数理方程经典问题专题整理

变量代换的定义域问题

在这门课程中，经常会涉及利用留数定理求解复变函数积分，其中关于复变函数积分的一个易错问题在于变量代换时的定义域变化问题。这里以一道教材例题中的积分求解问题为例说明定义域变化这一问题。

求解积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2+b^2\sin^2\theta}d\theta \quad (a>0, b\in R, b\neq 0)$$

解：做变量代换，令

$$z=e^{i\theta}$$

则原积分可化为

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{a^2+b^2\cdot\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2}\frac{dz}{iz} \\
&= \int_{|z|=1} \frac{z}{a^2-b^2\cdot\frac{z^2+z^{-2}-2}{4}}\frac{dz}{iz^2} \\
&= \frac{-4}{b^2 i}\int_{|z|=1} \frac{z}{z^4-\left(2+\frac{4}{b^2}a^2\right)z^2+1}dz \\
&= \frac{-4}{b^2 i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^4-\left(2+\frac{4}{b^2}a^2\right)z^2+1}\frac{dz^2}{2}
\end{aligned}$$

做变量代换，令

$$\omega=z^2$$

由于 $z=e^{i\theta}$，沿着环路 $|z|=1$ 积分的时候，θ 走过 2π，则 2θ 走过 4π，即原积分等价于沿着环路 $|\omega|=1$ 走过两圈，即

$$\int_{|z|=1} f\left(z^2\right)dz^2 = 2\int_{|\omega|=1} f(\omega)d\omega$$

被积函数分母共有两个零点，分别为

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 1+\tfrac{2a^2}{b^2}+\tfrac{2a}{b^2}\sqrt{a^2+b^2} \\
\omega_2 &= 1+\tfrac{2a^2}{b^2}-\tfrac{2a}{b^2}\sqrt{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

其中

$$\omega_1 > 1, \quad 0 < \omega_2 < 1$$

所以由留数定理可得，原积分

$$I = -\frac{4}{b^2 \cdot i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{b^2}{-4a \cdot \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

总结：在使用变量代换法求解积分时，注意定义域的变化。