

关于连续型解舒丝长分布的解析^{*}

白 伦¹, 王建民², 周 韶²

(1. 苏州大学, 苏州 215006; 2 苏州大学材料工程学院, 苏州 215021)

摘 要: 在已给出的离散型解舒丝长分布的基础上, 考虑在茧丝上任意部位都可能发生落绪, 且落绪率在茧丝上呈连续曲线形分布的条件下的解舒丝长分布。给出解舒丝长一类具有寿命分布形式的连续型随机变量的概率密度函数。并由其分布求出解舒丝长平均值及方差。通过电子计算机模拟实验对有关理论结果进行了检验。

关键词: 茧丝长; 解舒丝长分布; 落绪率; 落绪部位分布; 连续型随机变量
中图分类号: TS143. 1 **文献识别码:** A

前文^[1] 中在假定茧丝长为一正整数, 茧丝上落绪只能发生在整数点上的条件下, 导出了茧丝由于落绪切断而形成的解舒丝长的分布。这时的解舒丝长被视为是一个只能取正整数值的离散型随机变量。但实际上, 落绪可能发生在茧丝上的任何位置, 因此, 解舒丝长是一个连续型的随机变量。在制丝工程管理理论及模拟缫丝理论中, 为了能更精确地描述原料茧特性及制丝工程技术条件, 并分析这些条件对生丝质量、缫丝生产效率等的影响, 连续型解舒丝长分布的导出, 是十分重要的。此外解舒丝长随机变量可以视为是一种寿命变量, 在更一般的终止(或切断)条件下, 给出连续形式的寿命分布, 这在可靠性理论分析中也是有意义的。

本文在已获得的离散型解舒丝长分布的基础上, 考虑在茧丝上任意部位都可能发生落绪, 且落绪率在茧丝上呈连续曲线形分布的条件下的解舒丝长分布。我们将给出解舒丝长这样一类具有寿命分布形式的连续型随机变量的概率密度函数及其平均值、方差。通过电子计算机模拟实验对理论结果进行检验, 并就茧丝上落绪率呈二次曲线形分布的情况, 讨论落绪率的特性对解舒丝长分布的影响。

1 茧丝上的落绪率

^{*} 收稿日期: 1999-10-15
作者简介: 白 伦(1948-), 男, 教授, 主要从事制丝工程管理研究
基金项目: 本研究为纺织总会三项费用资助项目
?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www

考虑长度为 L_0 的茧丝上的落绪发生情况。假设在茧丝上任意部位都可能发生落绪。由于茧丝上各部位的粗细不同及煮熟程度差异等原因,使各部位发生落绪的概率也不同。

以茧丝的起点为原点,记区间 $(0, t]$ 中的落绪数为 $X(t)$ 。则依存于丝长 t 的随机变量的系 $\{X(t), t \in [0, L_0]\}$ 构成一个随机过程。又记 $X(t, h)$ 为区间 $(t, t+h]$ 中的落绪数,即

$$X(t, h) = X(t+h) - X(t).$$

设当 $h \rightarrow 0$ 时,

$$P\{X(t, h) \geq 2\} = o(h).$$

并设

$$P\{X(t, h) = 1\} = p(t)h + o(h);$$

$$P\{X(t, h) = 0\} = 1 - p(t)h + o(h).$$

这里, $p(t) \leq 1$, 随丝长 t 而变。考虑到茧丝纤度的连续变化,不妨假设 $p(t)$ 是 t 在区间 $(0, L_0]$ 中的连续光滑函数,其表示在茧丝的不同位置上单位丝长内发生落绪的概率,称为落绪率密度。在本文中,为了便于表示茧丝上落绪部位分布的 L, U, J 各种形状,对于茧丝长 $L_0 = m$, 假设 $p_m(t)$ 是 t 的开口向上的二次曲线,并将其记为

$$p_m(t) = k_m(t-a)^2 + b, \quad (0 \leq t \leq L_0) \quad (1)$$

式中, a 为落绪率密度最小的位置(简单地不妨视为最粗纤度的位置), b 为最小落绪率密度, k_m 为二次曲线开口率,其与茧丝长有关。

若当茧丝长 $L_0 = m$ 时,其上的平均落绪数为 z , 则易知有

$$E[X(m)] = \int_0^m p_m(t) dt = z.$$

将(1)式代入积分可以得到

$$z = m[k_m(\frac{m^2}{3} - am + a^2) + b]. \quad (2)$$

假设同一原料庄口的茧丝单位丝长上平均落绪率为一定值 β , 则有

$$z = m\beta. \quad (3)$$

比较以上两式可以得到

$$k_m = \frac{3(\beta - b)}{m^2 - 3am + 3a^2}. \quad (4)$$

这里与前文^[2] 同样地,假设同一原料茧庄口的各茧丝上最小落绪率密度同为 b 。定义 b 与平均落绪率 β 之比为落绪率均一度 C ,

$$C = \frac{b}{\beta}.$$

最小落绪率密度 b 可以表示为

$$b = c\beta.$$

这里 C 为 0 与 1 之间的值,其值越接近于 1,表示落绪率在各位均一度越大。原料茧煮熟程度过大,或茧丝内中外层纤度比较接近时,都可能使茧丝上的落绪率相对地均一化。

2 茧丝长一定时的解舒丝长分布

考虑茧丝长等于 m 时的解舒丝长分布。用微小长度 h 来分割茧丝长 m 。记分割的区间总数为

$$M = \frac{m}{h};$$

各区间的端点称为节点。由前述假设可知当 h 很小时, 可以忽视在区间 $(t, t+h]$ 内发生两次及两次以上落绪的可能性, 并且在该区间中的落绪不妨视为发生在区间右端点上。这样落绪只能发生在节点

$$h, 2h, 3h, \dots, (M-1)h$$

上。若记

$$t = nh,$$

称 n 为位置 t 对应的节点序号。最后一个区间 $((M-1)h, Mh]$ 右端点发生的落绪为自然落绪, 其他各节点发生的落绪则为中途落绪。

作了这样假定后, 在茧丝上因落绪而形成解舒丝长的概率构造就与前文的离形解舒丝长模型完全一致起来。

由上述假定可知, 在长度为 m 的茧丝中第 n 个节点上发生落绪的概率 $p_{M,n}$ 也就是在区间 $(t-h, t]$ 内发生落绪的概率即

$$p_{M,n} = p_m(t)h;$$

而在该节点上不发生落绪的概率为

$$q_{M,n} = 1 - p_m(t)h.$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, 将 h 改记为 dt , 则可以得到

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_{M,i} = \int_0^t p_m(x) dx; \quad \sum_{i=1}^{M-1} p_{M,i} = \int_0^m p_m(x) dx = m\beta; \quad (5)$$

$$\prod_{j=1}^{n-1} q_{M,j} = \prod_{j=1}^{n-1} [1 - p_{M,j}] \doteq \exp\left(-\int_0^t p_m(x) dx\right). \quad (6)$$

在前文^[1]定理 4 中已给出当茧丝长为一定值 M 时, 解舒丝长的概率分布为

$$P_M(1) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{M-1} p_{M,j}} (p_{M,1} + p_{M,M-1} + \sum_{j=1}^{M-2} p_{M,j} p_{M,j+1}), \quad (7)$$

$$P_M(n) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{M-1} p_{M,j}} (p_{M,n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{M,j} + \sum_{r=0}^{M-n-1} p_{M,r+n} \prod_{j=2}^n q_{M,r+j} - \sum_{r=1}^{M-n-1} p_{M,r} \prod_{j=1}^n q_{M,r+j}),$$

$$(1 < n < M) \quad (8)$$

$$P_M(n) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{M-1} p_{M,j}} \prod_{j=1}^{M-1} q_{M,j}. \quad (9)$$

其中(8)式可以整理为

$$P_M(n) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{M-1} p_{M,j}} (p_{M,n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{M,j} + \sum_{r=1}^{M-n-1} p_{M,r} p_{M,r+n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{M,r+j})$$

$$+ p_{M, M-n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{M, M-n+j}, \quad 1 < n < M \quad (10)$$

记茧丝长 $L_0 = m$ 的条件下解舒丝长 L_m 的概率密度函数为 $g_m(t)$, 即

$$p\{t < L_m \leq t + dt \mid m\} = p_M(n) = g_m(t) dt.$$

由(7)、(9)、(10) 并利用(5)、(6) 式可以得到

$$\begin{aligned} g_m(t) = & \frac{1}{1+m\beta} \left(\int_0^{m-t} p_m(x) p_m(x+t) \exp\left(-\int_0^t p_m(y+x) dy\right) dx \right. \\ & \left. + p_m(t) \exp\left(-\int_0^t p_m(y) dy\right) + p_m(m-t) \exp\left(-\int_0^t p_m(m-t+y) dy\right) \right); \\ & (0 \leq t < m) \end{aligned} \quad (11)$$

$$g_m(m) = \frac{\exp(-m\beta)}{1+m\beta}. \quad (12)$$

对于(11)、(12) 式给出的解舒丝长分布, 可以证明其概率元积分为 1, 即

$$\int_0^m g_m(t) + g_m(m) = 1. \quad (13)$$

事实上, 只要证明下式成立即可。

$$\begin{aligned} & \int_0^m p_m(t) \exp\left(-\int_0^t p_m(y) dy\right) dt + \int_0^m p_m(m-t) \exp\left(-\int_0^t p_m(m-t+y) dy\right) dt \\ & + \int_0^m \int_0^{m-t} p_m(x) p_m(x+t) \exp\left(-\int_0^t p_m(y+x) dy\right) dt + \exp(-m\beta) = 1 + m\beta \end{aligned} \quad (14)$$

为了证明(14) 式成立, 分别计算左侧各项积分得到

$$\begin{aligned} & \int_0^m p_m(t) \exp\left(-\int_0^t p_m(y) dy\right) dt = \int_0^m d\left(-\exp\left(-\int_0^t p_m(y) dy\right)\right) \\ & = 1 - \exp(-m\beta); \\ & \int_0^m p_m(m-t) \exp\left(-\int_0^t p_m(m-t+y) dy\right) dt = \int_0^m p_m(t) \exp\left(-\int_t^m p_m(y) dy\right) dt \\ & = \exp(-m\beta) \int_0^m d\left(\exp\left(\int_t^m p_m(y) dy\right)\right) = 1 - \exp(-m\beta); \quad \text{这里有误, 积分上限应为t, 积分下限应为0, 结果是正确的.} \\ & \int_0^m \int_0^{m-t} p_m(x) p_m(x+t) \exp\left(-\int_0^t p_m(y+x) dx\right) dt \\ & = \int_0^m p_m(x) \int_x^m p_m(t) \exp\left(-\int_x^t p_m(y) dy\right) dt dx \\ & = m\beta - 1 + \exp(-m\beta). \end{aligned}$$

将以上各式代入(14) 式的左侧, 即可以得到与右侧相等的结果。由此解舒丝长分布概率元积分为 1 得到证明。

3 茧丝长具有正态分布时的解舒丝长分布

当茧线长 L_0 具有平均值为 μ , 均方差为 σ 的正态分布时, 记其概率密度函数为 $f(m)$,

$$f(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (-\infty < m < \infty) \quad (15)$$

实际上, 在区间 $(-\infty, 0)$ 中, 总有 $g(m) \equiv 0$.

记解舒丝长 L 的概率密度函数为 $g(t)$, 考虑到当茧丝长为 m , 平均中途落绪 $m\beta$ 次时, 其上的丝段在总的解舒丝长中权数为

$$\frac{\int_0^{\infty} (1+m\beta)f(m)dm}{\int_0^{\infty} (1+t\beta)f(t)dt} = \frac{(1+m\beta)f(m)dm}{1+\mu\beta}. \quad (16)$$

故可以得到连续型的解舒丝长分布为

$$g(t) = \frac{1}{1+\mu\beta} \int_0^{\infty} g_m(t)(1+m\beta)f(m)dm + \frac{g_t(t)(1+t\beta)f(t)}{1+\mu\beta}, \quad t \geq 0 \quad (17)$$

将上式关于 t 在区间 $[0, \infty)$ 中积分并利用(13) 式, 易于得到

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g(t)dt &= \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{1+\mu\beta} \int_0^{\infty} g_m(t)(1+m\beta)f(m)dm + \frac{g_t(t)(1+t\beta)f(t)}{1+\mu\beta} \right] dt \\ &= \frac{1}{1+\mu\beta} \int_0^{\infty} f(m)(1+m\beta) \left[\int_0^m g_m(t)dt + g_m(m) \right] dm = 1 \end{aligned}$$

4 解舒丝长的平均值

首先考虑茧丝长为一定值 m 时的解舒丝长平均值 $E(L_m)$ 。为了利用解舒丝长概率分布求平均值

$$E(L_m) = \int_0^m t g_m(t)dt + m g_m(m), \quad (18)$$

将(11)、(12) 式代入上式得

$$\begin{aligned} E(L_m) &= \frac{1}{1+m\beta} \left(\int_0^m t \int_0^{m-t} p_m(x)p_m(x+t) \exp \left[- \int_0^t p_m(y+x)dy \right] dx dt \right. \\ &\quad + \int_0^m t p_m(t) \exp \left[- \int_0^t p_m(y)dy \right] dt \\ &\quad \left. + \int_0^m t p_m(m-t) \exp \left[- \int_0^t p_m(m-t+y)dy \right] dt + m \exp(-m\beta) \right). \end{aligned}$$

为了对各项积分, 记

$$I_1 = \int_0^m t p_m(t) \exp \left[- \int_0^t p_m(y)dy \right] dt; \quad (19)$$

又有

$$\begin{aligned} &\int_0^m t p_m(m-t) \exp \left[- \int_0^t p_m(m-t+y)dy \right] dt \\ &= \int_0^m (m-t) p_m(t) \exp \left[- \int_t^m p_m(y)dy \right] dt \\ &= m - m \exp(-m\beta) + I_2. \end{aligned} \quad (20)$$

式中, 记号 I_2 为

$$I_2 = \int_0^m t p_m(t) \exp \left[- \int_t^m p_m(y)dy \right] dt;$$

此外, 还可以得到

$$\begin{aligned}
& \int_0^m \int_0^{m-t} p_m(x) p_m(x+t) \exp\left[-\int_0^t p_m(y) dy\right] dx dt \\
&= \int_0^m p_m(x) \int_x^m (t-x) p_m(t) \exp\left[-\int_x^t p_m(y) dy\right] dt dx \\
&= -I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{21}$$

将(19)、(20)(21)式代入(18)式即可得到茧丝长为 m 时的解舒丝长平均值为

$$E(L_m) = \frac{m}{1+m\beta} = \frac{m}{1+z} \tag{22}$$

当茧丝长 L_0 具有平均值为 μ , 均方差为 σ 的正态分布时, 与(17)式同样地, 利用(16)式对上式求期望值, 即可以得到解舒丝长的平均值为

$$E(L) = \int_0^{\infty} \left(\frac{m}{1+m\beta}\right) \frac{(1+m\beta)f(m)dm}{1+\mu\beta} = \frac{\mu}{1+\mu\beta} \tag{23}$$

这个结果与我们的经验是完全一致的。

5 解舒丝长的方差

首先考虑茧长为一定值 m 时的解舒丝长方差 $D(L_m)$ 。为此要求出解舒丝长的二阶矩

$$E(L_m^2) = \int_0^m t^2 g_m(t) dt + m^2 g_m(m). \tag{24}$$

将概率密度函数(11)、(12)式代入上式得

$$\begin{aligned}
E(L_m^2) = \frac{1}{1+m\beta} [& \int_0^m \int_0^{m-t} t^2 p_m(x) p_m(x+t) \exp\left[-\int_0^t p_m(y+x) dy\right] dx dt \\
& + \int_0^m t^2 p_m(t) \exp\left[-\int_0^t p_m(y) dy\right] dt \\
& + \int_0^m t^2 p_m(m-t) \exp\left[-\int_0^t p_m(m-t+y) dy\right] dt \\
& + m^2 \exp(-mp)].
\end{aligned}$$

整理此式, 经过简单的计算可以得到

$$E(L_m^2) = \frac{2}{1+m\beta} \int_0^m \int_0^t \exp\left[-\int_x^t p(y) dy\right] dx dt. \tag{25}$$

这里得到的二阶矩与落绪率的部位分布有关, 不易再行简化。但可以对其作一些近似整理。为此对上式指数部分的积分利用积分中值定理可知, 在积分区间中存在 ξ 使得下式成立

$$\int_x^t p_m(y) dy = (t-x) p_m(\xi), \quad (x \leq \xi \leq t)$$

这里若用 $(0, m)$ 区间上单位丝长的平均落绪率 β 来代替式中的 $p_m(\xi)$, 即可以得到解舒丝长二阶矩的近似式

$$E(L_m^2) = \frac{2(m\beta - 1 + e^{-m\beta})}{\beta^2(1+m\beta)} \tag{26}$$

当茧丝长为一定值 m 时, 解舒丝长方差为

$$D(L_m) = \frac{2}{1+m\beta} \int_0^m \int_0^t \exp\left[-\int_x^t p(y) dy\right] dx dt - \left(\frac{m}{1+m\beta}\right)^2. \tag{27}$$

又由(26)式可以得到解舒丝长方差的近似式

$$\begin{aligned}
 D(L_m) &= \frac{m^2 \beta^2 - 2 + 2(1 + m\beta)e^{-m\beta}}{\beta^2(1 + m\beta)^2} \\
 &= \frac{z^2 - 2 + (1 + z)e^{-m\beta}}{\beta^2(1 + z)^2}
 \end{aligned} \quad (28)$$

在讨论离散型解舒丝长分布时候, 当茧丝长为一定值, 且落绪率在所有可能落绪的节点上为定值时, 离散型解舒丝长的方差已经获得^[3]过, 其式为

$$D(L_m) = \frac{M(M-1)qp^2 + 2(q + Mp)q^{-M+1}}{p^2(q + Mp)^2}. \quad (29)$$

此式中, 根据前面离散变量与连续变量的关系, 可知 $L_M h = L_m$ 因此有

$$h^2 D(L_m) = D(L_M).$$

又在(29)式中,

$$M = \frac{m}{h}, \quad p = \beta h, \quad q = 1 - p = 1 - \beta h$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, 有

$$M \rightarrow \infty, \quad p = \beta h \rightarrow 0, \quad q = 1 - p \rightarrow 1.$$

由这些条件又有

$$M \pm 1 \doteq M, \quad q^{M+1} = (1 - p)^{M+1} = (1 - \beta h)^{\frac{m}{h}+1} \doteq e^{-m\beta}.$$

利用这些条件代入(29)式便可得知, 其与连续型解舒丝长方差的近似式(28)是一致的。

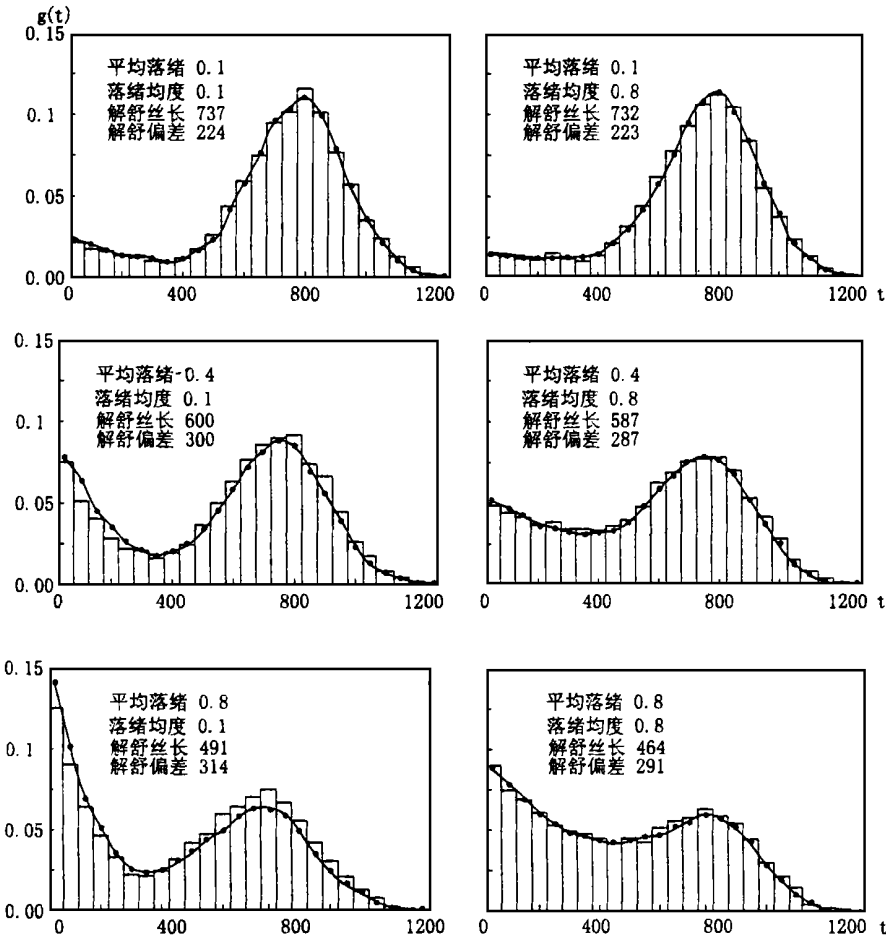
当茧丝长为一随机变量, 并具有正态分布时, 连续型解舒丝长的方差, 可以与前面求平均值时同样, 对于 m 一定时的解舒丝长方差按(16)式的权数求其期望值即可。具体内容在此不再赘述。

6 模拟试验及考察

为了确认解舒丝长分布理论式与实际分布的一致性并分析茧丝长服从正态分布时解舒丝长平均值与方差的近似式的误差, 通过电子计算机进行了连续型解舒丝长的模拟生成实验。

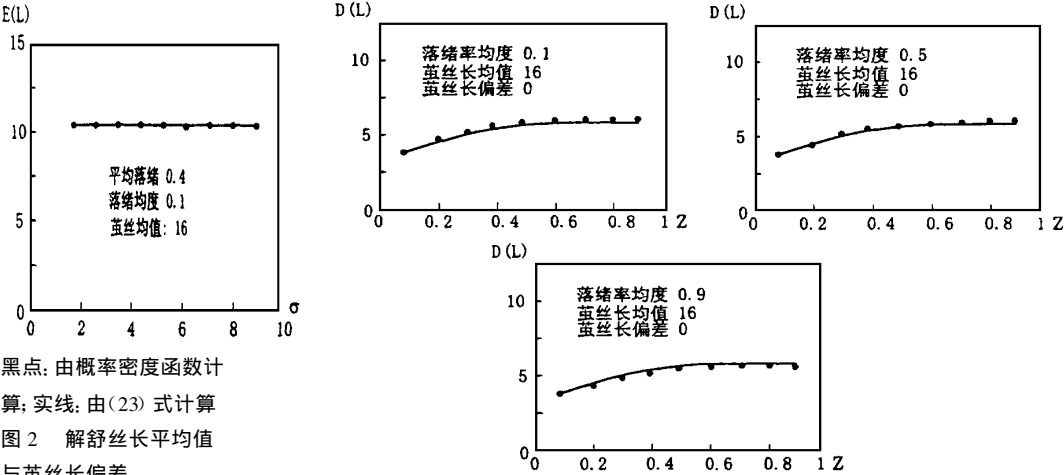
在实验时, 假设茧线长 L_0 服从平均值 μ 等于 800 米, 均方差 σ 等于 150 米的正态分布。在生成的茧丝长上, 按照落绪率密度(1)式在其上生成落绪点, 然后记录解舒丝长。大量重复这个过程后统计出解舒丝长的模拟试验分布。解舒丝长的概率密度函数曲线则按照(11)(12)(17)式用数值计算的方法算出。

图 1 给出解舒丝长概率密度函数曲线与模拟试验分布比较之若干例。模拟试验中各种条件均生成 20000 根茧丝。由图中看到, 在给出各例中, 理论分布与模拟试验结果都十分一致, 这表明, 解舒丝长概率密度函数确实能正确地描述解舒丝长的分布状况。



黑点线: 概率密度函数曲线; 直方图: 模拟实验分布

图 1 连续型解舒丝长分布



黑点: 由概率密度函数计算; 实线: 由(23)式计算
图 2 解舒丝长平均值与茧丝长偏差

黑点: 由概率密度函数计算; 实线: 由(23)式计算

图 3 解舒丝长偏差与平均值落绪次数

图 2 为一例解舒丝长平均值与茧丝长均方差的关系曲线。本图及图 3 中, 茧丝长平均值及茧丝长均方差, 都是以 $50m$ 为单位测定的表示值。图中横座标为茧丝长均方差, 纵座标为解舒丝长平均值。黑点为根据概率密度函数, 实线为根据近似式(23)的计算结果。由图中可以看到解舒丝长平均值与茧丝长偏差的变化完全无关系。

图 3 表示茧丝长为一定值时解舒丝长均方差与平均落绪数的关系。图中给出落绪率均一度 C 取不同值时 3 例结果, 其横坐标为平均落绪次数, 纵坐标为解舒丝长均方差。黑点为根据概率密度函数, 实线为根据近似式(28)的计算结果。可以看到解舒丝长偏差随着平均落绪次数增加呈增加状态, 但平均落绪次数增至 0.5 以上时不再增加。此外可以看到随着 C 增大, 近似式的误差逐渐减少的状况。

7 结 语

本文给出了连续型解舒丝长分布的概率密度函数及其平均值, 方差的理论式。这使解舒丝长这种特殊的寿命变量的分布问题得到一般的解答, 在电子计算机上精确地模拟解舒丝长得以实现。获得的解舒丝长发布对于分析及控制工程管理因素的影响也是有意义的。

参 考 文 献

- [1] 白 伦, 王建民, 周 韶. 茧丝长与解舒丝长的关系研究[J]. 苏州丝绸工学院学报 1999, (2)
- [2] 白 伦, 王建民, 周 韶. 解舒丝长分布とその推广[J]. 制丝绢研究会志, 1998, 7

ON CONTINUOUS DISTRIBUTION OF NON—BROKEN FILAMENT LENGTH OF COCOON

BAI Lun¹, WANG Jian—min², ZHOU Zhao²

(1. Suzhou University, Suzhou 215006; 2. College of Material Eng. of Suzhou Univ., Suzhou 215021)

Abstract: In this paper, based on discrete distribution of non—broken filament length of cocoon, we derived its continuous distribution, that is a distribution of lifetime, and the mean value and variance, with the hypotheses that the ratio of dropping end has continuorsly distributed form on cocoon filament. Basis on the condition that ratio of dropping end is distributed on cocoon filament with a parabola—form, we discussed on the relation between the distributed form and the parameters of ratio of dropping end. The theoretical results have been tested and verified by computer simulation.

Key words: length of cocoon filament; distribution of non—broken filament length of cocoon; ratio of dropping end; continuous distributed; distribution of lifetime