

中国科学技术大学

2019-2020 学年第二学期

数理方程 B 期末复习参考题目

数理方程 08 班制作, 仅供学习交流使用

特别说明: 这份复习参考题目整理由作业题目中的易错问题组成, 易错点分析详见每周的批改作业反馈。

一、求解一维半无界区域波动方程问题.(第一章作业补充题)

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 (0 < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

解: 法一

泛定方程的通解为

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$$

故有

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

进而可得

$$af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x)$$

即

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + C$$

其中, $C = f_1(0) - f_2(0)$.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \frac{C}{2} \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi - \frac{C}{2} \end{aligned}$$

以上二式均是在 $0 \leq x < \infty$ 的前题下推得的. 因为 $x + at$ 总是大于等于零的. 故有

$$f_1(x + at) = \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{C}{2}$$

而 $x - at$ 就不一定大于零了. 此时要分情况讨论 (先有意义后求量)

(1) 若 $x - at \geq 0$, 则有

$$f_2(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \psi(\xi) d\xi - \frac{C}{2}$$

(2) 若 $x - at < 0$, 则上式不能用。但将边界条件代入通解得

$$f_1'(at) + f_2'(-at) = 0$$

令 $x = at$, 并对上式从 0 到 x 积分得

$$f_1(x) - f_2(-x) = C$$

即

$$f_2(-x) = f_1(x) - C (x \geq 0)$$

故

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ x - at \geq 0 \\ \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right. \\ \left. + \int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi \right], x - at < 0 \end{cases}$$

法二:

设想将半无限长的杆, 延拓 (拼接) 成无限长的杆, 并将原定解问题的初始条件看成无限长杆的纵振动的初始条件在 $0 \leq x < \infty$ 中的部分, 即将原定解问题转化为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), 0 \leq x < \infty \\ f(x), -\infty < x \leq 0 \end{cases} \\ u_t(x, 0) = \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), 0 \leq x < \infty \\ g(x), -\infty < x < 0 \end{cases} \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

则由 d'Alembert 公式立即可写出定解问题的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\Phi(x + at) + \Phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi$$

其中, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是未知的。

延拓的目标是要用延拓后的解来得到原问题的解, 因此要让延拓后的解在原问题的定义域处的部分和原问题解相同。所以利用原问题的边界条件可以求得的 $u(x, t)$ 在 $0 \leq x < \infty$ 中的值即为原定解问题的解。

$$u_x(0, t) = \frac{1}{2} [\Phi'(0 + at) + \Phi'(0 - at)] \\ + \frac{1}{2a} [\Psi(0 + at) - \Psi(0 - at)] = 0$$

即

$$\frac{1}{2} [\Phi'(\xi) + \Phi'(-\xi)] + \frac{1}{2a} [\Psi(\xi) - \Psi(-\xi)] = 0 (\xi \geq 0)$$

由此有 $\Phi(\xi) = \Phi(-\xi)$, $\Psi(\xi) = \Psi(-\xi)$ 这说明满足边界条件的 Φ 和 Ψ , 均为偶函数。即

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leq x < \infty \\ \varphi(-x), & -\infty < x < 0 \end{cases} \\ \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & 0 \leq x < \infty \\ \psi(-x), & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

亦即

$$f(x) = \varphi(-x), g(x) = \psi(-x)$$

注意到 $x + at$ 总于大于等于零的。于是有

$$\Phi(x + at) = \varphi(x + at) \\ \int_0^{x+at} \Psi(\xi) d\xi = \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

而 $x - at$ 有可能大于, 等于或小于零。

(1) 若 $x - at \geq 0$, 则

$$\Phi(x - at) = \varphi(x - at) \\ \int_{x-at}^0 \Psi(\xi) d\xi = \int_{x-at}^0 \psi(\xi) d\xi$$

(2) 若 $x - at < 0$, 则

$$\Phi(x - at) = \varphi[-(x - at)] = \varphi(at - x)$$

$$\int_{x-at}^0 \Psi(\xi) d\xi = \int_{x-at}^0 \psi(-\xi) d\xi \stackrel{\eta=-\xi}{=} - \int_{at-x}^0 \psi(\eta) d\eta$$

即

$$\int_{x-at}^0 \Psi(\xi) d\xi = \int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi$$

最后得到

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ x-at \geq 0 \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(at-x)] + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right. \\ \left. + \int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi \right], x-at < 0 \end{cases}$$

即为原问题的解.

二、求解下列固有值问题 (第二章第二题)

(1)

$$\begin{cases} y'' - 2ay' + \lambda y = 0 (0 < x < 1, a \text{ 为常数}) \\ y(0) = y(1) = 0; \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} (r^2 R')' + \lambda r^2 R = 0 (0 < r < a) \\ |R(0)| < +\infty, R(a) = 0 \end{cases}$$

提示: 令 $y = rR$. 解:

(1) 常微分方程为二阶常系数线性常微分方程, 利用特征根法求解.

特征方程 $\mu^2 - 2a\mu + \lambda = 0$, 其判别式 $\Delta = 4a^2 - 4\lambda$

当 $\Delta = 0$ 时, 特征根为 $\mu_1 = \mu_2 = a$, 方程的解为 $y(x) = (A + Bx)e^{\mu x}$ 由定解条件得 $A = B = 0$, 即只有零解, 不成立.

当 $\Delta > 0$ 时, 有两个互异特征根 μ_1, μ_2 , 方程的解为 $y(x) = Ae^{\mu_1 x} + Be^{\mu_2 x}$, 由定解条件得

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{\mu_1} + Be^{\mu_2} = 0 \end{cases}$$

解得 $A = B = 0$, 即只有零解, 不成立.

当 $\Delta < 0$ 时, 特征根 $\mu = a \pm \sqrt{\lambda - a^2}i$. 记 $\beta = \sqrt{\lambda - a^2}$, 方程的解为

$$y(x) = e^{ax}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

代入定解条件得 $A = 0$. 又 $B \neq 0$, 则 $\sin \beta = 0$, 解得 $\beta = n\pi$

所以, 固有值为

$$\lambda_n = a^2 + (n\pi)^2$$

固有函数为

$$y_n(x) = e^{ax} \sin n\pi x$$

(2) 泛定方程写作

$$r^2 R'' + 2rR' + \lambda r^2 R = 0$$

按照提示作变量代换, 令 $y = rR$. 代入方程得

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases}$$

此固有值问题参考第一小题, 类似地可以解得

固有值

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

固有函数

$$R_n(r) = \frac{1}{r} \sin \frac{n\pi r}{a}$$

三、利用分离变量法求解定解问题.(第二章第五题)

(1)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} (0 < x < l, t > 0) \\ u(t, 0) = u_x(t, l) = 0 \\ u(0, x) = 0, u_t(0, x) = x \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} u_u = a^2 u_{xx} - 2hu_t \\ (0 < x < l, t > 0, 0 < h < \frac{\pi a}{l}, h \text{ 为常数}) \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \phi(x) \end{cases}$$

解:

(1) 写出分离变量形式, 令 $u(t, x) = T(t)X(x)$.

代入方程得

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2l}\pi x$$

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{2n+1}{2l} \pi a t + B_n \sin \frac{2n+1}{2l} \pi a t$$

进而得到形式解

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(A_n \cos \frac{2n+1}{2l} \pi a t + B_n \sin \frac{2n+1}{2l} \pi a t \right) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x$$

代入初始条件得

$$u(0, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x = 0$$

和

$$u_t(0, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2l} \pi a B_n \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x = x$$

进而得到

$$A_n = 0, \quad B_n = \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l x \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = (-1)^n \frac{16l^2}{(2n+1)^3 \pi^3 a}$$

所以得到定解问题的解

$$u(t, x) = \frac{16l^2}{a\pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

(2) 写出分离变量形式, 令 $u(t, x) = T(t)X(x)$.

代入方程得

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} + \frac{2h}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T_n(t) = e^{-ht} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

进而得到形式解

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-ht} \cdot (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件得

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$$

和

$$u_t(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\omega_n B_n - h A_n) \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x)$$

进而得到

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{A_n h}{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

所以, 定解问题的解为

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-ht} \cdot (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

其中

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{A_n h}{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

四、求解定解问题.(第三章第十六题)

半径为 R 的无限长圆柱体的侧表面保持一定的温度 u_0 柱内的初始温度为零, 求柱内的温度分布.

解:

由题意知, 问题具有对称性, 即 $u = u(t, r)$.

首先写出定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) (r < R, t > 0) \\ u|_{r=R} = u_0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

非齐次边界问题, 利用特解法求解.

令 $u(t, r) = v(t, r) + u_0$. 则定解问题转化为

$$\begin{cases} v_t = a^2 \left(v_{rr} + \frac{1}{r} v_r \right) (r < R, t > 0) \\ v|_{r=R} = 0 \\ v|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

写出分离变量形式, 令 $u(t, r) = T(t)R(r)$.

代入方程得

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = -\lambda$$

得到固有值问题

$$\begin{cases} (rR'(r))' + \lambda r R(r) = 0 \\ |R(0)| < +\infty, R(R) = 0 \end{cases}$$

求解固有值问题得到固有值和固有函数

$$\lambda_n = w_n^2 (n = 1, 2, \dots), \quad R(r) = J_0(w_n r)$$

其中 $w_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 为方程 $J_0(wR) = 0$ 的所有正根.

将固有值问题代入关于变量 t 的常微分方程并求解得到

$$T(t) = C_n e^{-w_n^2 a^2 t}$$

进而得到形式解

$$v(t, r) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-w_n^2 a^2 t} J_0(w_n r)$$

代入初始条件得

$$v(0, r) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(w_n r) = -u_0$$

进而得到

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{N_{01n}^2} \int_0^R -u_0 r J_0(w_n r) dr = \frac{-2u_0}{R^2 J_1^2(w_n R)} \int_0^R r J_0(w_n r) dr \\ &= \frac{-2u_0}{\omega_n^2 R^2 J_1^2(w_n R)} \int_0^{\omega_n R} x J_0(x) dx \\ &= \frac{-2u_0}{\omega_n^2 R^2 J_1^2(w_n R)} \cdot \omega_n R J_1(w_n R) = \frac{-2u_0}{\omega_n R J_1(w_n R)} \end{aligned}$$

所以定解问题的解为

$$u(t, r) = u_0 - 2u_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\omega_n R J_1(w_n R)} e^{-w_n^2 a^2 t} J_0(w_n r)$$

其中 $w_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 为方程 $J_0(wR) = 0$ 的所有正根. 五、求解定解问题.(第三章第二十八题)

半球的球面保持一定的温度 u_0 , 分别在下列条件下, 求这个半球内的稳定温度分布

(1) 半球底面保持常温零度

(2) 半球底面绝热

解:

(1) 写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \quad (0 < r < a, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \\ u(a, \theta) = u_0 \\ u(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

写出分离变量形式, 令 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$.

代入方程得

$$-\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\lambda$$

令 $x = \cos \theta$, 记 $\Theta(\theta) = y(x)$. 得到固有值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} [(1-x^2)y'] + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, |y(1)| < +\infty \end{cases}$$

解得固有值和固有函数

$$\lambda_n = (2n+1)(2n+2), \quad y_n(x) = p_{2n+1}(x)$$

即

$$\lambda_n = (2n+1)(2n+2), \quad \Theta_n(\theta) = p_{2n+1}(\cos \theta)$$

将固有值问题代入关于变量 r 的常微分方程并求解得到

$$R_n(r) = A_n(r)r^{2n+1} + B_n(r)r^{-(2n+2)}$$

进而得到形式解

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} [A_n r^{2n+1} + B_n r^{-(2n+2)}] p_{2n+1}(\cos \theta)$$

由于在球内解题, 由解的有界性可知, 形式解可简化为

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left(\frac{r}{a} \right)^{2n+1} p_{2n+1}(\cos \theta)$$

代入边界条件

$$u(a, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n p_{2n+1}(\cos \theta) = u_0$$

进而可得

$$A_n = (4n+3) \int_0^1 u_0 \cdot p_{2n+1}(x) dx = u_0 \cdot \frac{(-1)^n(4n+3)(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

所以定解问题的解为

$$u(r, \theta) = \frac{3u_0}{2a} r \cos \theta + u_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n(4n+3)(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} p_{2n+1}(\cos \theta) \right]$$

(2) 写出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \quad (0 < r < a, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \\ u(a, \theta) = u_0 \\ u_\theta(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

写出分离变量形式, 令 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$.

代入方程得

$$-\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\lambda$$

令 $x = \cos \theta$, 记 $\Theta(\theta) = y(x)$. 得到固有值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} [(1-x^2)y'] + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, |y(1)| < +\infty \end{cases}$$

解得固有值和固有函数

$$\lambda_n = (2n)(2n+1), \quad y_n(x) = p_{2n}(x)$$

即

$$\lambda_n = (2n)(2n+1), \quad \Theta_n(\theta) = p_{2n}(\cos \theta)$$

进而得到形式解

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} [A_n r^{2n} + B_n r^{-(2n+1)}] p_{2n}(\cos \theta)$$

由于在球内解题, 由解的有界性可知, 形式解可简化为

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} p_{2n}(\cos \theta)$$

代入边界条件

$$u(a, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n p_{2n}(\cos \theta) = u_0$$

进而可得

$$A_0 = \int_0^1 u_0 p_0(x) dx = u_0, \quad A_n = (4n+1) \int_0^1 u_0 p_{2n}(x) dx = 0$$

所以定解问题的解为

$$u(r, \theta) = u_0$$

六、求解定解问题.(第四章第二题)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} (t > 0, 0 < x < l) \\ u_x(t, 0) = 0, u(t, l) = u_0 (\text{常数}) \\ u(0, x) = u_1 (\text{常数}) \end{cases}$$

解: 对 t 作拉普拉斯变换, 设

$$U(t, x) = \int_0^{+\infty} u(t, x) e^{-pt} dt$$

计算

$$L[u_t] = pU - u(0, x) = pU - u_1, U_x(p, 0) = 0, U(p, l) = \frac{u_0}{p}$$

定解问题转化为

$$\begin{cases} a^2 U_{xx} = pU - u_1 \\ U_x(p, 0) = 0, U(p, l) = \frac{u_0}{p} \end{cases}$$

解得

$$U(p, x) = \frac{u_0 - u_1}{p \cosh \frac{l\sqrt{p}}{a}} \cosh \frac{\sqrt{p}x}{a} + \frac{u_1}{p}$$

其极点为

$$p_0 = 0, p_k = -\frac{a^2 \pi^2 (2k+1)^2}{4l^2}$$

利用结合留数定理的拉普拉斯变换反演公式

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res} [F(p) e^{pt}, p_k]$$

得到定解问题的解

$$u = L^{-1}[U(p, x)] = u_0 + \frac{4}{\pi} (u_1 - u_0) \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2n+1} \exp \left\{ - \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l} \right)^2 t \right\} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \right]$$

七、设平面区域 $\Omega = \{(x, y) | x + y > 0\}$ (补充)

1. 求出区域 Ω 的格林函数.

2. 求出区域 Ω 上的定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u(x, -x) = \varphi(x) \end{cases}$$

解:

(1) 使用镜像法求解.

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(M, M_1)}$$

其中 $M = (x, y), M_0 = (\xi, \eta) \in \Omega, M_1 = (-\eta, -\xi)$ 为 M_0 关于边界 $x + y = 0$ 的对称点. 所以格林函数为

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x + \eta)^2 + (y + \xi)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

(2) 由题意知, 有

$$u(M) = - \int_l \varphi(M_0) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_0} dl_0$$

其中 l_0 为直线 $\xi + \eta = 0, \vec{n}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, -1), dl_0 = \sqrt{2}d\xi$

其中法向偏导数为

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_0} \right|_{l_0} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta=-\xi} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{x + y}{\pi(x - \xi)^2 + (y + \xi)^2}$$

所以定解问题的解为

$$u(x, y) = \frac{x + y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y + \xi)^2} d\xi$$