

茧丝长与解舒丝长的关系研究^{*}

[白伦,王建民,周韶.茧丝长与解舒丝长的关系研究[J].苏州丝绸工学院学报,1999,19(2):8-16.
BAI Lun,WANG Jianmin,ZHOU Shao.On relation between the non-broken filament length of cocoon and the length of cocoon filament[J].Journal of Suzhou Institute of silk textile technology,1999,19(2):8-16.

白 伦

王建民 周 韶

(苏州大学,苏州,215006)

(苏州大学丝绸学院,苏州,215021)

摘 要:对于给定的茧丝长,研究由于落绪使茧丝切断而形成的所谓解舒丝段的长度的分布。将茧丝切断问题模型化为一种有序分拆问题,给出在茧丝上具有任意落绪部位分布的条件下,各种解舒丝长的概率权数,概率分布及其平均值。并就这些理论结果在电子计算机模拟缂丝实验上的意义及其应用问题进行了讨论。

关键词:茧丝长,解舒丝长,有序分析,落绪率,落绪部位分布

中图法分类号:TS143.22

茧丝在缂丝过程中发生切断(落绪),使得完整的一根茧丝,在并合成为生丝时,可能是分割成若干长度不一的所谓解舒丝段而参与并合的。解舒丝长的分布特性,与生丝质量、缂丝生产及出丝率都有的关系。在制丝工程管理理论研究中,这是最受关注的概率分布之一。嶋崎^{[1],[2]},三浦学位论文曾通过对落绪特性与解舒丝长的大量实态调查,提出以指数分布与正态分布混合得到的寿命分布模型来描述解舒丝长。嶋崎等^[3]还给出由落绪数时间序列特性推定解舒丝长分布的模型。关于茧丝长上的落绪现象,则基于实测调查指出了落绪部位的 L, U, J 三种分布形状^[2]。在以往关于解舒丝长分布的研究中,有限的茧丝长通过具有一定规则的落绪形成解舒丝长这一演变的理论结构并没有得到阐明。而这一理论结构的阐明,对于将茧丝长、落绪数解舒丝长三者表达于同一模型中,使原料茧特性,工艺条件、工程目标之间获得信息沟通通道是十分重要的。在利用茧丝纤度曲线进行模拟缂丝时,这三者关系的阐明,也是一项不可欠缺的基础工作。本研究着眼于此,对于给定的茧丝长,研究由于落绪使茧丝切断而形成的解舒丝长的分布。将茧丝切断问题模型化为一种有序分拆问题,给出在茧丝上具有任意落绪部位分布的条件下,各种解舒丝长的概率权数,概率分布及其平均值。并就这些理论结果在电子计算机模拟缂丝实验上的意义及其应用问题进行了讨论。

文中涉及的分拆问题是组合论中重要内容。在组合论中分拆理论主要讨论分拆数问题^[4]。本文则就分拆的另一方面的问题,即分拆的分部量(即解舒丝长)的分布问题为主线进行展开。

• 本文于1998年9月2日收到

白伦,男,1948年出生,教授

李林甫,谢佳,罗军,常春枝同学参加本课题部分工作

1 茧丝长的分拆模型

设茧丝长为正整数 m 。并设在茧丝上除两端点外,每一单位长度处有一节点,共有 $m-1$ 个节点。每个节点上按照概率 $p_i (i=1, 2, \dots, m-1)$ 决定该节点上是否为一个落绪点, p_i 称为落绪率,为 $(0, 1)$ 之间的值。由落绪点将茧丝分拆成若干长短不一的解舒丝长。这样的茧丝长分拆,是一种有序分拆,用模型

$$m = l_1 + l_2 + \dots + l_k \quad (1 \leq k \leq m)$$

表示。 l_i 称为茧丝分拆中的分部量即解舒丝长。对于一定的 k , 规定 l_i 为正整数。一般地,我们用 L_m 来表示茧丝长 m 分拆时的解舒丝长随机变量。在由解舒丝长作成的集合中,其长度具有怎样的分布及分布特征,与茧丝长及落绪率有何关系,这就是本文所要研究的问题。

2 解舒丝长的权数

称在所有对茧丝长 m 的有序分拆中,一定的解舒丝长每次出现的概率之和为该解舒丝长的权数。记 m 分拆中解舒丝长 L_m 等于 i 时的解舒丝长权数为 $N_m(i)$ 。

落绪率 $p_i (i=1, 2, \dots, m-1)$ 是 i 的任意非负函数。其可以由落绪部位分布简单地求出。又记

$$q_i = 1 - p_i$$

为第 i 个节点非落绪点的概率。

我们首先讨论几个特殊条件下的解舒丝长的权数。

当 $m=1$ 时,有

$$N_1(1) = 1; \quad (1)$$

当 $m=2$ 时,有

$$N_2(1) = 2p_1, \quad N_2(2) = q_1. \quad (2)$$

一般地,关于解舒丝长为 1 的权数我们有

【定理 1】当 $m \geq 2$ 时,茧丝长为 $m+1$ 与茧丝长为 m 的两种分拆之间,长度为 1 的解舒丝长权数满足关系式

$$N_{m+1}(1) = N_m(1) + p_m - p_{m-1}q_m, \quad (m \geq 2) \quad (3)$$

证明. 因在茧丝长为 m 分拆的每种方法中若将右端点改变为节点,在其上配置或不配置落绪点而后延长 1 单位,均可以成为一种对茧丝长 $m+1$ 的分拆方法。考虑在作这样的改变后,解舒丝长 1 的权数的变化情况。

当在茧丝长 m 分拆方法的右端点置一落绪点并延长 1 单位后,原分拆中解舒丝长 1 的权数变为

$$p_m N_m(1).$$

而由于延长 1 单位,解舒丝长 1 的丝段增多了。因此而增加的权数为

$$\prod_{j=1}^{m-1} (p_j + q_j) p_m = p_m.$$

当右端点不配置落绪点而延长 1 单位时,原分拆中解舒丝长 1 的权数变为

$$q_m N_m(1).$$

而由于延长 1 单位,原在右端长度为 1 的解舒丝段的长度为 2,使长度 1 的解舒丝段减少了。

当 $m \geq 2$ 时,因此而使解舒丝长为 1 的权数减少

$$\prod_{j=1}^{m-2} (p_j + q_j) p_{m-1} q_m = p_{m-1} q_m.$$

归纳上述可知,茧丝长 $m+1$ 分拆中解舒丝长 1 的权数为

$$\begin{aligned} N_{m+1}(1) &= p_m N_m(1) + q_m N_m(1) + p_m - p_{m-1} q_m \\ &= N_m(1) + p_m - p_{m-1} q_m. \quad (m \geq 2) \end{aligned}$$

由此知(3)式成立。

证毕。

利用(1)(2)(3)式,我们可以得到

【系 1】对于 $m \geq 2$ 有

$$N_m(1) = p_1 + p_{m-1} + \sum_{j=1}^{m-2} p_j p_{j+1}. \quad (4)$$

证明. 用归纳法证明. 当 $m = 2$ 时,注意到(4)中的和式为 0,故由(2)式知此时等式成立。

设当 $m = k$ 时(4)式成立. 由定理 1 计算茧丝长 $m = k+1$ 时解舒丝长 1 的权数得

$$\begin{aligned} N_{k+1}(1) &= N_k(1) + p_k - p_{k-1} q_k \\ &= p_1 + p_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-2} p_j p_{j+1} + p_k - p_{k-1} q_k \\ &= p_1 + p_k + \sum_{j=1}^{k-1} p_j p_{j+1} \end{aligned}$$

因此可知(4)式对 $m = k+1$ 时也成立。

证毕。

我们规定

$$p_0 = 1 \quad (5)$$

与定理 1 类似地,我们得到关于解舒丝长为 i 时的权数的定理。

【定理 2】当 $m \geq 2$ 时,茧丝长为 $m+1$ 与茧丝长为 m 的两种分拆之间,长度为 i 的解舒丝长权数满足关系式

$$N_{m+1}(i) = N_m(i) + (p_{m-i+1} - p_{m-i} q_{m-i+1}) \prod_{j=2}^i q_{m-i+j}. \quad (2 \leq i < m) \quad (6)$$

证明. 将茧丝长为 m 分拆的每种方法中的右端点改变为节点,在其上配置或不配置落绪点而后延长 1 单位. 考虑在作这样的改变后,解舒丝长 $i (2 \leq i < m)$ 的权数的变化情况。

当在茧丝长 m 分拆方法的右端点置一落绪点并延长一单位后,原分拆中解舒丝长 i 的权数变为

$$p_m N_m(i).$$

此时,解舒丝长为 i 的丝段既没有增多,也没有减少。

当右端点不配置落绪点而延长 1 单位时,原分拆中解舒丝长 i 的权数变为

$$q_m N_m(i).$$

这时,由于延长 1 单位,原在右端长度为 $i-1$ 的解舒丝段的长度变为 i ,这使解舒丝长 i 的丝段增多. 相应的权数增加:

$$\prod_{j=1}^{m-1} (p_j + q_j) p_{m-i+1} \prod_{j=2}^i q_{m-i+j} = p_{m-i+1} \prod_{j=2}^i q_{m-i+j}.$$

与此同时,原在右端长度为 i 的解舒丝段的长度变为 $i+1$,使长度 i 的解线段减少。因此而使长度 i 的解舒丝长的权数减少

$$\prod_{j=1}^{m-i-1} (p_j + q_j) p_{m-i} \prod_{j=1}^i q_{m-i+j} = p_{m-i} \prod_{j=1}^i q_{m-i+j}.$$

归纳上述可知,茧丝长 $m+1$ 分拆中解舒丝长 i 的权数为

$$\begin{aligned} N_{m+1}(i) &= N_m(i)(p_m + q_m) + p_{m+1} \prod_{j=2}^i q_{m-i+j} - p_{m-1} \prod_{j=1}^i q_{m-i+j} \\ &= N_m(i) + (p_{m+1} - p_{m-1} q_{m-1}) \prod_{j=2}^i q_{m-i+j}. \end{aligned}$$

由此知(6)式成立。

证毕。

特别地,在茧丝长 m 的分拆中,当 $i = m$ 时易于得到

$$N_m(m) = \prod_{j=1}^{m-1} q_j. \quad (m > 1) \quad (7)$$

而当 $i = m-1$ 时,注意到只有当第 1 节点为唯一的落绪点或第 $m-1$ 节点为唯一的落绪点时,才可能出现长度为 $m-1$ 的解舒丝长。故有

$$N_m(m-1) = p_1 \prod_{j=2}^{m-1} q_j + p_{m-1} \prod_{j=1}^{m-2} q_j. \quad (m > 2) \quad (8)$$

利用此以及定理 2 可以得到

【系 2】对于 $m > 2$, 茧丝长 m 的分拆中解舒丝长为 i 的权数为

$$N_m(i) = p_i \prod_{j=1}^{i-1} q_j + \sum_{r=0}^{m-i-1} p_{r+1} \prod_{j=2}^i q_{r+j} - \sum_{r=1}^{m-i-1} p_r \prod_{j=1}^i q_{r+j}. \quad (1 < i < m) \quad (9)$$

证明. 由(8)式及(6)式,将 m 等于

$$i+1, i+2, \dots, i+(m-i)-1$$

时的各式两侧相加并整理即可得到(9)式。

特别地,当落绪率 $p_i \rightarrow 0 (i = 1, 2, \dots, m-1)$ 时,利用

$$\prod_{j=1}^k q_j = \prod_{j=1}^k (1 - p_j) = 1 - \sum_{j=1}^k p_j$$

代入(9)式进行整理,其中等式右侧后两个和式

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{m-i-1} p_{r+1} \prod_{j=2}^i q_{r+j} - \sum_{r=1}^{m-i-1} p_r \prod_{j=1}^i q_{r+j} \\ &= \sum_{r=0}^{m-i-1} p_{r+1} (1 - \sum_{j=2}^i p_{r+j}) - \sum_{r=1}^{m-i-1} p_r (1 - \sum_{j=1}^i p_{r+j}) \\ &= p_{m-i} (1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_{m-i+j}) + \sum_{j=1}^{m-i-1} p_j p_{j+1}. \end{aligned}$$

由此,得到(9)式的近似式

$$N_m(i) = p_i (1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j) + p_{m-i} (1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_{m-i+j}) + \sum_{j=1}^{m-i-1} p_i p_{j+1}. \quad (1 < i < m) \quad (10)$$

类似地,(7)式也可以近似地表示为

$$N_m(m) = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_j. \quad (m > 1) \quad (11)$$

根据以上讨论得知,由定理 1 及系 1,定理 2 及系 2 等的结果,我们可以确定对于任何茧

丝长 m 进行有序分拆时的分部长度的权数。

3 解舒丝长的分布

这里我们基于对一定茧丝长 m 进行分拆的权数的结果,讨论在此条件下分拆得到的各种解舒丝长的分布。

首先证明关于各解舒丝长的权数之和的一个定理。

【定理3】分拆茧丝长 m 时各解舒丝长的权数之总和为

$$\sum_{i=1}^1 N_1(i) = 1. \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^m N_m(i) = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} p_i. \quad (m \geq 2) \quad (13)$$

证明. 用归纳法证明(13)式。当 $m = 2$ 时,

$$N_2(1) + N_2(2) = 2p_1 + q_1 = 1 + p_1.$$

故(12)式成立。

设当 $m = k$ 时(13)式成立。由定理1定理2可以计算茧丝长 $m = k + 1$ 分拆时解舒丝长的权数之和。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k+1} N_{k+1}(i) \\ &= N_k(1) + p_k - p_{k-1}q_k \\ &+ N_k(2) + p_{k-1} - p_{k-2}q_{k-1}q_k \\ &\dots\dots \\ &+ N_k(k) + p_1q_2 \cdots q_k - p_0q_1 \cdots q_k \\ &+ q_1q_2 \cdots q_k \\ &= \sum_{i=1}^k N_k(i) + p_k = 1 + \sum_{i=1}^k p_i. \end{aligned}$$

因此可知(13)式对 $m = k + 1$ 时也成立。

证毕。

记茧丝长 m 分拆时解舒丝长 L_m 的概率函数

$$P_m(i) = P\{L_m = i\}.$$

则由(4)(7)(9)式及定理3立即得到

【定理4】茧丝长 m 分拆时的解舒丝长的概率分布为

$$P_m(1) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{m-1} p_j} (p_1 + p_{m-1} + \sum_{j=1}^{m-2} p_j p_{j+1}), \quad (14)$$

$$P_m(i) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{m-1} p_j} (p_i \prod_{j=1}^{i-1} q_j + p_{m-i} \prod_{j=1}^{i-1} q_{m-i+j} + \sum_{r=1}^{m-i-1} p_r p_{r+i} \prod_{j=1}^{i-1} q_{r+j}), \quad (1 < i < m) \quad (15)$$

$$P_m(m) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{m-1} p_j} \prod_{j=1}^{m-1} q_j. \quad (16)$$

利用(10)(11)两个近似式,(15)(16)式又可以近似地表示为

$$P_m(i) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{m-1} p_j} [p_i(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_j) + p_{m-i}(1 - \sum_{j=1}^{i-1} p_{m-i+j}) + \sum_{r=1}^{m-i-1} p_i p_{r+j}],$$

$$(1 < i < m) \quad (17)$$

$$P_m(m) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{m-1} p_j} (1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_j). \quad (18)$$

特别地,当落绪率一定即

$$p_i = p, \quad q_i = q = 1 - p \quad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

时,由(14)(15)(16)式可以得到

$$P(i) = \frac{[2p + (m-i-1)p^2]q^{i-1}}{1 + (m-1)p}, \quad (i = 1, 2, \dots, m-1) \quad (19)$$

$$P(m) = \frac{q^{m-1}}{1 + (m-1)p}. \quad (20)$$

这是已经得到过的结果(见另文)。

4 茧丝长为 m 时的解舒丝长平均值

根据假设条件,当茧丝长为 m 时,茧丝上 $m-1$ 个节点上的落绪次数平均值为

$$\lambda = \sum_{j=1}^{m-1} p_j \quad (21)$$

次。即茧丝平均被分拆成为

$$1 + \lambda$$

个解舒丝段。因此解舒丝长的平均值为

$$\frac{m}{1 + \lambda}.$$

将这一结果记为

【定理 5】茧丝长为 m 时的解舒丝长平均值

$$E(L_m) = \frac{m}{1 + \lambda}. \quad (22)$$

5 关于落绪率的假设

在这里不拟对茧丝上落绪率的分布进行详细的讨论。为了了解上述理论对实际解舒现象的描述状况,我们根据茧丝内外层落绪率大,中层落绪率小的状况以及茧丝纤度曲线形状,假设落绪率在茧丝长上呈向上开口二次曲线形状。并设

$$p_i = k(i-a)^2 + b. \quad (23)$$

式中, a 为最粗纤度位置, b 为最粗纤度处的落绪率。若以 b 与平均落绪率 λ 之比表示落绪率的均一程度,并记之为 C ,即

$$C = \frac{b}{\lambda}. \quad (24)$$

称为落绪率均一度。则只要得知 C 及平均落绪率 λ , 就可以求出 b 及二次曲线开口率 k 。这样, 由(23)式即可计算出各节点的落绪率 p 。

6 模拟试验考察与讨论

假设按 50 米丝长为 1 单位测定茧丝长。设茧丝长 $m = 16$ 单位。又假设最粗纤度位置 $a = 3$ 。在不同的平均落绪次数和煮熟程度的条件下, 根据(23)式可以计算出茧丝上各不同位置的落绪率。按照得到的落绪率, 我们在计算机上模拟生成落绪点, 并统计出各解舒丝段的长度分布。另一方面, 根据理论分析得到的解舒丝长分布(14)(15)(16)式可以计算出解舒丝长分布理论值。图 1 给出解舒丝长分布模拟试验与理论计算结果比较之一例。模拟试验的每一个条件下生成 10000 根茧丝。上图为平均落绪 0.6 次, 落绪率均一度 C 分别为 0.1 与 0.8; 下图为平均落绪 0.8 次, 落绪率均一度 C 分别为 0.1 与 0.8 时的结果。直方图为模拟试验值, 空心圈为理论值, 小方形圈则为由(17)(18)式计算的近似分布。由模拟试验结果可知, 解舒丝长理论分布十分良好地反映试验结果。近似式(17)(18)当平均落绪率比较小时有很好的近似度, 但当平均落绪率比较大时, 在分布的尾部将偏离真值。

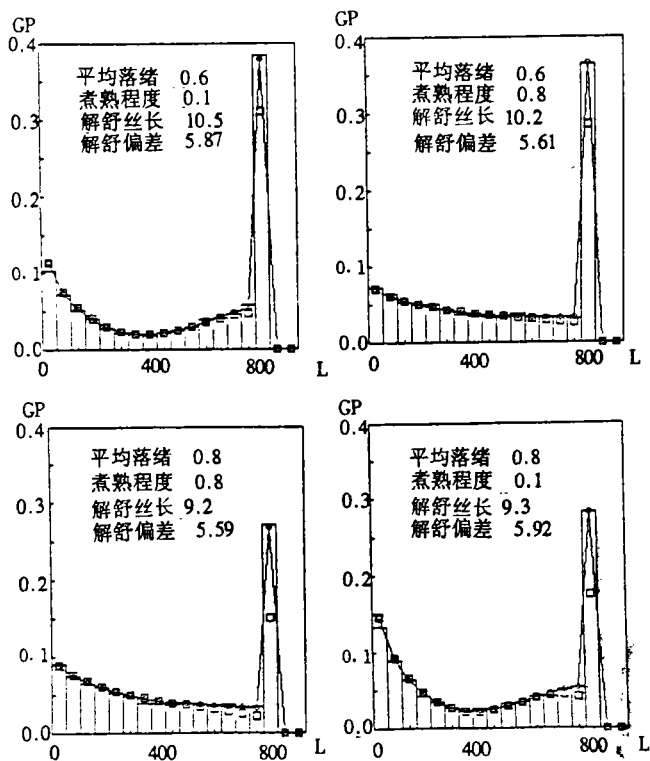


图 1 茧丝长为一定值时的解舒丝长分布

从茧丝长一定时解舒丝长分布看到,在最终值处分布的概率值远远高于前面任何值。这种情况当平均落绪率越小时越为显著。由此也可以得知,当茧丝长按正态分布而变化时,使解舒丝长分布形成后部的山头的的原因正是这最终值的高概率。

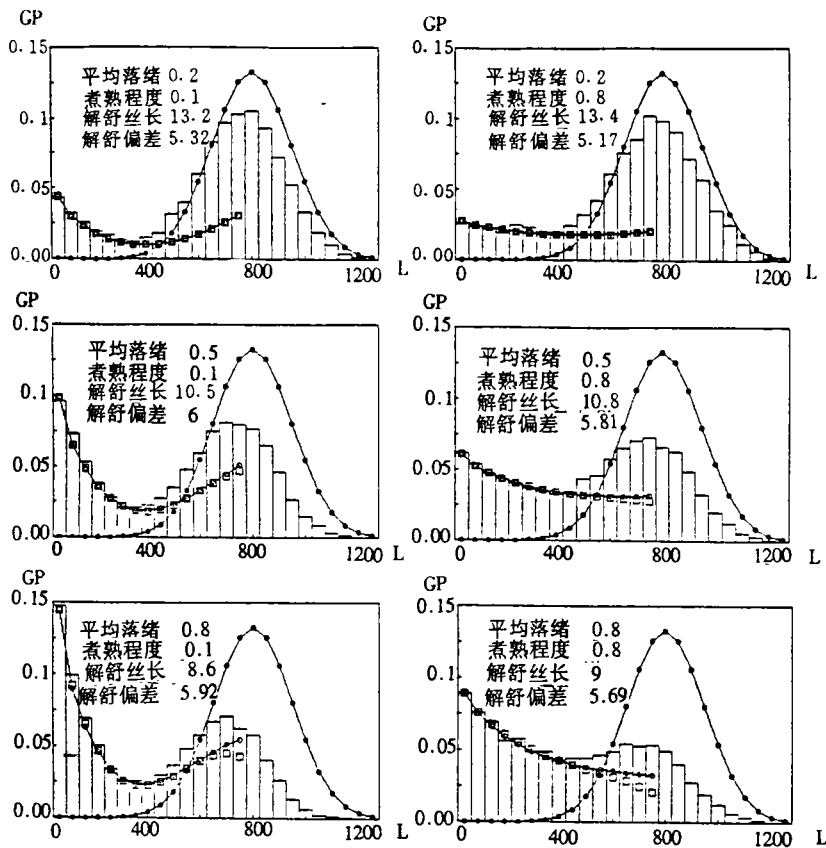


图 2 茧丝长为正态分布时的解舒丝长分布

图 2 给出茧丝长按正态分布变化时所得到的解舒丝长分布几例图形。图中,黑圈曲线为平均值 16,均方差 3 的茧丝长分布。直方图为在此条件下的解舒丝长模拟试验结果。空心圈为当茧丝长 $m = 16$ 时的理论值(但当 $L_m = 16$ 时的值未画出),小方形圈则为相应的近似分布。上中下各图分别为平均落绪 0.2 次,0.5 次和 0.8 次;各相应的落绪率均一度 C 分别为 0.1 与 0.8。由各图中可以看到,与茧丝长分布的最频值相比,解舒丝长分布最频值向原点方向偏移,并且山头的高度降低。当平均落绪率越大,中心偏移及山头降低程度越为显著。而落绪率均一度 C 提高,则使解舒丝长分布特别是短片段部分分布越限平坦化。此外由图中可以看到,各条件下解舒丝长分布中的短片段部分与茧丝长固定时的解舒丝长的短片段部分几乎无差异。由此得知,可以用茧丝长固定时的解舒丝长短片段部分的分布曲线来推定解舒丝长分布的短片段分布。

参 考 文 献

- 1 山崎昭典. 落緒の分布特性について(Ⅲ). 日蠶雜;1955,25(1):65~70
- 2 山崎昭典. 落緒の分布特性について(Ⅳ). 日蠶雜;1956,25(5):352~356
- 3 山崎昭典. 生絲の品質管理に関する研究(Ⅳ). 日蠶雜;1957,26(4):268~272
- 4 柯召,魏万迪. 组合论(上). 科学出版社;1981
- 5 R. T. Stanley. Enumerative combinatorics, Vol. 1. Wadsworth and brooks, 1990

ON RELATION BETWEEN THE NON-BROKEN FILAMENT LENGTH OF COCOON AND THE LENGTH OF COCOON FILAMENT

Bai Lun Wang Jianmin Zhou Shao

(College of Silk Eng. Suzhou University, Suzhou, 215021) Zhejiang Institute of Silk Textile Technology, 310033)

Abstract: In this paper, using the fixed length of cocoon filament as a basis, we discussed the distribution of non-broken filament length of cocoon, which is formed by dropping end on cocoon filament, The broken cocoon filaments are looked upon as caused by the ordered partition. In accordance with the hypotheses that the ratio of dropping end has optionally distributed form on cocoon filament, we derived the probabilityweight and distribution of non-broken filament length of cocoon and its mean value. The theoretical results are discussed on their applications to simurate reeling process and the others.

Key words: length of cocoon filament, ordered partio tion, distribution of non-broken filament length of cocoon, ration of dropping eng, distributed form of ratio of dropping end.