第三讲：乘法和逆矩阵.

① 矩阵乘法：

行列内积：有 $m\times n$ 的矩阵和 $n\times p$ 矩阵 A和B.

(A的总行数与B的总列数相同)

$AB=C$ (C是一个 $m\times p$ 的矩阵).

列组合.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}\underset{B}{\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} b \\ b \\ b \\ b \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} c \\ c \\ c \\ c \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} d \\ d \\ d \\ d \end{bmatrix} \end{bmatrix} = C$$

行组合.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{bmatrix}}\underset{B}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a & a \end{bmatrix} B \\ \begin{bmatrix} b & b & b & b \end{bmatrix} B \\ \begin{bmatrix} c & c & c & c \end{bmatrix} B \end{bmatrix} = C.$$

列乘以行

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

分块做乘法

将其进行分块。

逆矩阵：

如果矩阵 A 可逆，就有一个 A^{-1}

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

若存在非零向量使 $Ax=0$，则 A 没有逆矩阵。

因为：$A^{-1}Ax = Ix$ = 零向量

但：Ix 不可能为零向量。

逆矩阵求解：

求解 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}} \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

① $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

② 无需像①解两个方程

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

原理：
$EI = A^{-1}$.
对 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 左乘 E 使其为 I，
那么 E 为 A 的逆矩阵 A^{-1}，
单位矩阵 I 经过相同处理之后也变为 A^{-1}.

逆矩阵为 $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

第四讲：A的LU的解

即将矩阵A分解为矩阵L与上三角矩阵U.

① 找到转置矩阵 A^T 与逆矩阵 A^{-1} 的关系.

$$AA^{-1}=I.$$

$$(AA^{-1})^T=(A^{-1})^TA^T=I$$. 则 A^T 的逆矩阵为 $(A^{-1})^T$.

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T.$$

结论：对于单个矩阵，转置与取逆可颠倒.

② A的LU的分解.

$$A \xrightarrow[\text{初等}]{} U \longrightarrow E_{21}\cdot A=U \longrightarrow A=(E_{21})^{-1}U.$$

例：

设有 $E_{32}E_{31}E_{21}A=U$，已知 $E_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}$，$E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$E_{31}=I$.

求 $A=LU$ 分解后的L.

$$A=(E_{21})^{-1}(E_{31})^{-1}(E_{32})^{-1}U.$$

$$(E_{21})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ (E_{32})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$$

$$L=(E_{21})^{-1}(E_{31})^{-1}(E_{32})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}.$$

③ 置换矩阵：

n 阶矩阵有 $n!$ 个置换矩阵.