1.(每题 4 分，共 8 分) 选择题 (多选题)

(a) 设 X, Y, Z 为离散随机变量，U, V 为连续随机变量，则以下等式或不等式正确的是 (AB)

$$(A) H(g(X)) \leqslant H(X)$$
$$(B) 若X, Y独立，则有H(XY) = H(X) + H(Y)$$
$$(C) h(U) \geqslant I(U;V)$$
$$(D) I(X;Y|Z) \leqslant I(X;Y)$$

(b) 以下 D 元字母表上的码字长度符合即时码要求的是 (ACD)

$$(A) D=2, l_i = 2,3,3,4,4,4,\cdots,\overbrace{i,i\cdots,i}^{i-1},\cdots$$
$$(B) D=2, l_i = 1,3,3,3,4,5,6,6,6$$
$$(C) D=3, l_i = 1,2,2,3,3,3,4,4,5,5,5,6,7,8,8,8,9,9,9,9,9$$
$$(D) D=4, l_i = 1,1,1,2,2,3,3,3,4$$

2.(每题 4 分，共 8 分) 判断题 (若判断为对，简要说明或证明；若判断为错，简要说明或举出反例)

(a) 假设随机变量 X，Y 和 Z, W 构成如下的马尔科夫链

$$X \rightarrow Y \rightarrow (Z, W),\ 即 p(x,y,z,w) = p(x)p(y \mid x)p(z,w \mid y)$$

则有

$$I(X;Z) + I(X;W) \leqslant I(X;Y) + I(Z;W)$$

(b) 给定一个概率分布 $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ 和一个整数 $m (0 \leqslant m \leqslant n)$. 定义 $q_m = 1 - \sum_{i=1}^{m} p_i$，则有

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leqslant H(p_1, p_2, \ldots, p_m, q_m) + q_m \log(n-m)$$

3.(每题 4 分，共 16 分) 填空题

(a) 有三个二元离散随机变量 X, Y, Z，若要使得 $I(X;Y) = 1$ bit，$I(X;Y \mid Z) = 0$ bit，则 X, Y, Z 的联合概率分布为_________ .

(b) 给定连续随机变量 X、Y，服从分布 $\mathcal{N}(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, 0)$. 设 $U = X + Y$，$V = X - Y$，则互信息 $I(U;V) =$_________ .

(c) 考虑随机变量 X，取 6 个值 $\{A, B, C, D, E, F\}$ ，其概率依次为 0.5，0.25，0.1，0.05，0.05 和 0.05. 构造该随机变量的四元哈夫曼码 (字母表由 4 个元素构成，例如 a, b, c, d). 其期望长度为_________ .

(d) 设一有线电话信道，带宽限制在 $200 \sim 3600Hz$，信噪比为 $\dfrac{P}{N_0} = 1000$，则该信道的信道容量为_________ .

4.(10 分) 随机变量 X, Y 的取值分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 和 $y_1, y_2, \ldots, y_n$. 设 $Z = X + Y$.

(1) 如果 X、Y 独立，证明 $H(Y) \leqslant H(Z)$ 和 $H(X) \leqslant H(Z)$.

(2) 请给出一个例子，使得 $H(X) > H(Z)$ 且 $H(Y) > H(Z)$.

(3) 说明在什么条件下，熵的和等于和的熵，即 $H(Z) = H(X) + H(Y)$.

5.(8 分) 一只小鸟在 $3\times 3\times 3$ 的立方体迷宫中迷失了. 这只鸟在相互邻接的房间之间，从这个房间穿过墙飞到那个房间的概率是相同的. 例如，角落边的房间有 3 个出口. 求此随机过程的熵率.

6.(10 分) 考虑哈夫曼编码问题. 假定消息的概率分布以递减的顺序给出
$p_1 > p_2 > \cdots > p_m$.

(a) 证明：对任意的二元哈夫曼码，如果最可能出现的消息字符的概率 $p_1 > 2/5$，则该字符分配的码字长度必为 1.

(b) 对任意的二元哈夫曼码，如果最可能出现的消息字符的概率 $p_1 < 1/3$，则该字符分配的码字长度必超过 1.

7.（12 分）考虑串联信道和并联信道的信道容量.

(a) 考虑 n 个完全相同的独立二元对称信道串联，如图所示.

$$X_0 \to \boxed{\mathrm{BSC}} \to X_1 \to \cdots \to X_{n-1} \to \boxed{\mathrm{BSC}} \to X_n$$

其中每个信道的原始误差概率为 p，证明该串联信道等价于一个二元对称信道，具有误差概率

$$p^* = \frac{1}{2}\left(1-(1-2p)^n\right)$$

(b) 已知信道的转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_N \end{bmatrix}$$

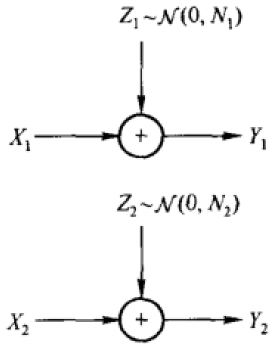
其中 $P_1, P_2, \ldots, P_N$ 是 N 个离散信道的信道矩阵. 令 $C_1, C_2, \ldots, C_N$ 表示 N 个离散信道的容量. 求该信道的容量.

8.(6 分) 分别计算以下分布的微分熵

(a) 拉普拉斯分布 $f(x)=\dfrac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}$

(b)$Y=X_1+X_2$，其中 $(X_1,X_2)\sim\mathcal{N}\left(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$.

9.(8 分) 考虑并联高斯信道



其中 $Z_1\sim\mathcal{N}\left(0,N_1\right)$ 和 $Z_2\sim\mathcal{N}\left(0,N_2\right)$ 为独立的高斯噪声. 选取固定的 β_1 和 β_2，满足 $\beta_1N_1>\beta_2N_2$. 信道的功率分配约束为 $\beta_1P_1+\beta_2P_2\leqslant\beta$.

(a)β 取何值时信道停止单信道角色而开始起到双信道的作用?

(b)$\beta_1=1,\beta_2=2,N_1=3,N_2=2,\beta=10$. 求解信道容量.

10.(8 分) 一个三维独立并联高斯信源 (X_1, X_2, X_3)，其中 X_1，X_2，X_3 均值都为零，方差分别是 2、8 和 4. 采用平方误差失真度量，$D=\sum_{i=1}^{3} D_i=\sum_{i=1}^{3}(x_i-\hat{x}_i)^2$，求该信源的信息率失真函数 $R(D)$.

11.(6 分) 考虑在集合 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 上均匀分布的信源 X. 若失真度量为汉明失真，即

$$d(x,\hat{x})=\begin{cases} 0, & \text{如果} x=\hat{x} \\ 1, & \text{如果} x\neq\hat{x} \end{cases}$$

求信源的率失真函数.