2022 春信息论 B 数学基础复习

复习内容：<u>微积分</u> 课程助教：<u>高源</u>

1. 对数函数的导数。$y = \log_a x, x \in (0, +\infty)$，其中 $a \neq 1$ 且 $a > 0$. 导数为

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\ln a}\frac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x \ln a}$$

注意对数函数求导会产生一个常数系数，为了避免出错，尽量使用奈特作为单位来表达信息量。

2. 反函数的导数。设函数 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上严格单调、可导，且 $f'(x) \neq 0$，则它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在对应的区间 $I_y = \{y \mid y = f(x), x \in I_x\}$ 上也严格单调、可导，且

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)}$$

3. 洛必达法则（$\dfrac{0}{0}$ 型）。设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域内可导，并且当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都趋于零，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (有限或 ∞)，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$。

4. 洛必达法则（$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型）。设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域内可导，并且满足下列条件：

   - $g'(x) \neq 0$ 在 x_0 的一个去心邻域内成立，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$；
   - $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (有限或 ∞)

   则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

5. 其余形式的未定式都可以转化为上述两种情形，例如 1^∞ 可以通过取对数转化为 $0 \cdot \infty$ 再取倒数转化为第一种情形。

6. 一元函数的泰勒公式。设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有 $n+1$ 阶导数, $x_0 \in I$，则对 $\forall x \in I$，$f(x)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} f(x) = & f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)(x - x) + \frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x - x_0\right)^2 + \cdots \\ & + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$ 即为拉格朗日型余项，$R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right) \quad (x\to x_0)$ 即为佩亚诺型余项。泰勒公式在零点展开（即 $x_0=0$）时得到麦克劳林展开式。

7. 几个常见的麦克劳林展开式。

- $f(x)=\mathrm{e}^x$

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x) \quad (-\infty<x<+\infty)$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\theta x}(0<\theta<1)$.

- $f(x)=\sin x$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x) \quad (-\infty<x<+\infty)$$

其中余项 $R_{2m}(x)=\dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\sin\left(\theta x+\dfrac{2m+1}{2}\pi\right)=(-1)^m\dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos\theta x \quad (0<\theta<1)$.

- $f(x)=\cos x$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}+R_{2m-1}(x) \quad (-\infty<x<+\infty)$$

其中余项 $R_{2m-1}(x)=\dfrac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}\cos\theta x \quad (0<\theta<1)$.

- $f(x)=(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)(x>-1)$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{a-n-1}x^{n+1}(0<\theta<1)$.

- $f(x)=\ln(1+x)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x) \quad (x>-1)$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}(0<\theta<1)$.

8. 定积分的换元法。设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，而函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

- $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数
- $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$ 且 $a\leqslant\varphi(t)\leqslant b,\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

9. 定积分的分部积分法。设函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上分别具有连续的一阶导数 $u'(x)$ 与 $v'(x)$，则有分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

分部积分法是一种重要的积分计算方法，一方面可以用来直接计算，另一方面可以用来构造递推关系求解。例如，设 m 为正整数，计算积分 $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\ \mathrm{d}x$. 易得

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

对于 $m \geqslant 2$ 的情形，由分部积分法得到

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\ \mathrm{d}(-\cos x) \\
&= -\sin^{m-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x\ \mathrm{d}x \\
&= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \left(1-\sin^2 x\right) \mathrm{d}x \\
&= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\ \mathrm{d}x - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

即

$$I_m = (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m$$

所以有递推关系

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

于是可得，当 $m = 2n$ 时有

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\ \mathrm{d}x = \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(2n-3)}{(2n-2)} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

当 $m = 2n+1$ 时有

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\ \mathrm{d}x = \frac{2n}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n-2)}{(2n-1)} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

10. 二元函数可微性判定。若二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数在 (x_0,y_0) 处的某个邻域内皆存

海浪打湿日落，试图推你回去

在，且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都在 (x_0, y_0) 处连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微。

11. 高阶偏导数求导次序交换条件。已知二元函数的二阶偏导数有 4 种可能，分别是

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{gathered}
$$

如果 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 中连续，则两者相等, 即求导的次序可交换。

12. 向量值函数与雅可比矩阵。设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, $f: D \to \mathbb{R}^m$ 为 n 元 m 维向量值函数。记 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 f 可以表示为

$$
f(\boldsymbol{x})=\left(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x})\right)^{\mathrm{T}}
$$

其中 $y_j=f_j(\boldsymbol{x})$ 为 D 上的 n 元函数。如果每个分量函数 $f_j(1 \leqslant j \leqslant m)$ 都是可微的, 则称映射 f 可微，并且定义 f 的微分 $\mathrm{d}f$ 为对每个分量函数的微分所形成的有序组，即

$$
\mathrm{d}f=\left(\mathrm{d}f_1,\ \mathrm{d}f_2, \cdots, \mathrm{d}f_m\right)^{\mathrm{T}}
$$

其中

$$
\mathrm{d}f_j=\mathrm{d}y_j=\frac{\partial y_j}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1+\frac{\partial y_j}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial y_j}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n \quad (j=1,2,\cdots,m)
$$

可进一步写成矩阵形式

$$
\mathrm{d}f=\begin{pmatrix}\mathrm{d}f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix}
$$

记

$$
Jf=J_x y=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}
$$

为向量值函数 f 的雅可比矩阵。

13. 二元函数的泰勒公式。设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为凸区域，$f \in C^{n+1}(D)$。如果 $(x_0, y_0), (x_0+h, y_0+k) \in$

海浪打湿了裙，试图推你回去

D，则存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$f(x_0+h, y_0+k) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0, y_0) + R_n$$

其中

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

称为拉格朗日型余项；特别地，在 $(0,0)$ 处展开的泰勒公式也叫麦克劳林公式。

14. 二元函数的一阶泰勒展开

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot k + R_1$$

15. 二元函数的二阶泰勒展开

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot k + \frac{1}{2}\left(Ah^2+2Bhk+Ck^2\right) + R_2$$

其中

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

一般地，称

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

为二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处的黑塞矩阵。

16. 二元函数极值判定。设 $f(x,y)$ 为区域 D 上的 C^2 函数，$(x_0, y_0) \in D$ 为 $f(x,y)$ 的驻点（偏导数为 0 的点）。记 $\Delta = AC - B^2$，其中

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

则有

- 当 $A > 0$ 且 $\Delta > 0$ 时，(x_0, y_0) 为严格极小值点；
- 当 $A < 0$ 且 $\Delta > 0$ 时，(x_0, y_0) 为严格极大值点；
- 当 $\Delta < 0$ 时，(x_0, y_0) 不是极值点。

17. 条件极值。设 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，在 D 的内部 D° 可微。设 ∂D 是由方程 $\varphi(x,y)=0$ 表示的隐式曲线。$f(x,y)$ 在 ∂D 上的极大值点 $M_0(x_0, y_0)$ 是指

海浪打湿日记，试图推你回去

$\varphi\left(x_0, y_0\right)=0$，且在 M_0 的某个邻域中，凡是满足 $\varphi(x, y)=0$ 的点 $M(x, y)$ 都满足 $f(x, y) \leqslant f\left(x_0, y_0\right)$，类似可以定义 $f(x, y)$ 在 ∂D 上的极小值点。

18. 求解条件极值问题的拉格朗日乘子法。考虑二元情形，引进辅助函数

$$F(x, y, \lambda)=f(x, y)+\lambda \varphi(x, y)$$

则辅助函数 $F(x, y, \lambda)$ 的极值点应满足下面的驻点方程组

$$\left\{\begin{array}{l}
F_x^{\prime}(x, y)=f_x^{\prime}(x, y)+\lambda \varphi_x^{\prime}(x, y)=0 \\
F_y^{\prime}(x, y)=f_y^{\prime}(x, y)+\lambda \varphi_y^{\prime}(x, y)=0 \\
F_\lambda^{\prime}=\varphi(x, y)=0
\end{array}\right.$$

进一步验证即可。上述二元函数的条件极值求解法可以推广到一般情形。考虑目标函数 $f\left(x_1,\ x_2, \cdots, x_n\right)$ 在 $m(<n)$ 个约束条件

$$\left\{\begin{array}{l}
\varphi_1\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=0 \\
\varphi_2\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=0 \\
\cdots, \\
\varphi_m\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=0
\end{array}\right.$$

下的极值问题. 作辅助函数

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right)=f+\lambda_1 \varphi_1+\lambda_2 \varphi_2+\cdots+\lambda_m \varphi_m$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 m 个辅助常量. 由此构成驻点方程组

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+\lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}+\cdots+\lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}=0 \\
\dfrac{\partial F}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}+\lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}+\cdots+\lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2}=0 \\
\cdots \\
\dfrac{\partial F}{\partial x_n}=\dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}+\lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}+\cdots+\lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}=0 \\
\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1}=\varphi_1\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=0 \\
\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2}=\varphi_2\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=0 \\
\cdots \\
\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_m}=\varphi_m\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=0
\end{array}\right.$$

海浪打湿白裙，试图推你回去

从中可以解出 $m+n$ 个末知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，则 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 就有可能是条件极值点。

19. 二重积分的累次积分法。设函数 $f(x,y)$ 在闭区间 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上可积。

- 如果对每个 $y\in[c,d]$,$f(x,y)$ 作为 x 的函数在 $[a,b]$ 上可积,记 $\varphi(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$，则 $\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积，并且有

$$\int_c^d \varphi(y)\mathrm{d}y=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 如果对每个 $x\in[a,b]$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $[c,d]$ 上可积，记 $\psi(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$，则 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并且有

$$\int_a^b \psi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

- 设 $D=\{(x,y)\mid \psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y), c\leqslant y\leqslant d\}$，其中 $\psi_1(x),\psi_2(x)$ 为连续函数。函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积，且对于 $\forall y\in[c,d]$，积分 $\displaystyle\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$ 存在，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

20. 二重积分的变量代换。设 D,D' 为由分段光滑曲线围成的区域,$\Phi: D'\to D, \Phi(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$ 为 C^1 的一一映射，且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$. 若 $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

为雅可比行列式。