中国科学技术大学

2019-2020 学年第二学期

数理方程 B 期末模拟试卷参考答案

数理方程 08 班制作, 仅供学习交流使用

一、（本题 10 分）求一维弦振动问题的解。

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}(-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x,-x) = \varphi(x) \\ u(x,x) = \psi(x) \end{cases}$$

解：泛定方程的通解为：

$$u(x,t) = f_1(x+t) + f_2(x-t)$$

由定解条件可知：

$$\begin{aligned} f_1(0) + f_2(2x) &= \varphi(x) \\ f_1(2x) + f_2(0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

........................(5 分)

令 $2x = y$, 则上式变为：

$$\begin{cases} f_1(0) + f_2(y) = \varphi\left(\frac{y}{2}\right) \\ f_1(y) + f_2(0) = \psi\left(\frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

其中，- $\infty < y < \infty$，上述方程可化为：

$$\begin{cases} f_1(y) = \psi\left(\frac{y}{2}\right) - f_2(0) \\ f_2(y) = \varphi\left(\frac{y}{2}\right) - f_1(0) \end{cases}$$

所以，

$$f_1(x+t) = \psi\left(\frac{x+t}{2}\right) - f_1(0), f_2(x-t) = \varphi\left(\frac{x-t}{2}\right) - f_2(0)$$

因此：

$$u(x,t) = \psi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x-t}{2}\right) - [f_1(0) + f_2(0)]$$

在上述解得关于 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 的等式中令 $y = 0$ 可得：

$$f_1(0)+f_2(0)=\frac{1}{2}[\varphi(0)+\psi(0)]$$

所以，此定解问题的解为：

$$u(x,t)=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)+\frac{\varphi(0)+\psi(0)}{2}$$

........................(10 分)

二、（本题 10 分）求右行单波方程初值问题的解。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0(-\infty<x<\infty,t>0) \\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases}$$

解：将泛定方程两边分别对 t 和 x 求导，得

$$u_{tt}+au_{xt}=0$$
$$u_{tx}+au_{xx}=0$$

整理两个等式得一维波动方程：

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

方程的通解为：

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

........................(5 分)

将通解带入原泛定方程中，得：

$$af_1'(x+at)-af_2'(x-at)+af_1'(x+at)+af_2'(x-at)=0$$

即:

$$2af_1'(x+at)=0$$

由此可得：

$$f_1(x+at)=C$$

将通解带入定解条件中，得：

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x)$$

即：

$$f_2(x) = \varphi(x) - f_1(x)$$

因此可得：

$$f_2(x - at) = \varphi(x - at) - C$$

将 $f_1(x + at) = C$ 和 $f_2(x - at) = \varphi(x - at) - C$ 带入方程通解得：

$$u(x,t) = \varphi(x - at)$$

........................(10 分)

三、（本题 20 分）求解热传导问题的解。已知定解问题描述的是一个长为 l 的均匀杆的温度变化问题，请说明定解条件所表达的物理意义。

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) - h u_x(0,t) = u_1, u(l,t) + h u_x(l,t) = u_2 \\ u(x,0) = u_0 \end{cases}$$

解：首先求解定解问题。根据定解问题可知，利用分离变量法求解。由于边界条件非齐次，所以先将边界条件齐次化

令：

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

其中，

$$w(x,t) = \frac{u_2 - u_1}{l + 2h}(h + x) + u_2$$

........................(5 分)

则，$v(x,t)$ 满足定解问题：

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(0,t) - h v_x(0,t) = 0 \\ v(l,t) + h v_x(l,t) = 0 \\ v(x,0) = u_0 - u_2 + \frac{u_1 - u_2}{l + 2h}(h + x) \end{cases}$$

分离变量得固有值问题和关于 t 的常微分方程：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) - h X'(0) = 0, X(l) + h X'(l) = 0 \\ T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \end{cases}$$

........................(10 分)

由施刘定理可知，由可数个非负固有值 λ 满足：

$$\tan\sqrt{\lambda}l = \tfrac{2h\sqrt{\lambda}}{h^2\lambda-1}$$

进一步得固有函数：

$$X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x + h\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x$$

将固有值带入关于 t 的常微分方程并解之得：

$$T_n(t) = a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}$$

整理得形式解：

$$v(x,t) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}(\sin\sqrt{\lambda_n}x + h\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x)$$

........................(15 分)

将定解条件在固有函数系上展开，并比较对应项系数得：

$$a_n = \tfrac{1}{N_n^2}\left\{\left[(u_0-u_2)+\tfrac{(u_1-u_2)h}{l+2h}\right]\tfrac{2}{\sqrt{\lambda_n}} + \tfrac{u_1-u_2}{l+2h}\tfrac{l}{\sqrt{\lambda_n}}\right\} = \tfrac{2u_0+u_1-3u_2}{N_n^2\sqrt{\lambda_n}} = \tfrac{4u_0+2u_1-6u_2}{\sqrt{\lambda_n}[l(h^2\lambda_n+1)+2h]}$$

带入形式解，得到关于 $v(x,t)$ 的解。将求得的 $v(x,t)$ 与 $w(x,t)$ 相加，得定解问题的解：

$$u(x,t) = u_2 + \tfrac{u_2-u_1}{l+2h}(h+x) + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{4u_0+2u_1-6u_2}{\sqrt{\lambda_n}[l(h^2\lambda_n+1)+2h]}\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}\cdot(\sin\sqrt{\lambda_n}x + h\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x)$$

........................(18 分)

由题意知，定解问题描述长为 l 的均匀杆的温度变化问题，由定解条件可知，表达的物理意义为：杆的初始温度为 u_0, 杆的侧面绝热，两端分别与温度为 u_1 和 u_2 的介质进行热交换。

........................(20 分)

四、（本题 15 分）求高维波动方程的解。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u(0<x,y,z<1,t>0) \\ u(x,y,z;0) = \sin\pi x\sin\pi y\sin\pi z \\ u_t(x,y,z;0) = 0 \\ u(0,y,z;t) = u(1,y,z;t) = 0 \\ u(x,0,z;t) = u(x,1,z;t) = 0 \\ u(x,y,0;t) = u(x,y,1;t) = 0 \end{cases}$$

解：由题知，利用分离变量法求解。令

$$u(x,y,z;t)=X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

带入方程整理得：

$$\tfrac{T''}{a^2T}=\tfrac{X''}{X}+\tfrac{Y''}{Y}+\tfrac{Z''}{Z}$$

进一步，得：

$$\begin{cases} T''(t)-a^2\mu T(t)=0 \\ X''(x)-\alpha X(x)=0 \\ Y''(y)-\beta Y(y)=0 \\ Z''(z)-\gamma Z(z)=0 \end{cases}$$

…………………………(5 分)

解关于 x、y、z 的固有值问题得：

$$\begin{gathered} \alpha=-m^2\pi^2, X_m(x)=a_m\sin m\pi x, m=1,2,\cdots \\ \beta=-n^2\pi^2, Y_n(y)=b_n\sin n\pi y, n=1,2,\cdots \\ \gamma=-l^2\pi^2, Z_l(z)=c_l\sin l\pi z, l=1,2,\cdots \end{gathered}$$

将 $\mu=\alpha+\beta+\gamma=-(m^2+n^2+l^2)\pi^2$ 带入关于 T 的常微分方程得:

$$T''+a^2\left(n^2+m^2+l^2\right)T=0$$

记：

$$a^2\left(m^2+n^2+l^2\right)\pi^2=\omega^2$$

于是得：

$$T_{m,n,l}(t)=A'_{mnl}\cos\omega t+B'_{mnl}\sin\omega t$$

因此，方程的形式解为：

$$u(x,y,z;t)=\textstyle\sum_{m,n,l=1}^{\infty}\left(A_{mnl}\cos\omega t+B_{mnl}\sin\omega t\right)\cdot\sin m\pi x\sin n\pi y\sin l\pi z$$

…………………………(10 分)

将定解条件在固有函数系上展开，比较对应项系数，得

$$A_{111}=1, A_{mnl}=0(m,n,l\neq 1), B_{mnl}=0$$

因此，定解问题的解为：

$$u(x,y,z;t) = \cos\sqrt{3}\pi at \sin\pi x \sin\pi y \sin\pi z$$

........................(15 分)

五、（本题 15 分）有一个内径为 a，外径为 $2a$ 的均匀球壳，其内、外表面温度分别为 0 和 u_0。试求球壳内的温度分布。

解：首先根据问题描述写出定解问题：

$$\begin{cases} \Delta u = 0, a < r < 2a \\ u|_{r=a} = 0, u|_{r=2a} = u_0 \end{cases}$$

........................(5 分)

由题意知：u 只和 r 有关，所以，定解问题可以转化为：

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \\ u|_{r=a} = 0, u|_{r=2a} = u_0 \end{cases}$$

........................(10 分)

进而得到方程解为：

$$u(r,\theta) = u(r) = 2u_0\left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

........................(15 分)

说明：由于问题具有对称性，因此可以直接转化为关于 r 的常微分方程求解，而不需要分离变量利用特殊函数进行求解，这一点值得注意。
六、（本题 15 分）求解定解问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta_3 u(t>0, r>0) \\ u|_{r=0} \text{ 有界}, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ u|_{t-0} = 0, u_t|_{t-0} = (1+r^2)^{-2} \end{cases}$$

解：由于定解问题具有对称性，只和 r 相关，所以定解问题可以写作：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)u(t>0, r>0) \\ u|_{r=0} \text{ 有界}, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ u|_{t-0} = 0, u_t|_{t-0} = (1+r^2)^{-2} \end{cases}$$

........................(3 分)

对 t 做拉普拉斯变换得：

$$L\left[u_{tt}\right]=p^2U-pU(0,r)-u_t(0,r)=p^2U-\left(1+r^2\right)^{-2}$$

得到常微分方程：

$$p^2U-\left(1+r^2\right)^{-2}=a^2\tfrac{d^2U}{dr^2}+\tfrac{2a^2}{r}\tfrac{dU}{dr}$$

........................(7 分)

利用常数变易法求解常微分方程，并做反变换得：

$$u=\tfrac{t}{[1+(r-at)^2][1+(r+at)^2]}$$

........................(15 分)

七、（本题 15 分）请写出定解问题对应的格林函数，并利用基本解方法求解定解问题。

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=A\sin\omega t(0<x<l,t>0) \\ u_x|_{x=0}=0,\, u_x|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=0 \end{cases}$$

解：由题意知，格林函数满足固有值问题：

$$\begin{cases} G_t-a^2G_{xx}=\delta\left(x-x_0\right)\delta\left(t-t_0\right) \\ G_x|_{x=0}=0,\, G_x|_{x=l}=0 \\ G|_{t=0}=0 \end{cases}$$

........................(3 分)

利用固有函数展开法, 令：

$$G\left(x,t;x_0,t_0\right)=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\tfrac{n\pi}{l}x$$

其中 $T_n(t)$ 满足：

$$\begin{cases} T_n'(t)+\tfrac{a^2n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)=\delta\left(t-t_0\right)\tfrac{2}{l}\cos\tfrac{n\pi x_0}{l} \\ T_n(0)=0 \end{cases}$$

解得：

$$T_n(t)=\begin{cases} \tfrac{2}{l}\cos\tfrac{n\pi x_0}{l}\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-t_0)}, & t\geq t_0 \\ 0, & t<t_0 \end{cases}$$

进而得到格林函数为：

$$G\left(x,t;x_0,t_0\right)=\begin{cases}\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-t_0)}, & t\geq t_0\\ 0, & t<t_0\end{cases}$$

……………………(10 分)

由定解问题形式知，解的积分表达式为：

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l A\sin\omega t_0 G\left(x,t;x_0,t_0\right)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}t_0$$

所以，定解问题的解为：

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\int_0^l A\sin\omega t_0\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{e}^{-\left(\frac{nxu}{l}\right)^2(t-t_0)}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}t_0\\&=\frac{2A}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{m\pi a}{l}\right)^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\int_0^t\mathrm{e}^{\left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 t_0}\sin\omega t_0\mathrm{d}t_0\int_0^l\cos\frac{n\pi x_0}{l}\mathrm{d}x_0\end{aligned}$$

又：

$$\int_0^1\cos\frac{n\pi x_0}{l}\mathrm{d}x_0=\begin{cases}l,n=0\\0,n\neq 0\end{cases}$$

所以，解为：

$$u(x,t)=\frac{2A}{l}\int_0^t\sin\omega t_0\mathrm{d}t_0\cdot l=\frac{A}{\omega}(1-\cos\omega t)$$

……………………(15 分)

参　考　公　式

1. 拉普拉斯算子 Δ_3 在各个坐标系下的表达形式

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\ &=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

2.Legendre 方程: $\left[(1-x^2)\,y'\right]'+\lambda y=0;n$ 阶 Legendre 多项式
$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\frac{1}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$
Legendre 多项式的母函数: $\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n,|t|<1;$
Legendre 多项式的模平方: $\|P_n(x)\|^2=\frac{2}{2n+1}$

3. ν 阶 Bessel 方程 : $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0;\nu$ 阶 Bessel 函数:
$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$; Bessel 函数的母函数: $e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n$
Bessel 函数在三类边界条件下的模平方: $N_{\nu1n}^2=\frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2\left(\omega_{1n}a\right)$, $\quad N_{\nu2n}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{2n}a\right)$, $\quad N_{\nu3n}^2=\frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}+\frac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{3n}a\right)$

4. 傅里叶变换和逆变换: $\mathcal{F}[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x;\mathcal{F}^{-1}[F](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda$
$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\lambda^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$

5. 拉普拉斯变换: $L[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t,p=\sigma+is;L\left[e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{p-\alpha}$
$L\left[t^\alpha\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}},L[\sin t]=\frac{1}{p^2+1},L[\cos t]=\frac{p}{p^2+1},L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right]=\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$

6. 拉普拉斯方程 $\Delta_3u=\delta(M)$ 的基本解:
二维, $U(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$
三维, $U(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

7. 设 $G\left(M;M_0\right)$ 是三维 Poisson 方程第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3u=-f(M),(M=(x,y,z)\in V)\\ u|s=\varphi(M)\end{cases}$$

对应的格林函数, 则
$u\left(M_0\right)=-\iint_S\varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n}\left(M;M_0\right)dS+\iiint_Vf(M)G\left(M;M_0\right)dM\cdot\Big($ 其中$M_0=(\xi,\eta,\zeta)\Big)$

8. 积分公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\omega}$$