数理方程期末试题参考答案与解析

2019 年春期末试题

数理方程 08 班制作，仅供学习交流使用

参考答案与解析为 2020 春数理方程 08 班内部材料，作为复习课讲义，请勿外传.

一、设有一个均匀圆柱物体，半径为 a, 高为 h，侧面在温度为零的空气中自由冷却. 上底绝热，下底温度为 $g(t,x,y)$，初始温度为 $\varphi(x,y,z)$, 试写出圆柱体内温度所满足的定解问题.(不用求解)

解：

首先建立合适的坐标系. 由题意知，描述圆柱体的温度问题，所以选择建立柱坐标系. 其中坐标原点选择圆柱下底的圆心，z 轴为中心高线所在直线.

然后分析题意写出泛定方程. 由题意知，描述温度变化问题，则可知满足热传导方程. 因此可以写出泛定方程

$$u_t = b^2\Delta_3 u \quad (t>0, x^2+y^2<a^2, 0<z<h)$$

接着分析定解条件. 书写定解条件的时候，首先要确定定解条件个数，然后根据物理意义书写正确的定解条件. 对于发展方程，定解条件分为两部分，分别是初始条件和边界条件.

初始条件的个数由对时间变量 t 的偏导数阶数决定. 对于这个热传导方程来说，只需要一个初始条件，表达物体初始温度. 则由题可知，可写出初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y,z)$$

边界条件的个数由边界具体形状决定. 对于这个定解问题来说，圆柱体的边界包括上底、下底和柱面 (即侧面). 其中第一类边界条件表达边界处的温度分布，第二类边界条件表达边界处热流密度分布——特别地齐次的第二类边界条件表达绝热，第三类边界条件表达边界处的热交换情形 (例如如题所述，物体在给定的外界介质中自由冷却). 则由题可知，侧面为第三类边界条件，上底为第二类边界条件，下底为第一类边界条件.

侧面的热交换描述要利用牛顿冷却定律和傅里叶热传导定律，由牛顿冷却定律

$$q = h(u-\theta)$$

和傅里叶热传导定律

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial n}$$

则有

$$q = h(u-0) = -k\frac{\partial u}{\partial n}$$

由于侧面的外法向为径向，且对应 r 增加的方向，所以

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

即

$$(k\frac{\partial u}{\partial r} + hu)\Big|_{r=a} = 0$$

上底为齐次的第二类边界条件，其中上底的外法向为 z 增加的方向，

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

则上底处的边界条件可写作

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0$$

下底为第一类边界条件，可直接写出. 所以可得边界条件

$$(k\frac{\partial u}{\partial r} + hu)\Big|_{r=a} = 0, \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, z|_{z=h} = g(t,x,y)$$

所以定解问题可以写作

$$\begin{cases} u_t = b^2\Delta_3 u, (t>0, x^2+y^2<a^2, 0<z<h) \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y,z) \\ u|_{z=0} = g(t,x,y), \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=h} = 0 \\ \left(k\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\big|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

二、求解一维无界弦的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 4t + 2x(-\infty < x < +\infty, t>0) \\ u|_{t=0} = x^2, u_t|_{t=0} = \sin 3x \end{cases}$$

解：

分析定解问题，为一维无界区域弦振动问题，考虑使用行波法求解. 但泛定方程为非齐次方程，不满足直接使用行波法的条件，考虑首先处理非齐次项. 非齐次项中虽然同时含有变量 x 和 t，但由于二者不交叉，即非齐次项为 $f(t)+g(x)$ 形式，则有叠加原理可知，可以将其等价的转化为两个非齐次方程问题，并且非齐次项只和一个变量

有关，因此考虑使用特解法处理非齐次项.

令 $u=v+w$，并设特解 $w=f(t)+g(x)$，代入解得

$$w=-\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{3}x^3$$

进而定解问题转化为

$$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx}, t>0, -\infty<x<+\infty \\ v|_{t=0}=x^2+\frac{1}{3}x^3, v_t|_{t=0}=\sin 3x \end{cases}$$

由达朗贝尔公式

$$\begin{aligned} v &= \frac{(x+t)^2+(x-t)^2}{2}+\frac{(x-t)^3+(x+t)^3}{6}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin 3\xi d\xi \\ &= x^2+t^2+\frac{x^3}{3}+xt^2+\frac{1}{3}\sin 3x\sin 3t \end{aligned}$$

所以定解问题的解为

$$u=v+w=x^2+t^2-\frac{2}{3}t^3+xt^2+\frac{1}{3}\sin 3x\sin 3t$$

三、求解固有值问题

$$\begin{cases} y''+2y'+\lambda y=0(0<x<9) \\ y(0)=y(9)=0 \end{cases}$$

解：

固有值问题中的常微分方程为二阶线性常系数微分方程，则可以使用特征根法求解.

由题意可得到特征根方程

$$\mu^2+2\mu+\lambda=0$$

解得

$$\mu=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$$

当 $\lambda>1$ 时可得通解

$$y=Ae^{-x}\cos\sqrt{\lambda-1}x+Be^{-x}\sin\sqrt{\lambda-1}x$$

代入边界条件进而可得固有值和固有函数

$$\lambda_n=1+\left(\frac{n\pi}{9}\right)^2,\quad y_n(x)=e^{-x}\sin\frac{n\pi}{9}x$$

对于 $\lambda\leq 1$ 的情形类似分析，可知无解.

所以有

$$\lambda_n = 1 + \left(\frac{n\pi}{9}\right)^2, \quad y_n(x) = e^{-x} \sin \frac{n\pi}{9} x$$

说明：这道题目的解析过程省略了部分计算过程，读者在答题时要严谨地书写过程.

四、求解一维有界弦的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} (0 < x < 1, t > 0) \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 1 \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

解：

由题意知，有界的问题，可以考虑使用分离变量法. 由于定解问题为非齐次边界问题，需要使用特解法将其转化为齐次问题进而可以使用分离变量法.

令 $u = v + w$. 由于非齐次项的特点，可以选择特解 $w = x + 1$. 则定解问题可以转化为

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, t > 0 \quad (0 < x < 1) \\ v|_{x=0} = v_x|_{x=1} = 0 \\ v|_{t=0} = -x - 1, v_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

分离变量得到固有值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

求解得到固有值和固有函数

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

将固有值代入关于变量 t 的常微分方程并解得

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{(2n+1)\pi t}{2} + D_n \sin \frac{(2n+1)\pi t}{2}$$

进而可得

$$v_n(t,x) = \left(C_n \cos \frac{(2n+1)\pi t}{2} + D_n \sin \frac{(2n+1)\pi t}{2}\right) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

叠加可得形式解

$$v(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(C_n \cos \frac{(2n+1)\pi t}{2} + D_n \sin \frac{(2n+1)\pi t}{2}\right) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

代入初始条件可得 $D_n=0$ 和

$$C_n=-2\int_0^1(x+1)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}dx=-\frac{4}{2n+1}\pi+(-1)^n\frac{8}{((2n+1)\pi)^2}$$

所以可得定解问题的解

$$u(t,x)=x+1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{(2n+1)\pi}-(-1)^n\frac{8}{((2n+1)\pi)^2}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi t}{2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

五、求解如下泊松方程的边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0(x^2+y^2<1,0<z<1)\\ u|_{x^2+y^2=1}=0\\ u|_{z=0}=0,u|_{z=1}=1-(x^2+y^2)\end{cases}$$

解：

由题意知，选取柱坐标系表达定解问题

$$\begin{cases}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0(r<1,0<z<1)\\ u|_{r=1}=0\\ u|_{z=0}=0,u|_{z=1}=1-r^2\end{cases}$$

使用分离变量法求解.
分离变量得到固有值问题

$$\begin{cases}r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0\\ |R(0)|<+\infty,R(1)=0\end{cases}$$

求解得到固有值和固有函数

$$\lambda_n=\omega_n^2(n=1,2,\ldots),\quad R_n(r)=J_0(\omega_n r)$$

其中 $\omega_n(n=1,2,3,\cdots)$ 为方程 $J_0(\omega)=0$ 的所有正根.
将固有值代入关于 z 的常微分方程并求解得到

$$Z_n(z)=A_n ch\omega_n z+B_n sh\omega_n z$$

进而得到形式解

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n ch\omega_n z+B_n sh\omega_n z\right)J_0(\omega_n r)$$

代入边界条件得 $A_n=0$ 和

$$B_n=\frac{1}{sh\omega_n||J_0\left(\omega_n r\right)||^2}\int_0^1 r\left(1-r^2\right)J_0\left(\omega_n r\right)dr=\frac{8}{\omega_n^3 sh\omega_n J_1\left(\omega_n\right)}$$

所以可得定解问题的解

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{8}{\omega_n^3 sh\omega_n J_1\left(\omega_n\right)}\right)sh\omega_n z J_0\left(\omega_n r\right)$$

六、求解热传导问题

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+u(-\infty<x+\infty,t>0)\\ u(0,x)=e^{-x^2}\end{cases}$$

解：

由题意知，可以使用傅里叶变换法求解.

作傅里叶变换得

$$\begin{cases} \bar{u}_t=-\lambda^2\bar{u}+\bar{u}(t>0)\\ \bar{u}(0,\lambda)=\hat{f}(\lambda)\end{cases}$$

其中 $\hat{f}(\lambda)$ 为 $f(x)=e^{-x^2}$ 的傅里叶变换.

求解得到像函数

$$\bar{u}=e^t\hat{f}(\lambda)e^{-\lambda^2 t}$$

作反变换得定解问题的解

$$\begin{aligned} u(t,x)&=e^t\left(e^{-x^2}*F^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t}\right]\right)\\ &=\frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}*e^{-x^2}\\ &=\frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}e^{-(x-\xi)^2}\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{t-\frac{1}{1+4t}x^2}\end{aligned}$$

七、设平面区域 $\Omega=\{(x,y)|x+y>0\}$

1. 求出区域 Ω 的格林函数。

2. 求出区域 Ω 上的定解问题：

$$\begin{cases} \Delta_2 u=0 \quad (x,y)\in\Omega\\ u(x,-x)=\varphi(x)\end{cases}$$

解：

(1) 使用镜像法求解.

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r\left(M,M_0\right)}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r\left(M,M_1\right)}$$

其中 $M=(x,y),M_0=(\xi,\eta)\in\Omega,M_1=(-\eta,-\xi)$ 为 M_0 关于边界 $x+y=0$ 的对称点.
所以格林函数为

$$G=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x+\eta)^2+(y+\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

(2) 由题意知，有

$$u(M)=-\int_l\varphi\left(M_0\right)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}_0}\mathrm{d}l_0$$

其中 l_0 为直线 $\xi+\eta=0,\overrightarrow{n_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,-1),\mathrm{d}l_0=\sqrt{2}\mathrm{d}\xi$
其中法向偏导数为

$$\left.\frac{\partial G}{\partial\vec{n}_0}\right|_{l_0}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left.\left(\frac{\partial G}{\partial\xi}+\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)\right|_{\eta=-\xi}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{x+y}{\pi(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}$$

所以定解问题的解为

$$u(x,y)=\frac{x+y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+(y+\xi)^2}\mathrm{d}\xi$$

八、计算积分

$$\int_{-1}^{1}P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3+4x^4\right)\mathrm{d}x$$

解：

特殊函数的积分计算主要利用特殊函数的性质、递推公式、重要结论以及固有函数系的正交性.

法一：看到积分区间以及被积函数的形式可以联想到一个**重要的结论** (课堂作业第三章第 22 题第一小问)

$$\int_{-1}^{1}x^mP_n(x)=0\quad(m<n)$$

所以

$$\int_{-1}^{1}P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3\right)\mathrm{d}x=0$$

进一步利用**重要递推公式** (教材 P280 例 1)

$$f(m,n)=\frac{m}{m+n+1}f(m-1,n-1)$$

即

$$(m+n+1)\int_0^1 x^m p_n(x)\mathrm{d}x = m\int_0^1 x^{m-1}p_{n-1}(x)\mathrm{d}x$$

可得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3+4x^4\right)\mathrm{d}x &= 2\cdot\int_0^1 P_4(x)4x^4\mathrm{d}x\\ &= 8\cdot\frac{4}{4+4+1}\cdot\frac{3}{3+3+1}\cdot\frac{2}{2+2+1}\cdot\frac{1}{1+1+1}\\ &= \frac{64}{315}\end{aligned}$$

法二：由于勒让德多项式是 x 的多项式形式，看到积分区间以及被积函数的形式可以联想到将右侧的多项式用勒让德多项式表达，对于低阶部分直接应用正交性得积分值为 0，只剩下 $p_4(x)$ 的模长计算.

设

$$1+x+2x^2+3x^3 = \sum_{k=1}^{3} a_k P_k(x)$$

则由正交性可知

$$\int_{-1}^1 P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3\right)\mathrm{d}x = 0$$

由于

$$x^4 = \frac{8}{35}P_4(x) + \sum_{k=1}^{3} b_k P_k(x)$$

所以

$$\int_{-1}^1 P_4(x)\left(1+x+2x^2+3x^3+4x^4\right)\mathrm{d}x = 4\int_{-1}^1 x^4 P_4(x)\mathrm{d}x = \frac{32}{35}\int_{-1}^1 P_4^2(x)\mathrm{d}x = \frac{32}{35}\frac{2}{(2\times 4+1)} = \frac{64}{315}$$

参　考　公　式

1. 拉普拉斯算子 Δ_3 在各个坐标系下的表达形式

$$
\begin{aligned}
\Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\\
&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}
$$

2. Legendre 方程: $\left[\left(1-x^2\right)y'\right]'+\lambda y=0$; n 阶 Legendre 多项式：

$$
P_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n
$$

Legendre 多项式的母函数: $\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n, |t|<1$
Legendre 多项式的模平方: $\|P_n(x)\|^2=\frac{2}{2n+1}$
Legendre 多项式满足的递推公式 ($n\geq 1$)

$$
\begin{aligned}
&(n+1)P_{n+1}(x)-x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0\\
&nP_n(x)-xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)=0\\
&nP_{n-1}(x)-P_n'(x)+xP_{n-1}'(x)=0\\
&P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x)
\end{aligned}
$$

3。3. ν 阶 Bessel 方程: $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$;$\nu$ 阶 Bessel 函数:
$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$
Bessel 函数的的母函数: $e^{\frac{x}{2}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\zeta^n$
Bessel 函数在三类边界条件下的模平方分别为

$$
\begin{aligned}
N_{\nu 1n}^2 &= \frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2\left(\omega_{1n}a\right)\\
N_{\nu 2n}^2 &= \frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{2n}a\right)\\
N_{\nu 3n}^2 &= \frac{1}{2}\left[a^2-\frac{\nu^2}{\omega_{3n}^2}+\frac{a^2\alpha^2}{\beta^2\omega_{3n}^2}\right]J_\nu^2\left(\omega_{3n}a\right)
\end{aligned}
$$

Bessel 函数满足的微分关系和递推公式:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^\nu J_{\nu-1}(x)\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}
\end{aligned}
$$

4. 傅里叶变换: $\mathcal{F}[f](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x$; 傅里叶逆变换

$$
\mathcal{F}^{-1}[F](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}\lambda;\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\lambda^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}
$$

5. 拉普拉斯变换: $L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t, p=\sigma+is$

$$L\left[e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{p-\alpha}; L\left[t^{\alpha}\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

6. 拉普拉斯方程 $\Delta_3 u=\delta(M)$ 的基本解：
二维, $U(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$
三维, $U(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi r}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7. Green 第一公式: $\iint_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint_V u\Delta v\mathrm{d}V+\iiint_V \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}V$
Green 第二公式: $\iint_{\partial V}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\iiint_V(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}V$