2021-2022 学年信息论 B 期末模拟试题

学生所在系：__________　姓名：__________　学号：__________

$\log 3 = 1.5850$ $\log 5 = 2.3219$ $\log 7 = 2.8074$ $\log 11 = 3.4594$

1. (每题 4 分，共 8 分) 选择题 (多选题)

   (a) 设 X, Y, Z 均为离散随机变量，U 为取值非负的连续随机变量，f 和 g 为两个任意函数，则以下等式或不等式成立的是 (　)

   $$(A) I(X;Z \mid Y) \leqslant I(X;Z)$$
   $$(B) h(U) \geqslant 0$$
   $$(C) H(g(X)) \leqslant H(X)$$
   $$(D) H(f(X) \mid g(X)) = 0$$

   (b) 以下编码不可能是二元哈夫曼编码的是 (　)

   $$(A) \{01, 10, 11\}$$
   $$(B) \{00, 01, 100, 101, 11\}$$
   $$(C) \{01, 10\}$$
   $$(D) \{0, 10, 110, 101\}$$

2. (每题 4 分，共 8 分) 判断题 (若判断为对，简要说明或证明；若判断为错，简要说明或举出反例)

   (a) 对于离散无记忆信道，添加一行到信道转移矩阵不会降低容量.

   (b) 对任意取值范围在有限区间内的的连续随机变量 X，其微分熵的上界和区间长度呈正相关.

3. (每题 4 分，共 8 分) 填空题

   (a) 有三个二元离散随机变量 X,Y,Z, 若要使得 $I(X;Y)=0$ 比特,$I(X;Y\mid Z)=0$ 比特, 则 X,Y,Z 的联合概率分布为____________________ .(给出一个满足条件的例子即可)

   (b) 考虑一个由高斯彩色噪声信道 $Y_i=X_i+Z_i(i=1,2,3)$，总功率限制为 6，其信道噪声 $Z\sim\mathcal{N}(0,K_Z)$, 其中

$$K_Z=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

   则该信道的信道容量为 $C=$________________ .

4. (10 分) 设 X,Y 和 Z 为三个相互独立且取整数值的随机变量. X 在 $\{1,2,\cdots,8\}$ 上取得最大熵，$p\{Y=k\}=2^{-k}$, 其中 $k=1,2,3,\cdots$，Z 服从参数为 0.4 的伯努利分布. 试求：

   (a) $H(X),H(Y),H(Z),I(X;Y|Z)$；

   (b) $H(X+3Z)$；

   (c) $H(2X+Y,X-2Y)$.

5. (10 分) 随机变量 $X_1\ X_2\ X_3\ X_4$ 构成了马尔科夫链 $X_1\to X_2\to X_3\to X_4$. 证明：

$$I\left(X_1;X_3\right)+I\left(X_2;X_4\right)\leqslant I\left(X_1;X_4\right)+I\left(X_2;X_3\right)$$

6. (12 分) 一个容器里装有两枚有偏的硬币. 其中一枚出现正面的概率为 p，另一枚出现正面的概率为 $1-p$. 现在等概率随机选取一枚硬币，然后将它抛郑 n 次. 设 X_1 和 X_2 为前两次抛掷的结果，计算：

(a) $H(X_1, X_2), I(X_1; X_2)$；

(b) X 过程 (硬币抛掷序列) 的熵率 $H(\mathcal{X})$.

7.（12 分）设离散信源的概率分布为

$$\begin{bmatrix} S \\ P(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$$

请给出该信源的三元哈夫曼编码并计算平均码长. 要求给出两种编码方案，平均码长相同，但码长方差不同.

8. (10 分) 设信道输入、输出字母表均为 $\{0,1,2,3\}$，转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(a) 计算信道容量；

(b) 定义随机变量 $Z = g(Y)$，其中

$$g(y) = \begin{cases} A & \text{如果} y \in \{0,1\} \\ B & \text{如果} y \in \{2,3\} \end{cases}$$

计算 X Z 之间的信道容量. 其中输入字母表为 $\{0,1,2,3\}$，输出字母表为 $\{A,B\}$，转移概率为

$$p(Z = z \mid X = x) = \sum_{g(y_0)=z} P\left(Y = y_0 \mid X = x\right)$$

9. (12 分) 设 X, Y, Z 为连续随机变量，其中 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(3, 3, 9, 16, 0.5)$，$Z$ 是所有取值非负且均值不超过 2 的连续随机变量中取得最大微分熵的随机变量，且 Z 和 X 独立. 试计算：

(a) $h(X), h(Y), h(Z), h(X, Y), I(X; Y)$；

(b) $h(X+Y), h(X+Z, X-Z)$.

10. (10 分) 信源 X 服从参数为 0.5 的伯努利分布，失真度量由矩阵给出

$$d(x,\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) 计算该信源的率失真函数 $R(D)$；

(b) 若 $d^*(x,\hat{x}) = ad(x,\hat{x}) + b$，试计算 $R^*(D)$.