数理方程经典问题专题整理

施刘定理相关问题

分离变量法是一种求解数学物理方程定解问题的重要方法. 其核心思想是转化的思想，目的是通过将偏微分方程问题转化为常微分方程问题进而简化问题求解. 转化的方法是将解和定解条件在固有函数系上展开. 在学习这一方法时，经常会遇到的问题是：为什么可以分离变量，分离变量得到的形式解一定收敛吗，这类定解问题一定存在级数形式的解吗，等等. 这些问题可以总结为，分离变量法是否有坚实的理论基础. 这个问题的答案是肯定的，分离变量法的理论基础就是施刘定理.

在初学分离变量法这一章节的时候，很可能忽略施刘定理的重要作用，不清楚这一节到底有什么用. 在了解了以上观点后应该会消除部分疑问.

但仍然存在一些问题，比如施刘定理是有成立条件的，定解问题对应的固有值问题只有满足施刘定理的条件，才可以应用施刘定理来保证求解的有意义. 那么，我们可以确定，掌握施刘类型方程的形式以及一般方程转化为施刘方程的方法是必要的. 但是，这种转化是必要的吗，为什么在教材例题中很少看到使用分离变量法的时候首先把固有值问题作转化并且说明满足施刘定理呢，以及求解固有值问题的时候为什么不转化后再求解呢. 这一专题主要阐述这些问题的答案.

解固有值问题

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0 (1 < x < \mathrm{e}) \\ y(1) = y(\mathrm{e}) = 0 \end{cases}$$

解：题中方程不是施刘型的, 利用教材公式

$$\rho(x) = \frac{1}{b_0(x)} \exp\left\{\int \frac{b_1(x)}{b_0(x)} \mathrm{d}x\right\}$$

先求出

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{x^2} \exp\left\{\int \frac{x}{x^2} \mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

把方程两端乘以 $\rho(x)$, 即化成施刘型方程

$$\frac{d}{dx}(xy') + \frac{\lambda}{x} y = 0$$

系数 $k(x) = x, q(x) = 0, \rho(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[1, e]$ 上满足施-刘定理的条件，且两端的边界

条件都是第一类, 故 $\lambda > 0$. 记 $\lambda = \mu^2 (\mu > 0)$ 题中的方程为欧拉方程, 作替换 $x = \mathrm{e}^t$ 或 $t = \ln x$, 即可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \mu^2 y(t) = 0$$

因而

$$\begin{aligned} y &= A\cos\mu t + B\sin\mu t \\ &= A\cos(\mu\ln x) + B\sin(\mu\ln x) \end{aligned}$$

由 $y(1) = 0$, 有 $A = 0$; 由 $y(\mathrm{e}) = 0$, 有 $B\sin\mu = 0$, 因 B 不能再为零, 于是

$$\mu_n = n\pi (n = 1, 2, \cdots)$$

故

$$\lambda_n = \mu_n^2 = n^2\pi^2 (n = 1, 2, \cdots)$$

相应的固有函数为

$$y_n = \sin(n\pi\ln x)$$

总结：施刘定理是分离变量法的重要理论基础. 施刘定理告诉我们：固有函数系存在且完备——解可以在固有函数系上展开 (存在级数形式解且级数收敛)；固有函数系是正交函数系——定解条件可以在固有函数系上展开 (可以通过积分提取级数的某一项系数从而实现形式解的系数求解). 而这一切，都是建立在施刘定理基础上，所以首先需要固有值问题满足施刘定理成立条件，其中一个重要问题是固有值问题的方程等价的施刘方程的系数满足施刘定理要求. 我们要注意到：把一般方程转化为施刘方程的过程是必要的 (平时遇到的问题固有值问题方程本身就是施刘方程，所以不需要转化)；把一般方程转化为施刘方程只是为了验证是否符合施刘定理要求，而不是为了求解，在求解的时候仍然是对于原始方程，利用求解常微分方程的方法进行求解 (转化为施刘方程并不是一种求解固有值问题的方法，或者说不是一种求解常微分方程的方法).