

解舒丝长的特征函数及其应用^{*}

白 伦¹,王建民²,周 韶²

(1. 苏州大学 江苏 苏州 215006; 2 苏州大学材料工程学院, 江苏 苏州 215021)

摘 要:在前文已经给出的连续型解舒丝长分布的基础上,给出解舒丝长的特征函数,讨论其应用的问题。并据此考察解舒丝长分布分解为指数分布与正态分布的混合分布问题。
关键词:特征函数;解舒丝长分布;茧丝长;落绪率;混合分布
中图分类号:TS143.1 **文献标识码:**A

前文^[1]中在假定茧丝长为一正实数,落绪可能发生在茧丝上的任意部位且其落绪部位分布为已知的前提下,导出了连续型的解舒丝长分布,并由此给出茧丝长为任意连续型分布(如茧丝长具有正态分布)随机变量时的解舒丝长分布。在此以前,长期以来解舒丝长分布由于未能得到理论的阐明而只能依靠解舒丝长的实际调查数据对其分布形态进行估计^[2,3],或间接地通过缫丝中的落绪数时间系列对解舒丝长的分布状态粗略地推测^[4]。连续型解舒丝长分布的导出,使我们可以根据茧丝长分布与落绪部位分布的更精确地推定解舒丝长分布,从而使原料茧在一定的制丝工程技术条件下形成解舒丝长分布而影响生丝质量、缫丝效率等的理论描述框架进一步得到完善。因此可以期待作为重要工程因子的解舒丝长的分布理论,在制丝工程管理理论与实际中演绎种种新的有用结果。此外因为解舒丝长随机变量又是一种特殊的寿命变量,其在一般的终止(或切断)条件下的理论分布的导出,又可望在可靠性理论分析中的拓开新的应用。

但是我们看到,连续型解舒丝长分布的形式比较复杂。应用时依然多有不便之处。本文着眼于解舒丝长分布理论的进一步完善,在前文已经给出的连续型解舒丝长分布的基础上,导出解舒丝长的特征函数,讨论其应用的有关问题。并据此考察解舒丝长分布分解为指数分布与正态分布的混合分布问题。得到一些有益的结果。

1 茧丝长一定时的解舒丝长特征函数

首先考虑茧丝长 $L_o = m$ 为一定的正实数的情况。假设在茧丝上任意部位都可能发生落

^{*} 收稿日期:2000-02-22
作者简介:白 伦(1948-),男,教授 主要从事制丝工程管理研究。
基金项目:本研究为纺织总会三项费用资助项目。

绪。由于茧丝各部位的粗细不同及煮熟程度差异等原因,使各部位发生落绪的概率也不一样。以茧丝的最外层起缫点为原点,记在位置 t 处的落绪率密度^[1] 为 $p_m(t)$ 。设 $p_m(t)$ 为区间 $(0, m]$ 中的连续光滑函数。根据实测的落绪部位分布^[3] 所示的 L, U, J 各种形状,假设 $p_m(t)$ 是关于 t 的开口向上的二次曲线,即

$$p_m(t) = k_m(t-a)^2 + b \quad (0 \leq t \leq m) \quad (1)$$

式中, a 为落绪率密度最小的位置, b 为最小落绪率密度, k_m 为二次曲线开口率。

记茧丝长上的平均落绪数为 z , 则单位丝长上平均落绪率为一定值 β

$$\beta = \frac{z}{m} \quad (2)$$

并且有

$$\int_0^m p_m(t) dt = m\beta \quad (3)$$

又记落绪率均一般为 C ^[5]

$$C = \frac{b}{\beta}$$

则二次曲线开口率 k_m 可通过由实际测定获得的最小落绪率密度 b 或落绪率均一度 C 以及平均落绪率 β 导出为

$$k_m = \frac{3(\beta - b)}{m^2 - 3am + a^2} \quad (4)$$

在前文^[1] 中我们给出过在已知落绪部位分布即落绪率密度函数 $p_m(t)$, 且茧丝长 $L_o = m$ 的条件下, 解舒丝长 L_m 的概率密度函数 $g_m(t)$ 为

$$\begin{aligned} g_m(t) = & \frac{1}{1+m\beta} \left[\int_0^{m-t} p_m(x)p_m(x+t) \exp\left(-\int_0^t p_m(y+x)dy\right) dx \right. \\ & + p_m(t) \exp\left(-\int_0^t p_m(y)dy\right) \\ & \left. + p_m(m-t) \exp\left(-\int_0^t p_m(m-t+y)dy\right) \right] \quad (0 \leq t < m) \end{aligned} \quad (5)$$

$$g_m(m) = \frac{\exp(-m\beta)}{1+m\beta} \quad (6)$$

记解舒丝长 L_m 的特征函数为 $F_m(\lambda)$, 则有

$$F_m(\lambda) = \int_0^m \exp(j\lambda t) g_m(t) dt + \int_0^m \exp(j\lambda t) \delta_m(t) g_m(m) dt \quad (7)$$

这里 $j = \sqrt{-1}$, λ 为实际参数。为了求出 $F_m(\lambda)$, 将(5)(6)式代入上式, 并对其中各项积分分别进行一些简单的计算得到

$$\begin{aligned} & \int_0^m \exp(j\lambda t) p_m(t) \exp\left(-\int_0^t p_m(y)dy\right) dt \\ & = 1 - \exp(j\lambda m - \beta m) + j\lambda \int_0^m \exp\left(j\lambda t - \int_0^t p_m(y)dy\right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^m \exp(j\lambda t) p_m(m-t) \exp\left[-\int_0^t p_m(m-t+y) dy\right] dt \\
&= 1 - \exp(j\lambda m - m\beta) \left[1 - j\lambda \int_0^m \exp\left[-j\lambda + \int_0^t p_m(y) dy\right] dt\right] \\
& \int_0^m \exp(j\lambda t) \int_0^{m-t} p(x) p_m(x+t) \exp\left[-\int_0^t p_m(y+x) dy\right] dt \\
&= m\beta - 1 + j\lambda m - j\lambda \int_0^m \exp\left[j\lambda t - \int_0^t p_m(y) dy\right] dt \\
&+ \exp(j\lambda m - \beta m) \left[1 - j\lambda \int_0^t \exp\left[-j\lambda + \int_0^m p_m(y) dy\right] dt\right] \\
&- \lambda^2 \int_0^m \exp\left[j\lambda t - \int_0^t p_m(y) dy\right] \int_0^t \exp\left[-j\lambda x + \int_0^x p_m(y) dy\right] dx dt \\
& \int_0^m \exp(j\lambda t) \delta_m(t) g_m(dt) = \exp(j\lambda m - \beta m)
\end{aligned}$$

将以上各项积分结果合并代入(7)式即得到当茧丝长 L_o 等于一定值 m 时的解舒丝长特征函数为

$$\begin{aligned}
F_m(\lambda) &= 1 + \frac{j\lambda m}{1 + \beta m} \\
&- \frac{\lambda^2}{1 + \beta m} \int_0^m \int_0^t \exp\left[j\lambda(t-x) - \int_x^t p_m(y) dy\right] dx dt
\end{aligned} \quad (8)$$

由此结果可以看到特征函数(8)式内的积分依存于落绪部位分布 $p_m(t)$ 。下面我们考察一种特殊条件下特征函数的应用例。

2 落绪率均匀分布时的解舒丝长分布

当茧丝上各部位的落绪率密度呈均匀分布时, 有 $p_m(t) = \beta$ 。则对于茧丝上的任意点 t

$$\int_0^t p_m(y) dy = \beta t$$

在茧丝长 $L_o = m$ 的条件下, (5)、(6) 式中解舒丝长 L_m 的概率密度函数 $g_m(t)$ 为

$$g_m(t) = \frac{2\beta + \beta^2(m-t)\exp(-\beta t)}{1 + m\beta} \quad (0 \leq t < m) \quad (9)$$

$$g_m(m) = \frac{\exp(-m\beta)}{1 + m\beta} \quad (10)$$

这个结果与已经获得过的相同条件下离散型解舒丝长分布^[6]是一致的。

另一方面由(8)式可以整理得到此时解舒丝长的特征函数为

$$F_m(\lambda) = 1 + \frac{j\lambda m}{1 + \beta m} - \frac{\lambda^2}{1 + \beta m} \left[\frac{m}{\beta - j\lambda} - \frac{1 - \exp(j\lambda m - \beta m)}{(\beta - j\lambda)^2} \right] \quad (11)$$

对特征函数进行微分计算可以容易地得到解舒丝长的平均值和方差。事实上, 利用

$$E(L_m^n) = \frac{F^{(n)}(0)}{j^n} \quad (12)$$

当 $n = 1$ 时, 由(11) 式关于 λ 求导数得

$$\begin{aligned} F'_m(\lambda) &= \frac{jm}{1+\beta m} - \frac{2\lambda}{1+\beta m} \left[\frac{m}{\beta-j\lambda} - \frac{1-\exp(-\beta m+j\lambda n)}{(\beta-j\lambda)^2} \right] \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{1+\beta m} \left[\frac{jm}{(\beta-j\lambda)^2} - 2j \frac{1-\exp(-\beta m+j\lambda n)}{(\beta-j\lambda)^3} + \frac{jm \exp(-\beta m+j\lambda n)}{(\beta-j\lambda)^2} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

故得解舒丝长的平均值为

$$E(L_m) = \frac{F'(0)}{j} = \frac{m}{1+\beta m} = \frac{m}{1+z} \quad (14)$$

在(13) 式中再次关于 λ 求导数, 并令 $\lambda = 0$ 得

$$E(L_m^2) = \frac{1}{j^2} F''_m(0) = \frac{2}{1+\beta m} \left[\frac{m}{\beta} - \frac{1-\exp(-\beta m)}{\beta^2} \right]$$

于是得到解舒丝长的方差为

$$\begin{aligned} D(L_m) &= E(L_m^2) - [E(L_m)]^2 \\ &= \frac{\beta^2 m^2 - 2 + 2(1+\beta m) \exp(-\beta m)}{(1+\beta m)^2 \beta^2} \\ &= \frac{z^2 - 2 + 2(1+z) \exp(-z)}{(1+z)^2 \beta^2} \end{aligned} \quad (15)$$

(14)、(15) 式中, z 为茧丝长上的平均落绪数。这与前文^[1] 中得到过的结果是一致的。

3 茧丝长为正态分布时的解舒丝长特征函数

设茧丝长 L_o 具有平均值 μ , 均方差为 σ 的正态分布, 其概率密度函数为 $f(m)$,

$$f(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (-\infty < m < \infty) \quad (16)$$

实际上, 在区间 $(-\infty, 0)$ 中, 总有 $f(m) \equiv 0$ 。注意到, 到茧丝长为 m , 在其上平均发生 βm 次中途落绪时, 因落绪而形成的解舒丝段数的权数与解舒丝段总数的权数之比为

$$\frac{(1+\beta m)f(m)dm}{\int_0^{\infty} (1+\beta t)f(t)dt} = \frac{(1+\beta m)f(m)dm}{1+\beta\mu} \quad (17)$$

故若记解舒丝长 L 的概率密度函数为 $g(t)$, 则

$$g(t) = \frac{1}{1+\beta\mu} \int_t^{\infty} g_m(t)(1+\beta m)f(m)dm + \frac{g_t(t)(1+\beta t)f(t)}{1+\beta\mu} \quad (t \geq 0) \quad (18)$$

这时, 解舒丝长的特征函数 $F(\lambda)$ 为

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \exp(j\lambda t) g(t) dt$$

$$= \frac{1}{1 + \beta\mu} \int_0^{\infty} F_m(\lambda) (1 + \beta m) f(m) dm \quad (19)$$

将(8)式代入上式得到

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \left[1 + \frac{j\lambda m}{1 + \beta\mu} - \frac{\lambda^2}{1 + \beta\mu} \int_0^m \int_0^t \exp\left(j\lambda(t-x) - \int_x^t p_m(y) dy\right) dx dt \right] f(m) dm \quad (20)$$

4 解舒丝长的混合分布分解

山崎^[3] 根据实际调查的结果, 将解舒丝长分布表示为指数变量与正态变量的混合分布形式。本节中, 我们根据已经获得的解舒丝长分布及其特征函数, 通过一个特例讨论解舒丝长分布分解为混合分布的问题。

为了简化讨论, 这里限定落绪部位分布为均一的, 即茧丝上任何部位的落绪率相同。此时落绪率密度 $p_m(t) = \beta$ 。当茧丝长一定即 $L_o = m$ 时, 解舒丝长 L_m 的概率密度函数 $g_m(t)$ 已由(9)、(10)式给出。当茧丝长为正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机变量时, 将(9)、(10)式代入(18)式可得到解舒丝长 L 的概率密度函数 $g(t)$ 为

$$g(t) = \int_0^{\infty} \frac{[2\beta + \beta^2(m-t)] e^{-\beta t}}{1 + \beta\mu} f(m) dm + \frac{e^{-\beta t}}{1 + \beta\mu} f(t) \quad (21)$$

对此, 由(11)、(19)式可以得到落绪率密度一定时, 解舒丝长的特征函数为

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} \left[1 + \frac{j\lambda m}{1 + \beta\mu} - \frac{\lambda^2}{1 + \beta\mu} \left(\frac{m}{\beta - j\lambda} - \frac{1 - \exp(j\lambda m - \beta m)}{(\beta - j\lambda)^2} \right) \right] f(m) dm \quad (22)$$

当茧丝长 m 上的平均落绪率 $m\beta$ 很小时, 对此式整理可以得到

$$F(\lambda) \doteq \frac{2 + \beta\mu}{1 + \beta\mu} \left(\frac{\beta}{\beta - j\lambda} \right) - \frac{1}{1 + \beta\mu} \left(\frac{\beta}{\beta - j\lambda} \right)^2 + \frac{1 - \beta\mu}{1 + \beta\mu} \exp[j\lambda(\mu - 2\beta\sigma^2) - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2] \quad (23)$$

导入与 λ 无关系的系数

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2 + \beta\mu}{1 + \beta\mu} \\ A_2 &= -\frac{1}{1 + \beta\mu} \\ A_3 &= \frac{1 - \beta\mu}{1 + \beta\mu} \end{aligned} \quad (24)$$

可将解舒丝长的特征函数表示为

$$F(\lambda) \doteq A_1 \frac{\beta}{\beta - j\lambda} + A_2 \left(\frac{\beta}{\beta - j\lambda} \right)^2 + A_3 \exp[j\lambda(\mu - 2\beta^2\sigma^2) - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2] \quad (25)$$

式中, 系数后的因子分别为指数分布, Γ 分布及正态分布的特征函数。因此可以得知, 在上述的条件下, 解舒丝长分布可以表示为指数分布(参数 β), Γ 分布(参数 β , 次数 2)及正态分布 $N(\mu - 2\beta\sigma^2, \sigma^2)$ 的混合分布。这一结果若以概率密度函数的形式表示, 可以得到

$$g(t) \doteq A_1 \beta \exp(-\beta t) + A_2 \beta^2 t \exp(-\beta t) + A_3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(t-\mu+\beta^2\sigma)^2}{2\sigma^2}\right]$$

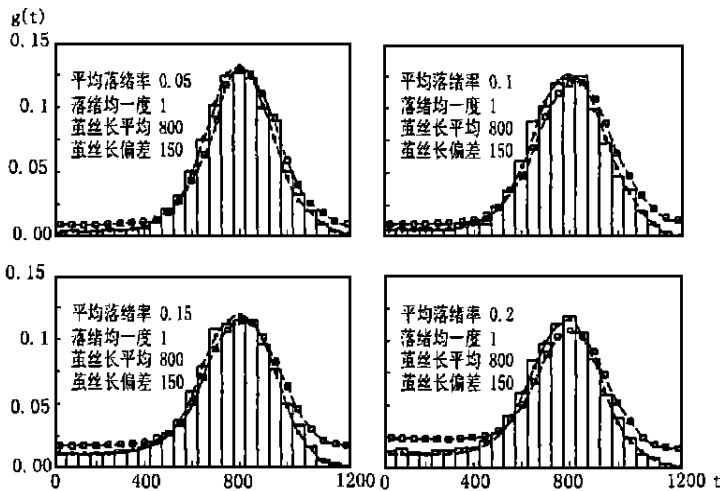
(26)

通过这一特例可以得知,落绪在茧丝长上均一分布的条件下,解舒丝长表示为指数变量, Γ 分布与正态变量混合分布的统计结果从理论上得到说明。

5 模拟结果试验及考察

根据 (25)、(26) 式,可以得知,当茧丝上的落绪率均一分布且平均落绪率次数比较小的条件下,解舒丝长分布分解为指数变量与正态变量混合分布时的各分布参数混合比例,均由单位丝长上的落绪率 β , 茧丝长平均值 μ , 均方差 σ^2 所决定。即只要调查得知单位丝长上的落绪率及茧丝长分布参数,就可以根据 (26) 式来近似推定解舒丝长的分布形态。

为了了解用混合分布形式来推定解舒丝长分布的理论的妥当性,并了解 (25)、(26) 式的适用范围及推定中的误差程度,通过电子计算机进行了连续型解舒丝长的模拟生成实验,同时根据 (5)、(6) 式用数值计算的方法算出解舒丝长密度函数的理论值。



正方点线: 混合分布; 黑圆点线: 理论分布; 直方图: 实验分布

图 1 解舒丝长混合分布与理论分布(I)

在实验时,假设茧丝长 L_0 服从平均值 μ 为 800 米, 均方差 σ 分别为 125, 150, 200 米各值的正态分布。在生成的茧丝长上,调整单位丝长上的落绪率取不同的值,并据此在其上生成落绪点,记录解舒丝长,统计出解舒丝长的模拟试验分布。

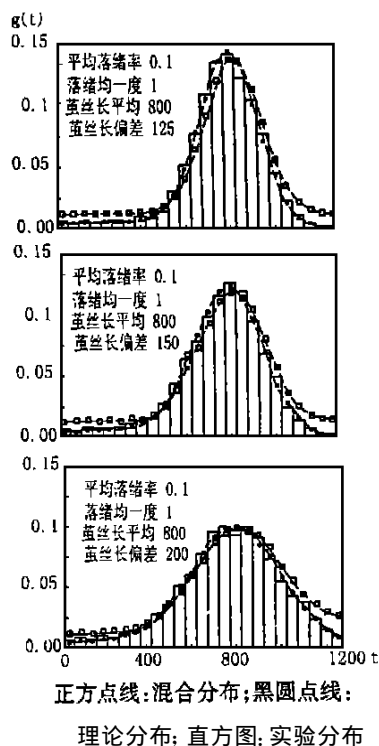


图 2 解舒丝长混合分布与理论分布(II)

图 1 及图 2 给出解舒丝长混合分布与理论分布曲线及模拟试验分布比较之若干例。模拟试验中各种条件均生成 5000 根茧丝。图 1 分别给出茧丝长均方差为 150 米, 落绪率 β 为 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 时的结果; 而图 2 分别给出落绪率 β 为 0.1, 茧丝长均方差为 125, 150, 200 米时的结果。图中正方点线为按 (26) 式算出的混合分布; 黑圆点线为相应的理论分布; 直方图为模拟试验分布。由图 1 中可以看到, 当单位丝长上的落绪次数在 0.2 以下时, 混合分布与理论及模拟试验结果均比较一致, 一般情况下可以认为是无妨于实际应用的。由图 2 中可以看到, 茧丝长偏差比较大时, 混合分布与理论、实验分布更为接近一些。因此, 在假定条件下, 解舒丝长分布分解为混合分布的形式, 的确可以近似地描述解舒丝长分布状况。

6 结语

本文给出了具有一般寿命分布形态的随机变量——解舒丝长的特征函数, 并讨论了利用特征函数求分布特征值等问题。对于一定的条件, 从理论上考察了解舒丝长分布表示为指数分布, Γ 分布及正态分布的混合形式问题。理论及模拟试验的结果表明, 根据预先调查得知的茧丝长分布特征数及平均落绪率等, 可以推定各混合分布成分的参数以及混合比例。这使解舒丝长分布可望成为更为便于应用的形式, 解舒丝长分布理论得到更为完善的描述。

参考文献

- [1] 白伦, 王建民, 周韶. 连续型解舒丝长分布的解析について[J]. 日蚕杂, 1999, 68(3): 209—215.
- [2] 山崎昭典. 落绪の分布特性について(III)[J]. 日蚕杂, 1955, 25: 65—70.
- [3] 山崎昭典. 落绪の分布特性について(IV)[J]. 日蚕杂, 1956, 25: 252—356.
- [4] 山崎昭典. 生丝の品质管理に関する研究(IV)[J]. 日蚕杂, 1957, 26: 268—272.
- [5] 白伦, 王建民, 周韶. 解舒丝长分布とその推广[J]. 日丝绢研志, 1998, 7: 11—18.
- [6] 白伦, 王建民, 周韶. 解舒丝长分布に関する研究[J]. 日蚕杂, 1999, 68(4): 301—307.

ON THE CHARACTERISTIC FUNCTION OF NON—BROKEN FILAMENT LENGTH OF COCOON

BAI Lun¹, WANG Jian—min², ZHOU Zhao²

(1. *Suzhou University, Suzhou 215006 China*; 2. *College of Material Eng. of Suzhou Univ., Suzhou 215021, China*)

Abstract: In this paper, basis on the distribution of non—broken filament length of cocoon, we gave the characteristic function, and discussed on its application. Using the characteristic function, it is confirmed that the distribution of non—broken filament length of cocoon can be separated into a mixed distribution of Gamma (or Exponential) distribution and Normal distribution.

Key words: characteristic function; length of cocoon filament; ratio of dropping end; distribution of non—broken filament length of cocoon; mixed distribution