

Geometrický rozbor

Úlohou je sestrojit střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC , je-li dána kružnice opsaná k (bez vyznačeného středu) a tři body A, B, C na ní. K dispozici máme pouze pravítko s ryskou (umožňuje rýsovat přímky a kolmice).

1. Nalezení středu opsané kružnice (O)

Abychom mohli pracovat s oblouky, potřebujeme nejprve najít střed kružnice k . Využijeme vlastnosti Thaletovy věty a pravoúhelníku:

- Vztýčíme-li v bodě B kolmici na stranu AB , protne tato kolmice kružnici v bodě K . Podle Thaletovy věty je úsečka AK průměrem kružnice.
- Analogicky vztýčíme kolmici v bodě A na stranu AB , která protne kružnici v bodě L . Úsečka BL je rovněž průměrem.
- Body A, B, K, L tvoří vrcholy obdélníku vepsaného do kružnice. Průsečík úhlopříček AK a BL je hledaný střed O .

2. Sestrojení os úhlů

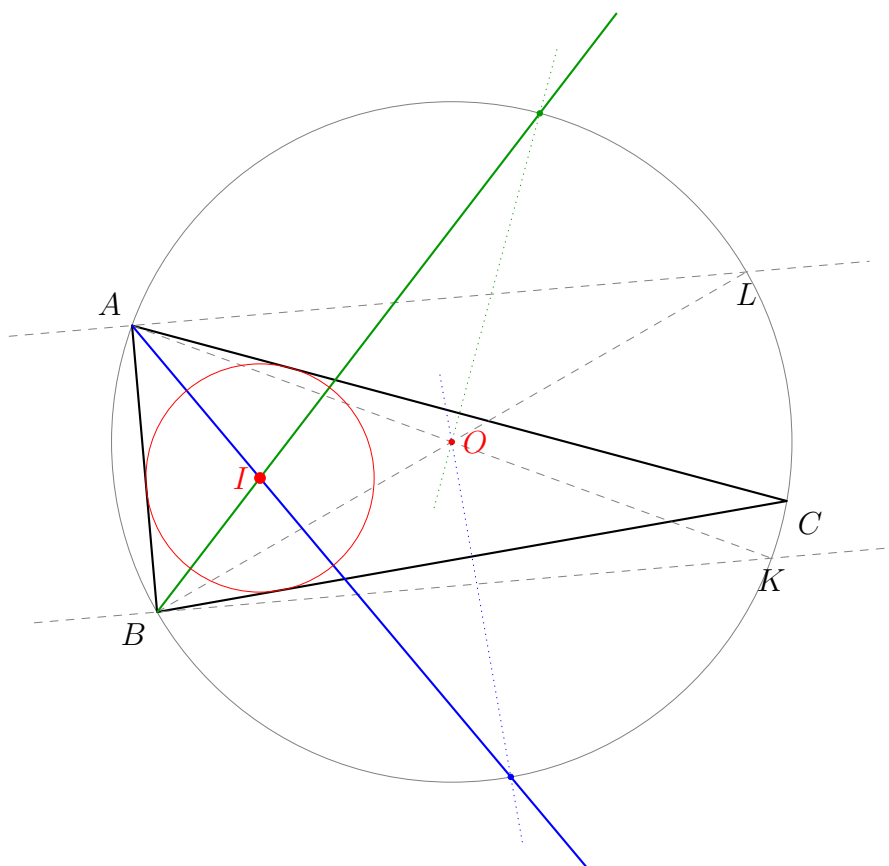
Střed vepsané kružnice I leží v průsečíku os vnitřních úhlů trojúhelníku.

- Osa úhlu α (při vrcholu A) prochází středem S_a oblouku BC (toho oblouku, který neobsahuje bod A). (důkaz věty na konci)
- Bod S_a leží na ose úsečky BC . Osa tětivy prochází středem kružnice O a je kolmá k tětivě.
- Sestrojíme tedy kolmici z bodu O na stranu BC . Její průsečík s kružnicí (v polorovině neobsahující A) je bod S_a . Polopřímka AS_a je hledanou osou úhlu.
- Analogicky sestrojíme osu úhlu β pomocí středu S_b oblouku AC .

Konstrukční postup

1. Sestrojíme přímku $p \perp AB$ procházející bodem B .
2. K ; $K = p \cap k$ ($K \neq B$).
3. Sestrojíme přímku $q \perp AB$ procházející bodem A .

4. L ; $L = q \cap k$ ($L \neq A$).
5. O ; $O = AK \cap BL$ (Střed opsané kružnice).
6. Sestrojíme přímkou r procházející bodem O tak, že $r \perp BC$.
7. S_a ; $S_a = r \cap k$, přičemž S_a a A leží v opačných polorovinách určených přímkou BC .
8. Sestrojíme polopřímku AS_a (osa úhlu α).
9. Sestrojíme přímkou s procházející bodem O tak, že $s \perp AC$.
10. S_b ; $S_b = s \cap k$, přičemž S_b a B leží v opačných polorovinách určených přímkou AC .
11. Sestrojíme polopřímku BS_b (osa úhlu β).
12. I ; $I = \text{polopřímka } AS_a \cap \text{polopřímka } BS_b$.



Důkaz tvrzení: Osa úhlu α (při vrcholu A) prochází středem S_a oblouku BC . Důkaz vychází z věty o obvodových úhlech.

1. **Rozdělení úhlu:** Protože polopřímka AS_a je osou úhlu α , dělí tento úhel na dvě poloviny. Platí tedy:

$$\angle BAS_a = \angle CAS_a = \frac{\alpha}{2}$$

2. **Vztah úhlů a oblouků:** Věta o obvodových úhlech říká, že velikost obvodového úhlu je přímo úměrná délce oblouku, nad kterým tento úhel leží.

- Úhel $\angle BAS_a$ přísluší oblouku BS_a .
- Úhel $\angle CAS_a$ přísluší oblouku CS_a .

3. **Porovnání:** Protože se rovnají úhly ($\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$), musí se rovnat i délky oblouků, které jim odpovídají:

$$\left| \widehat{BS_a} \right| = \left| \widehat{CS_a} \right|$$

4. **Závěr:** Pokud jsou oblouky BS_a a CS_a stejně dlouhé a navazují na sebe v bodě S_a , pak bod S_a nutně leží ve středu oblouku BC .

