

2022 春信息论 B 补充题目

考察范围：第二章 ~ 第五章 完成时间：2022 年 3 月 9 日

1. 多选题。设 X, Y, Z 为离散随机变量, U, V 为连续随机变量, g 为一般的映射, 则以下等式或不等式正确的是 ()

(A) $H(g(X)) \leq H(X)$

(B) 若 X, Y 独立, 则有 $H(XY) = H(X) + H(Y)$

(C) $h(U) \geq I(U; V)$

(D) $I(X; Y|Z) \leq I(X; Y)$

2. 判断题 (若判断为对, 简要说明或证明; 若判断为错, 简要说明或举出反例)

假设随机变量 X, Y 和 Z, W 构成如下的马尔可夫链

$$X \rightarrow Y \rightarrow (Z, W), \text{ 即 } p(x, y, z, w) = p(x)p(y|x)p(z, w|y)$$

则有

$$I(X; Z) + I(X; W) \leq I(X; Y) + I(Z; W)$$

3. 每帧电视图像可以认为是由 3×10^5 个像素组成, 所以像素均是独立变化, 且每一像素又取 128 个不同的亮度电平, 并设亮度电平等概率出现。问每帧图像含有多少信息量? 若现有一广播员在约 10000 个汉字的字汇中选 1000 个来口述此电视图像, 试问广播员描述此图像所广播的信息量是多少 (假设汉字是等概率分布, 并且彼此无依赖)? 若要恰当地描述此图像, 广播员在口述中至少需用多少汉字?
4. 设有一批电阻, 按阻值分 70% 是 $2\text{k}\Omega$, 30% 是 $5\text{k}\Omega$; 按功耗分 64% 是 $1/8\text{ W}$, 其余是 $1/4\text{ W}$ 。现已知 $2\text{k}\Omega$ 阻值的电阻中 80% 是 $1/8\text{ W}$ 。问通过测量阻值可以平均得到的关于瓦数的信息量是多少?
5. 随机变量 X, Y 的取值分别为 x_1, x_2, \dots, x_m 和 y_1, y_2, \dots, y_n 。设 $Z = X + Y$ 。试证明 $H(Z) \leq H(X + Y)$ 。
6. 设离散无记忆信源

$$\begin{bmatrix} X \\ P(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 = 0 & a_2 = 1 & a_3 = 2 & a_4 = 3 \\ 3/8 & 1/4 & 1/4 & 1/8 \end{bmatrix}$$

其发出的消息为 (202120130213001203210110321010021032011223210), 求在此消息中平均每个符号携带的信息量是多少?