.3- Base = $\{ x_2, x_3 \}$:

$$\begin{matrix} A_1(\frac{1}{3}) \\ A_{1,2}(4) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{11}{3} & 0 & \frac{14}{3} & \frac{29}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_2(\frac{3}{14}) \\ A_{2,1}(-\frac{5}{3}) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{14} & 1 & 0 & -\frac{25}{14} \\ \frac{11}{14} & 0 & 1 & \frac{29}{14} \end{bmatrix}$$

Cs: $\left(x_1, -\frac{25}{14} + \frac{9}{14}.x_1, \frac{29}{14} - \frac{11}{14}.x_1 \right)$

Sb: $x_1 = 0 \Rightarrow \left(0 \quad -\frac{25}{14} \quad \frac{29}{14} \right)$

5) Dada a matriz $\boldsymbol{A}$ (abaixo) com cinco colunas $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5}$, usando os procedimentos de Gauss-Jordan, pede-se a expressão de $\boldsymbol{A}$ nas bases:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $B = (\boldsymbol{A_1, A_4, A_5})$

$$\begin{matrix} A_{1,2}(2) \\ A_{1,3}(-1) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A_1, A_2, A_5})$

$$\begin{matrix} A_{1,2}(2) \\ A_{1,3}(-1) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_2(\frac{1}{7}) \\ A_{2,1}(-2) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{A_3})$

$$\begin{matrix} A_{1,2}(2) \\ A_{1,3}(-1) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_2(1/7) \\ A_{2,1}(-2) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_3(-1) \\ A_{3,1}(-3/7) \\ A_{3,2}(-2/7) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 & 1/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6) Verifique que cada um dos conjuntos C a seguir é convexo, em que $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{b}$ têm dimensões compatíveis.

a) $C = \{\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \}$

Dados os pontos $\boldsymbol{x_1} \in C$ e $\boldsymbol{x_2} \in C$, considere um ponto x combinação convexa de x_1 e x_2, ou seja, $\boldsymbol{x} = \alpha.\boldsymbol{x_1} + (1-\alpha).\boldsymbol{x_2}$, calcula-se o valor de $A.x$ logo, $A.x_1 = b$, $A.x_2 = b$, formando a combinação convexa: $\alpha(A.x_1) = \alpha b$ e $(1-\alpha)(A.x_2) = (1-\alpha)b$

Somando os dois termos:

$$A\alpha x_1 + A(1-\alpha)x_2 = \alpha b + (1-\alpha)b$$

$$A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha b + b - \alpha b$$

$$A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = b$$

Portanto, a combinação convexa também pertence a C e o conjunto é convexo.

b) $C = \{\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}.\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \}$

Dados os pontos $\boldsymbol{x_1} \in C$ e $\boldsymbol{x_2} \in C$, considere um ponto x combinação convexa de x_1 e x_2, ou seja, $\boldsymbol{x} = \alpha.\boldsymbol{x_1} + (1-\alpha).\boldsymbol{x_2}$, calcula-se o valor de $A.x$ logo, $A.x_1 \le b$, $A.x_2 \le b$, formando a combinação convexa: $\alpha(A.x_1) \le \alpha b$ e $(1-\alpha)(A.x_2) \le (1-\alpha)b$

Somando os dois termos:

$$A\alpha x_1 + A(1-\alpha)x_2 \leq \alpha b + (1-\alpha)b$$

$$A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha b + b - \alpha b$$

$$A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq b$$

Portanto, a combinação convexa também pertence a C e o conjunto é convexo.

$\boldsymbol{x_1} \in C$ e $\boldsymbol{x_2} \in C \Rightarrow \boldsymbol{x} = \lambda.\boldsymbol{x_1} + (1-\lambda).\boldsymbol{x_2}$, $\lambda \in [0,1]$

c) $C = \{\ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A.x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$

Dados os pontos $\boldsymbol{x_1} \in C$ e $\boldsymbol{x_2} \in C$, considere um ponto x combinação convexa de x_1 e x_2, ou seja, $\boldsymbol{x} = \alpha.\boldsymbol{x_1} + (1-\alpha).\boldsymbol{x_2}$, calcula-se o valor de $A.x$ logo, $A.x_1 = b$, com $x_1 \geq 0$ e $A.x_2 = b$, com $x_2 \geq 0$, formando a combinação convexa: $\alpha(Ax_1) = \alpha b$ e $(1-\alpha)(A.x_2) = (1-\alpha)b$

Somando os dois termos:

$$A\alpha x_1 + A(1-\alpha)x_2 = \alpha b + (1-\alpha)b$$

$$A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha b + b - \alpha b$$

$$A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = b$$

Como $\boldsymbol{x_1} \geq 0, \boldsymbol{x_2} \geq, 0, \alpha \geq 0$, a combinação também pertence a C e o conjunto é convexo.

7) Calcule o posto da matriz $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$D_A(A_1, A_2, A_3)$ = 1 + 0 + (-6) – 0 – (-3) – (-2) = 6 – 6 = 0

$D_A(A_1, A_2, A_4)$ = 1 + 0 + (-6) – 0 – 0 – (-2) = -6 + 3= -3 ($\neq 0$)

$\therefore r_A = 3$, pois existe pelo menos um determinante de 3° ordem que não é nulo.

Um método alternativo (e prático) para se encontrar o posto de uma matriz é por meio do escalonamento, ou seja, da transformação da matriz $\boldsymbol{A}$ para a matriz $\boldsymbol{I}$, segundo a redução de Gauss-Jordan.

Assim, o posto é igual à dimensão da maior matriz identidade que se poderia obter por meio da redução de Gauss-Jordan.

$$A_{1,2}(2) \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} A_2(1/3) \\ A_{2,1}(-1) \\ A_{2,3}(-3) \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A_3(-1) \\ A_{3,1}(-1/3) \\ A_{3,2}(-2/3) \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \therefore r_A = 3$$

<u>Anexo B</u>

1) Qualifique os pontos extremos de:

a) $f(x) = 3.(x-5)^5$ no ponto x = 5

1ª derivada: $f^1(x) = 15.(x-5)^4$; no ponto x = 5, $f^1(x) = 0$

2ª derivada: $f^2(x) = 60.(x-5)^3$; no ponto x = 5, $f^2(x) = 0$

3ª derivada: $f^3(x) = 180.(x-5)^2$; no ponto x = 5, $f^3(x) = 0$

4ª derivada: $f^4(x) = 360.(x-5)$; no ponto x = 5, $f^4(x) = 0$

5ª derivada: $f^5(x) = 360$; no ponto x = 5, $f^5(x) \neq 0$

A n-ésima derivada que faz a função diferente de zero é n = 5.

$f^n(x) > 0$; n é ímpar $\therefore x$ = 5 é um ponto de inflexão.

b) $f(x) = 3.(x-5)^4$ no ponto x = 5

1ª derivada: $f^1(x) = 12.(x-5)^3$; no ponto x = 5, $f^1(x) = 0$

2ª derivada: $f^2(x) = 36.(x-5)^2$; no ponto x = 5, $f^2(x) = 0$

3ª derivada: $f^3(x) = 72.(x-5)$; no ponto x = 5, $f^3(x) = 0$

4ª derivada: $f^4(x) = 72$; no ponto x = 5, $f^4(x) \neq 0$

A *n*-ésima derivada que faz a função diferente de zero é *n* = 4.

$f^n(x) > 0$; n é par $\therefore x$ = 5 é um mínimo relativo.

2) Considere o problema

$$Max\ z = x_1.(30 - x_1) + x_2.(50 - 2.x_2) - 3.x_1 - 5.x_2$$

e identifique seus pontos estacionários, qualificando-os se MIN ou MAX.

$$\begin{aligned} z &= x_1.(30 - x_1) + x_2.(50 - 2.x_2) - 3.x_1 - 5.x_2 \\ &= -x_1^2 - 2.x_2^2 + 27.x_1 + 45.x_2 \end{aligned}$$

$$\nabla z = \begin{bmatrix} 27 - 2.x_1 & 45 - 4.x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_1 = 27 - 2.x_1 = 0 \\ f_2 = 45 - 4.x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 27/2 \\ x_2 = 45/4 \end{matrix}$$

O ponto $\begin{bmatrix} 27/2 & 45/4 \end{bmatrix}$ é estacionário.

Encontrando o hessiano $\boldsymbol{H}$.

$$\begin{matrix} f_{11} = -2 & f_{12} = 0 \\ f_{21} = 0 & f_{22} = -4 \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Menores principais:

$$H_1 = |f_{11}| = -2 < 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = 8 > 0$$

$\Rightarrow$H é negativo definido $\therefore \begin{bmatrix} 27/2 & 45/4 \end{bmatrix}$ é ponto de máximo.

3) Considere a função $f(x_1, x_2) = 2.x_1^2 + 3.x_2^2 - 4.x_1.x_2$. Avalie a função no ponto (3,3) e depois no ponto (4, 4), usando o Teorema de Taylor, $\boldsymbol{h}$ = (1, 1).

$$f(3 \quad 3) = 2.(3)^2 + 3.(3)^2 - 4.(3).(3) = 18 + 27 - 36 = 9$$

Teorema de Taylor: $f(\boldsymbol{x^0} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x^0}) + \nabla f(\boldsymbol{x^0}).\boldsymbol{h} + \tfrac{1}{2}.\boldsymbol{h^T}.\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{h};\ \boldsymbol{x^0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x^0} + \boldsymbol{h}$

Se tomarmos o hessiano no próprio ponto $\boldsymbol{x^0}$, tem-se uma aproximação; no caso de funções polinomiais, o resultado é exato.

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 4.x_1 - 4.x_2 & 6.x_2 - 4.x_1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x^0}) = \nabla \boldsymbol{f}(3 \quad 3) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$f(4 \quad 4) = f((3 \quad 3) + (1 \quad 1)) = f(3 \quad 3) + \nabla \boldsymbol{f}(3 \quad 3).\boldsymbol{h} + \tfrac{1}{2}.\boldsymbol{h^T}.\boldsymbol{H}.\boldsymbol{h}$$

$$= 9 + \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 9 + (0 + 6) + \tfrac{1}{2}.\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 16$$

4) Seja a função $f(\boldsymbol{x}) = 5.x_1^2 + 5.x_2^2 + 5.x_3^2 - 3.x_1.x_2 - 3.x_1x_3 - 3.x_2.x_3 + 8.x_1 + 8.x_2 + 8.x_3$.

a) Qual o valor de f(x) no ponto $\boldsymbol{x^0} = (1,1,1)$

$$f(\boldsymbol{x^0}) = f(1 \quad 1 \quad 1) = 5.(1)^2 + 5.(1)^2 + 5.(1)^2 - 3.(1).(1) - 3.(1).(1) - 3.(1).(1) + 8.(1) + 8.(1) + 8.(1) = 30$$

b) Pela fórmula de Taylor, encontrar o valor da função no ponto $\boldsymbol{x^0} + \boldsymbol{h}$, onde $\boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}$.

$$f(\boldsymbol{x^0} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x^0}) + \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x^0}).\boldsymbol{h} + \tfrac{1}{2}.\boldsymbol{h^T}.\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{h};\ \boldsymbol{x^0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x^0} + \boldsymbol{h}$$

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [10.x_1 - 3.x_2 - 3.x_3 + 8 \quad 10.x_2 - 3.x_1 - 3.x_3 + 8 \quad 10.x_3 - 3.x_1 - 3.x_2 + 8]$$

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x^0}) = \nabla f(1 \quad 1 \quad 1) = [12 \quad 12 \quad 12]$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 10 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$f(1{,}5 \quad 1{,}3 \quad 1{,}2) = f((1 \quad 1 \quad 1) + (0{,}5 \quad 0{,}3 \quad 0{,}2))$$
$$= f(1 \quad 1 \quad 1) + \nabla \boldsymbol{f}(1 \quad 1 \quad 1).\boldsymbol{h} + \tfrac{1}{2}.\boldsymbol{h^T}.\boldsymbol{H}.\boldsymbol{h}$$
$$= 30 + [12 \quad 12 \quad 12].\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}.[0{,}5 \quad 0{,}3 \quad 0{,}2].\begin{bmatrix} 10 & -3 & -3 \\ -3 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow f(1{,}5 \quad 1{,}3 \quad 1{,}2) = 42 + \tfrac{1}{2}.[3{,}5 \quad 0{,}4 \quad -0{,}4].\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f(1{,}5 \quad 1{,}3 \quad 1{,}2) = 42 + \tfrac{1}{2}.(1{,}94) = 42{,}97$$

5) Verifique a concavidade da função $f(\boldsymbol{x})$ nos três casos abaixo, para valores reais de $\boldsymbol{x}$, usando os recursos mostrados na seção B.6.

a) $f(x_1 \quad x_2 \quad x_3) = -4.x_1^4 - 2.x_2^2 - 3.x_3^2 + 4.x_1 - 4.x_1.x_2$

Encontrar $\boldsymbol{H}$:

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [-16.x_1^3 + 4 - 4.x_2 \qquad -4.x_2 - 4.x_1 \qquad -6.x_3]$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -48.x_1^2 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Menores principais:

$$H_1 = | f_{11} | = -48.x_1^2$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -48.x_1^2 & -4 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = (-48.x_1^2).(-4) - (-4).(-4) = 192.x_1^2 - 16$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -48.x_1^2 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-48.x_1^2).(-4).(-6) - (-4).(-4).(-6) = -1.152.x_1^2 + 96$$

$f(\boldsymbol{x})$ é côncava $\Rightarrow \boldsymbol{H}$ é negativo semidefinido ($\boldsymbol{H} \leq 0$): $H_1 \leq 0; H_2 \geq 0; H_3 \leq 0$.

Note que:

$H_1 \leq 0, \forall x_1 \in \Re$.

$H_2 \geq 0 \Rightarrow 192.x_1^2 - 16 \geq 0$; $192.x_1^2 - 16 = 0 \Rightarrow x_1^2 = {}^{16}\!/_{192} = {}^{1}\!/_{12} \Rightarrow x_1 = \pm\, {}^{1}\!/_{2.\sqrt{3}}$

$\Rightarrow H_2 \geq 0$ se $x_1 \notin$ ao intervalo $\left(-\,{}^{1}\!/_{(2.\sqrt{3})} \quad {}^{1}\!/_{(2.\sqrt{3})} \right)$

$H_3 \leq 0 \Rightarrow -1.152.x_1^2 + 96 \leq 0$;

$-1.152.x_1^2 + 96 = 0 \Rightarrow x_1^2 = {}^{96}\!/_{1.152} = {}^{1}\!/_{12} \Rightarrow x_1 = \pm\, {}^{1}\!/_{2.\sqrt{3}}$

$\Rightarrow H_3 \leq 0$ se $x_1 \notin$ ao intervalo $\left(-\,{}^{1}\!/_{(2.\sqrt{3})} \quad {}^{1}\!/_{(2.\sqrt{3})} \right)$

$\therefore$ a função $f(\boldsymbol{x})$ é côncava se $x_1 \notin$ ao intervalo $\left(-\,{}^{1}\!/_{(2.\sqrt{3})} \quad {}^{1}\!/_{(2.\sqrt{3})} \right)$

b) $f(x_1 \quad x_2) = -4.x_1^4 - 3.x_1^2 - 2.x_2^2 + 4.x_1 - 4.x_1.x_2$

Encontrar $\boldsymbol{H}$:

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -16.x_1^3 - 6.x_1 + 4 - 4x_2 & -4.x_2 - 4.x_1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -48.x_1^2 - 6 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Menores principais:

$H_1 = |f_{11}| = -48.x_1^2 - 6$

$$H_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -48.x_1^2 - 6 & -4 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = (-48.x_1^2 - 6).(-4) - (-4).(-4) = 192.x_1^2 + 8$$

$f(\boldsymbol{x})$ é estritamente côncava $\Rightarrow \boldsymbol{H}$ é negativo definido ($\boldsymbol{H} \leq 0$): $H_1 < 0$; $H_2 > 0$.

Note que:

$H_1 < 0, \forall x_1 \in \Re$.

$H_2 > 0, \forall x_1 \in \Re$

$\therefore$ a função $f(\boldsymbol{x})$ é estritamente côncava $\forall \boldsymbol{x} \in \Re^2$

NOTA: Favor retificar um erro no gabarito, página 222 do livro.

c) $f(x_1 \quad x_2) = 4.x_1^4 + 2.x_1^2 + 3.x_2^2 + 4.x_1 - 4.x_1.x_2$

Encontrar $\boldsymbol{H}$:

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 16.x_1^3 + 4.x_1 + 4 - 4.x_2 & 6.x_2 - 4.x_1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 48.x_1^2 + 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Menores principais:

$H_1 = |f_{11}| = 48.x_1^2 + 4$

$$H_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 48.x_1^2 + 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = (48.x_1^2 + 4).(6) - (-4).(-4) = 288.x_1^2 + 8$$

$f(\boldsymbol{x})$ é estritamente convexa $\Leftrightarrow \boldsymbol{H}$ é positivo definido ($\boldsymbol{H} > 0$): $H_1 > 0$; $H_2 > 0$.

Note que:

$H_1 > 0, \forall x_1 \in \Re$.

$H_2 > 0, \forall x_1 \in \Re$

$\therefore$ a função $f(\boldsymbol{x})$ é estritamente convexa $\forall \boldsymbol{x} \in \Re^2$

6) Considere o problema a seguir e aplique as condições de KT para maximização. Em particular, considere o ponto $\boldsymbol{A}$ = (1, 0).

Max $z = x_1$

Sujeito a $\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$

Reescrevendo o problema:

Max $f(x_1, x_2) = x_1$

Sujeito a $\begin{aligned} & g_1(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \ge 0 \\ & g_2(x_1, x_2) = x_1 \ge 0 \\ & g_3(x_1, x_2) = x_2 \ge 0 \end{aligned}$

Condição (1): o ponto $\boldsymbol{x}^*$ satisfaça as restrições

O ponto $\boldsymbol{A}$ = (1, 0) satisfaz as restrições ($g_1, g_2, g_3 \ge 0$), pois:

$$\begin{aligned} & 1-(1)^2-(0)^2 = 0 \ge 0 \\ & 1 \ge 0 \\ & 0 \ge 0 \end{aligned}$$

Condição (2): existam multiplicadores $\mu_i \ge 0, i = 1,2,3$ tais que: $\mu_i . g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \forall i$.

$$\begin{aligned} & \mu_1.(1-x_1^2-x_2^2) = \mu_1.(1-(1)^2-(0)^2) = \mu_1.(0) = 0(\forall \mu_1) \Rightarrow \mu_1 \ge 0 \\ & \mu_2.(x_1) = \mu_2.(1) = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0 \\ & \mu_3.(x_2) = \mu_3.(0) = 0(\forall \mu_3) \Rightarrow \mu_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Condição (3) para ponto de máximo: $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_i \mu_i . \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0; \mu_i \ge 0(\forall i)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 . \begin{bmatrix} -2.x_1 \\ -2.x_2 \end{bmatrix} + \mu_2 . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_3 . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - 2.\mu_1.(1) + (0) = 0 \\ -2.\mu_1.(0) + \mu_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = 1/2 \\ \mu_3 = 0 \\ \text{Da condição}(2): \mu_2 = 0 \end{cases}$$

Logo, o ponto $\boldsymbol{A}$ = (1, 0) satisfaz as condições de KT para máximo local.

7) Considere o seguinte problema; escreva as condições de KT e verifique o que elas afirmam para os pontos: (a) (3/2, 9/4); e (b) (0, 6).

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 9/4)^2 + (x_2 - 2)^2$$

Sujeito a
$$x_1^2 - x_2 \le 0$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

a) Para encontrar os pontos extremos da função, observe que a função objetivo corresponde à equação de um circulo no $\Re^2$, onde um ponto no plano é representado por $(x_1 \quad x_2)$, e o círculo tem centro em $\left(9/4 \quad 2\right)$. Portanto, $f(x_1, x_2)$ corresponde ao quadrado do raio deste círculo.

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 9/4)^2 + (x_2 - 2)^2 = r^2$$

Considere que se deseja maximizar a função (ou seja, o raio do círculo), encontrando um ponto que satisfaça as condições do problema: $x_1^2 - x_2 \le 0; x_1 + x_2 \le 6; x_1, x_2 \ge 0$.

Uma análise gráfica no $\Re^2$ permite encontrar o ponto (0, 6) como um ponto de máximo (círculo de maior raio, dadas as restrições do problema).

Para confirmar este resultado, use as condições de KT (para maximização) sobre o ponto (0, 6) – será mostrado mais adiante no item (c).

b) Escreva as condições de KT e verifique o que elas afirmam para o ponto (3/2, 9/4).

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 9/4)^2 + (x_2 - 2)^2$$

s.a.
$$g_1(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 \ge 0$$
$$g_2(x_1, x_2) = 6 - x_1 - x_2 \ge 0$$
$$g_3(x_1, x_2) = x_1 \ge 0$$
$$g_4(x_1, x_2) = x_2 \ge 0$$

Condição (1): o ponto $\mathbf{x}^*$ satisfaça as restrições

O ponto $\left(3/2 \quad 9/4\right)$ satisfaz as restrições do problema ($g_1, g_2, g_3 \ge 0$), pois:

$$\frac{9}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \geq 0$$
$$6-\frac{3}{2}-\frac{9}{4} = \frac{9}{4} \geq 0$$
$$\frac{3}{2} \geq 0; \frac{9}{4} \geq 0$$

Condição (2): existam multiplicadores $\mu_i \geq 0, i = 1,2,3,4$ tais que: $\mu_i . g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \forall i$.

$$\mu_1.(x_2 - x_1^2) = \mu_1.\left(\frac{9}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = \mu_1.(0) = 0 (\forall \mu_1) \Rightarrow \mu_1 \geq 0$$
$$\mu_2.(6 - x_1 - x_2) = \mu_2.\left(6-\frac{3}{2}-\frac{9}{4}\right) = \mu_2.\left(\frac{9}{4}\right) = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$$
$$\mu_3.(x_1) = \mu_3.\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \mu_3 = 0$$
$$\mu_4.(x_2) = \mu_4.\left(\frac{9}{4}\right) = 0 \Rightarrow \mu_4 = 0$$

Condição (3) para ponto de máximo: $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_i \mu_i . \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0; \mu_i \geq 0 (\forall i)$

$$\begin{bmatrix} 2.x_1 - \frac{9}{2} \\ 2.x_2 - 4 \end{bmatrix} + \mu_1.\begin{bmatrix} -2.x_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2.\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_3.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_4.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{9}{2} - 2.\mu_1.\left(\frac{3}{2}\right) - (0) + (0) = 0 \\ 2.\left(\frac{9}{4}\right) - 4 + \mu_1 - (0) + (0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 - \frac{9}{2} - 3.\mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = -\frac{1}{2} \\ \left(\frac{9}{2}\right) - 4 + \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\therefore \mu_1 < 0 \Rightarrow$ o ponto (3/2, 9/4) não satisfaz as condições de KT para máximo local.

Condição (3) para ponto de mínimo: $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_i \mu_i . \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0; \mu_i \geq 0 (\forall i)$

$$\begin{bmatrix} 2.x_1 - \frac{9}{2} \\ 2.x_2 - 4 \end{bmatrix} - \mu_1.\begin{bmatrix} -2.x_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \mu_2.\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \mu_3.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \mu_4.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{9}{2} + 2.\mu_1.\left(\frac{3}{2}\right) + (0) - (0) = 0 \\ 2.\left(\frac{9}{4}\right) - 4 - \mu_1 + (0) - (0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 - \frac{9}{2} + 3.\mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{2} \\ \left(\frac{9}{2}\right) - 4 - \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{2} \\ \text{Da condição}(2): \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0 \end{cases}$$

Logo, o ponto (3/2, 9/4) satisfaz as condições de KT para mínimo local.

c) Escreva as condições de KT e verifique o que elas afirmam para o ponto (0, 6).

Condição (1): o ponto $\boldsymbol{x}^*$ satisfaça as restrições

O ponto $\begin{pmatrix} 0 & 6 \end{pmatrix}$ satisfaz as restrições do problema ($g_1, g_2, g_3 \geq 0$), pois:

$$\begin{aligned} &6-(0)^2 = 6 \geq 0 \\ &6-0-6 = 0 \geq 0 \\ &0 \geq 0; 6 \geq 0 \end{aligned}$$

Condição (2): existam multiplicadores $\mu_i \geq 0, i = 1,2,3$ tais que: $\mu_i . g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \forall i$.

$$\begin{aligned} &\mu_1.(x_2 - x_1^2) = \mu_1.(6-(0)^2) = \mu_1.(6) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0 \\ &\mu_2.(6 - x_1 - x_2) = \mu_2.(6-0-6) = \mu_2.(0) = 0(\forall \mu_2) \Rightarrow \mu_2 \geq 0 \\ &\mu_3.(x_1) = \mu_3.(0) = 0(\forall \mu_3) \Rightarrow \mu_3 \geq 0 \\ &\mu_4.(x_2) = \mu_4.(6) = 0 \Rightarrow \mu_4 = 0 \end{aligned}$$

Condição (3) para ponto de máximo: $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_i \mu_i . \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0; \mu_i \geq 0(\forall i)$

$$\begin{bmatrix} 2.x_1 - \frac{9}{2} \\ 2.x_2 - 4 \end{bmatrix} + \mu_1. \begin{bmatrix} -2.x_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2. \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_3. \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_4. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2.(0) - \frac{9}{2} - 2.(0).(0) - \mu_2 + \mu_3 = 0 \\ 2.(6) - 4 + (0) - \mu_2 + (0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{9}{2} - \mu_2 + \mu_3 = 0 \\ 8 - \mu_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_2 = 8 \\ \mu_3 = \frac{25}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = 0 \text{ (da condição(2))} \\ \mu_2 = 8 \\ \mu_3 = \frac{25}{2} \\ \mu_4 = 0 \text{ (da condição(2))} \end{cases}$$

Logo, o ponto (0, 6) satisfaz as condições de KT para máximo local.

8) Considere o problema:

Max $f(x) = x^3$

s.a. $-1 \le x \le 1$

Reescrevendo o problema:

Max $f(x) = x^3$

s.a. $g_1(x) = x+1 \ge 0$
$g_2(x) = 1-x \ge 0$

Usando as condições de KT, o que elas dizem sobre os pontos x = -1, 0 e 1?

a) Para x = -1

Condição (1): o ponto $\boldsymbol{x}^*$ satisfaça as restrições

O ponto x = -1 satisfaz as restrições do problema ($g_1, g_2 \ge 0$), pois:

$$(-1)+1 = 0 \ge 0$$
$$1-(-1) = 2 \ge 0$$

Condição (2): existam multiplicadores $\mu_i \ge 0, i = 1,2$ tais que: $\mu_i.g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \forall i$.

$$\mu_1.(x+1) = \mu_1.(-1+1) = \mu_1.(0) = 0(\forall \mu_1) \Rightarrow \mu_1 \ge 0$$
$$\mu_2.(1-x) = \mu_2.(1-(-1)) = \mu_2.(2) = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$$

Condição (3) para ponto de máximo: $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_i \mu_i.\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0; \mu_i \ge 0(\forall i)$

$$3.x^2 + \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow 3.(-1)^2 + \mu_1 - (0) = 0$$

$$\Rightarrow \mu_1 = -3 < 0$$

Logo, o ponto x = -1 não satisfaz as condições de KT para máximo local.

Condição (3) para ponto de mínimo: $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_i \mu_i.\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0; \mu_i \ge 0(\forall i)$

$$3.x^2 - \mu_1 + \mu_2 = 0 \Rightarrow 3.(-1)^2 - \mu_1 + (0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = 3 \\ \mu_2 = 0\,(\text{da condição}\,(2)) \end{cases}$$

Logo, o ponto x = -1 satisfaz as condições de KT para mínimo local.

b) Para x = 0

Condição (1): o ponto $\boldsymbol{x}^*$ satisfaça as restrições

O ponto x = 0 satisfaz as restrições do problema ($g_1, g_2 \geq 0$), pois:

$$(0)+1=1\geq 0$$
$$1-(0)=1\geq 0$$

Condição (2): existam multiplicadores $\mu_i \geq 0, i=1,2$ tais que: $\mu_i.g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \forall i$.

$$\mu_1.(x+1) = \mu_1.(0+1) = \mu_1.(1) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$$
$$\mu_2.(1-x) = \mu_2.(1-0) = \mu_2.(1) = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$$

Condição (3) para ponto de máximo: $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_i \mu_i.\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0; \mu_i \geq 0 (\forall i)$

$$3.x^2 + \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow 3.(0)^2 + (0) - (0) = 0$$

Logo, o ponto x = 0 satisfaz as condições de KT para máximo local.

Condição (3) para ponto de mínimo: $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_i \mu_i.\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0; \mu_i \geq 0 (\forall i)$

$$3.x^2 - \mu_1 + \mu_2 = 0 \Rightarrow 3.(0)^2 - (0) + (0) = 0$$

$$\Rightarrow \{\mu_1 = \mu_2 = 0\,(\text{da condição}\,(2))$$

Logo, o ponto x = 0 satisfaz as condições de KT para máximo e para mínimo local; o ponto x = 0 é um ponto de inflexão.

c) Para x = 1

Condição (1): o ponto $\boldsymbol{x}^*$ satisfaça as restrições

O ponto x = 1 satisfaz as restrições do problema ($g_1, g_2 \geq 0$), pois:

$$(1)+1 = 2 \geq 0$$
$$1-(1) = 0 \geq 0$$

Condição (2): existam multiplicadores $\mu_i \geq 0, i = 1,2$ tais que: $\mu_i . g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \forall i$.

$$\mu_1.(x+1) = \mu_1.(1+1) = \mu_1.(2) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$$
$$\mu_2.(1-1) = \mu_2.(0) = 0(\forall \mu_2) \Rightarrow \mu_2 \geq 0$$

Condição (3) para ponto de máximo: $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_i \mu_i . \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0; \mu_i \geq 0(\forall i)$

$$3.x^2 + \mu_1 - \mu_2 = 0 \Rightarrow 3.(1)^2 + (0) - \mu_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_2 = 3 \\ \mu_1 = 0 \,(\text{da condição}\,(2)) \end{cases}$$

Logo, o ponto x = 1 satisfaz as condições de KT para máximo local.

Condição (3) para ponto de mínimo: $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_i \mu_i . \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0; \mu_i \geq 0(\forall i)$

$$3.x^2 - \mu_1 + \mu_2 = 0 \Rightarrow 3.(1)^2 - (0) + \mu_2 = 0$$

$$\Rightarrow \mu_2 = -3$$

Logo, o ponto x = 1 não satisfaz as condições de KT para mínimo local.

9) Faça o que se pede:

a) Identifique os pontos extremos da função: $f(x) = 6.x_1^2 - 4.x_1.x_2 + 4.x_2^2 - 16.x_2$

Otimização sem restrições.

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 12.x_1 - 4.x_2 \\ -4.x_1 + 8.x_2 - 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12.x_1 - 4.x_2 = 0 \\ -4.x_1 + 8.x_2 - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3.x_1 = x_2 \\ -x_1 + 2.x_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x_1 + 2.(3.x_1) - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4/5 \\ x_2 = 12/5 \end{cases}$$

O ponto $\lfloor 4/5 \quad 12/5 \rfloor$ é estacionário.

Encontrando o hessiano $\boldsymbol{H}$.

$$\begin{matrix} f_{11} = 12 & f_{12} = -4 \\ f_{21} = -4 & f_{22} = 8 \end{matrix} \Rightarrow \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

Menores principais:

$$H_1 = | f_{11} | = 12 > 0$$
$$H_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = 80 > 0$$

$\Rightarrow$H é positivo definido $\Leftrightarrow f(\boldsymbol{x})$ é estritamente convexa.

Portanto, $\lfloor 4/5 \quad 12/5 \rfloor$ é ponto de mínimo global.

b) Levando em conta a resposta do item anterior, resolva o problema:

$$f(x) = 6.x_1^2 - 4.x_1.x_2 + 4.x_2^2 - 16.x_2$$

s.a. $\quad x_1^2 - 1/4.x_1.x_2 + 1/4.x_2^2 - 2/3.x_2 \leq 0$

Verifique se a solução encontrada em (a) - solução ótima do problema de otimização sem restrições – satisfaz as restrições acrescentadas em (b). Caso afirmativo, então ela será a solução ótima de (b).

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 1/4.x_1.x_2 + 1/4.x_2^2 - 2/3.x_2$$

No ponto $\lfloor 4/5 \quad 12/5 \rfloor$:

$$g(\boldsymbol{x}) = (4/5)^2 - 1/4.(4/5).(12/5) + 1/4.(12/5)^2 - 2/3.(12/5)$$
$$= \frac{160}{100} - \frac{160}{100} \leq 0$$

Portanto, a solução ótima de (b) – ponto de mínimo global - é também o ponto $\lfloor 4/5 \quad 12/5 \rfloor$

c) Aplique as condições de KT ao problema (b) anterior, e a essas condições aplique o ponto encontrado no item (a) anterior.

Condição (1): o ponto $\boldsymbol{x}^*$ satisfaça as restrições

Vimos em (a) que ponto $\lfloor 4/5 \quad 12/5 \rfloor$ satisfaz a restrição do problema ($g_1 \le 0$).

Condição (2): existam multiplicadores $\mu_i \ge 0, i = 1$ tais que: $\mu_i . g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, \forall i$.

$$\mu_1.(x_1^2 - 1/4.x_1.x_2 + 1/4.x_2^2 - 2/3.x_2) = \mu_1.(0) = 0(\forall \mu_1)$$

Condição (3) para ponto de mínimo (quando a restrição está na forma $g(\boldsymbol{x}) \le 0$):

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_i \mu_i . \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0; \mu_i \ge 0(\forall i)$$

$$\begin{bmatrix} 12.x_1 - 4.x_2 \\ -4.x_1 + 8.x_2 - 16 \end{bmatrix} + \mu. \begin{bmatrix} 2.x_1 - 1/4.x_2 \\ 1/2.x_2 - 1/4.x_1 - 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12.(4/5) - 4.(12/5) + \mu.[2.(4/5) - 1/4.(12/5)] = 0 \\ -4.(4/5) + 8.(12/5) - 16 + \mu.[1/2.(12/5) - 1/4.(4/5) - 2/3] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ 80/5 - 16 + \mu.(1/3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\mu = 0$$

Logo, o ponto $\lfloor 4/5 \quad 12/5 \rfloor$ satisfaz as condições de KT para ponto de mínimo.

<u>Capítulo 1</u>

1) Dado o sistema de expressões lineares (restrições):

$$
\begin{array}{lllll}
(i) & -x_1 & +2.x_2 & \leq 4 \\
(ii) & 2.x_1 & -3.x_2 & \leq 3 \\
(iii) & x_1 & +3.x_2 & \geq 6 \\
(iv) & x_1,\ x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Restrição(i):
$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$
$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -4$
$(0,0) \in$ espaço viável

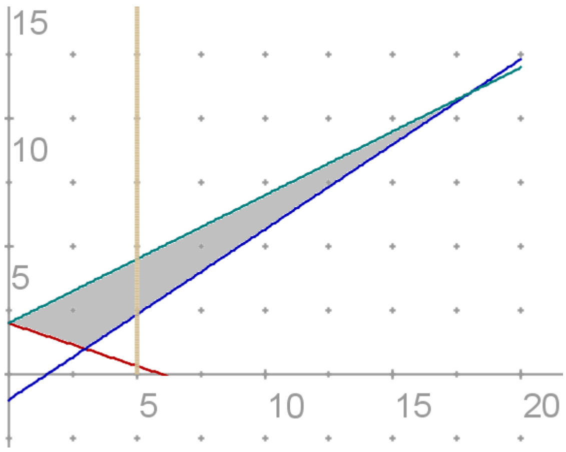
Restrição(ii):
$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$
$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3/2$
$(0,0) \in$ espaço viável

Restrição(iii):
$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$
$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$
$(0,0) \notin$ espaço viável

Determine graficamente a solução ótima nos seguintes casos:

a) Min $Z = 2.x_1$.
b) Max $Z = -4.x_2$.
c) Max $Z = 3.x_1 + 3.x_2$.

Gráfico das restrições, a linha pontilhada azul mostra a FO de c):

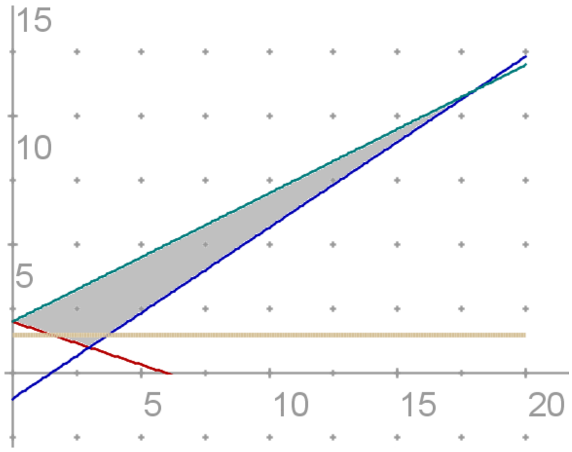


a) Min $Z = 2.x_1$

Solução ótima: $x_1 = 0; x_2 = 2$.

Min Z = 2.(0) = 0

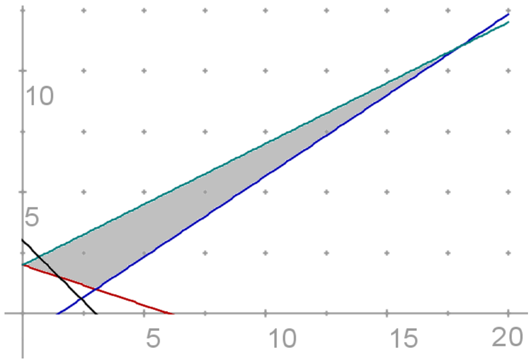
b) Max $Z = -4.x_2$



Solução ótima: $x_1 = 3; x_2 = 1$

Max Z = -4. (1) = -4

c) Max $Z = 3.x_1 + 3.x_2$



Solução ótima: $x_1 = 18; x_2 = 11$ {interseção das restrições (i) e (ii)}[1]

Max Z = 3.(18)+3.(11) = 87

2) Modelo de programação linear:

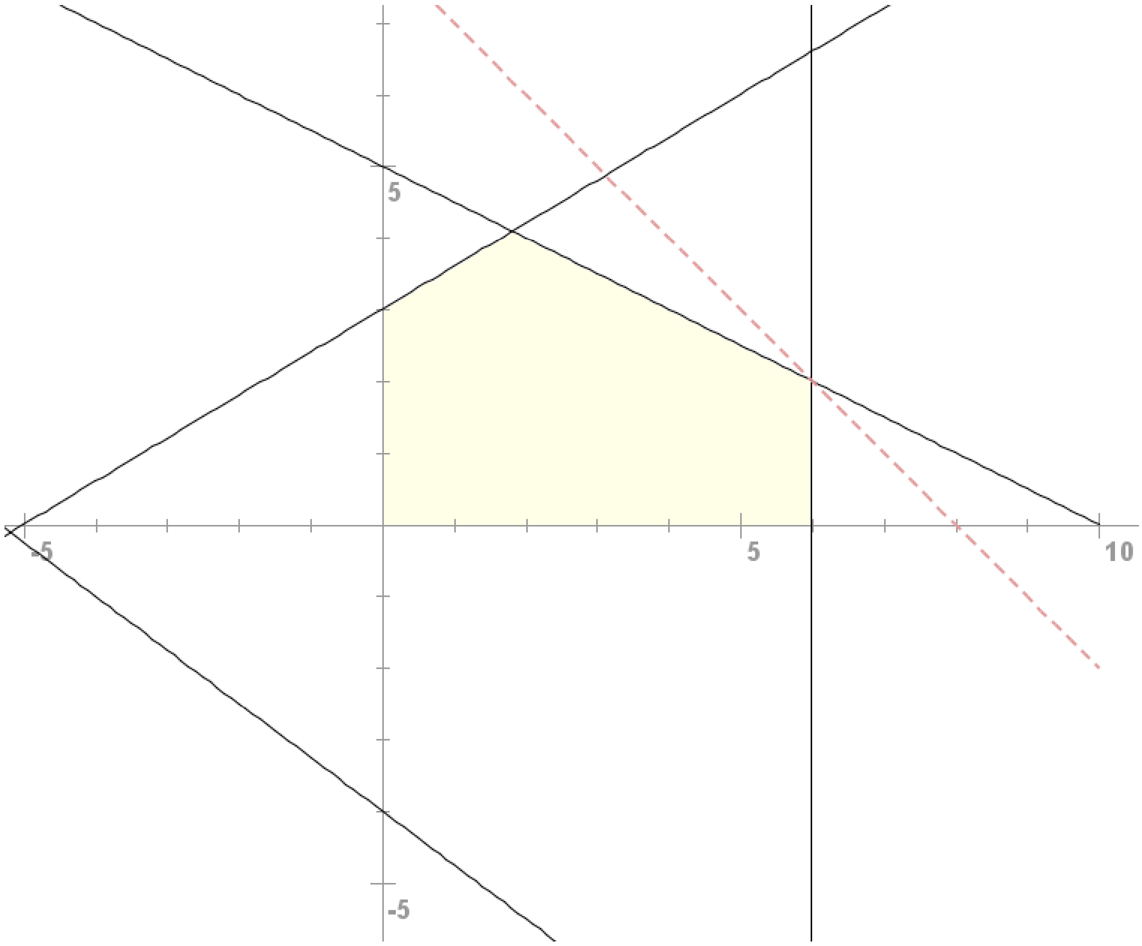
Max $2.x_1 + 2.x_2$

[1] A função $Z = 3.x_1 + 3.x_2$ pode ser representada no gráfico por um feixe de retas paralelas, onde cada reta representaria uma "curva de nível" no plano ($\Re^2$), ou seja, os pontos (x_1, x_2) onde a função $Z = f(x_1, x_2) = K$ (constante). Por exemplo, tracei a "curva de nível" $Z = 3.x_1 + 3.x_2 = 9$. A direção de maior crescimento da função é ortogonal à curva de nível.

$$
\text{s.a.}\quad
\begin{array}{lllll}
(i) & -6.x_1 & +10x_2 & \le 30 \\
(ii) & 4.x_1 & +3.x_2 & \ge -12 \\
(iii) & x_1 & +2.x_2 & \le 10 \\
(iv) & x_1 & & \le 6 \\
(v) & x_1, & x_2 & \ge 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\text{Restrição}(i): & \text{Restrição}(ii): & \text{Restrição}(iii): & \text{Restrição}(iv): \\
x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 & x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -4 & x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 5 & x_1 = 6 \\
x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -5 & x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 & x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 10 & (0,0) \in \text{espaço viável} \\
(0,0) \in \text{espaço viável} & (0,0) \in \text{espaço viável} & (0,0) \in \text{espaço viável} &
\end{array}
$$

GRÁFICO:



Do gráfico, vemos que a solução ótima para esta função objetivo recai no ponto B, que intersecta as retas da (iii) e (iv) restrição, por tanto a solução ótima é no ponto $x_1 = 6$ e $x_2 = 2$. Finalmente $Z = 16$.

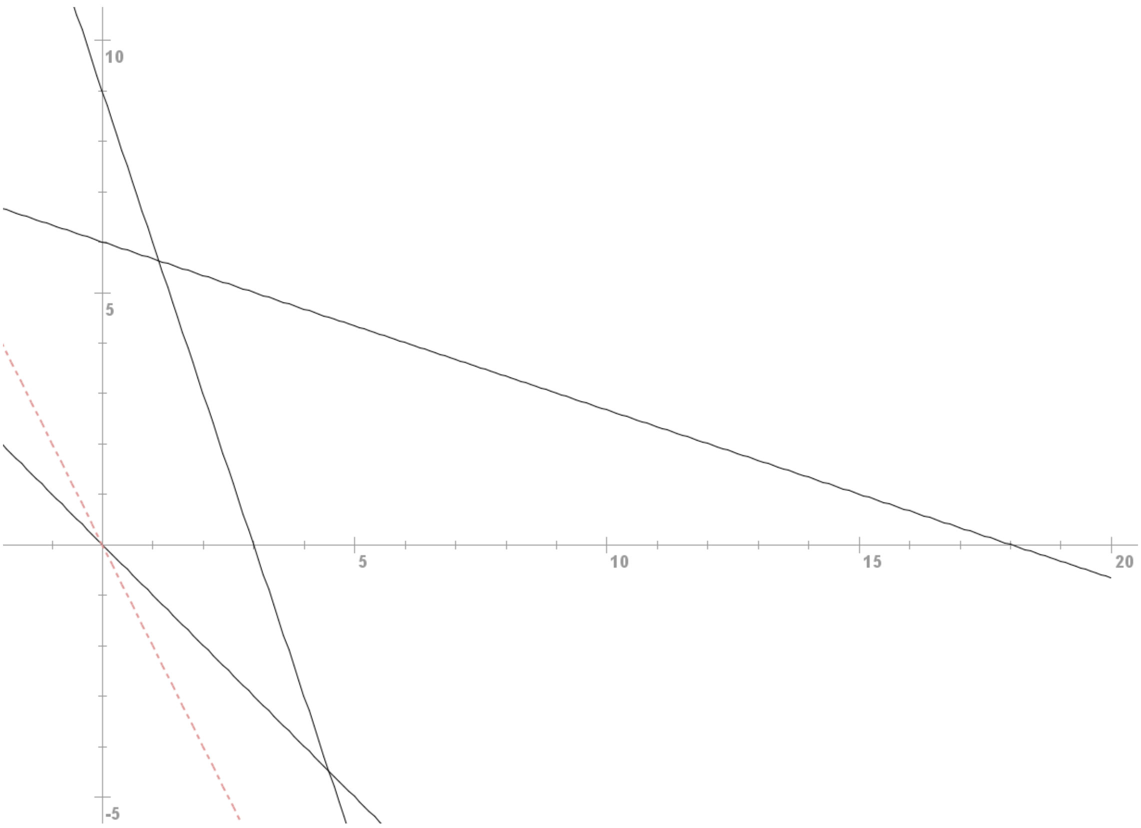
3) Considere o modelo de programação linear. Usando recursos gráficos, ache as soluções para todo o espectro de valores α, $-\infty < \alpha < +\infty$.

Max $2.x_1 + x_2$

$$\text{s.a.}\quad \begin{array}{lcccl} (i) & x_1 & +3x_2 & \leq 18 \\ (ii) & x_1 & +x_2 & \leq \alpha \\ (iii) & 3.x_1 & +x_2 & \leq 9 \\ (iv) & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

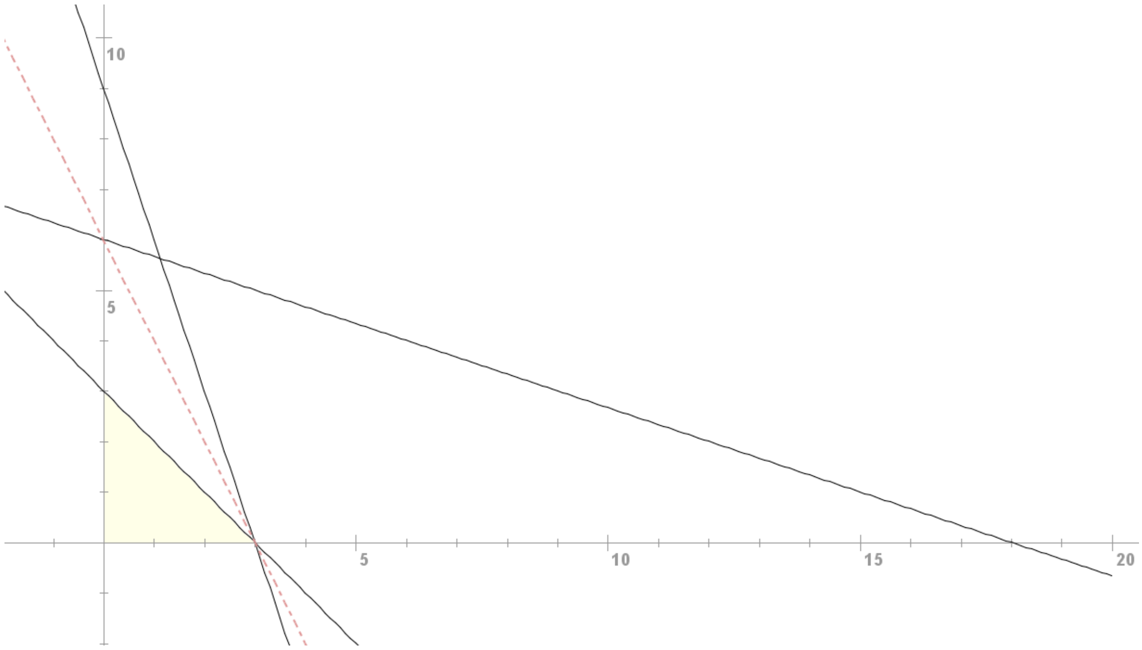
No gráfico, desenha-se a região factível, com as restrições (i), (iii) e (iv), sendo que a região solução da restrição (ii) varia segundo o valor de α, assim, a reta da restrição (ii) é desenhada considerando a função objetivo nos diferentes casos (a), (b), (c) e (d).

(a) Se $\propto < 0$ não há valores para x_1 e x_2 que satisfaçam as restrições (iv) (já que $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$) e (ii), portanto, se $\alpha < 0$ não há solução.

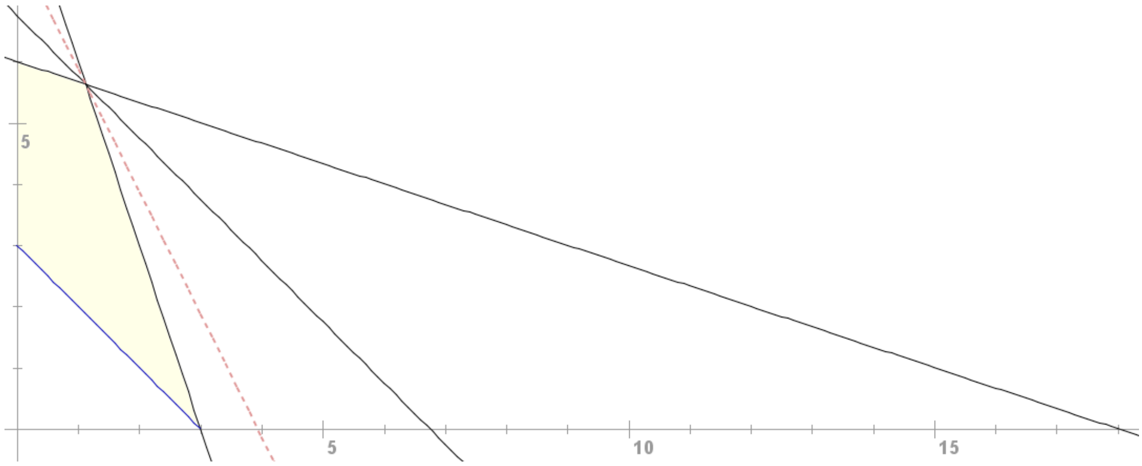


(b) As retas (ii) e (iii) se intersectam no ponto: $x_1 = 4{,}5 - 0{,}5\alpha$ e $x_2 = 1{,}5\alpha - 4{,}5$, sabe-se que $x_2 \geq 0$, então o menor valor de α que satisfaz a restrição (iv) é

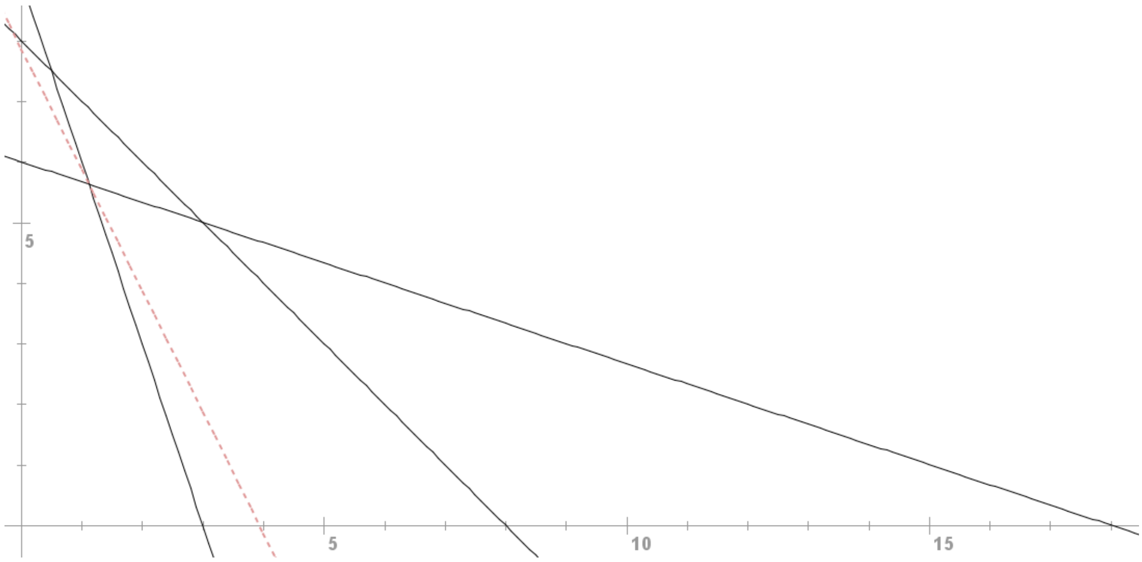
$\alpha = 3$ e na restrição (ii), tem-se que $x_1 = 3$. Logo, no intervalo $0 \leq \alpha \leq 3$ a melhor solução é alcançada quando $x_1 = \propto$ e $x_2 = 0$.



(c) As retas (i) e (iii) se intersectam no ponto $x_1 = 9/8$ e $x_2 = 45/8$, substituindo este ponto na restrição (ii) se obtém $\alpha = 27/4$. Para validar a restrição (ii), encontra-se a interseção de (ii) e (iii), como visto em (b) é o ponto $x_1 = 4{,}5 - 0{,}5\alpha$ e $x_2 = 1{,}5\alpha - 4{,}5$, no intervalo $3 \leq \alpha \leq 27/4$.



(d) Finalmente, se $\alpha > 27/4$ a solução ótima será no ponto encontrado em (c) $x_1 = 9/8$ e $x_2 = 45/8$, já que a retrição (ii) não influirá na solução final.



4) Salim El Sharif.

Sejam: ES = Empréstimo semestral;

EM_i = Empréstimo de um mês, feito no mês i = 1, 2, ..., 6;

AM_i = Aplicação financeira de um mês, feita no mês i = 1, 2, ..., 6.

FO:

MIN $Z = 0{,}12\ ES + 0{,}04\ (EM_1 + EM_2 + \ldots + EM_6) - 0{,}01\ (AM_1 + AM_2 + \ldots + AM_6)$

s.a.:

$1000 + 1000 + ES + EM_1 = 5000 + AM_1$ (equilíbrio financeiro, 1º mês);

$1{,}01\ AM_1 + 2000 + EM_2 = 5000 + 1{,}04\ EM_1$ (equilíbrio financeiro, 2º mês);

$1{,}01\ AM_2 + 2000 + EM_3 = 6000 + 1{,}04\ EM_2$ (equilíbrio financeiro, 3º mês).

.....

$1{,}01\ AM_5 + 9000 + EM_6 = 2000 + 1{,}04\ EM_5 + 1{,}12\ ES$ (6º mês)

$ES, AM_i, EM_i \geq 0$

5) Fabricante de sapatos:.

Sejam: X_i = Número de operários no mês i = 1, 2, ..., 6;

Y_i = Horas extras usadas no mês i;

E_i = Nível de estoque ao final do mês i.

a) Função objetivo:

MIN Z = 2000 (X_1 + X_2 + ... + X_6) + 50 (Y_1 + Y_2 + ... + Y_6) + E_1 + E_2 + ... + E_6

s.a.:

$1000 + 300\,X_1 + 60\,Y_1 = 5000 + E_1$

$E_1 + 300\,X_2 + 60\,Y_2 = 6000 + E_2$

....

$E_5 + 300\,X_6 + 60\,Y_6 = 5000 + \mathrm{E}_6$

$E_6 \geq 2000$

$X_i \leq 20$;

$Y_i \leq 0{,}2\,X_i$

$X_i, Y_i, E_i \geq 0$

b) Na função objetivo, acrescentar: 770 (XA_1 + ... + XA_6) + 1000 (XD_1 + ... + XD_6)

e nas restrições: $X_i = X_{i-1} + XA_i - XD_i$, para i = 2, 3, ..., 6,

sendo: X_1 = 15 e XA_i = número de contratações no mês i e

XD_i = número de demissões no mês i.

6) Artesanato Itaipava:

Sejam: t = 1, ..., 6, onde 1=jan.; 2=fev.; ...; 6=jun.;

X_t = Produção própria no mês t;

I_t = Estoque ao final do mês t;

k_t = Capacidade produtiva alugada no mês t;

P_t = Produção subcontratada

FO:

MIN $Z = 200\ (X_1 + ... + X_6) + 220\ (k_1 + ... + k_6) + 250\ (P_1 + ... + P_6) + 15\ (I_1 + ... + I_6)$

s.a.:

$300 + X_1 + P_1 = 4000 + I_1$

$I_1 + X_2 + P_2 = 2000 + I_2$

....

$I_5 + X_5 + P_5 = 2000 + I_6$

$X_t \leq 3000 + k_t$

$P_t \leq 100$

$X_t, I_t, k_t, P_t \geq 0$

7) Natureba Ltda:

Considerando todas as unidades medidas em quilogramas. Sejam:

X_C = Quantidade de cereal aplicado na produção de NC;

X_I = Quantidade de cereal aplicado na produção de NI;

Y_C = Quantidade de vitamina aplicado na produção de NC;

Y_I = Quantidade de vitamina aplicado na produção de NI

FO:

$$\text{Max } Z = 11\ (X_c + Y_c) + 14\ (X_I + Y_I) - 3\ (X_c + X_I) - 5\ (Y_c + Y_I)$$

$$= 8X_C + 6Y_C + 11X_I + 9Y_I$$

s.a.:

$X_C + Y_C \leq 150$

$X_I + Y_I \leq 150$

$X_C > 0{,}70\ (X_C + Y_C)$ ou $0{,}3X_C > 0{,}7Y_C$

$Y_I > 0{,}60\ (X_I + Y_I)$ ou $0{,}4\ Y_I > 0{,}6\ X_I$

$X_C, X_I, Y_C, Y_I, \geq 0$

8) Licores da Serra

Sejam: X_1 = Número de réplicas do Processo 1;

X_2 = Número de réplicas do Processo 2

a) FO Max $Z = 3(4X_1 + 2X_2) + 2{,}50(X_1 + 4\ X_2)$

s.a.: $2X_1+4X_2 \leq 120$

$3X_1 + 2X_2 \leq 80$

$X_1, X_2 \geq 0$

b) Max $Z = 12X_1 + 2{,}50X_1 - q_1\ X_1 + 6X_2 + 10X_2 - q_2\ X_2 - 2p_A\ X_1 - 4p_A\ X_2$

$- 3\ p_B\ X_1 - 2\ p_B\ X_2$

Sujeito às mesmas restrições em (a)

c) Acrescentar na FO em (b) os termos: $- I_x - I_y - S_x - S_y$

e as restrições: $4\ X_1 + 2\ X_2 = L_1 + S_x - I_x$

$X_1 + 4\ X_2 = L_2 + S_y - I_y$

$I_X, I_Y, S_X, S_Y \geq 0$

9) a) MIN $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

b) MIN $Z = x_1 + x_2 + ... + x_6 + 0{,}9\ (Y_1 + Y_2 + ... + Y_6)$

Capítulo 2

1) Resolva em uma iteração:

Max $\quad 12.x_1 \quad +9.x_2 \quad +10.x_3$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 1 \\ \frac{1}{2}.x_1 & +\frac{7}{4}.x_2 & +x_3 & \leq 5 \\ 3.x_1 & +7.x_2 & +5.x_3 & \leq 5 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Convertendo à forma padrão:

Max $\quad z = 12.x_1 \quad +9.x_2 \quad +10.x_3$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{lllllllll} (a) & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & = 1 \\ (b) & \frac{1}{2}.x_1 & +\frac{7}{4}.x_2 & +x_3 & & +x_5 & & = 5 \\ (c) & 3.x_1 & +7.x_2 & +5.x_3 & & & +x_6 & = 5 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$
$$(x_4, x_5, x_6 \text{ são variáveis de folga})$$

Base inicial: x_4, x_5, x_6

Solução básica inicial: $\begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 0, & x_3 = 0 \\ x_4 = 1, & x_5 = 5, & x_6 = 5 \end{cases}$

1° iteração:

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente da FO (MAX) é mais positivo: x_1.

Ao se aumentar o valor de x_1, deve-se ter o cuidado de manter as variáveis x_4, x_5, x_6 não negativas. Portanto, $x_1 = \min\{\ 1, \quad 10, \quad \frac{5}{3}\}$.

Para $x_1 = 1$, tem-se $x_4 = 0$. Portanto, x_4 sai da base.

Nova base: x_1, x_5, x_6.

Expressando o sistema inicial na nova base:

$$
\begin{array}{llllllll|l}
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & =1 & \\
 & +\frac{5}{4}.x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}.x_4 & +x_5 & & =\frac{9}{2} & -\frac{1}{2}.(a)+(b) \\
 & +4.x_2 & +2.x_3 & -3.x_4 & & +x_6 & =2 & -3.(a)+(c)
\end{array}
$$

Nova solução básica: $\begin{cases} x_4 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0 \\ x_1 = 1, \quad x_5 = \frac{9}{2}, \quad x_6 = 2 \end{cases}$

Expressando a função objetiva em termos das variáveis não-básicas:

$$
z = 12.x_1 + 9.x_2 + 10.x_3 = 12.(1 - x_2 - x_3 - x_4) + 9.x_2 + 10.x_3
$$
$$
= 12 - 3.x_2 - 2.x_3 - 12.x_4
$$

Todos os coeficientes da FO são negativos. Portanto, ao se aumentar qualquer uma das variáveis não-básicas, diminui-se o valor da FO. Assim, a solução básica acima é a solução ótima para maximizar z é Max z = 12.

2) Resolva o seguinte problema de PL utilizando o Método Simplex

Max $\quad x_1 + 2.x_2$

s.a.
$$
\begin{array}{lll}
-6.x_1 & +10.x_2 & \leq 30 \\
x_1 & & \leq 6 \\
x_1, x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Convertendo à forma padrão:

Max $\quad x_1 + 2.x_2$

s.a.
$$
\begin{array}{lllll}
-6.x_1 & +10.x_2 & +x_3 & & =30 \\
x_1 & & & +x_4 & =6
\end{array}
$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

(x_3, x_4 são variáveis de folga)

Base inicial: x_3, x_4

Solução básica inicial: $\begin{cases} x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \\ x_3 = 30, \quad x_4 = 6 \end{cases}$

Para colocar o sistema na forma de Quadros (forma simplificada de organizar os cálculos), a FO deve ser vista como uma restrição adicional, sendo Z uma variável compondo a base:

FO: $Z - x_1 - 2.x_2 = 0$

Quadro 1:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	b	Razão
$l.0$	Max	1	-1	-2	0	0	0	
$l.1$	X_3	0	-6	10	1	0	30	$30/10 = 5$
$l.2$	X_4	0	1	0	0	1	6	∞

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente da FO (problema MAX.) é mais positivo. Portanto, é aquela cujo coeficiente na linha zero é mais negativo $\therefore x_2$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\left\{ b_i / a_{i,j} \;, j = 2, a_{i,j} > 0 \right\}$

$\therefore x_3$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{1,2} = 10$.

Nova base: x_2, x_4.

Pivotamento:

- Dividir a linha 1 por 10
- Multiplicar a linha 1 por 2 e somá-la à linha 0

Quadro 2:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	b	Razão
$l.0$	Max	1	$-11/5$	0	$1/5$	0	6	
$l.1$	X_2	0	$-3/5$	1	$1/10$	0	3	
$l.2$	X_4	0	1	0	0	1	6	$6/1 = 6$

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente na linha zero é negativo $\therefore x_1$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\left\{ {b_i}/{a_{i,j}} \, , \, j = 1, a_{i,j} > 0 \right\}$

$\therefore x_4$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{2,1} = 1$.

Nova base: x_1, x_2.

Pivotamento:

- Multiplicar a linha 2 por ${11}/{5}$ e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 2 por ${3}/{5}$ e somá-la à linha 1

Quadro 3:

	$Base$	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	b	$Razão$
$l.0$	Max	1	0	0	${1}/{5}$	${11}/{5}$	${96}/{5}$	
$l.1$	X_2	0	0	1	${1}/{10}$	${3}/{5}$	${33}/{5}$	
$l.2$	X_1	0	1	0	0	1	6	

Nenhuma variável não-básica possui coeficiente na linha (0) negativo.

Logo, a solução ótima foi encontrada:

Solução ótima:

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = {33}/{5} \end{cases} \qquad z = x_1 + 2.x_2 = {96}/{5}$$

3) Utilize o Método Simplex para resolver o seguinte problema de PL:

$$\text{Max} \quad 5.x_1 \quad + 2.x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{lll} x_1 & & \leq 4 \\ & x_2 & \leq 5 \\ -2.x_1 & + x_2 & \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Convertendo à forma padrão:

$$\text{Max} \quad 5.x_1 + 2.x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_4 = 5 \\ -2.x_1 + x_2 + x_5 = 10 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$
$$(x_3, x_4, x_5 \text{ são variáveis de folga})$$

Base inicial: x_3, x_4, x_5

Solução básica inicial: $\begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 0, \\ x_3 = 4, & x_4 = 5, \quad x_5 = 10 \end{cases}$

Para colocar o sistema na forma de Quadros (forma simplificada de organizar os cálculos), a FO deve ser vista como uma restrição adicional, sendo Z uma variável compondo a base:

FO: $Z - 5.x_1 - 2.x_2 = 0$

Quadro 1:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	*Razão*
$l.0$	*Max*	1	-5	-2	0	0	0	0	
$l.1$	X_3	0	1	0	1	0	0	4	$4/1 = 4$
$l.2$	X_4	0	0	1	0	1	0	5	
$l.3$	X_5	0	-2	1	0	0	1	10	

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente da FO (problema MAX) é mais positivo. Portanto, é aquela cujo coeficiente na linha (0) é mais negativo $\therefore x_1$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\left\{ b_i / a_{i,j} \, , \; j = 1, a_{i,j} > 0 \right\}$

$\therefore x_3$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{1,1} = 1$.

Nova base: x_1, x_4, x_5

Pivotamento:

- Multiplicar a linha 1 por 5 e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 1 por 2 e somá-la à linha 3

Quadro 2:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	Razão
$l.0$	Max	1	0	-2	5	0	0	20	
$l.1$	X_1	0	1	0	1	0	0	4	
$l.2$	X_4	0	0	1	0	1	0	5	$5/1 = 5$
$l.3$	X_5	0	0	1	2	0	1	18	$18/1 = 18$

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente na linha (0) é negativo $\therefore x_2$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\left\{ b_i / a_{i,j} \, , \, j = 2, a_{i,j} > 0 \right\}$

$\therefore x_4$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{2,2}$ = 1.

Nova base: x_1, x_2, x_5

Pivotamento:

- Multiplicar a linha 2 por 2 e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 2 por -1 e somá-la à linha 3

Quadro 3:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	Razão
$l.0$	Max	1	0	0	5	2	0	30	
$l.1$	X_1	0	1	0	1	0	0	4	
$l.2$	X_2	0	0	1	0	1	0	5	
$l.3$	X_5	0	0	0	2	-1	1	13	

Nenhuma variável não-básica possui coeficiente na linha (0) negativo.

Logo, a solução ótima foi encontrada:

Solução ótima:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 5 \end{cases} \qquad z = 5.x_1 + 2.x_2 = 30$$

4) Resolva, utilizando o método das duas fases, o seguinte problema de PL:

Max $z = x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 - x_4$

s.a.
$$\begin{array}{l} x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 = 15 \\ -2.x_1 - x_2 - 5.x_3 = -20 \\ x_1 + 2.x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Para colocar o problema de PL na forma padrão deve-se multiplicar a linha 2 por -1.

O Método Simplex exige uma base inicial viável. Para criar uma solução inicial, pode-se introduzir variáveis artificiais no sistema (uma para cada equação).

Fase 1:

Min $w = + x_5 + x_6 + x_7$

s.a.
$$\begin{array}{l} x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 + x_5 = 15 \\ 2.x_1 + x_2 + 5.x_3 + x_6 = 20 \\ x_1 + 2.x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 10 \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$
$(x_3, x_4, x_5 \text{ são variáveis de folga})$

Base inicial: x_5, x_6, x_7

Solução básica inicial: $\begin{cases} x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0 \\ x_5 = 15, \quad x_6 = 20, \quad x_7 = 10 \end{cases}$

Para colocar o sistema na forma de Quadros (forma simplificada de organizar os cálculos), a FO deve ser vista como uma restrição adicional, sendo w uma variável compondo a base:

FO: $w - x_5 - x_6 - x_7 = 0$

Quadro 1:

	Base	W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b	Razão
$l.0$	Min	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	
$l.1$	X_5	0	1	2	3	0	1	0	0	15	
$l.2$	X_6	0	2	1	5	0	0	1	0	20	
$l.3$	X_7	0	1	2	1	1	0	0	1	10	

No primeiro momento da otimização, a FO deve ser escrita em termos das variáveis não-básicas. Para isso, deve-se somar as linhas 1, 2 e 3 à linha 0.[2]

Quadro 2:

	Base	W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b	Razão
$l.0$	Min	1	4	5	9	1	0	0	0	45	
$l.1$	X_5	0	1	2	3	0	1	0	0	15	$15/3 = 5$
$l.2$	X_6	0	2	1	5	0	0	1	0	20	$20/5 = 4$
$l.3$	X_7	0	1	2	1	1	0	0	1	10	$10/1 = 10$

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente da FO (MIN) é mais negativo. Portanto, é aquela cujo coeficiente na linha (0) é mais positivo $\therefore x_3$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\left\{ b_i / a_{i,j} \; , \; j = 3, a_{i,j} > 0 \right\}$

$\therefore x_6$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{2,3} = 5$.

Nova base: x_3, x_5, x_7

Pivotamento:

- Dividir a linha 2 por 5.
- Multiplicar a linha 2 por -9 e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 2 por -3 e somá-la à linha 1
- Multiplica a linha 2 por -1 e somá-la à linha 3

[2] Isso equivale a fazer:

$$w = (15 - x_1 - 2.x_2 - 3.x_3) + (20 - 2.x_1 - x_2 - 5.x_3) + (10 - x_1 - 2.x_2 - x_3 - x_4)$$

$$= 45 - 4.x_1 - 5.x_2 - 9.x_3 - x_4$$

$$\Rightarrow w + 4.x_1 + 5.x_2 + 9.x_3 + x_4 = 45$$

Quadro 3:

	Base	W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b	Razão
$l.0$	Min	1	$2/5$	$16/5$	0	1	0	$-9/5$	0	9	
$l.1$	X_5	0	$-1/5$	$7/5$	0	0	1	$-3/5$	0	3	$3.5/7 = 15/7$
$l.2$	X_3	0	$2/5$	$1/5$	1	0	0	$1/5$	0	4	$4.5/1 = 20$
$l.3$	X_7	0	$3/5$	$9/5$	0	1	0	$-1/5$	1	6	$6.5/9 = 10/3$

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente na linha (0) é mais positivo $\therefore x_2$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\left\{ b_i / a_{i,j} \,, \, j = 2, a_{i,j} > 0 \right\}$

$\therefore x_5$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{1,2} = 7/5$.

Nova base: x_2, x_3, x_7

Pivotamento:

- Multiplicar a linha 1 por $5/7$.
- Multiplicar a linha 1 por $-16/5$ e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 1 por $-1/5$ e somá-la à linha 2
- Multiplicar a linha 1 por $-9/5$ e somá-la à linha 3
-

Quadro 4:

	Base	W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b	Razão
$l.0$	Min	1	$6/7$	0	0	1	$-16/7$	$-3/7$	0	$15/7$	
$l.1$	X_2	0	$-1/7$	1	0	0	$5/7$	$-3/7$	0	$15/7$	
$l.2$	X_3	0	$3/7$	0	1	0	$-1/7$	$2/7$	0	$25/7$	$25/3$
$l.3$	X_7	0	$6/7$	0	0	1	$-9/7$	$4/7$	1	$15/7$	$15/6$

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente na linha (0) é mais positivo $\therefore x_4$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\left\{ b_i / a_{i,j} \,,\; j = 1, a_{i,j} > 0 \right\}$

$\therefore x_7$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{3,4} = 1$.

Nova base: x_2, x_3, x_4

Pivotamento:

- Multiplicar a linha 3 por -1 e somá-la à linha 0

Quadro 5:

	Base	W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b	Razão
$l.0$	Min	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	
$l.1$	X_2	0	$-1/7$	1	0	0	$5/7$	$-3/7$	0	$15/7$	
$l.2$	X_3	0	$3/7$	0	1	0	$-1/7$	$2/7$	0	$25/7$	
$l.3$	X_4	0	$6/7$	0	0	1	$-9/7$	$4/7$	1	$15/7$	

Nenhuma variável não-básica possui coeficiente na linha zero positivo.

Logo, a solução ótima da Fase 1 foi encontrada.

A Fase 1 terminou com $W = 0$ e todas as variáveis artificiais fora da base. Portanto, o Método Simplex produziu uma solução básica a partir da qual começará a Fase 2.

Incluindo a função objetivo original e eliminando as variáveis artificiais, tem-se:

Base inicial: x_2, x_3, x_4

Solução básica inicial: $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 15/7, \quad x_3 = 25/7, \quad x_4 = 15/7 \end{cases}$

Para colocar o sistema na forma de Quadros (forma simplificada de organizar os cálculos), a FO deve ser vista como uma restrição adicional, sendo Z uma variável compondo a base:

FO: $Z - x_1 - 2.x_2 - 3.x_3 + x_4 = 0$

Quadro 1:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	b	Razão
$l.0$	Min	1	-1	-2	-3	1	0	
$l.1$	X_2	0	$-1/7$	1	0	0	$15/7$	
$l.2$	X_3	0	$3/7$	0	1	0	$25/7$	
$l.3$	X_4	0	$6/7$	0	0	1	$15/7$	

No primeiro momento da otimização, a FO deve ser escrita em termos da variável não-básica, x_1. Para isso, deve-se:

- Multiplicar a linha 1 por 2 e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 2 por 3 e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 3 por -1 e somá-la à linha 0

Quadro 2:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	b	Razão
$l.0$	Min	1	$-6/7$	0	0	0	$90/7$	
$l.1$	X_2	0	$-1/7$	1	0	0	$15/7$	
$l.2$	X_3	0	$3/7$	0	1	0	$25/7$	$25/3$
$l.3$	X_4	0	$6/7$	0	0	1	$15/7$	$15/6$

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente da FO (MAX) é mais positivo. Portanto, é aquela cujo coeficiente na linha zero é mais negativo $\therefore x_1$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\left\{ b_i / a_{i,j} \text{ , } j = 1, a_{i,j} > 0 \right\}$

$\therefore x_4$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{4,1} = 6/7$.

Nova base: x_2, x_3, x_1

Pivotamento:

- Multiplicar a linha 3 por $7/6$
- Multiplicar a linha 3 por $6/7$ e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 3 por $1/7$ e somá-la à linha 1

- Multiplicar a linha 3 por $-\frac{3}{7}$ e somá-la à linha 2

Quadro 3:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	b	Razão
$l.0$	Min	1	0	0	0	1	$\frac{105}{7}$	
$l.1$	X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$	
$l.2$	X_3	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	
$l.3$	X_1	0	1	0	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{2}$	

Nenhuma variável não-básica possui coeficiente na linha (0) negativo.

Logo, a solução ótima foi encontrada:

Solução ótima:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \\ x_3 = \frac{5}{2} \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad z = x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 - x_4 = \frac{105}{7} = 15$$

Este problema pode também ser resolvido usando somente duas variáveis artificiais, isto porque na terceira restrição x_4 não precisa a adição de variável artificial.

5) Resolva o problema de PL:

$$\text{Max} \quad 2.x_1 \quad + 3.x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{rrl} x_1 & +2.x_2 & \geq 8 \\ -2.x_1 & +3.x_2 & \leq 5 \\ x_1 & +x_2 & \geq 6 \\ \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$

Convertendo à forma padrão:

$$\text{Max} \quad 2.x_1 \quad + 3.x_2$$

$$\text{s.a.}\quad \begin{array}{rrrrrrrl} x_1 & +2.x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & =8 \\ -2.x_1 & +3.x_2 & & +x_4 & & & & =5 \\ x_1 & +x_2 & & & -x_5 & & +x_7 & =6 \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$
(x_3, x_5 são variáveis de excesso)
(x_4 é variável de folga)
(x_6, x_7 são variáveis artificiais)

Método das duas fases.

Fase 1:

$$\text{Min} \quad w = \quad +x_6 \quad +x_7$$

$$\text{s.a.}\quad \begin{array}{rrrrrrrl} x_1 & +2.x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & =8 \\ -2.x_1 & +3.x_2 & & +x_4 & & & & =5 \\ x_1 & +x_2 & & & -x_5 & & +x_7 & =6 \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$

Base inicial: x_4, x_6, x_7

Solução básica inicial: $\begin{cases} x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_5 = 0 \\ x_4 = 5, \quad x_6 = 8, \quad x_7 = 6 \end{cases}$

Para colocar o sistema na forma de Quadros (forma simplificada de organizar os cálculos), a FO deve ser vista como uma restrição adicional, sendo w uma variável compondo a base:

FO: $w - x_6 - x_7 = 0$

Quadro 1:

	Base	*W*	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	*b*	*Razão*
$l.0$	*Min*	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	
$l.1$	X_6	0	1	2	-1	0	0	1	0	8	
$l.2$	X_4	0	-2	3	0	1	0	0	0	5	
$l.3$	X_7	0	1	1	0	0	-1	0	1	6	

No primeiro momento da otimização, a FO deve ser escrita em termos das variáveis não-básicas. Para isso, deve-se somar as linhas 1 e 3 à linha 0.

Quadro 2:

	Base	W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b	Razão
$l.0$	Min	1	2	3	-1	0	-1	0	0	14	
$l.1$	X_6	0	1	2	-1	0	0	1	0	8	$8/2 = 4$
$l.2$	X_4	0	-2	3	0	1	0	0	0	5	$5/3$
$l.3$	X_7	0	1	1	0	0	-1	0	1	6	$6/1 = 6$

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente da FO (MIN) é mais negativo. Portanto, é aquela cujo coeficiente na linha zero é mais positivo $\therefore x_2$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\left\{ b_i / a_{i,j}\ ,\ j = 2, a_{i,j} > 0 \right\}$

$\therefore x_4$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{2,2} = 3$.

Nova base: x_2, x_6, x_7

Pivotamento:

- Dividir a linha 2 por 3.
- Multiplicar a linha 2 por -3 e somá-la à linha 0
- Multiplica a linha 2 por -2 e somá-la à linha 1
- Multiplica a linha 2 por -1 e somá-la à linha 3

Quadro 3:

	Base	W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b	Razão
$l.0$	Min	1	4	0	-1	-1	-1	0	0	9	
$l.1$	X_6	0	$7/3$	0	-1	$-2/3$	0	1	0	$14/3$	$14/7 = 2$
$l.2$	X_2	0	$-2/3$	1	0	$1/3$	0	0	0	$5/3$	
$l.3$	X_7	0	$5/3$	0	0	$-1/3$	-1	0	1	$13/3$	$13/5$

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente na linha (0) é mais positivo $\therefore x_1$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\left\{ b_i / a_{i,j} \,,\, j=1, a_{i,j} > 0 \right\}$

$\therefore x_6$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{1,1} = 7/3$.

Nova base: x_1, x_2, x_7

Pivotamento:

- Multiplicar a linha 1 por $3/7$.
- Multiplicar a linha 1 por -4 e somá-la à linha 0
- Multiplica a linha 1 por $2/3$ e somá-la à linha 2
- Multiplica a linha 1 por $-5/3$ e somá-la à linha 3

Quadro 4:

	Base	*W*	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	*b*	*Razão*
l.0	*Min*	1	0	0	$5/7$	$1/7$	-1	$-12/7$	0	1	
l.1	X_1	0	1	0	$-3/7$	$-2/7$	0	$3/7$	0	2	
l.2	X_2	0	0	1	$-2/7$	$1/7$	0	$2/7$	0	3	
l.3	X_7	0	0	0	$5/7$	$1/7$	-1	$-5/7$	1	1	$5/7$

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente na linha (0) é mais positivo $\therefore x_3$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\left\{ b_i / a_{i,j} \,,\, j=1, a_{i,j} > 0 \right\}$

$\therefore x_7$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{3,3} = 5/7$.

Nova base: x_1, x_2, x_3

Pivotamento:

- Multiplicar a linha 3 por $7/5$.

- Multiplicar a linha 3 por $-\frac{5}{7}$ e somá-la à linha 0
- Multiplica a linha 3 por $\frac{3}{7}$ e somá-la à linha 1
- Multiplica a linha 3 por $\frac{2}{7}$ e somá-la à linha 2

Quadro 5:

	Base	W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	b	Razão
$l.0$	Min	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	
$l.1$	X_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{13}{5}$	
$l.2$	X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{17}{5}$	
$l.3$	X_3	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	-1	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}$	

Nenhuma variável não-básica possui coeficiente na linha (0) positivo.

Logo, a solução ótima da Fase 1 foi encontrada.

A Fase 1 terminou com $W = 0$ e todas as variáveis artificiais fora da base. Portanto, o Método Simplex produziu uma solução básica a partir da qual começará a Fase 2.

Incluindo a função objetivo original e eliminando as variáveis artificiais, tem-se:

Base inicial: x_1, x_2, x_3

Solução básica inicial: $\begin{cases} x_4 = 0, \\ x_1 = \frac{13}{5}, \quad x_2 = \frac{17}{5}, \quad x_3 = \frac{7}{5} \end{cases}$

Para colocar o sistema na forma de Quadros (forma simplificada de organizar os cálculos), a FO deve ser vista como uma restrição adicional, sendo Z uma variável compondo a base:

FO: $Z - 2.x_1 - 3.x_2 = 0$

Quadro 1:

	Base	W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	Razão
$l.0$	Min	1	-2	-3	0	0	0	0	
$l.1$	X_1	0	1	0	0	$-1/5$	$-3/5$	$13/5$	
$l.2$	X_2	0	0	1	0	$1/5$	$-2/5$	$17/5$	
$l.3$	X_3	0	0	0	1	$1/5$	$-7/5$	$7/5$	

No primeiro momento da otimização, a FO deve ser escrita em termos das variáveis não-básicas, x_4, x_5. Para isso, deve-se:

- Multiplicar a linha 1 por 2 e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 2 por 3 e somá-la à linha 0

Quadro 2:

	Base	W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	Razão
$l.0$	Min	1	0	0	0	$1/5$	$-12/5$	$77/5$	
$l.1$	X_1	0	1	0	0	$-1/5$	$-3/5$	$13/5$	
$l.2$	X_2	0	0	1	0	$1/5$	$-2/5$	$17/5$	
$l.3$	X_3	0	0	0	1	$1/5$	$-7/5$	$7/5$	

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente da FO (MAX) é mais positivo. Portanto, é aquela cujo coeficiente na linha zero é mais negativo $\therefore x_5$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\left\{ b_i / a_{i,j} \; , \; j = 5, a_{i,j} > 0 \right\}$.

Note, porém, que não há coeficientes positivos na coluna de $X_5 \; (j = 5)$. Portanto, o sistema tem solução ilimitada; x_5 pode aumentar indefinidamente dentro do espaço viável de soluções, aumentando indefinidamente o valor da FO que se quer maximizar.

Capítulo 3

1) Considere o seguinte problema de minimização:

Min $\quad D = 240.y_1 \quad +150.y_2 \quad +80.y_3$

$$\text{s.a.}\quad \begin{array}{lllll} 2.y_1 & +2.y_2 & +y_3 & \geq 5 & [x_1] \\ 3.y_1 & +y_2 & & \geq 7 & [x_2] \\ 4.y_1 & +y_2 & & \geq 3 & [x_3] \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 & & & & \end{array}$$

Quadro ótimo:

	Base	D	Y_1	Y_2	Y_3	SLK_2	SLK_3	SLK_4	b
$l.0$	Min	1	0	0	-27,5	-52,5	-45	0	577,5
$l.1$	Y_1	0	1	0	$-0,25$	0,25	$-0,5$	0	2,25
$l.2$	Y_2	0	0	1	0,75	$-0,75$	0,5	0	0,25
$l.3$	SLK_4	0	0	0	$-0,25$	0,25	$-1,5$	1	6,25

a) Qual é o maior valor de c_1 para que y_1 continue básica?

$$FO_{alterada}: D = (240 + \Delta c_1).y_1 \quad +150.y_2 \quad +80.y_3$$

Na linha 0 do Quadro ótimo teríamos:

	Base	D	Y_1	Y_2	Y_3	SLK_2	SLK_3	SLK_4	b
$l.0$	Min	1	$-\Delta c_1$	0	-27,5	-52,5	-45	0	577,5

Para eliminarmos $-\Delta c_1$ da linha 0, adicionamos Δc_1 vezes a linha 1 à linha 0.

Base	D	Y_1	Y_2	Y_3	SLK_2	SLK_3	SLK_4	b
Min	1	0	0	$-27,5 - \frac{\Delta c_1}{4}$	$-52,5 + \frac{\Delta c_1}{4}$	$-45 - \frac{\Delta c_1}{2}$	0	$577,5 + \frac{9.\Delta c_1}{4}$

Para que o Quadro continue ótimo (MIN):

$$-\frac{\Delta c_1}{4} - 27,5 \leq 0 \Rightarrow -\Delta c_1 \leq 110 \Rightarrow \Delta c_1 \geq -110$$

$$\frac{\Delta c_1}{4} - 52,5 \leq 0 \Rightarrow \Delta c_1 \leq 210$$

$$-\frac{\Delta c_1}{2} - 45 \leq 0 \Rightarrow -\Delta c_1 \leq 90 \Rightarrow \Delta c_1 \geq -90$$

Portanto: $-90 \le \Delta c_1 \le 210$.

Logo, o maior valor de c_1' para que y_1 continue básica é:

$c_1' = c_1 + \Delta c_{1max} = 240 + 210 = 450$

b) Qual é o menor valor de c_3 para que y_3 se torne básica?

$FO_{alterada}: D = \quad 240.y_1 \quad + 150.y_2 \quad + (80 + \Delta c_3).y_3$

Um aumento de Δc_3 (em c_3) na FO corresponde a uma alteração de $-\Delta c_3$ no coeficiente do quadro ótimo.

Portanto, y_3 permanecerá não-básica (probl. MIN.) enquanto:

$-27{,}5 - \Delta c_3 \le 0 \Rightarrow \Delta c_3 \ge -27{,}5$.

Logo, para que y_3 se torne básica:

$\Delta c_3 < -27{,}5$

$c_3' = c_3 + \Delta c_3 = 80 - 27{,}5 = 52{,}5$

c) Para qual faixa de valores de b_1 a presente solução permanece ótima?

Note que a Restrição 1 está ativa.

$Restrição_{alterada} \quad 2.y_1 \quad + 2.y_2 \quad + y_3 \quad - SLK_2 \quad = 5 + \Delta b_1$

O aumento de Δb_1 na Restrição 1 corresponde ao acréscimo de um vetor coluna no Quadro original ao lado do vetor b com coeficientes iguais aos da coluna do Quadro original associada à variável de folga/excesso correspondente multiplicada por Δb_1. Como esta coluna está sujeita às mesmas operações elementares aplicadas sobre o Quadro Simplex, no Quadro ótimo este vetor coluna será igual ao vetor coluna associado à variável básica correspondente multiplicado por Δb_1.

Quadro ótimo:

$Y_1 = 2{,}25 - 0{,}25.\Delta b_1 \ge 0 \Rightarrow \Delta b_1 \le 9$

$Y_2 = 0{,}25 + 0{,}75.\Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \geq -0{,}33$

$SLK_4 = 6{,}25 - 0{,}25.\Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \leq 25$

Portanto: $-0{,}33 \leq \Delta b_1 \leq 9$.

Logo, a faixa de valores de b_1 a presente solução permanece ótima é:

$4{,}67 \leq b_1' \leq 14$

2) Seja o seguinte problema de PL:

$$\text{Max} \quad Z = 3.x_1 + 2.x_2 + 5.x_3$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{l} 2.x_1 + 3.x_2 + 4.x_3 \leq 10 \\ 5.x_1 + 6.x_2 + 2.x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Resolva este problema

Convertendo à forma padrão:

$$\text{Max} \quad Z = 3.x_1 + 2.x_2 + 5.x_3$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{l} 2.x_1 + 3.x_2 + 4.x_3 + x_4 = 10 \\ 5.x_1 + 6.x_2 + 2.x_3 + x_5 = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ (x_4, x_5 \text{ são variáveis de folga}) \end{array}$$

Base inicial: x_4, x_5

Solução básica inicial: $\begin{cases} x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0 \\ x_4 = 10, \quad x_5 = 12 \end{cases}$

Para colocar o sistema na forma de Quadros (forma simplificada de organizar os cálculos), a FO deve ser vista como uma restrição adicional, sendo Z uma variável compondo a base:

FO: $Z - 3.x_1 - 2.x_2 - 5.x_3 = 0$

Quadro 1:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	Razão
$l.0$	Max	1	-3	-2	-5	0	0	0	
$l.1$	X_4	0	2	3	4	1	0	10	$10/4 = 2{,}5$
$l.2$	X_5	0	5	6	2	0	1	12	$12/2 = 6$

Note que a FO já está escrita em termos das variáveis não-básicas.

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente da FO (MAX) é mais positivo. Portanto, é aquela cujo coeficiente na linha zero é mais negativo $\therefore x_3$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\{ b_i / a_{i,j} \, , j = 3, a_{i,j} > 0 \}$

$\therefore x_4$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{1,3}$ = 4.

Nova base: x_3, x_5.

Pivotamento:

- Dividir a linha 1 por 4
- Multiplicar a linha 1 por 5 e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 1 por -2 e somá-la à linha 2

Quadro 2:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b	Razão
$l.0$	Max	1	$-1/2$	$7/4$	0	$5/4$	0	$25/2$	
$l.1$	X_3	0	$1/2$	$3/4$	1	$1/4$	0	$5/2$	5
$l.2$	X_5	0	4	$9/2$	0	$-1/2$	1	7	$7/4$

A variável não-básica que entra na base é aquela cujo coeficiente na linha zero é mais negativo $\therefore x_1$ entra na base.

A variável que sai da base é aquela com menor valor para $\{ b_i / a_{i,j} \, , j = 1, a_{i,j} > 0 \}$

$\therefore x_5$ sai da base.

Elemento pivô: $a_{2,1}$ = 4.

Nova base: x_1, x_3.

Pivotamento:

- Dividir a linha 2 por 4
- Multiplicar a linha 2 por $\frac{1}{2}$ e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 2 por $-\frac{1}{2}$ e somá-la à linha 1

Quadro 3:

	Base	*Z*	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	*b*	*Razão*
l.0	*Max*	1	0	$\frac{37}{16}$	0	$\frac{19}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{107}{8}$	
l.1	X_3	0	0	$\frac{3}{16}$	1	$\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{13}{8}$	
l.2	X_1	0	1	$\frac{9}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$	

Nenhuma variável não-básica possui coeficiente na linha (0) negativo.

Logo, a solução ótima foi encontrada:

Solução ótima:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{4} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{13}{8} \end{cases} \qquad Z = 3.x_1 + 2.x_2 + 5.x_3 = \frac{107}{8}$$

b) Como fica a nova solução primal se o lado direito fosse $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$x^B = B^{-1}.b$$

Caso alguma componente de x^B torne-se negativa, a solução deixa de ser viável, e há que se reotimizar a solução utilizando o Dual Simplex ou resolvendo o problema outra vez.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$x^B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

c) Observando a solução ótima obtida em (a), determine que valor mínimo deve assumir c_2 para que x_2 entre na base.

Note que x_2 na solução ótima é uma variável não-básica.

$$FO_{alterada}: D = 240.y_1 \quad +150.y_2 \quad +(80+\Delta c_3).y_3$$

Um aumento de Δc_2(em c_2) na FO corresponde a uma alteração de $-\Delta c_2$ no coeficiente do quadro ótimo.

Portanto, x_2 permanecerá não-básica (MAX) enquanto:

$$37/16 - \Delta c_2 \geq 0 \Rightarrow \Delta c_2 \leq 37/16.$$

Logo, para que x_2 entre na base:

$$\Delta c_2 > 37/16$$

$$c_2' = c_2 + \Delta c_{2\min} = 2 + 37/16 = 69/16$$

3) Seja o seguinte problema de PL:

$$\text{Max} \quad Z = 5.x_1 \quad +4.x_2$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} 3.x_1 \quad + 2.x_2 &\leq 9 \\ x_1 \quad + 2.x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Sabe-se que o Quadro ótimo é:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	b
$l.0$	Max	1	0	0	$3/2$	$1/2$	16
$l.1$	X_1	0	1	0	$1/2$	$-1/2$	2
$l.2$	X_2	0	0	1	$-1/4$	$3/4$	$3/2$

a) Para qual intervalo de valores de c_2 a variável x_2 permaneceria básica?

$FO_{alterada}: Z = \quad 5.x_1 \quad + (4+\Delta c_2).x_2$

Na linha 0 do Quadro ótimo teríamos:

	Base	Z	X_1	X_2	SLK_2	SLK_3	b
$l.0$	Min	1	0	$-\Delta c_2$	$3/2$	$1/2$	16

Para eliminarmos $-\Delta c_2$ da linha 0, adicionamos Δc_2 vezes a linha 2 à linha 0.

	Base	Z	X_1	X_2	SLK_2	SLK_3	b
$l.0$	Min	1	0	0	$\frac{3}{2} - \frac{\Delta c_2}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{3.\Delta c_2}{4}$	$16 + \frac{3.\Delta c_2}{2}$

Para que o quadro continue ótimo (MAX):

$$\frac{3}{2} - \frac{\Delta c_2}{4} \geq 0 \Rightarrow \Delta c_2 \leq 6$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3.\Delta c_2}{4} \geq 0 \Rightarrow \Delta c_2 \geq -2/3$$

Portanto: $-2/3 \leq \Delta c_2 \leq 6$.

Logo, a variável x_2 permaneceria básica para $c_2' = (c_2 + \Delta c_2)$ no intervalo:

$$10/3 \leq c_2' \leq 10$$

b) Para qual intervalo de valores de b_1 a atual solução permaneceria básica?

Note que a Restrição 1 está ativa.

$Restrição_{alterada} \quad 3.x_1 \quad + 2.x_2 \quad + SLK_2 \quad = 9 + \Delta b_1$

O aumento de Δb_1 na Restrição 1 corresponde ao acréscimo de um vetor coluna no Quadro original ao lado do vetor b com coeficientes iguais aos da coluna do Quadro original associada à variável de folga/excesso correspondente multiplicada por Δb_1. Como esta coluna está sujeita às mesmas operações elementares aplicadas sobre o Quadro Simplex, no Quadro ótimo este vetor coluna será igual ao vetor coluna associado à variável básica correspondente multiplicado por Δb_1.

Quadro ótimo:

$$X_1 = 2 + \tfrac{1}{2}.\Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \geq -4$$

$$X_2 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{4}.\Delta b_1 \geq 0 \Rightarrow \Delta b_1 \leq 6$$

Portanto: $-4 \leq \Delta b_1 \leq 6$.

Logo, a faixa de valores de b_1 onde a presente solução permanece ótima é:

$$5 \leq b_1' \leq 15$$

c) Como ficaria a solução ótima se o lado direito fosse $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$?

$$x^B = B^{-1}.b$$

Caso alguma componente de x^B torne-se negativa, a solução deixa de ser viável, e há que se reotimizar a solução utilizando o Dual Simplex ou resolvendo o problema outra vez.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{4} & \tfrac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$x^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{4} & \tfrac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tfrac{7}{2} \end{bmatrix}$$

<u>Capítulo 4</u>

1) Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max} \quad Z = 2.x_1 + 3.x_2$$

$$\text{s.a.}\quad \begin{array}{llll} -2.x_1 & +3.x_2 & \leq 6 \\ x_1 & +2.x_2 & \geq 8 \\ x_1 & +x_2 & \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) Escreva o seu dual

Formato padrão do par (P) e (D)

(P′)

$$\text{Max}\quad Z = 2.x_1 \quad +3.x_2$$

$$\text{s.a.}\quad \begin{array}{llll} -2.x_1 & +3.x_2 & \leq 6 & [y_1] \\ -x_1 & -2.x_2 & \leq -8 & [y_2] \\ x_1 & +x_2 & \leq 6 & [y_3] \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(D′)

$$\text{Min}\quad D = 6.y_1 \quad -8.y_2 \quad +6.y_3$$

$$\text{s.a.}\quad \begin{array}{llll} -2.y_1 & -y_2 & +y_3 & \geq 2 \\ 3.y_1 & -2.y_2 & +y_3 & \geq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

(D) Fazendo $w = -y_2$

$$\text{Min}\quad D = 6.y_1 \quad +8.w \quad +6.y_3$$

$$\text{s.a.}\quad \begin{array}{llll} -2.y_1 & +w & +y_3 & \geq 2 \\ 3.y_1 & +2.w & +y_3 & \geq 3 \\ y_1 \geq 0, w \leq 0, y_3 \geq 0 \end{array}$$

b) Sabendo que a solução primal é $x_1 = 2{,}4$ e $x_2 = 3{,}6$, determine a solução dual.

Como x_1 e x_2 são variáveis básicas, primeiro encontra-se os valores das variáveis não básicas da solução primal, isto é, substitui-se a solução primal nas restrições do problema original, então temos $x_1 = 2{,}4$, $x_2 = 3{,}6$ e:

$$
\begin{array}{llllll}
[x_3] & -2.x_1 & +3.x_2 & +x_3 = 6 & & \Rightarrow x_3 = 0 \\
[x_4] & x_1 & +2.x_2 & +x_4 = 8 & & \Rightarrow x_4 = 1.6 \\
[x_5] & x_1 & +x_2 & +x_5 = 6 & & \Rightarrow x_5 = 0
\end{array}
$$

Logo, segundo o teorema da folga complementar se a variável da solução do problema primal é diferente de 0, a restrição equivalente do problema dual é satisfeita com folga 0, e se a restrição do problema tem folga não nula, a variável correspondente no seu dual é zero, então:

$$
\begin{array}{l}
[y_1] \geq 0 \\
[w_2] = 0 \\
[y_3] \geq 0 \\
[y_4] = 0 \\
[y_5] = 0
\end{array}
$$

Já que as variáveis 1 e 2 do problema primal são positivas, e as restrições 1 e 2 do problema dual são satisfeitas com folga zero e que a segunda restrição do primal é ativa, assim a segunda variável do dual zero, temos: $w_2 = y_4 = y_5 = 0$, logo, para resolver o problema dual basta resolver o seguinte sistema de equações:

$$
\begin{array}{lll}
-2.y_1 & +y_3 & = 2 \\
3.y_1 & +y_3 & = 3
\end{array}
\Rightarrow
\begin{cases}
y_1 = 1/5 \\
y_3 = 12/5
\end{cases}
$$

Portanto, a solução ótima do probl. dual é

$$D = 6.y_1 \quad -8.y_2 \quad +6.y_3 = 78/5 = 15{,}6.$$

$$
\begin{cases}
y_1 = 1/5 \\
y_2 = 0 \\
y_3 = 12/5
\end{cases}
$$

2) Dê o dual do problema a seguir numa tal forma que as variáveis duais sejam não-negativas:

(P)

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Max} & Z = 6.x_1 & +4.x_2 & +x_3 & +7.x_4 & +5.x_5 & & \\
 & 3.x_1 & +7.x_2 & -8.x_3 & +5.x_4 & +x_5 & =2 & [y_1] \\
\text{s.a.} & 2.x_1 & +x_2 & +3.x_3 & +2.x_4 & +9.x_5 & =6 & [y_2] \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,\ x_5 \text{ qualquer}}
\end{array}
$$

Aplicam-se as seguintes propriedades para construção do probl. dual:

- Se uma restrição do probl. (P) é do tipo (=), então a variável correspondente no probl. (D) é irrestrita em sinal.
- Se uma variável primal é irrestrita em sinal, a restrição dual correspondente é uma igualdade.

(D)

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Min} & D = 2.y_1 & +6.y_2 & & \\
 & 3.y_1 & +2.y_2 & \geq 6 & [x_1] \\
 & 7.y_1 & +y_2 & \geq 4 & [x_2] \\
 & -8.y_1 & +3.y_2 & \geq 1 & [x_3] \\
\text{s.a.} & 5.y_1 & +2.y_2 & \geq 7 & [x_4] \\
 & y_1 & +9.y_2 & =5 & [x_5] \\
 & \multicolumn{4}{l}{y_1 \text{ e } y_2 \text{ irrestritos em sinal}}
\end{array}
$$

Nessa formulação do probl. dual, as variáveis y_1 e y_2 são irrestritas em sinal, a formulação. Para se ter uma formulação dual com as variáveis não-negativas deve-se fazer:

$$
\begin{cases}
y_1 = y_1' - y_1'' \\
y_2 = y_2' - y_2'' \\
y_1', y_1'', y_2', y_2'' \geq 0
\end{cases}
$$

Substituindo as equações acima na formulação dual (D):

(D*)

$$
\text{Min} \quad D = 2.y_1' \quad -2.y_1'' \quad +6.y_2' \quad -6.y_2''
$$

$$\text{s.a.}\quad \begin{array}{lllll} 3.y_1' & -3.y_1'' & +2.y_2' & -2.y_2'' & \geq 6 \\ 7.y_1' & -7.y_1'' & +y_2' & -y_2'' & \geq 4 \\ -8.y_1' & +8.y_1'' & +3.y_2' & -3.y_2'' & \geq 1 \\ 5.y_1' & -5.y_1'' & +2.y_2' & -2.y_2'' & \geq 7 \\ y_1' & -y_1'' & +9.y_2' & -9.y_2'' & =5 \\ \multicolumn{5}{l}{y_1', y_1'', y_2', y_2'' \geq 0} \end{array}$$

3) Considere o seguinte problema primal:

(P)

Max $\quad Z = \boldsymbol{c.x}$

s.a $\quad \begin{array}{l} \boldsymbol{A.x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$; $\qquad$ Solução ótima: x^*

Suponha que a k-ésima restrição seja multiplicada por um escalar λ, $\lambda \neq 0$. Se y^* é a solução dual ótima do problema primal anterior, qual seria a solução ótima do dual do problema primal cuja k-ésima restrição foi multiplicada por λ ?

(D)

Min $\quad D = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{.y}$

s.a $\quad \begin{array}{l} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{.y} \geq c \\ \boldsymbol{y} \text{ irrestrito em sinal} \end{array}$ $\qquad$ Solução ótima: y^*

Note que ao multiplicar a k-ésima restrição do primal por λ, a solução ótima do novo primal fica inalterada ($= x^*$).

Pelo Teorema Principal da Dualidade, o valor ótimo da função objetivo do problema dual também fica inalterado, ou seja: $Z(x^*) = D(y^*)$.

À k-ésima restrição do primal está associada a k-ésima variável dual (y_k), cujo coeficiente na função objetivo no novo problema dual torna-se $\lambda.b_k$

Portanto, para que o resultado, $D(y^*)$, permaneça inalterado, a k-ésima variável dual na solução ótima terá que ser dividida por λ.

4) Seja o seguinte problema primal:

NOTA: O coeficiente de x_3 vale +5 neste Manual, coerente com o quadro ótimo, enquanto que no livro ele vale erradamente -5.

(P) Max $Z = 3.x_1 + x_2 + 5.x_3$

$$\text{s.a.}\quad \begin{array}{llll} 6.x_1 + 3.x_2 + 5x_3 \le 45 & (\text{mão de obra}) & [y_1] \\ 3.x_1 + 4.x_2 + 5.x_3 \le 30 & (\text{matéria prima}) & [y_2] \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

Cuja solução ótima é:

	Base	*Z*	X_1	X_2	X_3	X_4 $[y_1]$	X_5 $[y_2]$	*b*
l.0	*Max*	1	0	3	0	0	1	30
l.1	X_1	0	1	$-1/3$	0	$1/3$	$-1/3$	5
l.2	X_3	0	0	1	1	$-1/5$	$2/5$	3

a) Escreva o dual e identifique sua solução ótima.

(D)

Min $D = 45.y_1 + 30.y_2$

$$\text{s.a.}\quad \begin{array}{ll} 6.y_1 + 3.y_2 \ge 3 & [x_1] \\ 3.y_1 + 4.y_2 \ge 1 & [x_2] \\ 5.y_1 + 5.y_2 \ge 5 & [x_3] \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

Note que os valores ótimos das variáveis duais encontram-se na linha 0 do quadro ótimo primal, associados aos custos reduzidos das variáveis de folga.

$Y_1 = 0$
$Y_2 = 1$

Alternativamente, pode-se resolver usando o vetor de multiplicadores simplex. A base $\boldsymbol{B}$ no ponto ótimo é constituída pelos vetores associados às variáveis x_1, x_3, cujos coeficientes são: $\boldsymbol{c_B} = [3 \quad 5]$.

A inversa $\boldsymbol{B}^{-1}$ encontra-se disponível no quadro ótimo do primal:

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

A solução dual ótima é igual ao vetor dos multiplicadores simplex, ou seja:
$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{c_B}.\boldsymbol{B}^{-1} = [0 \quad 1]$.

Tendo-se Y_1 e Y_2, pode-se calcular:

$$Y_3 = 6.Y_1 + 3.Y_2 - 3 = 0$$
$$Y_4 = 3.Y_1 + 4.Y_2 - 1 = 3$$
$$Y_5 = -5.Y_1 + 5.Y_2 - 5 = 0$$

b) Suponha que 15 unidades adicionais de matéria prima podem ser obtidas ao custo de \$10. É rentável aceitar?

A matéria prima está associada à segunda restrição, então, acrescentando as unidades adicionais de matéria prima obtemos: $3.x_1 + 4x_2 + 5.x_3 \le 30 + \Delta b_2$, com $\Delta b_2 = 15$ logo, para equilibrar o sistema:

$$x_1 \to 5 - 1/3\,\Delta b_2 \ge 0 \Rightarrow \Delta b_2 \le 15$$
$$x_3 \to 3 + 2/5\,\Delta b_2 \ge 0 \Rightarrow \Delta b_2 \ge -15$$

Por tanto, a solução continua ótima no intervalo de $-15/2 \le \Delta b_2 \le 15$, como $\Delta b_2 = 15$ a solução continua ótima, é rentável aceitar a matéria prima. É possível remarcar ainda que o maior valor de b_2 para que a solução continue ótima é 45.

Se fosse avaliado o problema dual, a restrição de matéria prima está associada à segunda variável dual, y_2. Note que a solução ótima do problema dual nos diz que o preço mínimo pelo qual interessa vender a matéria prima em lugar de transformá-la é $y_2 = \$1$.

Se 15 unidades adicionais de matéria prima podem ser obtidas ao custo de \$10, então 1 unidade de matéria prima pode ser obtida ao custos de $\$2/3$. A este preço ($\$ \frac{2}{3} < \$1$), se obtêm também a mesma solução, que é interessante comprar a matéria prima.

c) Ache a solução ótima caso a quantidade disponível de matéria prima passe para 60 unidades.

Como foi visto na parte b) deste problema, a maior quantidade de matéria prima para que a solução continue ótima é se $b_2 = 45$ no máximo, isto será verificado a seguir:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B^{-1}.b'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 45 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Logo, pode-se re-otimizar o sistema, ou como será feito a seguir, aplicar o dual simplex.

Quadro 1:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
$l.0$	Max	1	0	3	0	0	1	60
$l.1$	X_1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-5
$l.2$	X_3	0	0	1	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	15
Razão				-9			-3	

A variável que sai da base é aquela com valor de $\bar{b}$ + negativo $\therefore x_1$ sai da base.

A variável não básica que entra na base (MAX) é aquela com maior valor para $\{ -\bar{c}_s / a_{r,s}, r = 1, \bar{a}_{r,j} < 0\} \therefore x_5$ entra na base.

Elemento pivô: $-\frac{1}{3}$

Nova base: x_5, x_3

Pivotamento:

- Multiplicar a linha 1 por -3.
- Multiplicar a linha 1 por -1 e somá-la à linha 0

- Multiplicar a linha 1 por $-\frac{2}{5}$ e somá-la à linha 2.

Quadro2:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
$l.0$	Max	1	3	2	0	1	0	45
$l.1$	X_5	0	-3	1	0	-1	1	15
$l.2$	X_3	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	9

Nenhuma variável básica possui o valor de $\bar{b}$ negativo.

Logo, a solução ótima foi encontrada:

Solução ótima:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 9 \end{cases} \qquad Z = 3.x_1 + .x_2 + 5.x_3 = 45$$

As variáveis de folga são: $x_4 = 0$ e $x_5 = 15$.

d) Para que valores de c_1 a solução permanece ótima?

Note que na solução ótima (quadro ótimo: x_1 é uma variável básica.

$$FOBJ_{alterada} : Z = (3 + \Delta c_1).x_1 \quad + x_2 \quad + 5.x_3$$

Na linha 0 do Quadro ótimo teríamos:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
$l.0$	Max	1	$-\Delta c_1$	3	0	0	1	30

Para eliminarmos $-\Delta c_1$ da linha 0, adicionamos Δc_1 vezes a linha 1 à linha 0.

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
$l.0$	Max	1	0	$3 - \frac{\Delta c_1}{3}$	0	$\frac{\Delta c_1}{3}$	$1 - \frac{\Delta c_1}{3}$	$30 + 5.\Delta c_1$

Para que o quadro continue ótimo (MAX):

$$3 - \frac{\Delta c_1}{3} \geq 0 \Rightarrow \Delta c_1 \leq 9$$

$$\frac{\Delta c_1}{3} \geq 0 \Rightarrow \Delta c_1 \geq 0$$

$$1 - \frac{\Delta c_1}{3} \geq 0 \Rightarrow \Delta c_1 \leq 3$$

Portanto: $0 \leq \Delta c_1 \leq 3$.

Logo, a faixa de valores de c_1 onde a presente solução permanece ótima é: $3 \leq c_1' \leq 6$.

5) Suponha que ao Problema 4, após achada a solução ótima (indicada no quadro), seja incluída a restrição $x_1 + x_2 \geq 4$. Acrescente a nova restrição e resolva usando o Método Dual Simplex.

A nova restrição na forma padrão fica: $-x_1 - x_2 + x_6 = -4$.

Adicionando esta restrição ao quadro ótimo:

	Base	*Z*	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
$l.0$	*Max*	1	0	3	0	0	1	0	30
$l.1$	X_1	0	1	$-1/3$	0	$1/3$	$-1/3$	0	5
$l.2$	X_3	0	0	1	1	$-1/5$	$2/5$	0	3
$l.3$	X_6	0	-1	-1	0	0	0	1	-4

Para colocar o quadro na forma canônica, faça o seguinte:

- Somar a linha 1 à linha 3.

Quadro2:

	Base	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b
$l.0$	Max	1	0	3	0	0	1	0	30
$l.1$	X_1	0	1	$-1/3$	0	$1/3$	$-1/3$	0	5
$l.2$	X_3	0	0	1	1	$-1/5$	$2/5$	0	3
$l.3$	X_6	0	0	$-4/3$	0	$1/3$	$-1/3$	1	1

A solução ótima foi encontrada:

Solução ótima:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases} \qquad z = 3.x_1 + x_2 + 5.x_3 = 30$$

As variáveis de folga são: $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ e $x_6 = 1$.

6) Escreva o dual do seguinte problema de programação linear:

Min $\quad Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}.x_{ij}$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = F_i, \; i = 1,2,..., m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, \; j = 1,2,..., n$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ para } i = 1,2,..., m \text{ e } j = 1,2,..., n$$

Desenvolvendo os somatórios:

Min $\quad Z = c_{11}.x_{11} + c_{12}.x_{12} + ... + c_{1n}x_{1n} + ... + c_{m1}.x_{m1} + c_{m2}.x_{m2} + ... + c_{mn}.x_{mn}$

s.a

$$\begin{array}{lc} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = F_1 & [u_1] \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} = F_2 & [u_2] \\ \vdots & \vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} = F_m & [u_m] \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} &= D_1 \quad [v_1] \\
x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} &= D_2 \quad [v_2] \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \\
x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} &= D_n \quad [v_n]
\end{aligned}
$$

O dual é:

Max $\quad D = F_1.u_1 + \ldots + F_m.u_m + \ldots + D_1.v_1 + \ldots + D_n.v_n$

$$
\text{s.a} \quad
\begin{aligned}
& u_1 + v_1 \le c_{11} \\
& \quad \vdots \\
& u_1 + v_n \le c_{1n} \\
& u_2 + v_1 \le c_{21} \\
& \quad \vdots \\
& u_2 + v_n \le c_{2n} \\
& \vdots \ \ \vdots \ \ \vdots \ \ \vdots \\
& u_m + v_1 \le c_{m1} \\
& \quad \vdots \\
& u_m + v_n \le c_{mn} \\
& u_i, v_j \ \text{irrestritos em sinal} \ \forall i, j
\end{aligned}
$$

Reescrevendo o dual:

Max $\quad \sum_{i=1}^{m} F_i.u_i + \sum_{j=1}^{n} D_j.v_j$

$$
\text{s.a} \quad
\begin{aligned}
& u_i + v_j \le c_{ij}, \quad i = 1,\ldots, m \\
& \qquad\qquad\qquad\ \ j = 1,\ldots n \\
& u_i, v_j \ \text{irrestritos em sinal} \ \forall i, j
\end{aligned}
$$

7) Considere o seguinte problema de minimização:

Min $\quad D = 240.y_1 + 150.y_2 + 80.y_3$

$$
\text{s.a.} \quad
\begin{aligned}
& 2.y_1 + 2.y_2 + y_3 \ge 5 \\
& 3.y_1 + y_2 \ge 7 \\
& 4.y_1 + y_2 \ge 3 \\
& y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Resolva o modelo usando o Método Dual Simplex.

Esse problema pode ser reescrito como:

Min $D = 240.y_1 + 150.y_2 + 80.y_3$

s.a.
$$\begin{array}{l} 2.y_1 + 2.y_2 + y_3 - y_4 = 5 \\ 3.y_1 + y_2 - y_5 = 7 \\ 4.y_1 + y_2 - y_6 = 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0 \end{array}$$

Este problema poderia ser resolvido com a adição de variáveis artificiais. Porém, o Método Dual Simplex oferece uma alternativa eficiente.

Min $D = 240.y_1 + 150.y_2 + 80.y_3$

s.a.
$$\begin{array}{l} -2.y_1 - 2.y_2 - y_3 + y_4 = -5 \\ -3.y_1 - y_2 + y_5 = -7 \\ -4.y_1 - y_2 + y_6 = -3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0 \end{array}$$

D expresso em termos das variáveis não-básicas: $D - 240.y_1 - 150.y_2 - 80.y_3 = 0$

Quadro 1:

	Base	Z	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	b
$l.0$	*Min*	1	-240	-150	-80	0	0	0	0
$l.1$	Y_4	0	-2	-2	-1	1	0	0	-5
$l.2$	Y_5	0	-3	-1	0	0	1	0	-7
$l.3$	Y_6	0	-4	-1	0	0	0	1	-3
	Razão		80	150					

A variável que sai da base é aquela com valor de $\bar{b}$ + negativo $\therefore$ y_5 sai da base.

A variável não-básica que entra na base (probl. MIN) é aquela com menor valor para $\{ {-\bar{c}_s}/{a_{r,s}}, r = 2, \bar{a}_{r,j} < 0 \}$ $\therefore$ y_1 entra na base.

Elemento pivô: - 3.

Nova base: y_4, y_1, y_6.

Pivotamento:

- Multiplicar a linha 2 por $-1/3$.

- Multiplicar a linha 2 por 240 e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 2 por 2 e somá-la à linha 1.
- Multiplicar a linha 2 por 4 e somá-la à linha 3

Quadro2:

	Base	Z	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	b
$l.0$	Min	1	0	-70	-80	0	-80	0	560
$l.1$	Y_4	0	0	$-4/3$	-1	1	$-2/3$	0	$-1/3$
$l.2$	Y_1	0	1	$1/3$	0	0	$-1/3$	0	$7/3$
$l.3$	Y_6	0	0	$1/3$	0	0	$-4/3$	1	$19/3$
	Razão			52,5	80		120		

A variável que sai da base é aquela com valor de $\bar{b}$ + negativo $\therefore$ y_4 sai da base.

A variável não-básica que entra na base (MIN) é aquela com menor valor para $\{-\bar{c}_s / a_{r,s}, r = 1, \bar{a}_{r,j} < 0\}$ $\therefore$ y_2 entra na base.

Elemento pivô: $-4/3$.

Nova base: y_2, y_1, y_6.

Pivotamento:

- Multiplicar a linha 1 por $-3/4$.
- Multiplicar a linha 1 por 70 e somá-la à linha 0
- Multiplicar a linha 1 por $-1/3$ e somá-la à linha 2.
- Multiplicar a linha 1 por $-1/3$ e somá-la à linha 3

Quadro3:

	Base	Z	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	b
$l.0$	Min	1	0	0	$-55/2$	$-105/2$	-45	0	$1155/2$
$l.1$	Y_2	0	0	1	$3/4$	$-3/4$	$1/2$	0	$1/4$
$l.2$	Y_1	0	1	0	$-1/4$	$1/4$	$-1/2$	0	$9/4$
$l.3$	Y_6	0	0	0	$-1/4$	$1/4$	$-3/2$	1	$25/4$

Nenhuma variável básica possui o valor de $\bar{b}$ negativo.

Logo, a solução ótima foi encontrada:

Solução ótima:

$$\begin{cases} y_1 = 9/4 \\ y_2 = 1/4 \\ y_3 = 0 \end{cases} \qquad D = 240.y_1 + 150.y_2 + 80.y_3 = 1155/2$$

As variáveis de folga são: $y_4 = 0$, $y_5 = 0$ e $y_6 = 25/4$.

Capítulo 5

NOTA: Nos quadros abaixo, os custos em cada célula estão indicados à direita da célula, precedidas do sinal "〈 ".

1) Estabeleça o melhor plano de transporte, sabendo que o quadro de custos unitários:

	1	2	3	4	5	6	Oferta
1	9	12	9	6	9	10	5
2	7	3	7	7	5	5	6
3	6	5	9	11	3	11	2
4	6	8	11	2	2	10	9
Demanda	4	4	6	2	4	2	22

Obtenção da solução básica inicial:

a) Regra do Canto Noroeste

Começa no x_{11}:

$x_{11} = \min(4,5) = 4$ $\qquad x_{12} = \min(4,1) = 1$ $\qquad x_{22} = \min(3,6) = 3$

$x_{23} = \min(6,3) = 3$ $\qquad x_{33} = \min(3,2) = 2$ $\qquad x_{43} = \min(1,9) = 1$

$x_{44} = \min(2,8) = 2$ $\qquad x_{45} = \min(4,6) = 4$ $\qquad x_{46} = 2$

	1	2	3	4	5	6	Oferta
1	4〈 9	1〈 12	〈 9	〈 6	〈 9	〈 10	5
2	〈 7	3〈 3	3〈 7	〈 7	〈 5	〈 5	6
3	〈 6	〈 5	2〈 9	〈 11	〈 3	〈 11	2
4	〈 6	〈 8	1〈 11	2〈 2	4〈 2	2〈 10	9
Demanda	4	4	6	2	4	2	22

Z = 4x9 + 12x1 + 3x3 + 3x7 + 2x9 + 11x1 + 2x2 + 4x2 + 2x10 = 139

b) Método do Custo Mínimo

$c_{44}, c_{45} = 2$ $\quad$ $c_{31}, c_{41}, c_{14} = 6$ $\quad$ $c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{15} = 9$

$c_{22}, c_{35} = 3$ $\quad$ $c_{21}, c_{23}, c_{24} = 7$ $\quad$ $c_{16}, c_{46} = 10$

$c_{32}, c_{25}, c_{26} = 5$ $\quad$ $c_{42} = 8$ $\quad$ $c_{43}, c_{34}, c_{36} = 11$

$c_{12} = 12$

Começa no menor custo: c_{44}

$x_{44} = \min(2,9) = 2$ $\quad$ $x_{45} = \min(4,7) = 4$ $\quad$ $x_{22} = \min(4,6) = 4$

$x_{26} = \min(2,6) = 2$ $\quad$ $x_{31} = \min(2,4) = 2$ $\quad$ $x_{41} = \min(2,5) = 2$

$x_{13} = \min(5,6) = 5$ $\quad$ $x_{46} = \min(0,1) = 0$ $\quad$ $x_{43} = \min(1,1) = 1$

	1	2	3	4	5	6	Oferta
1	〈 9	〈 12	5〈 9	〈 6	〈 9	〈 10	5
2	〈 7	4〈 3	〈 7	〈 7	〈 5	2〈 5	6
3	2〈 6	〈 5	〈 9	〈 11	〈 3	〈 11	2
4	2〈 6	〈 8	1〈 11	2〈 2	4〈 2	0〈 10	9
Demanda	4	4	6	2	4	2	22

Z = 5x9 +4x3 +2x5 +2x6 +2x6 +1x11 +2x2 + 4x2 +0x10 = 114

c) Método de Vogel

	1	2	3	4	5	6	Oferta	Δ
1	〈9	〈12	〈9	〈6	〈9	〈10	5	3
2	〈7	〈3	〈7	〈7	〈5	〈5	6	2
3	〈6	〈5	〈9	〈11	〈3	〈11	2	2
4	〈6	〈8	〈11	〈2	〈2	〈10	9	0
Demanda	4	4	6	2	4	2	22	
Δ	0	2	2	4	1	5		

$x_{26} = \min(2,6) = 2$

	1	2	3	4	5	6	Oferta	Δ
1	〈9	〈12	〈9	〈6	〈9	〈10	5	3
2	〈7	〈3	〈7	〈7	〈5	2〈5	4	2
3	〈6	〈5	〈9	〈11	〈3	〈11	2	2
4	〈6	〈8	〈11	〈2	〈2	〈10	9	0
Demanda	4	4	6	2	4	0	22	
Δ	0	2	2	4	1	x		

$x_{44} = \min(2,9) = 2$

	1	2	3	4	5	6	Oferta	Δ
1	9	12	9	6	9	10	5	0
2	7	3	7	7	5	2 〈 5	4	2
3	6	5	9	11	3	11	2	2
4	6	8	11	2 〈 2	2	10	7	4
Demanda	4	4	6	0	4	0	22	
Δ	0	2	2	x	1	x		

$x_{45} = \min(4,7) = 4$

	1	2	3	4	5	6	Oferta	Δ
1	〈 9	〈 12	〈 9	6	9	10	5	0
2	〈 7	〈 3	〈 7	7	5	2 〈 5	4	4
3	〈 6	〈 5	〈 9	11	3	11	2	1
4	〈 6	〈 8	〈 11	2 〈 2	4 〈 2	10	3	2
Demanda	4	4	6	0	0	0	22	
Δ	0	2	2	x	x	x		

$x_{22} = \min(4,4) = 4$

	1	2	3	4	5	6	Oferta	Δ
1	〈 9	〈 12	〈 9	〈 6	〈 9	〈 10	5	0
2	〈 7	4〈 3	〈 7	〈 7	〈 5	2〈 5	0	x
3	〈 6	〈 5	〈 9	〈 11	〈 3	〈 11	2	3
4	〈 6	〈 8	〈 11	2〈 2	4〈 2	〈 10	3	5
Demanda	4	0	6	0	0	0	22	
Δ	0	0	0	x	x	x		

$x_{32} = \min(0,2) = 0$

	1	2	3	4	5	6	Oferta	Δ
1	〈 9	〈 12	〈 9	〈 6	〈 9	〈 10	5	0
2	〈 7	4〈 3	〈 7	〈 7	〈 5	2〈 5	0	x
3	〈 6	0〈 5	〈 9	〈 11	〈 3	〈 11	2	3
4	〈 6	〈 8	〈 11	2〈 2	4〈 2	〈 10	3	5
Demanda	4	0	6	0	0	0	22	
Δ	3	x	0	x	x	x		

$x_{41} = \min(4,3) = 3$

	1	2	3	4	5	6	Oferta	Δ
1	〈9	〈12	〈9	〈6	〈9	〈10	5	0
2	〈7	4〈3	〈7	〈7	〈5	2〈5	0	x
3	〈6	0〈5	〈9	〈11	〈3	〈11	2	3
4	3〈6	〈8	〈11	2〈2	4〈2	〈10	0	x
Demanda	1	0	3	0	0	0	22	
Δ	3	x	0	x	x	x		

$x_{31} = \min(1,2) = 1$

	1	2	3	4	5	6	Oferta	Δ
1	〈9	〈12	〈9	〈6	〈9	〈10	5	0
2	〈7	4〈3	〈7	〈7	〈5	2〈5	0	x
3	1〈6	0〈5	〈9	〈11	〈3	〈11	1	3
4	3〈6	〈8	〈11	2〈2	4〈2	〈10	0	x
Demanda	0	0	3	0	0	0	22	
Δ	x	x	0	x	x	x		

$x_{13} = 5$

$x_{33} = 1$

Solução inicial pelo método de Vogel:

	1	2	3	4	5	6	Oferta
1	〈9	〈12	5〈9	〈6	〈9	〈10	5
2	〈7	4〈3	〈7	〈7	〈5	2〈5	6
3	1〈6	0〈5	1〈9	〈11	〈3	〈11	2
4	3〈6	〈8	〈11	2〈2	4〈2	〈10	9
Demanda	4	4	6	2	4	2	22

Z = 5×9 + 4×3 + 2×5 + 6×1 + 5×0 + 1×9 + 3×6 + 2×2 +4×2= 112

Usando a solução inicial pelo Método do Custo Mínimo tenta-se melhorar a solução usando o Método Caminho das Pedras:

θ em x_{ij} faz o caminho:

$x_{11} \rightarrow 9-9+11-6=5$ $\qquad$ $x_{12} \rightarrow 12-3+5-10+11-9=6$

$x_{14} \rightarrow 6-9+11-2=6$ $x_{15} \rightarrow 9-2+11-9=9$

$x_{16} \rightarrow 10-10+11-9=2$ $x_{21} \rightarrow 7-5+10-6=6$

$x_{23} \rightarrow 7-5+10-11=1$ $x_{24} \rightarrow 7-5+10-2=10$

$x_{25} \rightarrow 5-5+10-2=8$ $x_{32} \rightarrow 5-3+5-10+6-6=-3$

$x_{33} \rightarrow 9-11+6-6=-2$ $x_{34} \rightarrow 11-2+6-6=9$

$x_{35} \rightarrow 3-2+6-6=1$ $x_{36} \rightarrow 11-10+6-6=1$

$x_{42} \rightarrow 8-10+5-3=0$

O menor valor é -3:

$x_{32} \rightarrow$

$x_{32}=\theta; x_{22}=4-\theta; x_{26}=2+\theta; x_{46}=0-\theta; x_{41}=2+\theta; x_{31}=2-\theta$

$\theta=0 \Rightarrow x_{32}=0$

$\leftarrow x_{46}$

Testando novamente:

$x_{11} \rightarrow 9-9+11-6=5$ $x_{12} \rightarrow 12-9+11-6+6-5=9$

$x_{14} \rightarrow 6-2+11-9=6$ $x_{15} \rightarrow 9-2+11-9=9$

$x_{16} \rightarrow 10-5+3-5+6-6+11-9=5$ $x_{21} \rightarrow 7-6+5-3=3$

$x_{23} \rightarrow 7-11+6-6+5-3=0$ $x_{24} \rightarrow 7-2+6-6+5-3=7$

$x_{25} \rightarrow 5-2+6-6+5-3=5$ $x_{33} \rightarrow 9-6+6-11=-2$

$x_{34} \rightarrow 11-2+6-6=9$ $x_{35} \rightarrow 3-2+6-6=1$

$x_{36} \rightarrow 11-5+3-5=4$ $x_{42} \rightarrow 8-5+6-6=3$

$x_{46} \rightarrow 10-5+3-5+6-6=3$

O menor valor é -2:

$x_{33} \rightarrow$

$x_{33} = \theta; x_{43} = 1 - \theta; x_{41} = 6 + \theta; x_{31} = 6 - \theta$

$\theta = 1 \Rightarrow x_{33} = 1$

$\leftarrow x_{43}$

$Z = Z^0 + x_{43}.\theta = 114 + (-2) = 112$

Testando novamente:

$x_{11} \to 9 - 9 + 9 - 6 = 3$ $\qquad$ $x_{12} \to 12 - 9 + 9 - 5 = 7$

$x_{14} \to 6 - 2 + 6 - 6 + 9 - 9 = 4$ $\qquad$ $x_{15} \to 9 - 2 + 6 - 6 + 9 - 9 = 7$

$x_{16} \to 10 - 5 + 3 - 5 + 9 - 9 = 3$ $\qquad$ $x_{21} \to 7 - 3 + 5 - 6 = 3$

$x_{23} \to 7 - 9 + 5 - 3 = 0$ $\qquad$ $x_{24} \to 7 - 2 + 6 - 6 + 5 - 3 = 7$

$x_{25} \to 5 - 2 + 6 - 6 + 5 - 3 = 5$ $\qquad$ $x_{34} \to 11 - 2 + 6 - 6 = 9$

$x_{35} \to 3 - 2 + 6 - 6 = 1$ $\qquad$ $x_{36} \to 11 - 5 + 3 - 5 = 4$

$x_{42} \to 8 - 5 + 6 - 6 = 3$ $\qquad$ $x_{42} \to 11 - 9 + 6 - 6 = 2$

$x_{46} \to 10 - 5 + 3 - 5 + 6 - 6 = 3$

Não há nenhum negativo. Logo, a solução ótima foi encontrada.

Quadro final:

	1	2	3	4	5	6	Oferta
1	〈 9	〈 12	5〈 9	〈 6	〈 9	〈 10	5
2	〈 7	4〈 3	1〈 7	〈 7	〈 5	2〈 5	6
3	1〈 6	0〈 5	〈 9	〈 11	〈 3	〈 11	2
4	3〈 6	〈 8	〈 11	2〈 2	4〈 2	〈 10	9
Demanda	4	4	6	2	4	2	22

Observa-se que a solução inicial do Vogel é também solução ótima, neste caso.

2) Custos unitários dados no quadro abaixo:

	A	B	C	D
I	17	20	13	12
II	15	21	23	25
III	15	14	15	17

Obtenção da solução inicial pelo Método do Custo Mínimo:

$c_{14} = 12$ $\quad c_{21}, c_{31}, c_{33} = 15$ $\quad c_{22} = 21$

$c_{13} = 13$ $\quad c_{11}, c_{34} = 17$ $\quad c_{24} = 25$

$c_{32} = 14$ $\quad c_{12} = 20$ $\quad c_{23} = 26$

Começa no menor custo: c_{14}

$x_{14} = \min(70{,}95) = 70$ $\quad x_{32} = \min(60{,}115) = 60$ $\quad x_{21} = \min(50{,}90) = 50$

$x_{33} = \min(70{,}55) = 55$ $\quad x_{24} = \min(40{,}25) = 25$ $\quad x_{23} = 15$

	A	B	C	D	Oferta
I	⟨ 17	⟨ 20	⟨ 13	70 ⟨ 12	70
II	50 ⟨ 15	⟨ 21	15 ⟨ 23	25 ⟨ 25	90
III	⟨ 15	60 ⟨ 14	55 ⟨ 15	⟨ 17	115
Demanda	50	60	70	95	

Usando a solução inicial pelo Método do Custo Mínimo tenta-se melhorar a solução usando o Método Caminho das Pedras:

$x_{11} \rightarrow 17 - 15 + 25 - 12 = 15$ $\quad x_{12} \rightarrow 20 - 14 + 15 - 26 + 25 - 12 = 8$

$x_{13} \rightarrow 13 - 12 + 25 - 26 = 0$ $\quad x_{22} \rightarrow 21 - 26 + 15 - 14 = -4$

$x_{31} \rightarrow 15 - 15 + 26 - 15 = 11$ $\quad x_{34} \rightarrow 17 - 25 + 26 - 15 = 3$

O menor valor é -4:

$x_{22} \rightarrow$ $\quad \leftarrow x_{23}$

$$\begin{array}{cc} \theta & 15-\theta \\ 60-\theta & 55+\theta \end{array} \qquad \theta = 15$$

$Z = Z^0 + (-4).(\theta) = 4270 - 60 = 4210$

Testando novamente:

$x_{11} \rightarrow 17 - 15 + 25 - 12 = 15$ $\quad$ $x_{12} \rightarrow 20 - 12 + 25 - 21 = 12$

$x_{13} \rightarrow 13 - 12 + 25 - 21 + 14 - 15 = 4$ $\quad$ $x_{31} \rightarrow 15 - 14 + 21 - 15 = 7$

$x_{34} \rightarrow 17 - 25 + 21 - 14 = -1$ $\quad$ $x_{23} \rightarrow 26 - 15 + 14 - 21 = 4$

O menor valor é -1:

$x_{34} \rightarrow$ $\quad$ $\leftarrow x_{24}$

$$\begin{array}{ccc} 15+\theta & & 25-\theta \\ 45-\theta & 70 & \theta \end{array} \qquad \theta = 25$$

$$Z = Z^0 + (-1).(\theta) = 4210 - 25 = 4185$$

Testando novamente:

$x_{11} \rightarrow 17 - 12 + 17 - 14 + 21 - 15 = 14$ $\quad$ $x_{12} \rightarrow 20 - 12 + 17 - 14 = 11$

$x_{13} \rightarrow 13 - 12 + 17 - 15 = 3$ $\quad$ $x_{23} \rightarrow 26 - 15 + 14 - 21 = 4$

$x_{24} \rightarrow 25 - 17 + 14 - 21 = 1$ $\quad$ $x_{31} \rightarrow 15 - 14 + 21 - 15 = 7$

Não há nenhum negativo. Logo, a solução ótima foi encontrada.

Quadro ótimo:

	A	B	C	D	Oferta
I	〈 17	〈 20	〈 13	70 〈 12	70
II	50 〈 15	40 〈 21	〈 23	〈 25	90
III	〈 15	20 〈 14	70 〈 15	25 〈 17	115
Demanda	50	60	70	95	

3) Empresa Sazonal Ltda.

Sejam as variáveis de decisão:

X_1 = produção no mês de dezembro

X_2 = produção no mês de janeiro

X_3 = produção no mês de fevereiro

X_4 = produção no mês de março

Y_1 = estoque ao final de dezembro para venda em janeiro

Y_2 = estoque ao final de janeiro para venda em fevereiro

Y_3 = estoque ao final de fevereiro para venda em março

Y_4 = estoque ao final de março para venda em mês posterior

a)

FO Min $Z = 34\ X_1 + 35\ X_2 + 32X_3 + 31X_4 + 10(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)$

s.a.: $X_1 = 300 + Y_1$

$Y_1 + X_2 = 450 + Y_2$

$Y_2 + X_3 = 450 + Y_3$

$Y_3 + X_4 = 250 + Y_4$

$X_i \leq 0\ i = 1,2,3,4$

$X_i, Y_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4$

b)

	Dez.	Jan.	Fev.	Mar.	Mês posterior	
X_1	〈 34	〈 10			〈 0	400
X_2		〈 35	〈 10		〈 0	400
X_3			〈 32	〈 10	〈 0	400
X_4				〈 31	〈 0	400
	300	450	450	250	150	1600

4) Resolva os seguintes problemas de designação.

a)

	1	2	3	4	5	(min.linha)

A	12	8	7	15	4	(4)
B	7	9	17	14	10	(7)
C	9	6	12	6	7	(6)
D	7	6	14	6	10	(6)
E	9	6	12	10	6	(6)

	1	2	3	4	5	
A	8	4	3	11	0	
B	0	2	10	7	3	
C	3	0	6	0	1	
D	1	0	8	0	4	
E	3	0	6	4	0	
(min.col.)	(0)	(0)	(3)	(0)	(0)	

	1	2	3	4	5	
A	8	4	0	11	0	
B	0	2	7	7	3	
C	3	0	3	0	1	
D	1	0	5	0	4	
E	3	0	3	4	0	

O número mínimo de retas é 5 (n = 5).

Designação ótima:

A $\rightarrow 3$ $(c_{A3} = 7)$
B $\rightarrow 1$ $(c_{B1} = 7)$
C $\rightarrow 2$ $(c_{C2} = 6)$
D $\rightarrow 4$ $(c_{D4} = 6)$
E $\rightarrow 5$ $(c_{E5} = 6)$

Z = 7 + 7 + 6 + 6 + 6 = 32

b)

	1	2	3	4	5	(min.linha)
A	0	15	6	14	18	(0)
B	7	5	10	4	13	(4)

C	11	14	13	10	14	(10)
D	17	22	15	26	24	(15)
E	12	8	10	9	13	(8)

	1	2	3	4	5	
A	0	15	6	14	18	
B	3	1	6	0	9	
C	1	4	3	0	4	
D	2	7	0	11	9	
E	4	0	2	1	5	
(min.col.)	(0)	(0)	(0)	(0)	(4)	

	1	2	3	4	5	
A	0	15	6	14	14	
B	3	1	6	0	5	
C	1	4	3	0	0	
D	2	7	0	11	5	
E	4	0	2	1	1	

O número mínimo de retas é 5 (n = 5).

Designação ótima:

A $\rightarrow 1$ $(c_{A1} = 0)$
B $\rightarrow 4$ $(c_{B4} = 4)$
C $\rightarrow 5$ $(c_{C5} = 14)$
D $\rightarrow 3$ $(c_{D3} = 15)$
E $\rightarrow 2$ $(c_{E2} = 8)$

Z = 0 + 4 + 14 + 15 + 8 = 41

c)

	M1	M2	M3	M4	M5	(min.linha)
T1	10	11	4	2	8	(2)
T2	7	11	10	14	12	(7)
T3	5	6	9	12	14	(5)

T4	13	15	11	10	7	(7)
T5	5	3	3	7	5	(3)

	M1	M2	M3	M4	M5	
T1	8	9	2	0	6	
T2	0	4	3	7	5	
T3	0	1	4	7	9	
T4	6	8	4	3	0	
T5	2	0	0	4	2	
(min.col.)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	

O número mínimo de retas é 4 (# retas < n).

Menor elemento não coberto por alguma dessas linhas é o número 1.

	M1	M2	M3	M4	M5	
T1	8	8	1	0	6	
T2	0	3	2	7	5	
T3	0	0	3	7	9	
T4	6	7	3	3	0	
T5	2	0	0	4	2	

Agora, o número mínimo de retas é 5 (n = 5).

Designação ótima:

$\text{T1} \rightarrow \text{M4}\ (c_{T1,M4} = 2)$

$\text{T2} \rightarrow M1\ (c_{T2,M1} = 7)$

$\text{T3} \rightarrow M2\ (c_{T3,M2} = 6)$

$\text{T4} \rightarrow M5\ (c_{T4,M5} = 7)$

$\text{T5} \rightarrow M3\ (c_{T5,M3} = 3)$

Z = 2 + 7 + 6 + 7 + 3 = 25

5) Sejam:

X_t = produção normal no período t, t=1,...,T

Y_t = produção em horas extras no período t, t=1,...,T

e_t = estoque ao final do período t, t=1,...,T (e_0=estoque inicial)

S_t = unidades

FO: Min $\sum_{t=1}^{T} p_t X_t + \sum_{t=1}^{T} q_t Y_t + h\sum_{t=1}^{T} e_t$

s.a.
$$\begin{aligned} & e_0 + X_1 + Y_1 = S_1 + e_1 \\ & e_1 + X_2 + Y_2 = S_2 + e_2 \\ & \ldots \\ & e_{T-1} + X_T + Y_T = S_T + e_T \\ & X_t, Y_t, e_t \geq 0 \end{aligned}$$

6) Sejam:

x_{ij} =quantidade de caixas de tomate produzidas na fazenda i e enviadas para a fábrica j, i=1,...,m e j=1,...,n.

y_{jk} = quantidade de sopa produzida na fábrica j e enviadas para a loja k, j=1,...,n e k=1,...,l

v_k = vendas da loja k, k=1,...,l

Max $\sum_{k=1}^{l} h_k v_k - \sum_{i=1}^{m} f_i . \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} g_j \sum_{k=1}^{l} y_{jk} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} q_{jk} y_{jk}$

s.a.
$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i && i = 1,\ldots,m \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = R_j \sum_{k=1}^{l} y_{kj} && j = 1,\ldots, n \\ & \sum_{j=1}^{n} y_{jk} = v_k \quad \geq c_k \\ & \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{l}} \mathrm{y}_{\mathrm{jk}} = b_j \end{aligned}$$

Todas as variáveis positivas ($\geq$ 0)

Capítulo 6

6.1. Dado o problema abaixo (cf. Balinski)

$$\text{Min} \quad Z = 4x_1 + 5x_2$$
$$\text{sujeito a} \quad x_1 + 4x_2 \geq 5$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

Pede-se: a) Resolver pelo método dos planos de corte.

b) Resolver pelo método *branch and bound*.

Convertendo à forma padrão:

$$\text{Min} \quad 4.x_1 + 5.x_2$$

s.a.:

$$\begin{aligned} x_1 + 4.x_2 - x_3 + x_5 &= 5 \\ 3.x_1 + 2.x_2 - x_4 + x_6 &= 7 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \quad \text{e} \quad &\text{inteiros} \end{aligned}$$

Usando o método das duas fases. Primeira fase:

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
W	4	6	-1	-1	0	0	12
x_5	1	4	-1	0	1	0	5
x_6	3	2	0	-1	0	1	7

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
W	5/2	0	1/2	-1	-3/2	0	9/2
x_2	1/4	1	-1/4	0	1/4	0	5/4
x_6	5/2	0	1/2	-1	-1/2	1	9/2

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
W	0	0	0	0	-1	-1	0
x_2	0	1	-3/10	1/10	3/10	-1/10	4/5

x_1	1	0	1/5	-2/5	-1/5	2/5	9/5

w = 0, e as variáveis artificiais x_5 e x_6 estão fora da base. Segunda fase:

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	0	0	-7/10	-11/10	56/5
x_2	0	1	-3/10	1/10	4/5
x_1	1	0	1/5	-2/5	9/5

A solução ótima é encontrada: x_1 =9/5 e x_2 =4/5, Z=56/5, mas não são números inteiros.

a) Resolvendo o problema inteiro usando o método de planos de corte:

$$x_2 = 4/5 - (-3/10x_3 + 1/10x_4)$$
$$x_2 = (0 + x_3 + 0x_4) + (4/5 - 7/10x_3 - 1/10x_4) \Rightarrow -7/10x_3 - 1/10x_4 + s_1 = -4/5$$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	b
W	0	0	-7/10	-11/10	0	56/5
x_2	0	1	-3/10	1/10	0	4/5
x_1	1	0	1/5	-2/5	0	9/5
s_1	0	0	-7/10	-1/10	1	-4/5

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	b
W	0	0	0	-1	-1	12
x_2	0	1	0	1/7	-3/7	8/7
x_1	1	0	0	-3/7	2/7	11/7
x_3	0	0	1	1/7	-10/7	8/7

Logo:

$$x_1 = 11/7 - (-3/7x_4 + 2/7s_1)$$
$$x_1 = (1 + x_4 - 0s_1) + (4/7 - 4/7x_4 - 2/7s_1) \Rightarrow -4/7x_4 - 2/7s_1 + s_2 = -4/7$$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
W	0	0	0	-1	-1	0	12
x_2	0	1	0	1/7	-3/7	0	8/7
x_1	1	0	0	-3/7	2/7	0	11/7
x_3	0	0	1	1/7	-10/7	0	8/7
s_2	0	0	0	-4/7	-2/7	1	-4/7

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
W	0	0	0	0	-1/2	-7/4	13
x_2	0	1	0	0	-1/2	1/4	1
x_1	1	0	0	0	1/2	-3/4	2
x_3	0	0	1	0	-3/2	1/4	1
x_4	0	0	0	1	1/2	-7/4	1

Solução inteira encontrada: x_1 =2 e x_2 =1, Z=13.

b) Usando o método branch-and-bound.

Tem-se: PL-2: $x_1 \leq 1$, PL-3: $x_1 \geq 2$, PL-4: $x_2 \leq 0$, PL-5: $x_2 \geq 1$.

PL-2: $x_1 \leq 1$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_{PL-2}	b
Z	0	0	-7/10	-11/10	0	56/5
x_2	0	1	-3/10	1/10	0	4/5
x_1	1	0	1/5	-2/5	0	9/5
s_{PL-2}	0	0	-1/5	2/5	1	-4/5

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_{PL-2}	b

Z	0	0	0	-25/20	-7/10	14
x_2	0	1	0	-1/2	-3/2	2
x_1	1	0	0	0	1	1
x_3	0	0	1	-2	-5	4

PL-3: $x_1 \geq 2$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_{PL-3}	b
Z	0	0	-7/10	-11/10	0	56/5
x_2	0	1	-3/10	1/10	0	4/5
x_1	1	0	1/5	-2/5	0	9/5
s_{PL-3}	0	0	1/5	-2/5	1	-1/5

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_{PL-4}	b
Z	0	0	-5/4	0	-11/8	47/4
x_2	0	1	-1/4	0	1/4	3/4
x_1	1	0	0	0	-1	2
x_4	0	0	-1/2	1	-5/2	1/2

PL-4: $x_2 \leq 0$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_{PL-4}	b
Z	0	0	-7/10	-11/10	0	56/5
x_2	0	1	-3/10	1/10	0	4/5
x_1	1	0	1/5	-2/5	0	9/5
s_{PL-4}	0	0	3/10	-1/10	1	-4/5

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_{PL-4}	b
Z	0	0	-4	0	-4	20

x_2	0	1	0	0	1	0
x_1	1	0	-1	0	4	5
x_4	0	0	-3	1	-10	8

PL-5: $x_2 \geq 1$.

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_{PL-5}	b
Z	0	0	-7/10	-11/10	0	56/5
x_2	0	1	-3/10	1/10	0	4/5
x_1	1	0	1/5	-2/5	0	9/5
s_{PL-5}	0	0	-3/10	1/10	1	-1/5

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_{PL-5}	b
Z	0	0	0	13/5	-7/3	35/3
x_2	0	1	0	0	-1	1
x_1	1	0	0	-1/3	5/3	5/3
x_3	0	0	1	-1/3	2/3	2/3

Solução Inviável

Toma-se o caminho de PL-3, acrescentando PL-6: $x_2 \geq 1$.

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_{PL-3}	s_{PL-6}	b
Z	0	0	-5/4	0	-11/8	0	47/4
x_2	0	1	-1/4	0	1/4	0	3/4
x_1	1	0	0	0	-1	0	2
x_4	0	0	-1/2	1	-5/2	0	1/2
s_{PL-6}	0	0	-1/4	0	1/4	1	-1/4

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	s_{PL-3}	s_{PL-6}	b

Z	0	0	0	0	-21/8	-5	13
x_2	0	1	0	0	0	-1	1
x_1	1	0	0	0	-1	0	2
x_4	0	0	0	1	-3	-2	1
s_{PL-6}	0	0	1	0	-1	-4	1

Solução ótima alcançada.

6.2. Seja o seguinte problema:

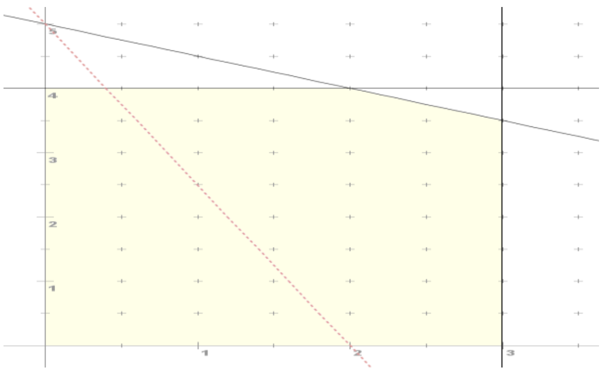
$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 5x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 \leq 3 \\
& x_2 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}$$

a) Resolver graficamente.
b) Resolver pelo método de cortes.
c) Resolver por *branch and bound*.

Colocando na forma padrão:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 5x_1 + 2x_2 \\
\text{St} \quad & x_1 + x_3 = 3 \\
& x_2 + x_4 = 4 \\
& x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 \\
& x_1;\ x_2, \geq 0 \ \text{ e inteiros}
\end{aligned}$$

a) Resolvendo graficamente:



No gráfico acima a linha em vermelho representa a função objetivo e a região em amarelo determina a região de factibilidade.

Resolvendo pelo Método Simplex:

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	razão
Max	1	-5	-2	0	0	0	0	
x_3	0	1	0	1	0	0	3	3/1
x_4	0	0	1	0	1	0	4	
x_5	0	1	2	0	0	1	10	10/1

Min c_j = -5 $\Rightarrow$ sai x_1

Min $\left\{3/1, 10/1\right\} = 3 \Rightarrow$ entra x_3

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	Razão
Max	1	0	-2	5	0	0	15	
x_1	0	1	0	1	0	0	3	
x_4	0	0	1	0	1	0	4	4/1
x_5	0	0	2	-1	0	1	7	7/2

Min c_{ij} = -2 $\Rightarrow x_2$

Min $\left\{4/1, 7/2\right\} = 7/2 \Rightarrow$ entra x_5

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
Max	1	0	0	4	0	1	22
x_1	0	1	0	1	0	0	3
x_4	0	0	0	½	1	- ½	½
x_2	0	0	1	- ½	0	½	7/2

Como todos os c_{ij}'s ≥ 0 (não negativo), o Tableau está no ótimo!

b) Método de Cortes de Gomory:

$x_2 = 7/2 - (-½\ x_3 + ½\ x_5) = 3 + ½ - (-(1- ½)\ x_3 + ½\ x_5)$

$x_2 = (3 + x_3 - 0x_5) + (½ - ½\ x_3 - ½\ x_5) \quad \Rightarrow$

$(½- ½\ x_3 - ½\ x_5) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad - ½\ x_3 - ½\ x_5 + x_6 = - ½$

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**b**
Max	1	0	0	4	0	1	0	22
x_1	0	1	0	1	0	0	0	3
x_4	0	0	0	½	1	– ½	0	½
x_2	0	0	1	– ½	0	½	0	7/2
x_6	0	0	0	– ½	0	– ½	1	– ½
razão				4 / (– ½)		1 / (– ½)		

Candidato a sair da base: x_6

Pelo teste da razão tem-se que a variável x_5 deve entrar na base no lugar da variável x_6.

Assim, o elemento pivot é (– ½) e tem-se que fazer uma operação de pivotamento. Abaixo segue o quadro após a operação de pivotamento.

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**b**
Max	1	0	0	3	0	0	2	21
x_1	0	1	0	1	0	0	0	3
x_4	0	0	0	1	1	0	–1	1
x_2	0	0	1	–1	0	0	1	3
x_6	0	0	0	1	0	1	–2	1

A solução ótima inteira foi encontrada: $Z = 21$; $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$.

c) Usando o método do *Branch and Bound*:

Relaxando as restrições de integralidade tem-se um problema linear, cuja solução ótima é:

$Z = 22$; $x_1 = 3$ e $x_2 = 7/2 = 3{,}5$.

Como x_2 não é inteiro, tem-se que, a partir do problema linear (PL1) devem ser criados 2 novos problemas, PL2 e PL3:

PL2 = PL1 + restrição $x_2 \leq 3 \Rightarrow x_2 + s_i = 3$

PL3 = PL1 + restrição: $x_2 \geq 3 \Rightarrow -x_2 + s_{ii} = -4$

PL2: introduzindo a nova restrição no tableau ótimo do PL1 tem-se

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_i	**b**
Max	1	0	0	4	0	1	0	22
x_1	0	1	0	1	0	0	0	3
x_4	0	0	0	½	1	– ½	0	½
x_2	0	0	1	– ½	0	½	0	7/2
s_i	0	0	1	0	0	0	1	3

$A_{3,5}(-1)$

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_i	**b**	
Max	1	0	0	4	0	1	0	22	
X_1	0	1	0	1	0	0	0	3	
x_4	0	0	0	½	1	– ½	0	½	
x_2	0	0	1	–½	0	½	0	7/2	
s_i	0	0	0	½	0	–½	1	–½	⇒ sai
razão						1/(–½)			
						⇑ entra			

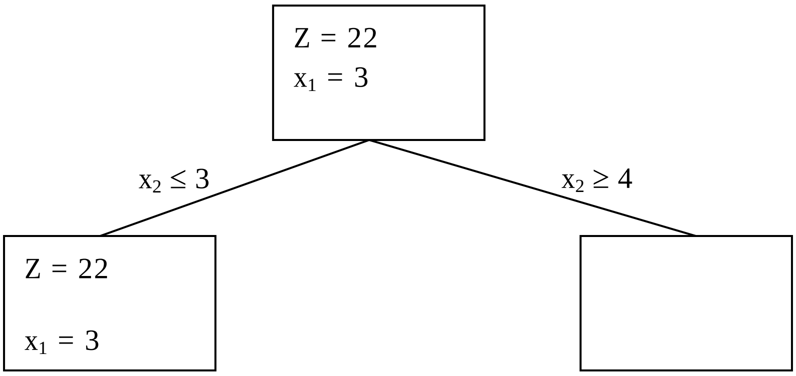
Pivotando:

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_i	**b**
Max	1	0	0	3	0	1	2	21
x_1	0	1	0	1	0	0	0	3
x_4	0	0	0	0	1	0	−1	1
x_2	0	0	1	0	0	0	1	3
x_5	0	0	0	−1	0	1	−2	1

Neste caso a solução ótima é inteira: Z = 21; $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$.

Note que a solução do PL2 é o maior valor para soluções inteiras e, por este motivo, não precisa testar o PL3.

Abaixo segue o diagrama de solução do Branch and Bound:



6.3. Seja o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad Z = 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{sujeito a} \quad -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ &\qquad x_1 + x_2 \leq 6 \\ &\qquad x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

a) Resolver graficamente.
b) Resolver pelo método de cortes.
c) Resolver por “branch and bound”.

Resolvendo o problema original sem as restrições de integralidade:

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	Razão
Max	1	−2	−3	0	0	0	0	
x_3	0	−1	2	1	0	0	4	4/2 ⇒ sai
x_4	0	1	1	0	1	0	6	6/1
x_5	0	1	3	0	0	1	9	9/3

⇑ entra

Candidato a sair da base: Min $c_j \Rightarrow x_2$.

Candidato a entrar na base a partir do teste da razão: $\Rightarrow x_3$.

$A_1(\frac{1}{2})$; $A_{1,0}(3)$; $A_{1,2}(-1)$, $A_{1,2}(-3)$

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	Razão
Max	1	−7/2	0	3/2	0	0	6	
x_2	0	− ½	1	½	0	0	2	
x_4	0	3/2	0	− ½	1	0	4	2/(3/2)
x_5	0	5/2	0	−3/2	0	1	3	3/(5/2) ⇒ sai

⇑ entra

Candidato a sair da base: Min $c_j \Rightarrow x_1$.

Candidato a entrar na base a partir do teste da razão: $\Rightarrow x_4$.

$A_3(2/5)$; $A_{3,2}(-3/2)$; $A_{3,1}(\frac{1}{2})$, $A_{3,0}(7/2)$

Base	Z	x_1	x_2	X_3	x_4	x_5	**b**	Razão
Max	1	0	0	–3/5	0	7/5	51/5	
x_2	0	0	1	1/5	0	1/5	13/5	(13/5)/(1/5)
x_4	0	0	0	2/5	1	–3/5	11/5	(11/5)/(2/5) ⇒ sai
x_1	0	1	0	–3/5	0	2/5	6/5	

⇑ entra

Candidato a sair da base: Min $c_j \Rightarrow x_3$.

Candidato a entrar na base a partir do teste da razão: $\Rightarrow x_4$.

$A_2(\ 5/2\ )$; $A_{2,3}(3/5)$; $A_{2,0}(3/5)$, $A_{2,1}(-1/5)$

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**	Razão
Max	1	0	0	0	3/2	½	27/2	
x_2	0	0	1	0	–½	½	3/2	
x_3	0	0	0	1	5/2	–3/2	11/2	
x_1	0	1	0	0	3/2	–½	9/2	

Quadro ótimo do PL: $z = 27/2$; $x_1 = 9/2$; $x_2 = 3/2$

a)Solução Gráfica:

b) Método de plano de cortes de Gomory:

$$x_1 = 9/2 - (3/2x_4 - ½x_5) = 2 + ½ - [1x_4 + ½x_4 - (1x_5 - ½x_5)]$$

$$x_1 = (2 - x_4 + x_5) + (\ ½ - ½\ x_4 - ½\ x_5)$$

$$½ - ½\ x_4 - ½\ x_5 \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad ½ - ½\ x_4 - ½\ x_5 + s_1 = -\ ½$$

Inserindo no Tableau ótimo tem-se:

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	**b**	
Max	1	0	0	0	3/2	½	0	27/2	
x_2	0	0	1	0	–½	½	0	3/2	
x_3	0	0	0	1	5/2	–3/2	0	11/2	
x_1	0	1	0	0	3/2	–½	0	9/2	
s_1	0	0	0	0	–½	–½	1	–½	⇒ sai
Razão					(3/2)/(–½)	(½)/(–½) ⇑ entra			

$A_4(-2)$; $A_{4,3}(2)$; $A_{4,2}(3/2)$, $A_{4,1}(-\frac{1}{2})$, $A_{4,0}(-\frac{1}{2})$

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	**b**
Max	1	0	0	0	1	0	1	13
x_2	0	0	1	0	–1	0	1	1
x_3	0	0	0	1	4	0	–3	7
x_1	0	1	0	0	2	0	–1	5
x_5	0	0	0	0	1	1	–2	1

Neste caso a solução ótima é inteira: $Z = 13$; $x_1 = 5$ e $x_2 = 1$.

c) Método *Branch and Bound*:

Relaxando as restrições de integralidade tem-se um problema linear, cuja solução ótima é:

$Z = 27/2$; $x_1 = 9/2 = 4{,}5$ e $x_2 = 3/2 = 1{,}5$.

Como x_1 não é inteiro, tem-se que, a partir do problema linear (PL1) devem ser criados 2 novos problemas, PL2 e PL3:

PL2 = PL1 + restrição: $x_1 \geq 5 \Rightarrow -x_1 + s_1 = -5$

PL3 = PL1 + restrição $x_1 \leq 4 \Rightarrow x_1 + s_2 = 4$

PL2: introduzindo a nova restrição no tableau ótimo do PL1 tem-se:

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	**b**	Razão
Max	1	0	0	0	3/2	½	0	27/2	
x_2	0	0	1	0	–½	½	0	3/2	
x_3	0	0	0	1	5/2	–3/2	0	11/2	
x_1	0	1	0	0	3/2	–½	0	9/2	
s_1	0	–1	0	0	0	0	1	–5	

$A_{3,1}(1)$

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	**b**	Razão
Max	1	0	0	0	3/2	½	0	27/2	
x_2	0	0	1	0	–½	½	0	3/2	
x_3	0	0	0	1	5/2	–3/2	0	11/2	
x_1	0	1	0	0	3/2	–½	0	9/2	
s_1	0	0	0	0	3/2	–½	1	–½	$\Rightarrow$ sai
						$\Uparrow$ entra			

$A_5(-2)$; $A_{4,3}(2)$; $A_{4,2}(3/2)$, $A_{4,1}(-\frac{1}{2})$, $A_{4,0}(-\frac{1}{2})$

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	**b**	Razão
Max	1	0	0	0	1	0	1	13	
x_2	0	0	1	0	–1	0	1	1	
x_3	0	0	0	1	4	0	–3	7	
x_1	0	1	0	0	2	0	–1	5	
x_5	0	0	0	0	1	1	–2	1	

Neste caso a solução ótima é inteira: Z = 13; x_1 = 5 e x_2 = 1.

Pode-se parar a análise já que o maior valor inteiro possível para 13,5 é 13, então a solução ótima foi encontrada.

6.4. Seja o problema de PL e seu quadro ótimo:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & 2x_1 + 4x_2 \le 10 \\
& x_1 + 2x_2 \le 12 \\
& x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Base	*Z*	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	1	0	0	19/16	1/8	107/8
x_1	0	1	0	-1/8	1/4	7/4
x_2	0	0	1	5/16	-1/8	13/8

Suponha que seja colocada agora a restrição que todas as variáveis intervenientes no problema devam ser inteiras. O que você faria, excluindo soluções gráficas?

Pelo método dos planos de corte, em

$$x_1 = 7/4 - (-1/8x_3 + 1/4x_4)$$
$$x_1 = (1 + x_3 + 0x_4) + (3/4 - 7/8x_3 - 1/4x_4) \Rightarrow -7/8x_3 - 1/4x_4 + x_5 = -3/4$$

$$x_2 = 13/8 - (5/16x_3 - 1/8x_4)$$
$$x_2 = (1 + 0x_3 + x_4) + (5/8 - 5/16x_3 - 7/8x_4) \Rightarrow -5/16x_3 - 7/8x_4 + x_6 = -5/8$$

Base	*Z*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Z	1	0	0	19/16	1/8	0	0	107/8
x_1	0	1	0	-1/8	1/4	0	0	7/4
x_2	0	0	1	5/16	-1/8	0	0	13/8
x_5	0	0	0	-7/8	-1/4	1	0	-3/4
x_6	0	0	0	-5/16	-7/8	0	1	-5/8

Base	*Z*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Z	1	0	0	3/4	0	1/2	0	13
x_1	0	1	0	-2	0	1	0	1
x_2	0	0	1	3/4	0	-1/2	0	2
x_5	0	0	0	7/2	1	-4	0	1
x_6	0	0	0	11	0	-7/2	1	1

Solução ótima.

6.5. Resolver o problema de PLI usando o método do *branch and bound*.

Max Z = $x_1 + 2\,x_2$

sujeito a $x_1 + x_2 \leq 10$

$2\,x_1 + 5\,x_2 \leq 30$

x_1 e $x_2 \geq 0$ e inteiros

Usando o método das duas fases. Primeira fase:

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1	-2	0	0	0
x_3	1	1	1	0	10
x_4	2	5	0	1	30

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	-1/5	0	0	2/5	12
x_3	3/5	0	1	-1/5	4
x_2	2/5	1	0	1/5	6

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Z	0	0	1/3	1/3	40/3
x_1	1	0	5/3	-1/3	20/3
x_2	0	1	-2/3	1/3	10/3

Tableau ótimo encontrado. Usando branch-and-bound em : PL-2: $x_1 \le 6$, e PL-3: $x_1 \ge 7$.

PL-2: $x_1 \le 6$

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	$s_{PL\text{-}2}$	b
Z	0	0	1/3	1/3	0	40/3
x_1	1	0	5/3	-1/3	0	20/3
x_2	0	1	-2/3	1/3	0	10/3
$s_{PL\text{-}2}$	0	0	-5/3	1/3	1	-2/3

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	$s_{PL\text{-}2}$	b
Z	0	0	0	2/5	1/5	66/5
x_1	1	0	0	0	1	6
x_2	0	1	0	1/5	-2/5	18/5
x_3	0	0	1	-1/5	-3/5	2/5

PL-3: $x_1 \geq 7$.

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	$s_{PL\text{-}3}$	b
Z	0	0	1/3	1/3	0	40/3
x_1	1	0	5/3	-1/3	0	20/3
x_2	0	1	-2/3	1/3	0	10/3
$s_{PL\text{-}3}$	0	0	5/3	-1/3	1	-1/3

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	$s_{PL\text{-}3}$	b
Z	0	0	2	0	1	13
x_1	1	0	0	0	-1	7
x_2	0	1	1	0	1	3
x_4	0	0	-5	1	-3	1

Solução ótima.

6.6. Um certo complexo agro-industrial deseja desenvolver um sistema de aprovisionamento d´água a partir de m localizações, potencialmente favoráveis. O custo de bombear água do poço $i = 1,2,..., m$ consiste num custo fixo a_{ij} e um custo variável b_i, proporcional à quantidade d´água bombeada, $b_i Q_i$.

A quantidade máxima d´água produzida pelo poço i é L_i, $i = 1,2,..., m$. O problema consiste em decidir quais poços ativar e quanto bombear de cada um, de forma a minimizar custos, mas atendendo à demanda total d´água Q. Formular um programa linear misto que resolva o problema.

Q_i = água produzida no poço i

Y_i = ativar ou não o poço i, $Y_i \in \{0,1\}$

Min $\quad \sum_{i=1}^{m} b_i Q_i + \sum_{i=1}^{m} a_i Y_i$

$$Q_i \le L_i Y_i \quad \forall i$$

s.a. $\sum Q_i$

$$Q_i \ge 0 \quad Y_i \in \{0,1\}$$

6.7. Seja um caixeiro viajante que dispõe de nove dias para visitar as três cidades A, B e C. as vendas que ele consegue fazer em cada cidade dependem do número de dias despendido na cidade, segundo uma relação decrescente, conforme a tabela. Assim, um dia na cidade A gera $ 30 em vendas, dois dias $ 30 mais $ 20, etc.

DIAS	**CIDADES**		
	A	B	C
1	30	50	40
2	20	20	30
3	15	15	20
4	10	15	10

Pede-se formular um programa linear inteiro que determine quantos dias passar em cada cidade, mas maximizando as vendas estimadas.

Y_{A1} = decisão de passar um dia na cidade A

Y_{A2} = decisão de passar dois dias na cidade B

Y_{A3} = decisão de passar três dias na cidade C

Y_{A4} = decisão de passar quatro dias na cidade D

Idem para $Y_{B1}, \dots ,Y_{B4}$, e $Y_{C1},\dots,Y_{C4}$.

Max $30Y_{A1}+20Y_{A2}+15Y_{A3}+10Y_{A4}+50Y_{B1} +20Y_{B2} + 15Y_{B3} + 15Y_{B4} +$
$40Y_{C1}+ 30Y_{C2}+20Y_{C3}+10Y_{C4}$

s.a. $Y_{A1}+Y_{A2}+Y_{A3}+Y_{A4}+Y_{B1} +Y_{B2} +Y_{B3}+Y_{B4} +Y_{C1}+ Y_{C2}+Y_{C3}+Y_{C4} \le 9$

$Y_{A2} \le Y_{A1}$ $\quad Y_{A3}\le Y_{A2}$ $\quad Y_{A4}\le Y_{A3}$

$Y_{B2} \le Y_{B1}$ $\quad Y_{B3}\le Y_{B2}$ $\quad Y_{B4}\le Y_{B3}$

$Y_{C2} \le Y_{C1}$ $\quad Y_{C3}\le Y_{C2}$ $\quad Y_{C4}\le Y_{C3}$

$Y_{A1}, Y_{A2}, Y_{A3}, Y_{A4}, Y_{B1} , Y_{B2} , Y_{B3}, Y_{B4} , Y_{C1}, Y_{C2}, Y_{C3}, Y_{C4} \in \{0,1\}$

De forma alternativa:

Y_{Aj} = número de dias em A é j

Y_{Bj} = número de dias em B é j

Y_{Cj} = número de dias em C é j

Max $\quad 30\,Y_{A1}+50\,Y_{A2}+65\,Y_{A3}+75\,Y_{A4}$

s.a. $\quad Y_{A1}+2\,Y_{A2}+3\,Y_{A3}+4\,Y_{A4} \leq 9$

$Y_{A1}+Y_{A2}+Y_{A3}+Y_{A4} \leq 1$

$Y_{A1}, Y_{A2}, Y_{A3}, Y_{A4} \geq 0$

6.8. A Empresa Distribuidora DOMUS tem cinco entregas a fazer hoje. Ela deve fazer uma entrega de 1.000 kg ao freguês A, 2.000 kg ao freguês B, 3.000 kg ao freguês C, 5.000 kg ao freguês D e 8.000 kg ao freguês E. Trata-se de cargas unitárias que devem ser transportadas numa única viagem.

A empresa tem a oferta de fretar quatro furgões: furgão 1 tem capacidade de 2.000 kg, furgão 2 com 6.000 kg, furgão 3 com 8.000 kg e furgão 4 com 11.000 kg. O custo fixo de fretar o furgão j é c_j.

Denominando $y_j = 1 \text{ou} 0$ a decisão de fretar o furgão j ou não fretar e de x_{ij} a decisão de servir o freguês i com o furgão j, pede-se:

a) Formular um modelo de programação inteira para determinar o custo mínimo de fretar furgões e atender os fregueses, supondo que cada furgão só possa fazer uma única viagem hoje, embora atendendo mais de um freguês.
b) Mostre como alterar sua formulação se houver um custo adicional c_{ij} quando o cliente i for atendido pelo furgão j.

a)

Min $\quad c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3+c_4y_4$

s.a. $\quad 1000x_{11} + 2000x_{21} \leq 2000\,y_1$

$1000x_{12} + 2000x_{22} +3000x_{32} \leq 6000\,y_2$

$1000x_{13} + 2000x_{23} +3000x_{33} +5000x_{43} \leq 8000\,y_3$

$1000x_{14} + 2000x_{24} +3000x_{34} +5000x_{44}+8000x_{54} \leq 11000\,y_4$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{3j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{4j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{5j} = 1$$

Nota: nesta formulação cada furgão só pode fazer uma viagem, embora atendendo, eventualmente, a mais de um cliente.

b)

Min $\sum_{j=1}^{4} c_j y_j + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$

Com as mesmas restrições que em (a).

9. A Empresa Águas Energéticas possui um conjunto de I jazidas de água mineral. Para a jazida $i \in I$ produzir Q_i litros d'água engarrafada ela incorre no custo $c_i\,Q_i$, com produção máxima limitada a $\bar{Q}_i$.

Essa água engarrafada deve ser entregue a J centros de distribuição potenciais. Caso o centro de distribuição $j \in J$ seja ativado, ele vai incorrer em um custo fixo f_j e em custos variáveis $h_j v_j$, sendo h um coeficiente de custo por litro e v_j o volume de água recebido, o qual é limitado a um volume máximo $\bar{v}_j$. Toda a água recebida pelo centro de distribuição é vendida no mesmo período e ela gera uma receita de vendas $p_j v_j$.

O custo de entregar um litro de água engarrafada na fonte i ao centro de distribuição j é q_{ij}.

Pede-se:

a) Formule um modelo de PLI que permita à Empresa Águas Energéticas decidir quais centros de distribuição ativar, de modo a maximizar receitas menos custos de engarrafamento, transporte e vendas.
b) Reescreva o modelo acima de modo que cada jazida ativada entregue sua produção a um único centro de distribuição j.

c) Reescreva o modelo (a) supondo que as jazidas de água podem ou não ser ativadas. Caso a jazida i seja ativada, para produzir Q_i litros d'água engarrafada, ela incorre no custo $g_i + c_iQ_i$ onde g_i é o custo fixo de abertura da jazida $i \in I$.

Sejam:

w_j = decisão de ativar a distribuição em $j \in J$

y_{ij} = litros de água engarrafada produzidas em $i \in I$ e entregues em $j \in J$

a)

$$\text{Max} \quad \sum_{j \in J} p_j v_j - \sum_{j \in J} f_j w_j - \sum_{j \in J} h_j v_j - \sum_{i \in I} c_i Q_i - \sum_i \sum_j q_{ij} y_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{array}{l} Q_i \le \overline{Q_i} \quad i \in I \\ v_j \le \overline{V_j} \quad j \in J \\ \sum_{j \in J} y_{ij} \quad i \in I \\ \sum_i y_{ij} = v_j \\ w_j \in \{0,1\} \\ Q_i \ge 0, v_j \ge 0, y_{ij} \ge 0 \quad i \in I, j \in J \end{array}$$

b)

Seja:

x_{ij} = a fonte $i \in I$ entrega exclusivamente sua produção ao centro de distribuição $j \in J$ (variável 0 ou 1).

Acrescentam-se as restrições:

$$\begin{array}{l} y_{ij} = Q_{ij} x_{ij} \quad i \in I, j \in J \\ \sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad i \in I \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad i \in I, j \in J \end{array}$$

e a terceira restrição de a) é eliminada.

c)

Seja:

z_i = decisão de abrir a jazida $i \in I$.

A função objetivo ganha mais um termo: $-g_i z_i$, e a primeira restrição modifica-se a:

$$Q_i \le \overline{Q}_i z_i$$
$$z_i \in \{0,1\}$$

Capítulo 7

1.

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Max} & Z - 3x1 - & x2 - & 3x3 + 0x4 + 0x5 + 0x6 = 0 \\
\text{s.a.} & 2x1 + & x2 + & x3 + \; x4 & & = 2 \\
& x1 + & 2x2 + & 3x3 & + \; x5 & = 5 \\
& 2x1 + & 2x2 + & x3 & + \; x6 & = 6 \\
& xi \ge 0 & i = 1,2,\ldots 6
\end{array}$$

(i) <u>Primeiro passo</u> (entra x1 e sai x4)

Base: (x4 x5 x6)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi = c^B B^{-1} = (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$-\bar{c}_1 = -c_1 + \pi a_1 = -3 + (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \quad (mais\ negativo)$$

$$-\bar{c}_2 = -c_2 + \pi a_2 = -1 + (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$-\bar{c}_3 = -c_3 + \pi a_3 = -3 + (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -3$$

C^B	Base	B^{-1}			b	V.S.	a1	Quo.
0	x4	1	0	0	2	x4	2	1
0	x5	0	1	0	5		1	5
0	x6	0	0	1	6		2	3

(ii) <u>Segunda passo</u> (entra x3 e sai x5)

Base: (x1 x5 x6)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi = c^B B^{-1} = (3 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (3/2 \quad 0 \quad 0)$$

$$-\bar{c}_2 = -c_2 + \pi a_2 = -1 + (3/2 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

B

2	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1

B^{-1}

1	0	0	0,5	0	0
0	1	0	-0,5	1	0
0	0	1	-1	0	1

$$-\bar{c}_3 = -c_3 + \pi a_3 = -3 + (3/2 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \ \ (único\ negativo)$$

$$\bar{a}_3 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\-1/2 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\5/2\\0\end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\-1/2 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}$$

C^B	Base	B^{-1}			b*	V.S.	a*3	Quo.
3	x1	1/2	0	0	1		1/2	2
0	x5	-1/2	1	0	4	x5	5/2	8/5
0	x6	-1	0	1	4		0	x

(iii) <u>Terceiro passo</u> (quadro final)

Base: (x1 x2 x6)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix}3/5 & -1/5 & 0\\-1/5 & 2/5 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\pi = c^B B^{-1} = (3 \quad 3 \quad 0)\begin{pmatrix}3/5 & -1/5 & 0\\-1/5 & 2/5 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} = (6/5 \quad 3/5 \quad 0)$$

$$-\bar{c}_2 = -c_2 + \pi a_2 = -1 + (6/5 \quad 3/5 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \frac{9}{5}$$

$$-\bar{c}_4 = -c_4 + \pi a_4 = -0 + (6/5 \quad 3/5 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 6/5$$

B

2	1	0	1	0	0
1	3	0	0	1	0
2	1	1	0	0	1

1,67	0	0	1	-0,33	0
0,33	1	0	0	0,33	0
1,67	0	1	0	-0,33	1

B^{-1}

1	0	0	0,6	-0,2	0
0	1	0	-0,2	0,4	0
0	0	1	-1	0	1

Como não há coeficientes negativos na linha zero, encontra-se na solução ótima. Portanto:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix}3/5 & -1/5 & 0\\-1/5 & 2/5 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/5\\8/5\\4\end{pmatrix}$$

C^B	Base	B^{-1}			b*
3	x1	3/5	-1/5	0	1/5
3	x2	-1/5	2/5	0	8/5
0	x6	-1	0	1	4

$$Z^* = 3 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{8}{5} + 0 \times 4 = \frac{27}{5}$$

2.

Max Z – x1 – 2x2 – 3x3 + x4 + Mx5 + Mx6 + Mx7 = 0

s.a. x1 + 2x2 + 3x3 + x5 = 15

2x1 + x2 + 5x3 + x6 = 20

x1 + 2x2 + x3 + x4 + x7 = 10

$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots 7$

(i) <u>Primeiro passo</u> (entra x3 e sai x6)

Base: (x5 x6 x7)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi = c^B B^{-1} = (-M \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-M \quad -M \quad -M)$$

$$-\bar{c}_1 = -c_1 + \pi a_1 = -1 + (-M \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4M$$

$$-\bar{c}_2 = -c_2 + \pi a_2 = -2 + (-M \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -5M$$

$$-\bar{c}_3 = -c_3 + \pi a_3 = -3 + (-M \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -9M \ (mais\ negativo)$$

$$-\bar{c}_4 = -c_4 + \pi a_4 = +1 + (-M \quad -M \quad -M) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -M$$

C^B	Base	B^{-1}			b	V.S.	a3	Quo.
-M	x5	1	0	0	15		3	5
-M	x6	0	1	0	20	x6	5	4
-M	x7	0	0	1	10		1	10

(ii) <u>Segunda passo</u> (entra x2 e sai x5)

Base: (x5 x3 x7)

B

1	3	0	1	0	0
0	5	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1

B^{-1}

1	0	0	1	-0,6	0
0	1	0	0	0,2	0
0	0	1	0	0	1

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi = c^B B^{-1} = (-M \quad 3 \quad -M) \begin{pmatrix} 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-M \quad 3M/5 \quad -M)$$

$$-\bar{c}_1 = -c_1 + \pi a_1 = -1 + (-M \quad 3M/5 \quad -M) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4M}{5}$$

$$-\bar{c}_2 = -c_2 + \pi a_2 = -2 + (-M \quad 3M/5 \quad -M) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{17M}{5} \quad (mais\ negativo)$$

$$-\bar{c}_4 = -c_4 + \pi a_4 = +1 + (-M \quad 3M/5 \quad -M) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -M$$

$$\bar{a}_2 = B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

C^B	Base	B^{-1}			b*	V.S.	a*2	Quo.
-M	x5	1	-3/5	0	3		1/5	15
-3	x3	0	1/5	0	4	x5	5/2	8/5
-M	x7	0	0	1	10		0	x

(iii) <u>Terceiro passo</u> (entra x4 e sai x7)

Base: (x2 x3 x7)

B

2	3	0	1	0	0
1	5	0	0	1	0
2	1	1	0	0	1

1	1,5	0	0,5	0	0
0	3,5	0	-0,5	1	0
0	-2	1	-1	0	1

B^{-1}

1	0	0	0,714	-0,43	0
0	1	0	-0,14	0,286	0
0	0	1	-1,29	0,571	1

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/7 & -3/7 & 0 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ -9/7 & 4/7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi = c^B B^{-1} = (2 \quad 3 \quad -M)\begin{pmatrix} 5/7 & -3/7 & 0 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ -9/7 & 4/7 & 1 \end{pmatrix} = (9M/7 \quad -4M/7 \quad -M)$$

$$-\bar{c}_1 = -c_1 + \pi a_1 = -1 + (9M/7 \quad -4M/7 \quad -M)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -6M/7$$

$$-\bar{c}_4 = -c_4 + \pi a_4 = +1 + (9M/7 \quad -4M/7 \quad -M)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -M \qquad (mais\ negativo)$$

$$\bar{a}_4 = B^{-1}a_4 = \begin{pmatrix} 5/7 & -3/7 & 0 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ -9/7 & 4/7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5/7 & -3/7 & 0 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ -9/7 & 4/7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/7 \\ 25/7 \\ 15/7 \end{pmatrix}$$

C^B	Base	B^{-1}			b*	V.S.	a*4	Quo.
2	x2	5/7	-3/7	0	15/7		0	x
3	x3	-1/7	2/7	0	25/7		0	x
-M	x7	-9/7	4/7	1	15/7	x7	1	15/7

(iv) <u>Quarto passo</u> (entra x1 e sai x4)

Base: (x2 x3 x4)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/7 & -3/7 & 0 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ -9/7 & 4/7 & 1 \end{pmatrix} \quad (mesma\ base\ pois\ a_4 = a_7)$$

$$\pi = c^B B^{-1} = (2 \quad 3 \quad -1)\begin{pmatrix} 5/7 & -3/7 & 0 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ -9/7 & 4/7 & 1 \end{pmatrix} = (16/7 \quad -4/7 \quad -1)$$

$$-\bar{c}_1 = -c_1 + \pi a_1 = -1 + \begin{pmatrix} \frac{16}{7} & -\frac{4}{7} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{6M}{7} \quad (\text{única variável não básica e negativa})$$

$$\bar{a}_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 5/7 & -3/7 & 0 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ -9/7 & 4/7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5/7 & -3/7 & 0 \\ -1/7 & 2/7 & 0 \\ -9/7 & 4/7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/7 \\ 25/7 \\ 15/7 \end{pmatrix}$$

C^B	Base	B^{-1}			b*	V.S.	a*1	Quo.
2	x2	5/7	-3/7	0	15/7		-1/7	x
3	x3	-1/7	2/7	0	25/7		3/7	25/3
-1	x4	-9/7	4/7	1	15/7	x4	6/7	15/6

B

2	3	1	1	0	0
1	5	2	0	1	0
2	1	1	0	0	1

1	1,5	0,5	0,5	0	0
0	3,5	1,5	-0,5	1	0
0	-2	0	-1	0	1

1	0	-0,14	0,714	-0,43	0
0	1	0,429	-0,14	0,286	0
0	0	0,857	-1,29	0,571	1

B^{-1}

1	0	0	0,5	-0,33	0,167
0	1	0	0,5	0	-0,5
0	0	1	-1,5	0,667	1,167

(iv) <u>Quinto passo</u> (quadro final)

Base: (x2 x3 x1)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 2/3 & 7/6 \end{pmatrix} \quad (\text{mesma base pois } a_4 = a_7)$$

$$\pi = c^B B^{-1} = (2 \quad 3 \quad 1)\begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 2/3 & 7/6 \end{pmatrix} = (1 \quad 0 \quad 1)$$

$$-\bar{c}_4 = -c_4 + \pi a_4 = +1 + (1 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

Tendo em vista que as variáveis artificiais já saíram da base e a variável x4 não é uma candidata a entrar na base, chega-se à solução ótima com x2, x3 e x1.

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 2/3 & 7/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

C^B	Base	B^{-1}			b*
2	x2	1/2	-1/3	1/6	5/2
3	x3	1/2	0	-1/2	5/2
1	x1	-3/2	2/3	7/6	5/2

$$Z^* = 2 \times \frac{5}{2} + 3 \times \frac{5}{2} + 1 \times \frac{5}{2} = 15$$

3. Seja uma solução conhecida $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ para o problema restrito (PR):

$$
\begin{array}{llcccccccl}
(PR) & MAX \quad Z & = & 0\lambda_1 & + & 0\mu_1 & & & & \\
 & s.a. & & 0\lambda_1 & + & 0\mu_1 & + & s & = & 80 \quad [\pi] \\
 & & & \lambda_1 & & & & & = & 1 \quad [\alpha] \\
 & & & & & \mu_1 & & & = & 1 \quad [\gamma] \\
 & & & \lambda_1 & , & \mu_1 & , & s & \geq & 0
\end{array}
$$

A solução ótima e o vetor dos multiplicadores simplex são:

$\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 1$ e $s = 80$;

$[\pi, \alpha, \gamma]^T = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0] \cdot \mathbf{B}^{-1} = [0\,,0\,,0]$

Tomando-se os vetores definidos no problema, **c**, **d**, **A** e **D**, juntamente com o valor inicial π = 0, os subproblemas (7.21) e (7.22) tornam-se simplesmente

$$
\begin{array}{lcccccc}
MAX \quad Z_x & = & 5x_1 & + & 4x_2 & & \\
s.a. & & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 9 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcccccc}
MAX \quad Z_y & = & 5y_1 & + & 4y_2 & & \\
s.a. & & 3y_1 & + & 2y_2 & \leq & 12 \\
 & & y_1 & + & 2y_2 & \leq & 8 \\
 & & y_1 & , & y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Cujas soluções ótimas geram respectivamente os vértices:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No caso do vetor **y** existem soluções alternativas, tendo sido feita uma seleção arbitrária. O conhecimento desses dois novos vértices gera um novo problema restrito com mais duas variáveis, λ_2 e μ_2. Os coeficientes correspondentes são **cx** = 16; **dy** = 16; **Ax** = 80; e **Dy** = 36. Mantendo-se as três variáveis iniciais mais as duas novas, tem-se o novo (PR):

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
(PR) & MAX & Z & = & 0\lambda_1 & + & 16\lambda_2 & + & 0\mu_1 & + & 16\mu_2 & & & \\
& s.a. & & & 0\lambda_1 & + & 80\lambda_1 & + & 0\mu_1 & + & 36\mu_2 & + & s & = 180 \\
& & & & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & & & & & = 1 \\
& & & & & & & & \mu_1 & + & \mu_2 & & & = 1 \\
& & & & \lambda_1 & , & \lambda_2 & , & \mu_1 & , & \mu_2 & , & s & \geq 0
\end{array}
$$

Cuja solução ótima é: Z = 24,80 e ainda:

$$\lambda_1 = 0{,}45,\ \lambda_2 = 0{,}55,\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1 \text{ e } s = 0$$

E o vetor de multiplicadores simplex é obtido no relatório LINDO:

$$[\pi, \alpha, \gamma]^T = [0{,}20;\ 0;\ 8{,}80]$$

Substituindo esses valores nas expressões (7.21) e (7.22) resultam os dois subproblemas (7.23) e (7.24)

$$
\begin{array}{llllllll}
MAX & W_x & = & 3x_1 & - & 4x_2 & & \\
s.a. & & & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 9 \\
& & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
& & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
\tag{7.23}
$$

$$
\begin{array}{llllllllll}
MAX & W_y & = & 4{,}8y_1 & + & 2{,}4y_2 & - & 8{,}80 \\
s.a. & & & 2y_1 & + & y_2 & \leq & 12 \\
& & & y_1 & + & 2y_2 & \leq & 8 \\
& & & y_1 & , & y_2 & \geq & 0
\end{array}
\tag{7.24}
$$

As soluções ótimas são, respectivamente

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ com } W_x^* = 9 \text{ e } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ com } W_y^* = 20$$

O vértice **x** é novo, mas o vértice **y** já havia sido identificado. Assim, o novo vértice permite um novo problema (PR), com mais uma variável, $\lambda_{3,}$ e coeficientes: **cx** = 15; e **Ax** = **30**:

$$
\begin{array}{llllllllllllllll}
(PR) & MAX & Z & = & 0\lambda_1 & + & 16\lambda_2 & + & 15\lambda_3 & + & 0\mu_1 & + & 16\mu_2 & & & \\
& & & & 0\lambda_1 & + & 80\lambda_2 & + & 30\lambda_3 & + & 0\mu_1 & + & 36\mu_2 & + & s & = 180 \\
& & & & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & & & & & = 1 \\
& & & & & & & & & & \mu_1 & + & \mu_2 & & & = 1 \\
& & & & \lambda_1 & , & \lambda_2 & , & \lambda_3 & , & \mu_1 & , & \mu_2 & \geq 0 & &
\end{array}
$$

Cuja solução é: Z = 31,28 e ainda

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0{,}28$, $\lambda_3 = 0{,}72$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$ e $s = 0$, e, ainda:

$$[\pi, \alpha, \gamma]^T = [0{,}020;\ 14{,}40;\ 15{,}28]$$

Substituindo esses valores nas expressões (7.21) e (7.22) resultam os dois subproblemas (7.23) e (7.24)

$$
\begin{array}{lllllll}
MAX & W_x & = & 4{,}8x_1 & + & 3{,}2x_2 & - \; 14{,}40 \\
s.a. & & & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 9 \\
& & & x_1 & + & 2x_2 & \leq 5 \\
& & & x_1 & , & x_2 & \geq 0
\end{array}
\qquad (7.23)
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
MAX & W_y & = & 5{,}88y_1 & + & 2{,}94y_2 & - \; 15{,}28 \\
s.a. & & & 2y_1 & + & y_2 & \leq 12 \\
& & & y_1 & + & 2y_2 & \leq 8 \\
& & & y_1 & , & y_2 & \geq 0
\end{array}
\qquad (7.24)
$$

As soluções ótimas são, respectivamente:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ com } W_x^* = 0 \text{ e } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ com } W_y^* = 20$$

Com isso, a solução obtida não gera um novo vértice e a presente solução é ótima.

Os valores de λ e μ correspondem aos valores originais

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0{,}72 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 0{,}28 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}72 \\ 0{,}42 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = 5x_1 + 4x_2 + 6y_1 + 3y_2 = 13{,}6 + 1{,}68 + 36 + 0 = 51{,}28$$

4. Como feito no texto, suponha conhecidos três vértices, X_0, X_2 e X_4, formando-se:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = X_0 + X_2 + X_4 \\ \text{sujeito a} \quad & 0X_0 + 2X_2 + X_4 \geq 1000 \\ & 0X_0 + X_2 + 0X_4 \geq 800 \\ & 0X_0 + 0X_2 + X_4 \geq 600 \\ & X_0, X_2, X_4 \geq 0. \end{aligned}$$

A solução deste problema é: Z = 1.000 e as variáveis são: $X_0 = 0$; $X_2 = 800$; e $X_4 = 600$. Os valores duais são: $\pi_1 = 0$; $\pi_2 = 1$; e $\pi_3 = 1$.

Conhecidas as variáveis duais, aplica-se o problema linear restrito (7.25) a três variáveis: [v, w, u], correspondentes aos cortes de 2, 3 e 5 metros, respectivamente, a saber:

$$\begin{aligned} & \text{Min } W = 1 - w - u \\ & \text{s.a.} \quad 2v + 3w + 5u + p = 8 \\ & \qquad v, w, u, p \geq 0 \text{ e inteiros.} \end{aligned}$$

A solução para este problema é $W = -1$, com $v = 1$, $w = 2$, $u = 0$ e $p = 0$, correspondendo ao vértice X_3. Incluindo-se X_3 no modelo e eliminando-se X_0, tem-se o modelo parcial:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = X_2 + X_3 + X_4 \\ \text{sujeito a} \quad & 2X_2 + X_3 + X_4 \geq 1000 \\ & X_2 + 2X_3 \geq 800 \\ & X_4 \geq 600 \\ & X_2, X_3, X_4 \geq 0. \end{aligned}$$

A solução deste problema é: Z = 1.000, os valores das variáveis são: $X_2 = 0$; $X_3 = 400$; e $X_4 = 600$, e os valores das variáveis duais são: $\pi_1 = 0$; $\pi_2 = 0{,}5$; e $\pi_3 = 1$.

Reaplicando-se o problema linear restrito, tem-se:

$$Min\ W = 1 - 0{,}5w - u$$

$$s.a. \quad 2v + 3w + 5u + p = 8$$

$$v, w, u, p \geq 0 \text{ e inteiros}$$

A solução para este problema é W = $-0{,}5$, $v = 0$, $w = 1$, $u = 1$ e $p = 0$, correspondendo ao vértice X_5. Incluindo-se esse vértice no modelo e excluindo-se X_1, tem-se:

$$\text{Min} \quad Z = X_3 + X_4 + X_5$$

$$\text{sujeito a} \quad 2X_3 + X_4 \geq 1000$$

$$2X_3 + X_5 \geq 800$$

$$X_4 + X5 \geq 600$$

$$X_3, X_4, X_5 \geq 0.$$

A solução deste problema é: Z = 1.000, os valores das variáveis são: $X_3 = 400$; $X_4 = 600$; $X_5 = 0$; enquanto os valores das variáveis duais são: $\pi_1 = 0{,}333$; $\pi_2 = 0{,}333$; e $\pi_3 = 0{,}666$.

Reaplicando-se o problema linear restrito, tem-se:

$$Min\ W = 1 - 0{,}333v - 0{,}333w - 0{,}666u$$

$$s.a. \quad 2v + 3w + 5u + p = 8$$

$$v, w, u, p \geq 0 \text{ e inteiros.}$$

A solução para este problema é $W = -0.332$, $v = 4$, $w = 0$, $u = 0$ e $p = 0$, correspondendo ao vértice X_1. Incluindo-se esse vértice, e eliminando-se X_5, tem-se o modelo parcial:

$$\text{Min} \quad Z = X_1 + X_3 + X_4$$

$$\text{sujeito a} \quad 4X_1 + X_3 + X_4 \geq 1000$$

$$2X_3 \geq 800$$

$$X_4 \geq 600$$

$$X_1, X_3, X_4 \geq 0.$$

A solução deste problema é: Z = 1.000 e os valores das variáveis são: $X_1 = 0$; $X_3 = 400$; e $X_4 = 600$, enquanto os valores das variáveis duais são: $\pi_1 = 0{,}25$; $\pi_2 = 0{,}375$; e $\pi_3 = 0{,}75$.

Reaplicando-se o problema linear restrito, tem-se:

$$\text{Min } W = 1 - 0{,}25v - 0{,}375w - 0{,}75u$$

$$\text{s.a.} \quad 2v + 3w + 5u + p = 8$$

$$v, w, u, p \geq 0 \text{ e inteiros.}$$

A solução para este problema é $W = -0{,}125$, $v = 0$, $w = 1$, $u = 1$ e $p = 0$, correspondendo ao vértice X_5. Incluindo-se esse vértice, tem-se o modelo parcial revisado, com quatro variáveis, para acelerar a conclusão:

$$\text{Min} \quad Z = X_1 + X_3 + X_4 + X_5$$

$$\text{sujeito a} \quad 4X_1 + X_3 + X_4 \geq 1000$$

$$2X_3 + X_5 \geq 800$$

$$X_4 + X_5 \geq 600$$

$$X_1, X_3, X_4, X_5 \geq 0.$$

A solução deste problema é: Z = 925 e os valores das variáveis são: $X_1 = 225$; $X_3 = 100$; e $X_4 = 0$; $X_5 = 600$, enquanto os valores das variáveis duais são: $\pi_1 = 0{,}25$; $\pi_2 = 0{,}375$; e $\pi_3 = 0{,}625$.

Reaplicando-se o problema linear restrito, tem-se:

$$\text{Min } W = 1 - 0{,}25v - 0{,}375w - 0{,}625u$$

$$\text{s.a.} \quad 2v + 3w + 5u + p = 8$$

$$v, w, u, p \geq 0 \text{ e inteiros.}$$

A solução para este problema é W = 0, v = 4, w = 0, u = 0 e p = 0. Como W = 0 e o vértice encontrado, X_1, não é um vértice novo, tem-se a solução ótima do problema original, como o leitor pode constatar ao resolver o problema integralmente.