Geometrický rozbor

Úlohou je sestrojit střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC, je-li dána kružnice opsaná k (bez vyznačeného středu) a tři body A, B, C na ní. K dispozici máme pouze pravítko s ryskou (umožňuje rýsovat přímky a kolmice).

1. Nalezení středu opsané kružnice (O)

Abychom mohli pracovat s oblouky, potřebujeme nejprve najít střed kružnice k. Využijeme vlastnosti Thaletovy věty a pravoúhelníku:

- Vztyčíme-li v bodě B kolmici na stranu AB, protne tato kolmice kružnici v bodě K. Podle Thaletovy věty je úsečka AK průměrem kružnice.
- Analogicky vztyčíme kolmici v bodě A na stranu AB, která protne kružnici v bodě L. Úsečka BL je rovněž průměrem.
- Body A, B, K, L tvoří vrcholy obdélníku vepsaného do kružnice. Průsečík úhlopříček AK a BL je hledaný střed O.

2. Sestrojení os úhlů

Střed vepsané kružnice I leží v průsečíku os vnitřních úhlů trojúhelníku.

- Osa úhlu α (při vrcholu A) prochází středem S_a oblouku BC (toho oblouku, který neobsahuje bod A). (důkaz věty na konci)
- Bod S_a leží na ose úsečky BC. Osa tětivy prochází středem kružnice O a je kolmá k tětivě.
- Sestrojíme tedy kolmici z bodu O na stranu BC. Její průsečík s kružnicí (v polorovině neobsahující A) je bod S_a. Polopřímka AS_a je hledanou osou úhlu.
- Analogicky sestrojíme osu úhlu β pomocí středu S_b oblouku AC.

Konstrukční postup

1. Sestrojíme přímku $p \perp AB$ procházející bodem B.

2. K; $K = p \cap k$ $(K \neq B)$.

3. Sestrojíme přímku $q \perp AB$ procházející bodem A.

4. L; $L = q \cap k$ $(L \neq A)$.

5. O; $O = AK \cap BL$ (Střed opsané kružnice).

6. Sestrojíme přímku r procházející bodem O tak, že $r \perp BC$.

7. S_a; $S_a = r \cap k$, přičemž S_a a A leží v opačných polorovinách určených přímkou BC.

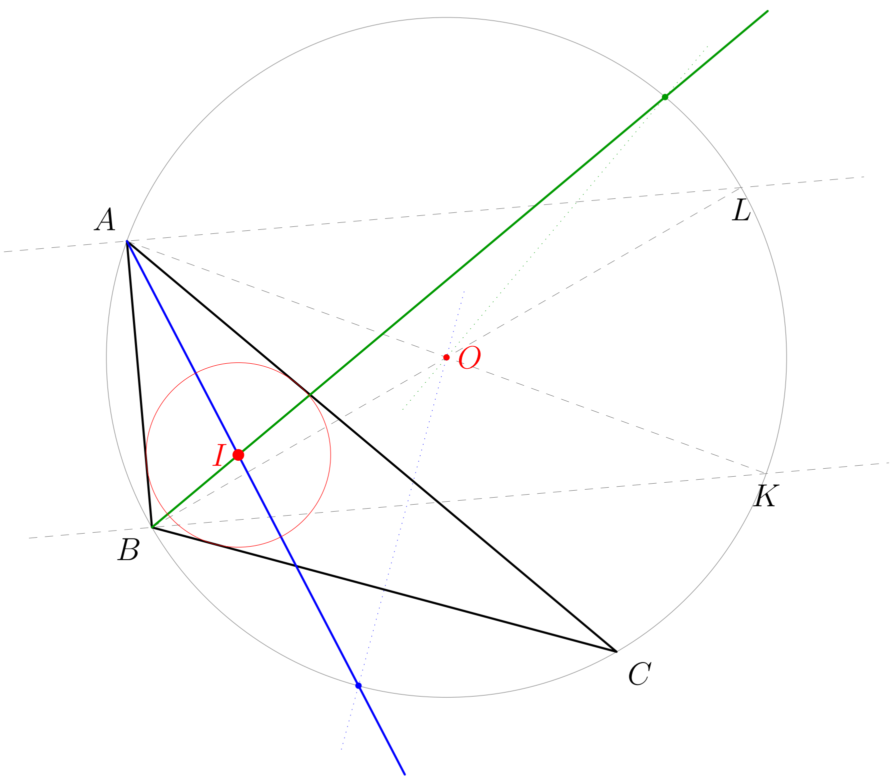
8. Sestrojíme polopřímku AS_a (osa úhlu α).

9. Sestrojíme přímku s procházející bodem O tak, že $s \perp AC$.

10. S_b; $S_b = s \cap k$, přičemž S_b a B leží v opačných polorovinách určených přímkou AC.

11. Sestrojíme polopřímku BS_b (osa úhlu β).

12. I; $I =$ polopřímka $AS_a \cap$ polopřímka BS_b.



Důkaz tvrzení: Osa úhlu α (při vrcholu A) prochází středem S_a oblouku BC. Důkaz vychází z věty o obvodových úhlech.

1. **Rozdělení úhlu:** Protože polopřímka AS_a je osou úhlu α, dělí tento úhel na dvě poloviny. Platí tedy:

$$\angle BAS_a = \angle CAS_a = \frac{\alpha}{2}$$

2. **Vztah úhlů a oblouků:** Věta o obvodových úhlech říká, že velikost obvodového úhlu je přímo úměrná délce oblouku, nad kterým tento úhel leží.
   - Úhel $\angle BAS_a$ přísluší oblouku BS_a.
   - Úhel $\angle CAS_a$ přísluší oblouku CS_a.

3. **Porovnání:** Protože se rovnají úhly ($\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$), musí se rovnat i délky oblouků, které jim odpovídají:

$$\left|\overset{\frown}{BS_a}\right| = \left|\overset{\frown}{CS_a}\right|$$

4. **Závěr:** Pokud jsou oblouky BS_a a CS_a stejně dlouhé a navazují na sebe v bodě S_a, pak bod S_a nutně leží ve středu oblouku BC.