

MINISTERUL EDUCAȚIEI AL REPUBLICII MOLDOVA

---

Mihai MARINCIUC  
Spiridon RUSU

# Fizică

Manual pentru clasa a 10-a

10

Elaborat conform curriculumului disciplinar în vigoare și aprobat prin Ordinul ministrului educației (nr. 265 din 27 aprilie 2012). Editat din sursele financiare ale *Fondului Special pentru Manuale*.

**Contribuția autorilor la elaborarea manualului:**

*Mihai Marinciuc* – capitolele 1, 2 (par. 2.1–2.3, 2.8), 3, 4

*Spiridon Rusu* – capitolele 2 (par. 2.4–2.7), 4 (par. 4.3), 5, lucrări de laborator

**Comisia de experti:**

*Ion Stratan*, doctor în fizică, conferențiar, Universitatea Tehnică a Moldovei

*Eleodor Lupașcu*, doctor în fizică, conferențiar, Universitatea Agrară, Chișinău

*Andrei Petrușca*, prof. școlar, grad did. superior, Liceul Teoretic „Principesa Natalia Dadiani”, Chișinău

**Recenzenți:**

*Oleg Bursuc*, doctor în științe ale educației, coordonator, Consiliul pentru Cercetări și Schimburi Internaționale (IREX), Chișinău

*Alexei Colibneac*, Maestru în Arte, profesor universitar, Academia de Muzică, Teatru și Arte Plastice, Chișinău

*Mihai Șleahtăchi*, doctor în psihologie și pedagogie, conferențiar, Universitatea Liberă Internațională din Moldova, Chișinău

*Anatolie Cerbu*, doctor în științe fizico-matematice, conferențiar, Academia de Transporturi, Informatică și Comunicații, Chișinău

*Tatiana Cartaleanu*, doctor în filologie, conferențiar, Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, Chișinău

**Redactor:** *Mariana Belenciuc*

**Corectori:** *Maria Cornesco, Tatiana Darii*

**Redactor tehnic:** *Nina Duduciuc*

**Machetare computerizată, copertă:** *Romeo Șvet, Vitaliu Pogolă*

**Întreprinderea Editorial-Poligrafică *Ştiința*,**

str. Academiei, nr. 3; MD-2028, Chișinău, Republica Moldova;

tel.: (+373 22) 73-96-16, fax: (+373 22) 73-96-27; e-mail: prini@stiinta.asm.md

**DIFUZARE:**

ÎM Societatea de Distribuție a Cărții PRO-NOI

str. Alba-Iulia, nr. 23/1 A; MD - 2051, Chișinău;

tel.: (+373 22) 51-68-17; 51-57-49; fax: (+373 22) 50-15-81;

e-mail: info@pronoi.md, www.pronoi.md

Toate drepturile asupra acestei ediții aparțin Întreprinderii Editorial-Poligrafice *Ştiința*.

**Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții**

Marinciuc, Mihai

**Fizică:** Man. pentru cl. a 10-a / Mihai Marinciuc, Spiridon Rusu; Min. Educației al Rep. Moldova. – Ch.: I.E.P. *Ştiința*, 2012 (Tipogr. „SEREBIA” SRL). – 180 p.

ISBN 978-9975-67-823-0

53(075.3)

# CUPRINS

<b>Introducere .....</b>	7
<b>Capitolul I. CINEMATICA .....</b>	8
<b>    1.1. Punctul material și solidul rigid – modele utilizate în mecanică .....</b>	8
<b>    1.2. Sistem de referință. Spațiu și timp .....</b>	10
a. Relativitatea mișcării. Sistem de referință .....	10
b. Unitățile de lungime și de timp .....	11
c. Spațiul și timpul în mecanica clasăcă .....	12
<b>    1.3. Traекторia. Deplasarea și distanța parcursă .....</b>	13
a. Descrierea mișcării unui punct material .....	13
b. Traекторia .....	14
c. Deplasarea și distanța parcursă .....	14
d.º Mișcarea de translație a rigidului .....	15
<b>    1.4. Operații cu vectori .....</b>	16
a. Adunarea vectorilor .....	16
b. Scăderea vectorilor .....	17
c. Componentele și proiecțiile unui vector .....	18
<b>    1.5. Mișcarea rectilinie uniformă. Viteza .....</b>	20
<b>    1.6.º Cinematica mișcării relative .....</b>	24
<b>    1.7. Mișcarea rectilinie uniform variată. Accelerația .....</b>	27
a. Mișcarea rectilinie neuniformă. Viteza medie. Viteza momentană .....	27
b. Mișcarea rectilinie uniform variată. Accelerarea .....	28
c. Graficele proiecțiilor accelerării și vitezei .....	29
d. Legea mișcării uniform variante a mobilului .....	30
e. Formula lui Galilei .....	31
f.º Raportul distanțelor parcuse de mobil în intervale de timp egale .....	32
g. Mișcarea corpului pe verticală .....	32

<b>1.8. Mișcarea circulară uniformă. Accelerația centripetă .....</b>	37
a. Mișcarea circulară uniformă. Perioada și frecvența de rotație .....	37
b. Accelerația centripetă .....	39
c. Viteza unghiulară .....	40
<b>1.9.º Mișcarea corpurilor pe traiectorii parabolice .....</b>	42
Capitolul II. PRINCIPIILE DINAMICII. FORȚELE NATURII ..... 45	
<b>2.1. Principiul inerției. Sisteme de referință inerțiale .....</b>	45
<b>2.2. Masa și forța. Principiul fundamental al dinamicii .....</b>	47
a. Interacțiuni fundamentale .....	47
b. Masa .....	48
c. Forța .....	50
d. Principiul fundamental al dinamicii .....	51
e.º Principiul suprapunerii forțelor .....	53
<b>2.3. Principiul acțiunii și reacțiunii .....</b>	55
<b>2.4.º Atracția universală .....</b>	56
a. Legea atracției universale .....	56
b. Cimpul gravitațional .....	59
c. Sateliți artificiali .....	60
<b>2.5. Forța elastică. Mișcarea sub acțiunea forței elastice .....</b>	63
<b>2.6. Forța de frecare. Mișcarea în prezența forței de frecare .....</b>	67
<b>2.7.º Mișcarea corpurilor sub acțiunea mai multor forțe .....</b>	72
<b>2.8.º Principiul relativității al lui Galilei .....</b>	77
Capitolul III. ELEMENTE DE STATICĂ ..... 81	
<b>3.1. Echilibrul de translație al rigidului .....</b>	81
<b>3.2.º Momentul forței. Echilibrul de rotație al rigidului.....</b>	85
<b>3.3.º Centrul de greutate al sistemului de puncte materiale. Centrul de masă .....</b>	87
a. Centrul de greutate. Centrul de masă .....	87
b. Determinarea poziției centrului de greutate .....	89
Capitolul IV. IMPULSUL MECANIC. LUCRUL ȘI ENERGIA MECANICĂ ..... 92	
<b>4.1. Impulsul punctului material.</b>	
Teorema variației și legea conservării impulsului punctului material .....	92

<b>4.2. Impulsul sistemului de puncte materiale. Teorema variației și legea conservării impulsului sistemului de puncte materiale .....</b>	95
a. Forțe interne și externe. Proprietatea forțelor interne .....	95
b. Teorema variației impulsului sistemului de puncte materiale .....	96
c. Legea conservării impulsului sistemului de puncte materiale. Aplicații .....	97
d.º Mișcarea reactivă .....	99
<b>4.3.º Momentul cinetic al punctului material. Legea conservării momentului cinetic ....</b>	101
<b>4.4. Lucrul mecanic. Puterea .....</b>	103
a. Lucrul mecanic al forței constante .....	103
b. Puterea .....	106
<b>4.5. Energia cinetică. Teorema variației energiei cinetice .....</b>	108
<b>4.6. Lucrul forței de greutate. Energia potențială gravitațională .....</b>	112
a. Forța de greutate – forță conservativă .....	112
b. Energia potențială gravitațională .....	113
c. Echilibrul în cîmpul gravitațional .....	114
<b>4.7. Lucrul forței elastice. Energia potențială elastică .....</b>	116
<b>4.8. Lucrul forței de frecare .....</b>	118
<b>4.9. Legea conservării și transformării energiei mecanice .....</b>	120
a. Legea conservării și transformării energiei mecanice în sisteme izolate în care acționează forțe conservative .....	120
b.º Ciocnirile corpurilor .....	122
c.º Variația energiei mecanice a sistemului în prezența forțelor neconservative și a forțelor externe .....	124
<b>Capitolul V. OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE .....</b>	127
<b>5.1. Mișcarea oscilatorie .....</b>	127
<b>5.2. Oscillatorul liniar armonic .....</b>	130
a. Pendulul elastic .....	130
b. Pendulul gravitațional .....	131
c. Legea mișcării oscillatorii armonice .....	133
d. Caracteristicile momentane ale oscilațiilor armonice .....	135
e.º Reprezentarea mișcării oscillatorii prin fazori .....	136
f. Dependența pulsației și perioadei oscilațiilor armonice libere de proprietățile sistemului....	137
g. Energia oscillatorului liniar armonic .....	138
<b>5.3.º Compunerea oscilațiilor coliniare .....</b>	141
<b>5.4.º Oscilații amortizate și forțate. Rezonanța .....</b>	143
<b>5.5. Propagarea mișcării oscillatorii. Unde transversale și unde longitudinale .....</b>	145
<b>5.6. Caracteristicile mișcării ondulatorii. Viteza de propagare a undelor .....</b>	147

<b>5.7.º Ecuatia undei plane .....</b>	150
<b>5.8. Principiul lui Huygens .....</b>	152
<b>5.9. Reflexia și refracția undelor .....</b>	152
a. Legile reflexiei și refracției .....	152
b.º Studiul reflexiei și refracției cu ajutorul principiului lui Huygens .....	153
c.º Comportamentul fazei undelor la reflexie .....	154
<b>5.10. Difracția undelor .....</b>	155
<b>5.11. Interferența undelor .....</b>	156
a. Studiul calitativ al interferenței undelor .....	156
b.º Studiul cantitativ al interferenței undelor.....	157
<b>5.12.º Unde sonore .....</b>	159
a. Clasificarea undelor sonore .....	159
b. Calitățile sunetului .....	159
<b>5.13.º Unde seismice .....</b>	161
 <b>LUCRĂRI DE LABORATOR .....</b>	165
<b>Noțiuni elementare despre calculul erorilor .....</b>	165
a. Măsurări și erori .....	165
b. Erorile măsurărilor directe .....	166
c. Erorile măsurărilor indirekte .....	167
d. Eroarea unei singure măsurări .....	169
e. Prelucrarea grafică a datelor experimentale .....	170
 <b>Lucrarea de laborator nr. 1</b>	
Studiul mișcării rectilinii uniform accelerate a unui corp .....	171
 <b>Lucrarea de laborator nr. 2º</b>	
Determinarea constantei de elasticitate a unui corp cu proprietăți elastice .....	172
 <b>Lucrarea de laborator nr. 3</b>	
Determinarea coeficientului de frecare la alunecare .....	173
 <b>Lucrarea de laborator nr. 4.</b>	
Studiul pendulului elastic.....	175
 <b>Răspunsuri la probleme.....</b>	177

---

**NOTĂ:** Temele nemarcate sunt obligatorii pentru ambele profiluri. Cele marcate convențional (<sup>º</sup>) sunt obligatorii pentru profilul real.



## Introducere

O particularitate generală a naturii ce ne înconjoară este schimbarea. Schimbările, foarte diverse și complicate, se cercetează în cadrul științelor naturii: fizica, biologia, chimia, astronomia, geologia și.a.

**Mecanica** (în limba greacă Înseamnă „mașină” sau „știința despre mașini și mecanisme”) este o ramură a fizicii care studiază cea mai simplă formă de mișcare, numită **mișcare mecanică**.

**Mișcarea mecanică a unui corp este schimbarea în timp a poziției lui în raport cu alte corpuși.**

Exemple de mișcare mecanică observăm în jurul nostru la fiecare pas: deschiderea ochilor, ridicarea din pat, deschiderea ușii, a robinetului, deplasarea spre școală etc.

În mecanică se disting două compartimente care studiază două aspecte ale mișcării mecanice:

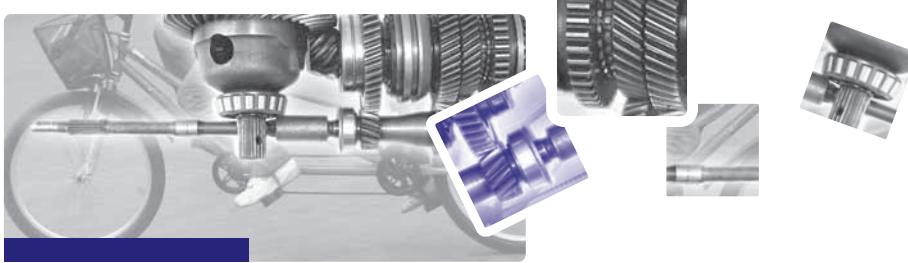
**Cinematica** (în limba greacă κίνημα „mișcare”) cercetează formele mișcării corpurilor și caracteristicile acesteia, fără a evidenția însă factorii ce determină o formă sau alta de mișcare. La descrierea mișcării se folosesc formule, grafice și tabele. Cinematica este numită metaforic și **geometrie a mișcării**.

**Dinamica** (în limba greacă δύναμις „forță”) studiază formele mișcării corpurilor în funcție de cauzele ce le condiționează. Astfel, în dinamică se răspunde la întrebarea: „De ce corpul se mișcă în modul dat?”, întrebare care nu-și găsește răspunsul în cinematică.

Un compartiment special al dinamicii este **statica**, ce studiază doar repausul (echilibrul) corpului în vederea stabilirii condițiilor corespunzătoare ale acestuia.

În natură mai există o mișcare foarte frecvent întâlnită, care se repetă după anumite intervale de timp. De exemplu: mișcarea unui corp suspendat la capătul resortului sau al unui fir, a unei rigle metalice prinse la un capăt, a crengilor copacilor sub acțiunea vîntului, bătăile inimii, vibratiile plămînilor în procesul respirației, vibratiile coardelor vocale și ale timpanelor care ne permit să vorbim și să auzim etc. Aceste mișcări sunt numite **mișcări oscilatorii**. În general, în urma acțiunii unei anumite forțe, orice corp material poate efectua oscilații, chiar dacă acestea, în unele cazuri, sunt de scurtă durată.

Propagarea mișcării oscilatorii în spațiu și timp reprezintă **mișcarea ondulatorie**. Undele pot fi de natură diferită. În funcție de faptul ce oscilează și în ce medii se propagă, se deosebesc unde: pe suprafața apei, sonore în medii elastice, seismice în scoarța terestră etc.



# Capitolul I

## CINEMATICA

### 1.1 PUNCTUL MATERIAL ȘI SOLIDUL RIGID – MODELE UTILIZATE ÎN MECANICĂ

Cunoașteți deja că mișcarea mecanică este cea mai simplă formă a mișcării. Totuși această mișcare nu este de fiecare dată foarte simplă. Urmărind atent căderea unei frunze, veți observa că ea se rotește, legănindu-se pe undele aerului (fig. 1.1). Răsfoind manualul, filă cu filă, puteți observa că, la început, foaia se îndoiește, se deformează (adică își schimbă formă), apoi diferite porțiuni ale ei se mișcă în mod divers. Aceste două exemple sunt suficiente pentru a înțelege că mișcarea mecanică în natură nu este întotdeauna simplă și că descrierea ei exactă poate fi foarte complicată.

Întrebarea firească este dacă în procesul studierii fenomenelor fizice trebuie să cunoaștem și să analizăm, de fiecare dată, detaliat și amănunțit mișcarea corporilor.

Să examinăm un exemplu concret.

Imaginați-vă un pasager pe peronul unei gări, care așteaptă sosirea trenului ce se află la cîțiva kilometri de gară. Pentru acest pasager, ca și pentru dispecerul gării (care urmărește mersul trenului pe o schemă electronică, fig. 1.2), este important să știe distanța la care se află trenul, pentru a deduce dacă trenul circulă în conformitate cu orarul stabilit.

În această situație, determinînd distanța dintre tren și gară, putem face abstracție de dimensiunile trenului, care nu ne interesează (fiind cu mult mai mici decît distanța pînă la el). Nu are importanță pentru pasager și dispecer nici forma trenului, determinată de conturul porțiunii de cale ferată pe care se află.

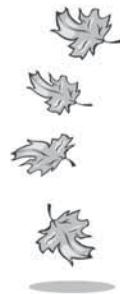


Fig. 1.1



Fig. 1.2

Studiind mișcarea unei nave玄micе spre Lună sau spre o planetă oarecare, vom neglija în calculele noastre dimensiunile navei, care sunt foarte mici în comparație cu distanța parcursă. Ajungem, aşadar, la concluzia că în unele mișcări dimensiunile corpurilor considerate pot fi neglijate în raport cu distanțele pînă la alte coruri sau cu distanțele parcuse de aceste coruri. Astfel, s-a ajuns la un model foarte des utilizat în mecanică, **modelul punctului material**.

### | **Corpuл ale căruи dimensiuni spațiale pot fi neglijate în comparație cu distanța parcursă sau cu distanțele pînă la alte coruri este numit *punct material*.**

Din definiție reiese că punctul material nu este neapărat un corp mic, important fiind ca dimensiunile lui să poată fi neglijate în condițiile date.

Evident, în alte condiții corpul respectiv nu mai poate fi considerat punct material. Atunci cînd trenul intră în gară (fig. 1.3), dimensiunile lui devin importante pentru pasagerul care așteaptă anunțul dispecerului privind ordinea numerotării vagoanelor: primele vagoane se află la ieșirea pe peron în partea stîngă sau în cea dreaptă a peronului. Rezultă că modelul (noțiunea) de punct material poate fi utilizat numai în cazul în care sunt satisfăcute anumite condiții. Corpul în mișcare la care se negligează nu numai dimensiunile spațiale, ci și alte caracteristici ale lui (masa, sarcina electrică etc.) este numit **mobil**.

Să examinăm și să definim alt model de corp utilizat în mecanică. Cunoaștem că forma și dimensiunile corpului dat depind, într-o anumită măsură, și de corurile cu care el interacționează. Astfel, lungimea unui resort poate fi mai mare sau mai mică, o lamă poate fi mai mult sau mai puțin încovoiată etc. Deci corurile din jur pot modifica dimensiunile și forma corpului dat, adică provoacă deformarea acestuia. În natură nu există coruri care nu se deformă, unele deformîndu-se în aceleași condiții mai puțin, altele mai mult.

În anumite cazuri modificările dimensiunilor și ale formei corurilor pot fi neglijate. În aceste situații se utilizează **modelul solidului rigid**.

### | **Corpuл care în condițiile date nu-și modifică dimensiunile și forma (adică nu se deformă) se numește *solid rigid* sau, pur și simplu, *rigid*.**

### | **Cu alte cuvinte, rigid este corpul la care distanța dintre orice două puncte rămîne invariabilă în timp.**

Pot fi utilizate și alte modele atît pentru coruri, cît și pentru fenomene fizice. Necesitatea lor rezultă din faptul că proprietăile corurilor și fenomenele fizice reale din natură sunt foarte complicate. De aceea se evidențiază unele proprietăți (sau factori) ce nu influențează esențial fenomenul studiat și sunt neglijate. Acest procedeu este cunoscut sub denumirea de **abstractizare**, iar modelele elaborate sunt numite **abstracții**. Veridicitatea modelului elaborat este justificată de corectitudinea prezicerilor obținute pe baza lui. Se ajunge, astfel, la o descriere aproximativă, dar mai simplă, a fenomenului studiat, ceea ce permite stabilirea unor relații cantitative între mărimile ce-l caracterizează. Ulterior pot fi evaluate și modificările condiționate de factorii neglijați asupra rezultatelor obținute anterior.



Fig. 1.3

## ÎNTREBĂRI

1. Ce reprezintă punctul material? Exemplificați.
2. Care este deosebirea dintre noțiunea de punct material și cea de mobil?
3. Care corpuși solide se numesc rigide?
4. Mai multe automobile se află în fața barierei în aşteptarea traversării căii ferate. Poate fi considerat trenul drept un punct material față de automobile?
5. Analizați situațiile următoare: o albină se mișcă pe petalele unei flori în căutarea nectarului; albina se află în zbor spre stup; albina zboară în fața urdinișului pentru a intra în stup. În ce caz albina poate fi considerată punct material și în care nu? Argumentați răspunsul.

## 1.2 SISTEM DE REFERINȚĂ. SPAȚIU ȘI TIMP

### a. Relativitatea mișcării. Sistem de referință

În definiția mișcării mecanice se menționează că schimbarea poziției corpului dat are loc „în raport cu alte corpuși”. De exemplu, poziția unui automobil poate fi determinată în raport cu o bornă kilometrică de pe marginea șoselei, cu podul de care se apropie, cu autobuzul ce vine din sens opus, cu tractorul ce se deplasează în direcție perpendiculară față de drumul pe care se mișcă automobilul (fig. 1.4) etc. Un pasager din autobuz se află în stare de repaus în raport cu autobuzul, dar se mișcă față de celelalte corpuși. Astfel, mișcarea automobilului sau a pasagerului poate fi descrisă în raport cu mai multe corpuși. Așadar, ajungem la concluzia că

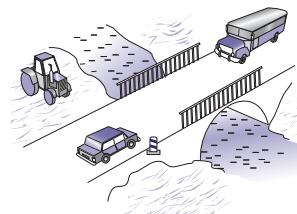


Fig. 1.4

**mișcarea oricărui corp, precum și starea lui de repaus, ca un caz particular al mișcării, sînt relative.**

Conchidem că înainte de a cerceta mișcarea unui corp, trebuie să indicăm corpul în raport cu care este descrisă mișcarea. Acest corp, considerat fix, este numit **corp de referință** sau **reper**.

Pentru a determina poziția corpului, considerat punct material, în raport cu un corp de referință, este necesar să legăm de el (în mod rigid) un sistem de coordonate și să avem un instrument de măsurare a distanțelor. Alegerea corpului de referință legat cu originea unui sistem de coordonate, a direcției și sensului axelor acestuia este arbitrară. Descrierea mișcării trebuie să fie cât mai simplă pentru observatorul care o cercetează. De exemplu, studierea mișcării unui corp pe puntea unui vas maritim poate fi realizată atât în raport cu puntea vasului, cât și în raport cu Pămîntul. La descrierea mișcării navei玄omecie spre Lună (fig. 1.5), pot fi utilizate diferite corpuși de referință – lansarea navei și mișcarea ei în vecinătatea Pămîntului este mai convenabil să fie descrise considerînd Pămîntul drept corp de referință. Mișcarea navei de la Pămînt spre Lună poate fi descrisă ținîndu-se cont de poziția ei atât față de Pămînt, cât și față de Soare sau de Lună; apropierea de Lună și aselenizarea navei se descriu mai simplu dacă se consideră Luna drept corp de referință.

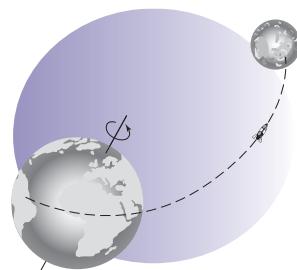


Fig. 1.5

În definiția mișcării mecanice se menționează, de asemenea, că schimbarea poziției corpului are loc în timp. De aceea, pentru a descrie mișcarea, este necesar și un instrument de măsurare a timpului (un ceasornic), imobil față de corpul de referință.

Toate elementele enumerate mai sus, indispensabile pentru a descrie mișcarea mecanică a corpurilor, constituie ceea ce numim **sistem de referință sau referențial**.

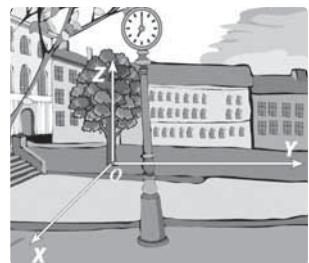


Fig. 1.6

**Corful de referință, sistemul de coordonate (legat rigid cu el), instrumentul de măsurare a distanțelor și ceasornicul (imobil în raport cu același corp) formează sistemul de referință sau referențial (considerat convențional fix, fig. 1.6).**

## b. Unitățile de lungime și de timp

Pentru a determina coordonatele punctului material la un moment anumit de timp, este necesar să măsurăm lungimi și intervale de timp. Pe această cale se stabilește câte unități conține mărimea măsurată (ea este egală cu numărul respectiv de unități). **Măsurarea mărimii fizice constă în compararea ei cu o mărime de aceeași natură, considerată ca unitate.**

În prezent se utilizează *Sistemul Internațional (SI)*, ce are **șapte unități fundamentale** stabilite, pentru șapte mărimi fizice. Unitățile altor mărimi fizice se exprimă prin cele fundamentale și sînt numite **unități deriveate**.

Din gimnaziu cunoașteți unitățile de lungime și de timp – **metrul (m)** și **secunda (s)**. Metrul, ca unitate fundamentală în SI, a fost definit în 1791 ca a 1/40 000 000 parte din lungimea meridianului terestru pe care este situat Parisul. S-au realizat apoi măsurările respective și pe baza lor a fost stabilit un etalon al metrului, confectionat din platină (90%) și iridiu (10%), adoptat la 10 decembrie 1799. Acesta reprezintă o bară de construcție specială, avînd la capete cîte trei linii subțiri. Lungimea de 1 m este egală cu distanța dintre liniile de mijloc (fig. 1.7). Etalonul se păstrează la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți de la Sèvres, lîngă Paris. Măsurările mai exacte au arătat că lungimea meridianului ales este mai mare decît valoarea obținută anterior, dar etalonul metrului nu a fost modificat (el nu mai corespunde definiției inițiale).

Pentru măsurarea timpului s-a folosit încă în Antichitate periodicitatea schimbării zilei cu noaptea, schimbare condiționată de rotația Pămîntului în jurul axei sale. Durata acestui interval numit zi s-a dovedit a fi mare, de aceea a fost divizat în mai multe părți: o zi conține 24 de **ore** (această divizare a fost propusă încă în Babilon), 1 oră – 60 de **minute**, iar 1 minut – 60 de **secunde**. În SI **secunda** a fost adoptată ca unitate fundamentală pentru timp:

$$1s = \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{1}{86400} \text{ dintr-o zi.}$$

Secunda astfel definită este numită **secundă astronomică**.

Pe baza acestor definiții ale metrului și secundei au fost construite instrumente ce permit măsurarea lungimilor și a intervalelor de timp cu precizii destul de mari, suficiente pentru activitatea cotidiană a omului.

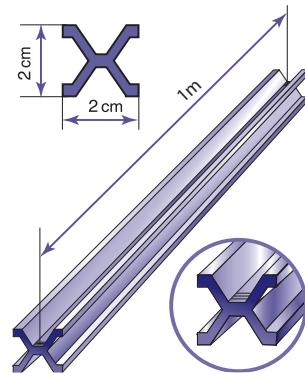


Fig. 1.7

Cercetările speciale necesită etaloane definite mult mai exact decât cele descrise mai sus, care ar putea fi realizate în cazul dispariției etaloanelor existente. S-a stabilit că acțiunea Lunii și a Soarelui asupra Pământului frînează rotația acestuia în jurul axei sale, ceea ce duce la mărirea duratei unei zile cu circa 0,001 s într-un secol. Durata zilei este influențată și de schimbările formei și ale dimensiunii Pământului, de cutremurele de pămînt și.a. În urma unor cutremure de intensitate mare, durata zilei variază brusc cu valori de pînă la 0,004 s.

Se impune utilizarea unui sistem fizic cu o periodicitate mult mai stabilă. Aceasta este radiația emisă de atomi, pusă la baza definirii unor etaloane noi. În 1972, a fost adoptată o nouă definiție a secundei ca unitate fundamentală în SI:

**O secundă este egală cu 9 192 631 770 de perioade ale radiației ce corespunde tranziției dintre două niveluri fine ale atomului de cesiu 133.**

Tot radiația atomilor, de această dată a atomilor de cripton, a fost pusă în 1960 la baza definiției unui etalon nou al metrului. În 1983, acesta a fost înlocuit cu un alt etalon, care este în uz și în prezent.

**Metrul este egal cu distanța parcursă de lumină în vid în intervalul de timp egal cu 1/299 762 458 dintr-o secundă.**

Aceste etaloane se utilizează numai în cercetări speciale care necesită măsurări cu un grad înalt de precizie.

### c. Spațiu și timpul în mecanica clasice

Corpurile se mișcă în spațiu și în timp. Spațiu determină ordinea în care sunt situate (aranjate) corpurile, iar timpul, ordinea în care se succed fenomenele. Aceste noțiuni se consideră fundamentale în fizică.

În mecanica clasice sau newtoniană, ale cărei principii fundamentale au fost formulate de către Newton, **spațiu și timpul sunt considerate absolute, independente unul de altul, de corpurile ce se află și se mișcă în spațiu**. De aici rezultă concluzii importante: distanța dintre două puncte (lungimea segmentului) pentru observatorii din diferite sisteme de referință este una și aceeași; aceasta se referă și la durata intervalului de timp dintre două evenimente – la determinarea ei observatorii din diferite sisteme de referință obțin una și aceeași valoare.

La începutul secolului al XX-lea, s-a constatat că aceste concepții referitoare la spațiu și timp sunt limitate și necesită modificări esențiale.

## ÎNTREBĂRI

1. Ce reprezintă relativitatea mișcării? Ilustrați cu exemple care diferă de cele din text.
2. Ce este corpul de referință?
3. Ce reprezintă sistemul de referință?
4. Care este deosebirea dintre unitățile fundamentale și cele derivate?
5. Ce înțelegeți prin caracterul absolut al spațiului și al timpului?
6. Care este corpul de referință preferat la studiul mișcării planetelor? Dar al sateliților acestora?
7. Un pescar traversează rîul cu o luntre vîslind. Ce corpu pot fi luate drept corpu de referință la descrierea mișcării vîslei?
8. Poate fi considerat corp de referință corpul a căruia mișcare se studiază?

## 1.3 TRAIECTORIA. DEPLASAREA ȘI DISTANȚA PARCURSĂ

### a. Descrierea mișcării unui punct material

Mișcarea unui punct material este considerată cunoscută (descrișă) dacă poate fi identificată poziția lui la orice moment de timp.

Există cîteva metode de descriere a mișcării.

**Metoda coordonatelor.** Să urmărim un punct material care se mișcă *de-a lungul unei linii drepte* (de exemplu, mișcarea automobilului sau a trenului pe o porțiune rectilinie de drum). În acest caz este rational să construim sistemul de coordonate astfel încît o axă a lui, de exemplu, axa  $Ox$ , să coincidă cu această linie (fig. 1.8). Poziția mobilului  $M$  pe axă este determinată de valoarea coordonatei  $x$  egală cu distanța de la originea  $O$  pînă la punctul  $M$ , luată cu semnul plus, dacă pentru a ajunge din  $O$  în  $M$  trebuie să ne mișcăm în sensul pozitiv al axei  $x$ , și luată cu semnul minus – în sens contrar. La mișcarea mobilului  $M$  în timp, coordonata lui variază, adică este o funcție de timp:

$$x = x(t). \quad (1.1)$$

Ecuația dată descrie mișcarea punctului material de-a lungul unei linii drepte și este numită **ecuație cinematică a mișcării**.

Pentru descrierea mișcării unui punct material pe o *suprafață plană* (de exemplu: o luntre pe apa stătătoare a unui lac sau o bilă pe masa de biliard), este convenabil să construim un sistem de două coordonate situate în acest plan (fig. 1.9). Poziția punctului material  $M$  pe plan este determinată de coordonatele  $x$  și  $y$ , egale cu distanțele lui de la axele de coordonate și luate cu semnele plus sau minus în acord cu convenția stabilită în cazul precedent. De exemplu, coordonatele punctului  $M$  sunt

$$x = OM_2 = MM_1 \text{ și } y = OM_1 = MM_2,$$

iar coordonatele punctului  $M'$ :

$$x' = OM'_2 = M'M'_1 \text{ și } y' = -OM'_1 = -M'M'_2.$$

La mișcarea punctului material, coordonatele lui variază, adică

$$x = x(t), y = y(t). \quad (1.2)$$

Astfel, mișcarea punctului material pe o suprafață plană este descrisă de două ecuații cinematice ale mișcării.

În cazul mișcării punctului material  $M$  în spațiu, se iau trei axe de coordonate, reciproc perpendiculare (fig. 1.10). Poziția punctului material  $M$  este determinată de cele trei coordonate  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , egale cu distanțele punctului de la planele perpendiculare pe axele corespunzătoare. Distanțele se iau cu semnele plus sau minus conform regulii stabilite mai sus. De exemplu, punctul  $M$  are coordonatele:  $x = M_1 M_2$ ,  $y = OM_2$ ,  $z = MM_1$ , iar punctul  $M'$  are coordonatele:  $x' = -M'_1 M'_2$ ,  $y' = -OM'_2$ ,  $z' = M'M'_1$ .

Cînd punctul material se mișcă, cele trei coordonate variază în timp, prin urmare:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (1.3)$$

Aceste trei ecuații cinematice ale mișcării descriu complet mișcarea punctului material în spațiu.

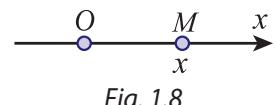


Fig. 1.8

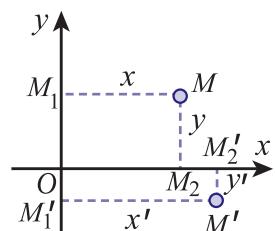


Fig. 1.9

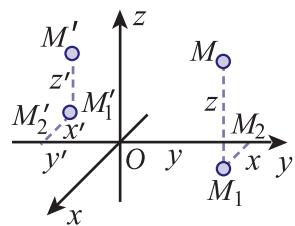


Fig. 1.10

**Metoda vectorială.** Poziția mobilului  $M$  în raport cu sistemul de coordinate, legat rigid cu corpul de referință, poate fi determinată, de asemenea, de un vector numit **vector de poziție**. Amintim că vectorul este un segment de dreaptă orientat, caracterizat prin modul (valoare), punct de aplicatie (origine), direcție și sens. Originea vectorului de poziție  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  coincide permanent cu originea coordonatelor  $O$ , iar extremitatea sa cu punctul material  $M$  (fig. 1.11). Modulul vectorului de poziție este egal cu distanța de la originea coordonatelor pînă la punctul  $M$ .

Cunoașterea vectorului de poziție  $\vec{r}$  presupune cunoașterea modulului său și a unghiurilor formate cu axele de coordonate sau cunoașterea coordonatelor extremității lui  $M$ .

Pentru a descrie mișcarea corpului într-un plan, reprezentăm vectorul de poziție al unui punct material ce se mișcă în acest plan (fig. 1.12). Notăm cu  $\alpha$  unghiul măsurat în sens trigonometric, de la axa  $Ox$  spre vectorul de poziție. Cunoașterea modulului vectorului de poziție și a unghiului  $\alpha$  permite calcularea coordonatelor mobilului și invers.

Din figură obținem  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$  și relațiile inverse  $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ .

Aceste relații rămîn valabile pentru orice valori ale unghiului  $\alpha$ .

În timpul mișcării mobilului  $M$ , vectorul lui de poziție variază în modul și direcție, originea sa rămîne fixă (în  $O$ ), iar sensul este mereu orientat de la  $O$  spre  $M$ . Astfel, vectorul  $\vec{r}$  este o funcție de timp:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.4)$$

Această ecuație descrie complet mișcarea mobilului.

### b. Traекторia

Mobilul în timpul mișcării sale trece dintr-o poziție în alta.

### ■ Ansamblul pozițiilor ocupate succesiv de mobil constituie o linie numită **traекторie**.

Traекторia permite vizualizarea simultană a tabloului integral al mișcării, al tuturor punctelor prin care a trecut sau va trece mobilul în timpul mișcării.

Traекторia reprezintă, în genere, o linie imaginară și doar uneori este materializată de corpu. De exemplu, linia de cale ferată determină traectoria trenului, sîrma care trece printr-o bilă determină traectoria acesteia în timpul alunecării pe sîrma etc.

Forma traectoriei este pusă la baza primei clasificări a mișcărilor mecanice ale mobilului: în mișcări **rectilinii** (traectoriile sunt linii drepte) și în mișcări **curbilinii** (traectoriile sunt linii curbe, în plan sau în spațiu).

### c. Deplasarea și distanța parcursă

Considerăm traectoria unui mobil (fig. 1.13) și două poziții ocupate de el pe traectorie: poziția  $M$  la momentul de timp  $t$  și poziția  $M'$  la momentul ulterior de timp  $t' = t + \Delta t$ .

**Vectorul  $\Delta \vec{s} = \overrightarrow{MM'}$**  care unește poziția inițială  $M$  și cea finală  $M'$  se numește **vector deplasare sau deplasare  $\Delta \vec{s}$  a mobilului în intervalul de timp  $\Delta t = t' - t$** .

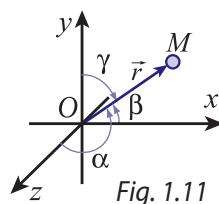


Fig. 1.11

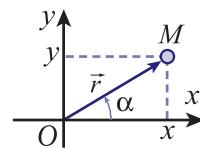


Fig. 1.12

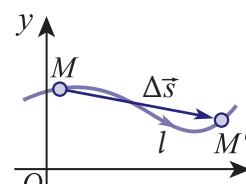


Fig. 1.13

Modulul deplasării (lungimea vectorului deplasare) este distanța minimă dintre aceste poziții și nu depinde de forma traectoriei dintre ele.

### Lungimea traectoriei între pozițiile $M$ și $M'$ se numește *distanță parcursă* de mobil în intervalul de timp $\Delta t$ .

Deplasarea mobilului este o mărime vectorială și nu poate fi comparată cu distanța parcursă, care reprezintă o mărime scalară. Ultima poate fi comparată doar cu modulul deplasării ce nu poate depăși distanța parcursă:  $|\Delta \vec{s}| \leq l$ .

#### d.º Mișcarea de translație a rigidului

##### Mișcarea de translație a rigidului este mișcarea în care segmentul de dreapta ce unește două puncte arbitrar ale rigidului rămîne paralel cu sine însuși (fig. 1.14).

În jur observăm deseori corpuși în mișcare de translație: valiza cu rotile ce coboară pe o suprafață înclinată (fig. 1.15), telefericul ce urcă sau coboară, dar a cărui podea rămîne permanent orizontală (fig. 1.16), scaunele roții de contemplare („roata dracului”) ale căror speteze sunt permanent verticale (fig. 1.17) etc.



Fig. 1.15

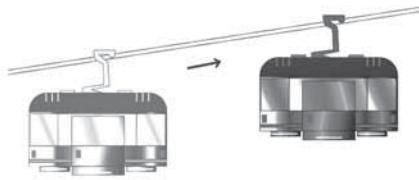


Fig. 1.16

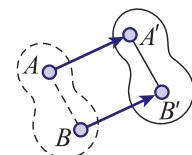


Fig. 1.14

Cercetînd detaliat mișcarea de translație a corpului din figura 1.14, observăm că segmentul  $AB$  ce unește punctele arbitrară  $A$  și  $B$  ocupă ulterior poziția  $A'B'$ . În conformitate cu definiția rigidului, segmentele  $AB$  și  $A'B'$  au lungimi egale, iar potrivit definiției mișcării de translație, aceste segmente sunt paralele. Prin urmare, patrulaterul  $ABB'A'$  este un paralelogram. Deci în intervalul de timp cît a durat această mișcare, deplasările punctelor arbitrară  $A$  și  $B$  sunt egale:  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ . Punctele fiind arbitrară, rezultă că deplasările tuturor punctelor rigidului în mișcare de translație sunt egale între ele, adică toate punctele au traectorii identice. Acest fapt permite să considerăm rigidul în mișcare de translație drept punct material, chiar dacă dimensiunile corpului nu sunt neglijabile.



Fig. 1.17

#### ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Ce metode de descriere a mișcării mobilului cunoașteți?
2. Care este definiția vectorului de poziție?
3. Ce numim traectorie a unui punct material?
4. Cum se definește vectorul deplasare? Dar distanța parcursă?

5. În ce constă mișcarea de translație? Cum se mișcă punctele corpului în cazul mișcării de translație?
6. Poate oare modulul deplasării unui corp să fie egal cu distanța parcursă? Dar mai mare? Mai mic? Argumentați răspunsul.
7. Deplasarea mobilului într-un interval de timp este egală cu zero. Se poate oare afirma că în acest interval mobilul s-a aflat în repaus? Justificați răspunsul.
8. Ce indică contorul vitezometrului automobilului: modulul deplasării sau distanța parcursă?
9. Coordonatele punctului material la un moment de timp sint:  $x = 8\text{ m}$ ,  $y = 6\text{ m}$ . Trasați pe caiet axele unui sistem plan al coordonatelor și reprezentați în el poziția punctului și vectorul lui de poziție. Determinați în baza figurii obținute modulul vectorului de poziție și unghiul format de el pe axa  $Ox$ . Verificați rezultatele efectuind calculele respective (vezi p. 14).
10. Un corp aruncat vertical în sus de la înălțimea  $h = 3\text{ m}$  deasupra pământului se ridică în sus cu  $H = 7\text{ m}$  deasupra locului lansării, apoi cade pe pămînt. Determinați modulul deplasării și distanța parcursă de corp în această mișcare.
11. Un grup de turiști parcurge distanța  $l_1 = 1,6\text{ km}$  în direcția Nord, apoi încă  $l_2 = 1,2\text{ km}$  în direcția Vest. Determinați modulul deplasării grupului de turiști și cu cât el este mai mic decât distanța parcursă.
12. O bilă se mișcă de la un capăt până la altul al unui jgheab de forma unui semiinel de rază  $R = 0,5\text{ m}$ . Determinați modulul deplasării bilei și distanța parcursă de ea.
13. Un sportiv aleargă pe un stadion distanța  $L = 200\text{ m}$ . Pista de alergări prezintă un semicerc urmat de o porțiune rectilinie cu lungimea  $l = 100\text{ m}$ . Care este modulul deplasării sportivului?

## 1.4 OPERAȚII CU VECTORI

### a. Adunarea vectorilor

În fizică se utilizează pe larg mărimele vectoriale, două dintre ele fiind deja definite: vectorul de poziție și deplasarea. Din cursul de *Matematică*, clasa a VIII-a, cunoașteți unele elemente de algebră vectorială.

Regula adunării (compunerii) vectorilor poate fi stabilită relativ simplu, analizând un exemplu de mișcare. Imaginea-vă intersecția a două străzi și un pieton care se află în poziția  $A$  și trebuie să ajungă în poziția  $B$  (fig. 1.18). Trecerea directă de la  $A$  la  $B$ , în linie dreaptă, este interzisă de regulile de circulație. De aceea pietonul traversează mai întâi una din străzi ca să ajungă în poziția  $C$ , apoi strada a două și ajunge în poziția  $B$ .

În conformitate cu definiția, vectorul  $\vec{s} = \vec{AB}$  este deplasarea pietonului în tot intervalul de timp. Această deplasare se compune din două etape,  $\vec{s}_1 = \vec{AC}$  și  $\vec{s}_2 = \vec{CB}$ , efectuate succesiv. Deci

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2. \quad (1.5)$$

Acest exemplu ilustrează regula adunării vectorilor. Considerăm doi vectori:  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  (fig. 1.19, a) și notăm suma lor cu  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ . Reprezentăm în figura 1.19, b vectorul  $\vec{a}$ , apoi translăm paralel vectorul  $\vec{b}$  cu originea sa în extremitatea vectorului  $\vec{a}$ . Vectorul sumă  $\vec{c}$ , numit și **rezultantă**, își are originea în cea a primului vector  $\vec{a}$  și extremitatea în cea a vectorului al doilea  $\vec{b}$ . Același rezultat  $\vec{c}$  se obține dacă efectuăm operația menționată mai sus în ordine inversă, adică reprezentăm mai întâi vectorul  $\vec{b}$ , iar pe urmă vectorul  $\vec{a}$  (fig. 1.19, c). Această regulă de adunare a vectorilor este cunoscută ca **regula triunghiului**.

Rezultatul adunării vectorilor rămîne același dacă realizăm o altă figură: reprezentăm vectorii ce se adună,  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , cu originea comună, construim pe ei un paralelogram, apoi

diagonala lui, care pornește din originea comună a acestor vectori. Vectorul sumă  $\vec{c}$  pornește din această origine și are ca extremitate vîrful opus al paralelogramului (fig. 1.19, d). Această regulă a fost denumită **regula paralelogramului**.

Avem două reguli echivalente de adunare a vectorilor. În cazul folosirii regulii triunghiului se construiesc doar două laturi ale paralelogramului și diagonala lui.

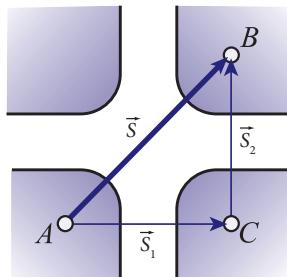


Fig. 1.18

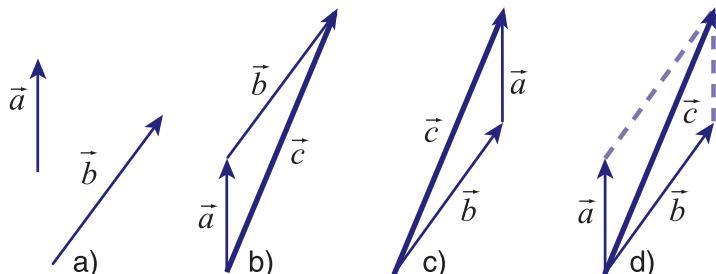


Fig. 1.19

La adunarea mai multor vectori una dintre regulile expuse mai sus se aplică de mai multe ori, rezultatul fiind independent de ordinea în care aceștia se adună (fig. 1.20).

Modulul vectorului sumă poate fi determinat atât grafic, prin construirea figurii corespunzătoare la o scală aleasă, cât și analitic. De exemplu, dacă vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  au suport comun și același sens (fig. 1.21, a), atunci modulul sumei este egal cu suma modulelor; dacă însă vectorii au suport comun, dar sensuri contrare (fig. 1.21, b), vectorul sumă este orientat în sensul vectorului cu modulul mai mare și are modulul egal cu diferența modulelor vectorilor ce se adună; în cazul în care vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  formează între ei un unghi drept (fig. 1.21, c), modulul vectorului sumă se determină pe baza teoremei lui Pitagora:  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . În alte cazuri se utilizează aparatul matematic adevarat, de exemplu, **teorema cosinusului**.

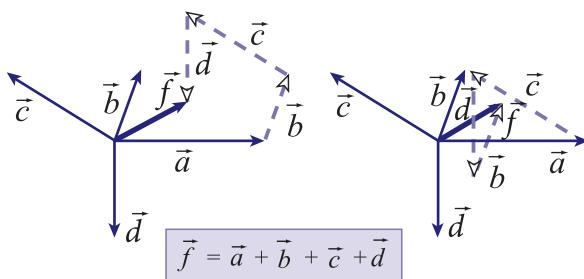


Fig. 1.20

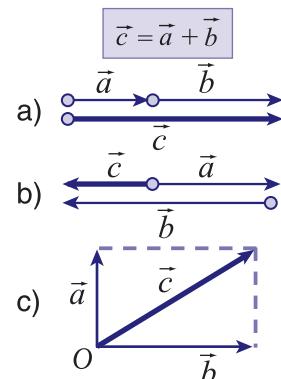


Fig. 1.21

## b. Scăderea vectorilor

Considerăm doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ . Diferența lor  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$  poate fi determinată prin cîteva metode.

Observăm că  $\vec{d} = \vec{b} + \vec{d}'$ , adică vectorul  $\vec{d}$  este vector sumă. Construim vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  cu origine comună. Evident, vectorul  $\vec{d}'$  este segmentul orientat din extremitatea vectorului  $\vec{b}$  spre extremitatea lui  $\vec{a}$  (fig. 1.22, a).

Transformăm relația  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ . Astfel, vectorul diferență  $\vec{d}$  se obține prin adunarea vectorilor  $\vec{a}$  și  $(-\vec{b})$ , ultimul având același modul și aceeași linie de suport ca și vectorul  $\vec{b}$ , dar sens contrar (fig. 1.22, b). Din figurile de mai jos observați că prin ambele metode se obține unul și același rezultat.

Cunoașterea operației de scădere a vectorilor permite să exprimăm vectorul deplasare  $\Delta\vec{s}$  al mobilului prin vectorii de poziție  $\vec{r}$  și  $\vec{r}'$  ai locurilor ocupate de acesta la începutul și la sfîrșitul intervalului de timp. Din figura 1.23 observăm că  $\Delta\vec{s} = \vec{r}' - \vec{r} = \vec{\Delta r}$ , unde cu  $\vec{\Delta r} = \vec{r}' - \vec{r}$  s-a notat variația vectorului de poziție al mobilului.

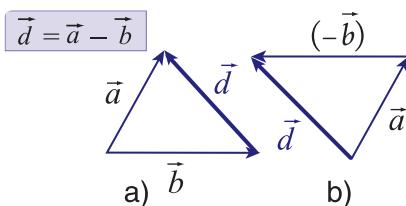


Fig. 1.22

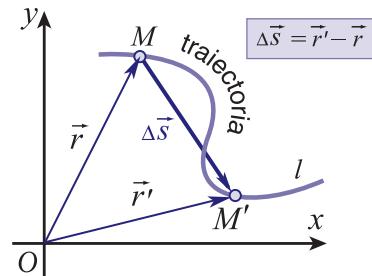


Fig. 1.23

**Vectorul deplasare al mobilului într-un interval oarecare de timp este egal cu variația vectorului de poziție al mobilului în acest timp.**

### c. Componentele și proiecțiile unui vector

Din cele expuse mai sus rezultă că este relativ simplu a determina modulul vectorului sumă sau al vectorului diferență a doi vectori dacă acești vectori sunt coliniari sau reciproc perpendiculari. Dacă însă unghiul dintre vectori este arbitrar și se operează cu mai mulți vectori, procedura adunării (scăderii) se complică considerabil. Pentru a o simplifica, se introduc noțiunile de componente și de proiecții ale vectorilor.

Orice vector situat în planul de coordonate  $xOy$  poate fi prezentat ca suma a doi vectori paraleli la axele de coordonate (fig. 1.24). Acești vectori se numesc **componente ale vectorului**. Astfel, **componentele unui vector sunt tot vectori**. Componenta se notează ca și vectorul corespunzător, dar cu indice care arată axa căreia îi este paralelă. Astfel,  $\vec{c}_x$  este componenta vectorului  $\vec{c}$  paralelă la axa  $Ox$ , iar  $\vec{c}_y$  este componenta aceluiasi vector paralelă la axa  $Oy$ . Conform definiției,  $\vec{c}_x + \vec{c}_y = \vec{c}$ .

Folosind componentele vectorilor, sistemul inițial de vectori orientați arbitrar în plan se înlocuiește cu un sistem de vectori în număr de două ori mai mare, dintre care o jumătate sunt paraleli la axa  $Ox$ , iar altă jumătate – paraleli la axa  $Oy$ . După adunarea vectorilor din fiecare jumătate, se obțin doi vectori reciproc perpendiculari. Procedura adunării vectorilor s-a simplificat.

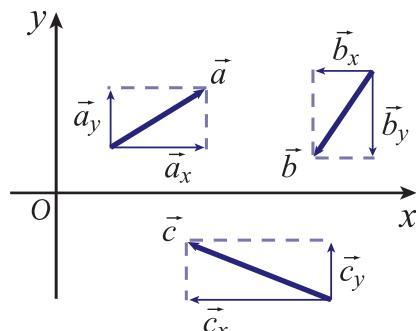


Fig. 1.24

Pentru a efectua calculele prin metoda analitică, introducem încă o noțiune – **proiecția vectorului pe o axă**, în particular, pe axa de coordonate. Conform definiției, **proiecția unui vector pe o axă reprezintă o mărime scalară algebrică** egală cu modulul componentei vectorului în direcția acestei axe, luat cu semnul plus dacă componenta și axa respectivă au același sens sau cu semnul minus în cazul în care sensul componentei este contrar sensului axei.

Proiecția vectorului  $\vec{a}$  pe axa  $Ox$  se notează cu  $a_x$ , proiecția vectorului  $\vec{b}$  pe axa  $Oy$  – cu  $b_y$  etc. Conform *figurii 1.24*, proiecțiile vectorilor sînt:

$$a_x = |\vec{a}_x|, a_y = |\vec{a}_y|, b_x = -|\vec{b}_x|, b_y = -|\vec{b}_y|, c_x = -|\vec{c}_x|, c_y = |\vec{c}_y|.$$

Există și o altă definiție, echivalentă, a proiecției vectorului pe o axă. Să examinăm vectorul  $\vec{a}$  din *figura 1.25*. Coborîm perpendiculare din originea și extremitatea lui pe axele de coordonate. Astfel, se obțin proiecțiile punctelor respective pe axe. Proiecția vectorului pe o axă este egală cu diferența dintre coordonatele proiecției extremității și proiecției vectorului originii. Adică  $a_x = x_2 - x_1$  și  $a_y = y_2 - y_1$ . Observăm că  $a_x > 0$  și  $a_y < 0$ , ceea ce rezultă și din definiția precedentă.

Proiecțiile vectorului se pot calcula ca lungimile catetelor triunghiurilor dreptunghice. Cunoscind un unghi  $\alpha$  (fig. 1.25), pentru proiecții avem  $a_x = a \sin \alpha$  și  $a_y = -a \cos \alpha$ .

Din aceeași figură se obține și relația dintre modulul vectorului și proiecțiile lui pe axe de coordonate:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (1.6)$$

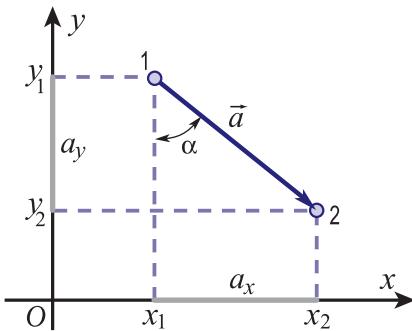


Fig. 1.25

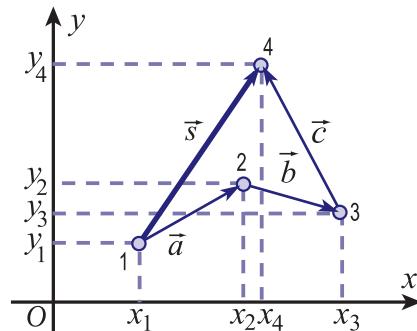


Fig. 1.26

Să ilustrăm aplicarea noțiunii de proiecție a vectorului la calcularea sumei a trei vectori  $s = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  (fig. 1.26). Din figură observăm că proiecția vectorului sumă pe axa  $Ox$  este  $s_x = x_4 - x_1 = (x_4 - x_3) + (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) = c_x + b_x + a_x$ .

În mod similar se obține:  $s_y = a_y + b_y + c_y$ .

**Proiecția vectorului sumă a unui sistem de vectori este egală cu suma proiecțiilor acestor vectori pe axa corespunzătoare.**

Ținînd seama de relația (1.6), pentru modulul vectorului sumă avem

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(a_x + b_x + c_x)^2 + (a_y + b_y + c_y)^2}. \quad (1.7)$$

În cazul diferenței vectorilor, proiecțiile respective se iau cu semnul minus.

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

- Cum se adună doi vectori după regula triunghiului? Dar după regula paralelogramului?
- Ce reprezintă componentele unui vector?
- Cum se determină proiecția unui vector pe o axă?
- Cu ce este egală proiecția pe o axă a vectorului perpendicular pe ea?
- Suma a căror doi vectori este egală cu zero?
- În ce caz modulul sumei a doi vectori este egal cu diferența modulelor vectorilor ce se adună?
- Modulul vectorului sumă a doi vectori de module identice este egal cu modulul unuia dintre ei. Care este unghiuil dintre vectorii ce se adună?
- Trei vectori de module egale, situați în același plan, formează între ei unghiuri de  $120^\circ$ . Care este modulul sumei acestor vectori?
- Proiecțiile vectorului  $\vec{a}$  pe axe de coordonate sunt  $a_x = 2\sqrt{3}$  unități și  $a_y = 2$  unități. Determinați modulul acestui vector și unghurile formate de el cu axe de coordonate.
- Vectorul  $\vec{a}$  are proiecțiile pe axe de coordonate  $a_x = 6$  unități și  $a_y = -4$  unități, iar vectorul  $\vec{b}$  – proiecțiile egale cu  $b_x = -2$  unități și  $b_y = 2$  unități. Determinați modulul vectorului sumă  $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$  și modulul vectorului diferență  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ .
- Un punct material s-a deplasat din poziția  $M_1$  determinată de coordonatele  $x_1 = 6$  m,  $y_1 = -2$  m în poziția  $M_2$  cu coordonatele  $x_2 = 2$  m,  $y_2 = 1$  m. Alegeti un sistem plan de coordonate  $Oxy$  și scăla respectivă pentru lungime. Indicați pozițiile  $M_1$  și  $M_2$ , trasați vectorii respectivi de poziție  $r_1$  și  $r_2$ , precum și vectorul deplasare  $\Delta s = r_2 - r_1$ . Determinați, în baza figurii obținute, modulul vectorului deplasare. Verificați rezultatul prin calculele respective.

### 1.5 MIŞCAREA RECTILINIE UNIFORMĂ. VITEZA

**Mișcarea rectilinie a punctului material care parcurge deplasări egale în intervale de timp egale se numește *mișcare rectilinie uniformă*.**

Fie  $\Delta \vec{s}_1$ ,  $\Delta \vec{s}_2$ ,  $\Delta \vec{s}_3$ , ... sănt deplasările mobilului în intervalele de timp  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$ ,  $\Delta t_3$ , ... corespunzătoare. În conformitate cu definiția de mai sus,  $\Delta \vec{s}_1 = \Delta \vec{s}_2 = \Delta \vec{s}_3 = \dots$ , pentru orice intervale  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \dots$ . Dacă unul dintre aceste intervale este divizat în două părți egale, atunci și deplasarea ce corespunde unei jumătăți de interval va fi egală cu o jumătate din deplasarea efectuată în intervalul întreg de timp. Această afirmație rămîne justă și în cazul divizării intervalului de timp în mai multe părți egale.

Egalitatea vectorilor deplasare ai punctului material este posibilă numai dacă aceștia sunt orientați de-a lungul aceleiași drepte. Astfel, conchidem că în condițiile prevăzute de definiția de mai sus traiectoria mobilului constituie o linie dreaptă, adică mișcarea este rectilinie, iar din egalitatea deplasărilor și, respectiv, a intervalelor de timp rezultă egalitatea rapoartelor:

$$\frac{\Delta \vec{s}_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta \vec{s}_2}{\Delta t_2} = \dots = \frac{\Delta \vec{s}_1 + \Delta \vec{s}_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dots = \text{const.}$$

Deci în mișcarea rectilinie uniformă raportul dintre deplasarea punctului material și intervalul de timp corespunzător este o mărime constantă.

**Viteză a mobilului în mișcarea rectilinie uniformă este numit raportul dintre deplasarea mobilului și intervalul de timp respectiv:**

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \text{const.} \quad (1.8)$$

Intervalul de timp  $\Delta t > 0$ ; prin urmare, viteza are aceeași direcție și sens ca și vectorul deplasare. Putem formula o altă definiție pentru aceeași mișcare:

### Mișcarea mobilului cu viteză constantă $\vec{v}$ este o mișcare rectilinie uniformă.

S-a convenit a nota unitățile mărimilor fizice cu simbolurile respective luate în paranteze pătrate. De exemplu, unitatea deplasării  $[\Delta \vec{s}] = \text{m}$ , a intervalului de timp  $[\Delta t] = \text{s}$ . La stabilirea unității de viteză în SI, obținem

$$[\vec{v}] = \frac{[\Delta \vec{s}]}{[\Delta t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Unitatea de viteză este o unitate derivată, deoarece se exprimă prin unitățile fundamentale.

Pentru a descrie mai simplu mișcarea mobilului de-a lungul traiectoriei sale rectilinii, este convenabil să luăm o axă de coordonate,  $Ox$ , de-a lungul traiectoriei (fig. 1.27). Indicăm pe axă poziția inițială a mobilului  $M_0$  (la momentul  $t_0 = 0$ ) și poziția finală  $M$  (la momentul  $t$ ). Deplasarea mobilului în intervalul  $\Delta t = t - 0 = t$  este egală cu vectorul  $\overrightarrow{M_0 M} = \vec{s}$ , iar viteza lui  $\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}$ . De aici exprimăm deplasarea mobilului în intervalul  $\Delta t = t$ :

$$\vec{s} = \vec{v} t. \quad (1.9)$$

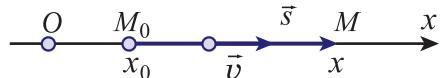


Fig. 1.27

Legea mișcării rectilinii uniforme este următoarea:

### Deplasarea mobilului ce se mișcă rectiliniu uniform este direct proporțională cu durata mișcării.

În proiecții pe axa  $Ox$  avem

$$s_x = v_x t. \quad (1.10)$$

Din figura 1.27 observăm că proiecția deplasării  $s_x = x - x_0$ , deci  $x - x_0 = v_x t$ . Astfel, coordonata mobilului ce se mișcă rectiliniu uniform este dată de expresia

$$x = x_0 + v_x t, \quad (1.11)$$

care constituie **ecuația cinematică a mișcării rectilinii uniforme**.

Din (1.11) observăm că pentru  $v_x > 0$ , cind viteza este orientată în sensul pozitiv al axei  $Ox$ , coordonata  $x$  crește cu timpul, iar pentru  $v_x < 0$  ea descrește.

Ecuația mișcării (1.11) permite a determina coordonata mobilului la orice moment de timp, adică descrie mișcarea dată.

Construim graficele pentru proiecțiile vitezei și pentru coordonata mobilului în mișcarea rectilinie uniformă.

Proiecția vitezei rămîne constantă în timp, graficul ei este o dreaptă paralelă la axa timpului (fig. 1.28). Dreapta 2

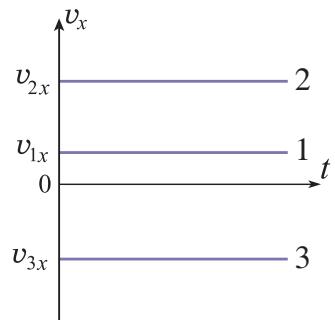


Fig. 1.28

corespunde mișcării cu o viteză  $v_{2x}$  mai mare decât viteză  $v_{1x}$ , iar dreapta 3 corespunde mișcării în sensul negativ al axei Ox (proiecția  $v_{3x} < 0$ ).

Cunoașterea graficului pentru proiecția vitezei mobilului permite calcularea proiecției deplasării lui. Din graficul reprezentat în figura 1.29 și luând în considerare formula (1.10), constatăm că proiecția deplasării  $s_{1x} = v_{1x} \cdot t_1$  este numeric egală cu aria dreptunghiului hașurat dintre grafic și axa timpului. Dacă proiecția vitezei  $v_{2x} < 0$ , atunci și proiecția deplasării este negativă.

Se știe că laturile figurilor se exprimă în metri (m), iar ariile lor în metri pătrați ( $m^2$ ). Dreptunghiul de sub graficul proiecției vitezei are o latură (pe axa absciselor) care se exprimă în s, a doua – în m/s, iar aria lui se exprimă în metri. Analogia cu geometria nu este completă, de aceea se menționează că egalitatea proiecției deplasării cu aria de sub grafic reprezintă doar o egalitate numerică, unitatea de măsură fiind diferită de unitatea de măsură a ariei ( $m^2$ ).

În conformitate cu ecuația mișcării (1.11), la momentul inițial ( $t_0 = 0$ ) coordonata mobilului este egală cu  $x_0$ , apoi crește liniar pentru  $v_x > 0$  (graficul 1 din fig. 1.30). Graficul 2 corespunde mișcării cu o viteză mai mare, ambele mobile pornind din aceeași poziție. Graficul 3, paralel cu graficul 1, corespunde mișcării ce are ca poziție inițială originea coordonatelor și viteză  $v_{3x} = v_{1x}$ . Graficul 4 corespunde mișcării mobilului care începe din poziția cu coordonata  $x'_0$  și are proiecția vitezei  $v_{4x} < 0$ , adică mobilul se mișcă în sensul negativ al axei Ox.

Distanța parcursă de punctul material în mișcarea rectilinie uniformă este egală cu modulul deplasării, deoarece sensul mișcării rămîne permanent același. Avem  $l = |s_x| = |v_x|t$ .

Dacă cunoașterea graficului proiecției vitezei permite determinarea deplasării, deci și a coordonatei, atunci cunoașterea graficului coordonatei permite calcularea proiecției vitezei. În acest scop, determinăm din grafic variația coordonatei (egală cu proiecția deplasării) într-un interval oarecare de timp  $\Delta t$  (fig. 1.31), apoi calculăm:

$$\mathbf{v}_x = \frac{\Delta s_x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.12)$$

Din aceeași figură observăm că această mărime este raportul catetei opuse la cateta alăturată unghiului  $\alpha$ , adică un raport asemănător celui care definește tangenta unghiului. Aceasta însă este o mărime adimensională, în timp ce raportul catetelor triunghiului din figura 1.31 reprezintă o mărime dimensională și se măsoară în unități de viteză (m/s). De aceea trebuie să fim atenți la utilizarea în asemenea cazuri a noțiunii de tangentă, subliniind că egalitatea mărimilor în cauză este doar numerică.

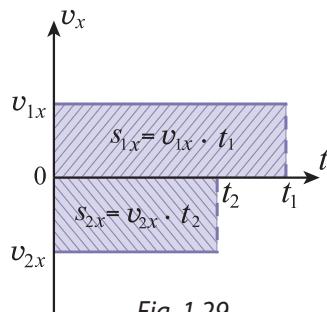


Fig. 1.29

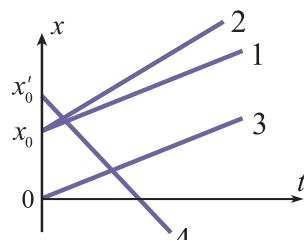


Fig. 1.30

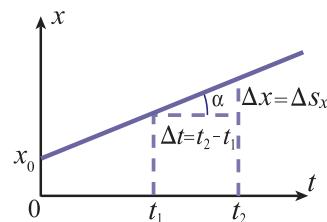


Fig. 1.31

## PROBLEMĂ REZOLVATĂ

În figura 1.32 sunt reprezentate graficele mișcării pentru două mobile. Utilizând graficele:

- determinați intervalele de timp și distanțele parcuse de mobile pînă la întîlnirea lor;
- determinați vitezele mobilelor;
- scrieți ecuațiile mișcării mobilelor;
- determinați distanța dintre mobile la  $\Delta t = 4$  s după întîlnire.

### REZOLVARE

- Punctul de intersecție al graficelor corespunde întîlnirii mobilelor, adică aceasta are loc la momentul de timp  $t_{\text{int}} = 6$  s în punctul cu coordonata  $x_{\text{int}} = 8$  m. Mobilul 1 începe mișcarea sa din punctul cu coordonata  $x_{01} = 5$  m la momentul  $t_{01} = 0$ , deci pînă la întîlnire parurge distanța  $l_1 = x_{\text{int}} - x_{01} = 3$  m în timpul  $\Delta t_1 = t_{\text{int}} - t_{01} = 6$  s. Mobilul 2 începe să se deplaseze la momentul  $t_{02} = 2$  s din origine:  $x_{02} = 0$ . Pînă la întîlnire el parurge distanța  $l_2 = x_{\text{int}} - x_{02} = 8$  m în timpul  $\Delta t_2 = t_{\text{int}} - t_{02} = 4$  s.
  - Vitezele ambelor mobile sunt orientate în sensul pozitiv al axei  $Ox$ :
- $$v_1 = \frac{l_1}{\Delta t_1} = \frac{3}{6} = 0,5 \text{ m/s și } v_2 = \frac{l_2}{\Delta t_2} = \frac{8}{4} = 2 \text{ m/s.}$$
- Ecuația mișcării mobilului 1 se obține din expresia generală  $x = x_0 + v_1 t$ , în care se substituie valorile obținute mai sus:  $x_1 = x_{01} + v_1 t = 5 + 0,5t$ . Cel de-al doilea mobil începe să se deplaseze din origine ( $x_{02} = 0$ ) cu  $t_{02} = 2$  s mai tîrziu decît primul, ecuația mișcării lui fiind  $x_2 = v_2(t - t_{02}) = 2(t - 2)$ . În această expresie se pot substitui doar valorile  $t \geq 2$  s.
  - Distanța dintre mobile  $d = |x_1 - x_2| = |5 + 0,5t - 2(t - 2)| = |9 - 1,5t|$ . Intervalul de timp  $\Delta t = 4$  s după întîlnire corespunde momentului de timp  $t_1 = t_{\text{int}} + \Delta t = 10$  s. Distanța  $d$  la acest moment:  $d = 6$  m.

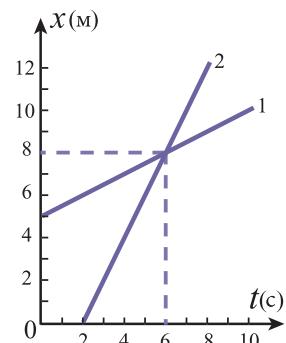


Fig. 1.32

## ÎNTRĂBĂRI ȘI PROBLEME

- Care mișcare a mobilului este numită rectilinie uniformă?
- Ce se numește viteză a mobilului în mișcare rectilinie uniformă?
- Cum se definește mișcarea rectilinie uniformă prin noțiunea de viteză?
- Cum poate fi determinată proiecția deplasării mobilului în mișcare rectilinie uniformă cînd este cunoscut graficul vitezei?
- Ce indică vitezometrul automobilului: proiecția vitezei sau modulul ei?
- Un automobil care se mișcă rectiliniu uniform cu viteza  $v_1 = 54$  km/h a parcurs în  $t_1 = 10$  s o distanță egală cu cea parcursă de un motociclist în  $t_2 = 12$  s. Care este viteza motociclistului, considerînd mișcarea lui, de asemenea, rectilinie uniformă?
- Un tren cu lungimea  $l = 160$  m traversează un rîu pe un pod cu lungimea  $L = 290$  m. Cît timp durează mișcarea trenului pe pod cu viteza constantă  $V = 18$  km/h?
- Un mobil se mișcă rectiliniu uniform. La momentul  $t_1 = 2$  s coordonata lui  $x_1 = 5$  m, iar la momentul  $t_2 = 4$  s coordonata devine egală cu  $x_2 = 2$  m. Scrieți ecuația mișcării mobilului.
- Două mobile se mișcă de-a lungul axei de coordonate  $Ox$  conform ecuațiilor  $x_1 = -3 + 2t$  și  $x_2 = 17 - 3t$ , în care timpul  $t$  este exprimat în s, iar coordonata  $x$  – în m. Construiți graficele pentru coordonatele și proiecțiile vitezelor mobilelor; determinați momentul întîlnirii lor și distanțele parcuse de ele pînă la întîlnire.

## 1.6° CINEMATICA MIȘCĂRII RELATIVE

Mai sus (par. 1.2, a) s-a menționat că mișcarea este relativă, adică poate fi descrisă simultan față de mai multe sisteme de referință. În acest caz este important să stabilim ce relații există între caracteristicile mișcării unuia și același corp în sisteme de referință diferite.

De exemplu, un elev se deplasează cu autobuzul. Admitem că el s-a așezat pe un scaun (fig. 1.33, a). Față de autobuz elevul se află în repaus, dar față de stația de autobuze (de Pămînt) el se mișcă împreună cu autobuzul. Astfel, acest elev față de un referențial se află în repaus, iar față de altul se mișcă. De aceea se spune că starea de repaus este relativă și depinde de alegerea referențialului. Deplasarea elevului față de referențialul legat de autobuz (referențialul mobil) este nulă  $\vec{s}_1 = 0$ , iar deplasarea sa  $\vec{s}$  față de referențialul legat de Pămînt (referențial considerat convențional fix) devine egală cu deplasarea  $\vec{s}_2$  a autobuzului, adică

$$\vec{s} = \vec{s}_2 \text{ pentru } \vec{s}_1 = 0. \quad (1.13)$$

O altă situație: elevul intră în autobuz prin ușa din spate și trece pînă la ușa din față în timp ce autobuzul se mișcă. După cum se observă din figura 1.33, b, deplasarea  $\vec{s}$  a elevului față de Pămînt este egală cu deplasarea sa  $\vec{s}_1$  față de autobuz plus deplasarea  $\vec{s}_2$  a acestuia:

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2. \quad (1.14)$$

Deplasările elevului în raport cu cele două referențiale sunt diferite, deci ele sunt relative, adică dependente de referențialul ales.

Dacă însă elevul intră în autobuz prin ușa din față și se deplasează spre partea din spate a lui, relativitatea mișcării este și mai evidentă: în raport cu autobuzul elevul se deplasează într-un sens (în sensul deplasării sale  $\vec{s}_1$ ), iar în raport cu Pămîntul în sens contrar (și cu spatele înainte!). Din figura 1.33, c observăm că și în acest caz deplasările corpuriilor satisfac relația (1.14).

Corpurile din exemplele de mai sus se mișcău în aceeași direcție. Să examinăm acum un caz cînd ele se mișcă în direcții diferite: pe suprafață apei unui rîu se deplasează simultan, pornind din același loc, o plută și o luntre cu visle, aceasta ținînd cursul său perpendicular pe direcția curentului de apă (fig. 1.34). Pluta și luntrea sunt antrenate în mișcare de curentul de apă la fel, rămînînd permanent pe o direcție perpendiculară față de curentul de apă. În timpul în care luntrea ajunge la malul opus al rîului, aceasta, ca și pluta, s-a deplasat în direcția curentului de apă cu  $\vec{s}_2$ . Deplasarea luntrii în raport cu pluta, deci și în raport cu curentul de apă, este egală cu  $\vec{s}_1$ . Din figură observăm că deplasarea  $\vec{s}$  a luntrii în raport cu malul satisfac relația  $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ , obținîndu-se din nou relația (1.14).

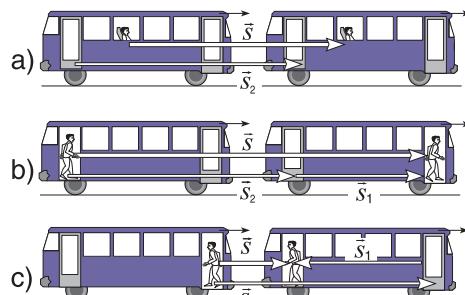


Fig. 1.33

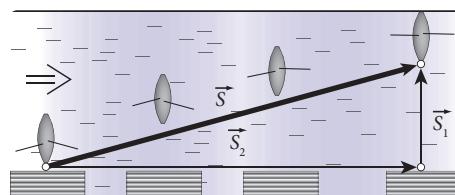


Fig. 1.34

**Mișcarea corpului față de sistemul mobil și caracteristicile acesteia sînt numite relative: deplasare relativă, viteză relativă.**

**Mișcarea corpului și caracteristicile ei în raport cu sistemul de referință considerat fix sînt numite absolute: deplasare absolută, viteză absolută.**

**Mișcarea corpului cauzată numai de mișcarea sistemului mobil este numită mișcare de transport și, respectiv, caracteristicile ei: deplasare de transport, viteză de transport.**

Din aceste definiții reiese că pentru a evidenția mișcarea de transport și a determina caracteristicile ei, este necesar să ne imaginăm corpul în repaus față de referențialul mobil.

În acești termeni relația (1.14) se enunță astfel:

### I Deplasarea absolută a corpului este egală cu suma deplasării relative și a celei de transport.

Aceasta este **legea compunerii deplasărilor**.

La prima vedere, relația (1.14) este identică cu relația (1.5). În ambele cazuri se adună vectorii deplasare. Dar în relația (1.5) se adună vectorii deplasare ai corpului pentru intervale succesive de timp  $\Delta t_1$  și  $\Delta t_2$ , obținându-se deplasarea corpului în întreg intervalul de timp ( $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ ). În relația (1.14) însă figurează deplasări ale corpului în unul și același interval de timp, dar față de referențiale diferite, și deplasarea corpului condiționată de mișcarea referențialului mobil.

Considerăm că mișcarea relativă a corpului și cea a referențialului mobil sunt rectilinii și uniforme. Atunci și mișcarea în raport cu referențialul fix este rectilinie și uniformă.

Notăm cu  $\Delta t$  durata mișcării (timpul este absolut, deci durata  $\Delta t$  este aceeași în ambele sisteme de referință). Împărțind termenii relației (1.14) la  $\Delta t$ , obținem

$$\frac{\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{s}_1}{\Delta t} + \frac{\vec{s}_2}{\Delta t}. \quad (1.15)$$

Mărimea  $\vec{v} = \frac{\vec{s}}{\Delta t}$  constituie viteza absolută (în raport cu referențialul fix),  $\vec{v}_1 = \frac{\vec{s}_1}{\Delta t}$  este viteza relativă (în raport cu referențialul mobil) și  $\vec{v}_2 = \frac{\vec{s}_2}{\Delta t}$  – viteza de transport, adică viteza pe care o are corpul datorită mișcării referențialului mobil.

Relația (1.15) ia forma

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (1.16)$$

### I Viteza absolută a mobilului este egală cu suma vitezei relative și a celei de transport.

Aceasta este **legea compunerii vitezelor**.

Astfel, nu numai deplasarea mobilului, ci și viteza lui este o caracteristică relativă, dependentă de sistemul de referință ales.

Legea exprimată de relația (1.16) este cunoscută, de asemenea, ca **legea compunerii vitezelor în mecanica clasica**. Ulterior veți afla că ea rămîne valabilă la viteze mult mai mici decît viteza luminii în vid c și că la viteze comparabile cu c este înlocuită cu o lege generală de compunere a vitezelor, care la viteze mici în comparație cu c trece în legea (1.16).

## PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Un sportiv traversează un rîu cu lățimea  $L$  în direcție perpendiculară pe mal. El ajunge în punctul  $B$  de pe malul opus, situat vizavi de locul de plecare, apoi se reîntoarce la acesta. A doua oară sportivul înoată în sens opus curentului de apă (în amonte) la o distanță egală, de asemenea,

cu  $L$ , după care se întoarce la locul inițial. În ce caz sportivul a consumat un timp mai mare și de câte ori? Viteza sportivului în apă stătătoare  $v_1 = 0,90 \text{ m/s}$ , viteza de curgere a apei din rîu  $v_2 = 0,54 \text{ m/s}$ .

## REZOLVARE

**Se dă:**

$$v_1 = 0,90 \text{ m/s},$$

$$v_2 = 0,54 \text{ m/s}$$

$$\frac{t_1}{t_2} = ?$$

Reprezentăm în figura 1.35 poziția inițială  $A$ , poziția  $B$  de pe malul opus al rîului și poziția  $C$  în amonte. Distanțele  $AB = AC = L$ . La traversarea rîului din  $A$  în  $B$  și înapoi, viteza  $\vec{v}_1$  a sportivului în raport cu apa trebuie să fie orientată sub un anumit unghi față de această direcție, astfel încât viteza  $\vec{v}$  a lui față de mal să fie perpendiculară pe acesta. Din figură observăm că  $v = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}$ . Deci timpul deplasării din  $A$  în  $B$

și înapoi este egal cu  $t_1 = \frac{2L}{v} = \frac{2L}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}$ . Viteza sportivului față de mal la deplasarea lui din  $A$  în  $C$  este egală cu  $(v_1 - v_2)$ , iar la deplasarea din  $C$  în  $A$  – cu  $(v_1 + v_2)$ .

Timpul total în acest caz:  $t_2 = \frac{L}{v_1 - v_2} + \frac{L}{v_1 + v_2} = \frac{2Lv_1}{v_1^2 - v_2^2}$ . Calculăm

raportul timpilor:  $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1 \sqrt{v_1^2 - v_2^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}; \frac{t_1}{t_2} = 0,8$ , de unde obținem  $t_2 = 1,25 t_1$ .

Astfel, în cel de-al doilea caz sportivul are nevoie de un interval de timp de 1,25 ori mai mare decât în primul caz.

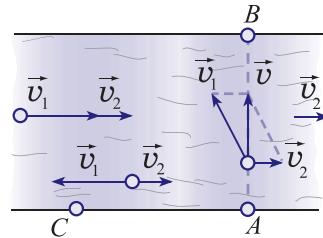


Fig. 1.35

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Când caracteristicile mișcării sunt numite absolute? Dar de transport?
2. Cum se formulează legea compunerii vitezelor?
3. Cum se explică faptul că în majoritatea cazurilor sateliții sunt lansați dinspre vest spre est (vezi fig. 1.5)?
4. Viteza unui biciclist  $v_1 = 12 \text{ m/s}$ , iar viteza vîntului ce-i suflă în față este  $v_2 = 4 \text{ m/s}$ , ambele viteze fiind considerate în raport cu pămîntul. Determinați viteza vîntului în raport cu biciclistul.
5. Viteza de curgere a apei din rîu  $v_1 = 1,2 \text{ m/s}$ . O luntre cu motor se deplasează în amonte (în sens contrar curentului de apă) cu viteza  $v_2 = 3 \text{ m/s}$  față de mal. Cu ce viteză se mișcă luntrea în aval (în sensul curgerii apei)? Regimul de funcționare a motorului luntrii în ambele cazuri este același.
6. Pe două linii paralele de cale ferată se deplasează în același sens două trenuri: un marfar cu lungimea  $L = 640 \text{ m}$ , cu viteza  $v_1 = 36 \text{ km/h}$  și un tren de pasageri cu viteza  $v_2 = 64,8 \text{ km/h}$ . Determinați intervalul de timp în care pasagerul vede marfarul atunci cînd acesta este depășit de trenul de pasageri.
7. Oscar rulantă urcă o persoană aflată în repaus în timpul  $t_1 = 1 \text{ min}$ . Pe scara imobilă persoana urcă în  $t_2 = 3 \text{ min}$ . În cît timp ea va urca mișcîndu-se pe scara cu trepte mobile?
8. Un sportiv trece înot un rîu în direcție perpendiculară pe mal cu viteza  $v = 0,5 \text{ m/s}$  față de acesta. Determinați viteza de curgere a apei din rîu dacă se știe că ea este de  $\sqrt{2}$  ori mai mică decât viteza sportivului în raport cu apa.
9. O luntre traversează un rîu cu lățimea  $L = 60 \text{ m}$ , viteza ei față de apă fiind perpendiculară pe direcția curentului de apă. Știind că viteza luntrii în apă stătătoare este egală cu  $v_1 = 3 \text{ m/s}$ , iar viteza curentului de apă – cu  $v_2 = 1 \text{ m/s}$ , să se determine:
  - a) viteza luntrii față de mal;
  - b) distanța cu care a fost deplasată luntrea de curentul de apă;
  - c) modulul deplasării luntrii față de malul rîului.

## 1.7 MIŞCAREA RECTILINIE UNIFORM VARIATĂ. ACCELERAȚIA

### a. Mişcarea rectilinie neuniformă. Viteza medie. Viteza momentană

În viaţă cotidiană întâlnim rar corpuri ce se mişcă rectiliniu uniform. În majoritatea cazurilor ele efectuează deplasări diferite în intervale de timp egale, adică mişările lor sunt **neuniforme**. De exemplu, autobuzul care porneşte din staţie efectuează în prima secundă o deplasare mai mică decât în secunda a doua, iar în a doua – o deplasare mai mică decât în a treia. Un automobil care frânează efectuează în ultima secundă o deplasare mai mică decât în penultima etc.

Pentru a caracteriza *mişcarea rectilinie neuniformă* a mobilului și pentru a compara mişările neuniforme ale diferitor mobile, se introduce noţiunea de **viteză medie**. Admitem că deplasarea mobilului într-un interval de timp  $\Delta t = t_2 - t_1$  este egală cu  $\vec{\Delta s}$ .

**Mărimea fizică egală cu raportul dintre deplasare și intervalul de timp corespunzător se numește viteza medie a corpului în acest interval de timp.**

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\vec{\Delta s}}{t_2 - t_1}. \quad (1.17)$$

Vectorul viteza medie are direcție și sens comune cu deplasarea corpului, adică este orientat de-a lungul dreptei ce prezintă traекторia sa.

Viteza medie caracterizează mişcarea mobilului în întreg intervalul de timp  $(t_2 - t_1)$ . Cunoaşterea ei nu permite determinarea deplasării mobilului într-o anumită porțiune a acestui interval, de exemplu, în prima treime a lui. Mărimea care permite o descriere mai detaliată a mişcării neuniforme este viteza mobilului la un moment dat, numită **viteză momentană sau instantanee**.

Considerăm un exemplu concret: un motociclist se deplasează pe o porțiune rectilinie de şosea. Se cere să se determine viteza instantanea a lui la momentul trecerii pe lîngă bornă kilometrică, mai exact la unui punct, de exemplu, al axului roţii din faţă, la momentul cînd trece prin planul din faţă  $P$  al bornei (fig. 1.36).

Admitem că în intervalul de timp  $\Delta t_1$  motociclistul a ajuns din poziția  $A_1$  în  $B_1$  efectuînd deplasarea  $\vec{\Delta s}_1$ . Viteza medie a lui în acest interval  $\vec{v}_{\text{med}1} = \frac{\vec{\Delta s}_1}{\Delta t_1}$ . Luăm un interval mai mic  $\Delta t_2$ , deplasarea mobilului este mai mică și egală cu  $\vec{\Delta s}_2$ , iar viteza medie în acest interval:  $\vec{v}_{\text{med}2} = \frac{\vec{\Delta s}_2}{\Delta t_2}$ .  $\vec{v}_{\text{med}2}$  diferă de viteza  $\vec{v}_{\text{med}1}$ . Unor intervale de timp din ce în ce mai mici  $\Delta t_3 > \Delta t_4 > \Delta t_5 \dots$  le corespund deplasări din ce în ce mai mici  $\vec{\Delta s}_3, \vec{\Delta s}_4, \vec{\Delta s}_5 \dots$  și viteze medii:

$$\vec{v}_{\text{med}3} = \frac{\vec{\Delta s}_3}{\Delta t_3}, \vec{v}_{\text{med}4} = \frac{\vec{\Delta s}_4}{\Delta t_4}, \vec{v}_{\text{med}5} = \frac{\vec{\Delta s}_5}{\Delta t_5} \dots .$$

Calculînd viteza medie la intervale tot mai mici, vom obține valoarea vitezei momentane.

Notînd cu  $\vec{\Delta s}$  o deplasare destul de mică a mobilului și cu  $\Delta t$  intervalul de timp corespunzător, aflăm viteza momentană a mobilului:

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta s}}{\Delta t}. \quad (1.18)$$

Cu cît intervalul de timp  $\Delta t$  este mai mic, cu atît acesta se apropiă tot mai mult de un moment de timp, iar viteza medie pe acest interval se apropii de viteza momentană.

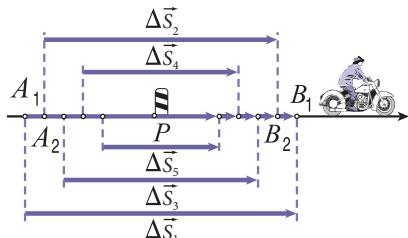


Fig. 1.36

În cazul mișcării rectilinii neuniforme, viteza momentană, care ulterior va fi numită viteză, ia valori diferite pentru momente de timp diferite, adică este o funcție de timp:

$$\vec{v} = \vec{v}(t). \quad (1.19)$$

Ea crește în modul atunci cînd mobilul începe mișcarea sa și scade cînd acesta frînează.

În situația unei traectorii arbitrară a mișcării mobilului (fig. 1.23), viteza lui momentană reprezintă raportul dintre variația în timp  $\Delta \vec{r}$  a vectorului de poziție și intervalul respectiv de timp  $\Delta t$ , adică  $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  (se consideră că intervalul de timp tinde către zero).

**Observație.** În cazul în care mobilul se mișcă în unul și același sens, modulul deplasării lui este egal cu distanța parcursă  $|\vec{s}| = l$ , astfel pentru modulul vitezei medii avem

$$v_{\text{med}} = \frac{l}{t_2 - t_1}. \quad (1.20)$$

Dacă însă mobilul se mișcă într-un sens, apoi în sens contrar, atunci modulul deplasării devine mai mic decît distanța parcursă. Dacă mobilul se întoarce în poziția inițială, modulul deplasării devine nul, deci viteza medie calculată după formula (1.17) este egală cu zero, de parcă mobilul nu s-ar fi mișcat pe parcursul acestui interval de timp.

De aceea, atunci cînd mobilul își schimbă sensul mișcării, ca în cazul mișcării pe traectorii curbilinii, este mai eficient a utiliza **viteza medie de distanță**. Ea este o mărime scalară egală cu raportul dintre lungimea distanței parcuse și intervalul de timp corespunzător. Expresia respectivă coincide cu relația (1.20). Cînd se afirmă că un autobuz a parcurs traseul Chișinău–Orhei cu viteza de 45 km/h, se constată că acesta a parcurs lungimea de 45 km a şoselei (traекторiei) de la Chișinău pînă la Orhei în timp de o oră.

## b. Mișcarea rectilinie uniform variată. Accelerația

Corpul ce se mișcă rectiliniu uniform are viteza constantă, aceasta fiind cea mai simplă formă de mișcare. Există însă o mișcare rectilinie a corpului, în care viteza lui variază într-un anumit mod.

**Mișcarea rectilinie a corpului este uniform variată, dacă în orice intervale egale de timp variația vitezei lui momentane este una și aceeași.**

Conform definiției, variațiile vitezei corpului  $\Delta \vec{V}_1, \Delta \vec{V}_2, \Delta \vec{V}_3, \dots$  în intervalele de timp egale  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \dots$  satisfac condiția  $\Delta \vec{V}_1 = \Delta \vec{V}_2 = \Delta \vec{V}_3 = \dots$ . De asemenea, dacă divizăm unul dintre intervalele  $\Delta t_i$  în mai multe intervale mai mici egale, atunci fiecarui interval mai mic îi corespunde o variație a vitezei tot de atâtea ori mai mică față de variația vitezei în intervalul  $\Delta t_i$ .

Din cele expuse mai sus rezultă egalitatea raporturilor  $\frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t_2} = \frac{\Delta \vec{v}_3}{\Delta t_3} = \dots = \text{const.}$

Acest **raport, constant** pentru mișcarea dată, este numit **accelerație** (în latină *acceleratio*, „a grăbi”):

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.21)$$

Unitatea pentru accelerație în SI este  $[\vec{a}] = \frac{[\Delta \vec{v}]}{[\Delta t]} = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

**Accelerația este mărimea fizică ce caracterizează rapiditatea variației vitezei mobilului. Accelerația mobilului în mișcare rectilinie uniform variată este o mărime constantă:  $\vec{a} = \text{const.}$**

Viteza mobilului în mișcarea rectilinie uniformă rămîne constantă, deci variația ei, ca și accelerația mobilului, este nulă. Astfel, **mișcarea rectilinie uniformă este mișcarea cu accelerare nulă**. Considerăm mișcarea rectilinie uniform variată a unui mobil. Orientăm axa de coordinate  $Ox$  în direcția mișcării (fig. 1.37). Admitem că la momentul inițial  $t_0 = 0$  mobilul ocupa poziția  $M_0$  cu coordonata  $x_0$  și avea viteza inițială  $\vec{v}_0$ , iar la momentul  $t$  ocupă poziția  $M$  cu coordonata  $x$  și are viteza  $\vec{v}$ . Deci în intervalul de timp  $\Delta t = t - t_0 = t$ , viteza mobilului s-a modificat cu  $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ . Accelerația lui este

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}, \quad (1.22)$$

de unde exprimăm viteza mobilului la momentul  $t$ :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \quad (1.23)$$

Pentru proiecția vitezei pe axa  $Ox$  (fig. 1.37) avem

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \quad (1.24)$$

Aceasta este **ecuația vitezei** în mișcarea rectilinie uniform variată.

Din aceste relații observăm că viteza mobilului în mișcare rectilinie uniform variată este o funcție liniară de timp. În cazul în care proiecțiile vitezei  $v_{0x}$  și ale accelerării  $a_x$  au același semn, proiecția  $v_x$  crește în modul cu timpul, dacă însă ele au semne opuse, proiecția  $v_x$  descrește. În primul caz mișcarea este numită **accelerată**, în cazul al doilea **încetinită**.

### c. Graficele proiecțiilor accelerării și vitezei

Proiecția accelerării mobilului în mișcare rectilinie uniform variată este constantă  $a_x = \text{const}$ . Graficul ei reprezintă o dreaptă paralelă cu axa timpului (fig. 1.38). Din figură observăm că graficul 2 corespunde mișcării cu o accelerare mai mare decât cea din mișcarea reprezentată de graficul 1:  $a_{2x} > a_{1x}$ . Graficul 3 corespunde mișcării uniform variate cu proiecția negativă a accelerării ( $a_{3x} < 0$ ), adică orientată în sens contrar sensului pozitiv al axei  $Ox$ .

Graficul proiecției vitezei  $v_x$  ca funcție liniară de timp (1.24) este o linie dreaptă. În figura 1.39 sunt reprezentate diferite grafice posibile. Graficul 1 reprezintă mișcarea rectilinie uniform variată cu viteza inițială  $v_{0x}$  și accelerarea  $a_{1x}$ , ambele proiecții fiind pozitive, adică vectorii corespunzători sunt orientați în sensul pozitiv al axei  $Ox$ . Graficul 2 redă mișcarea cu aceeași viteză inițială ca în mișcarea 1, dar cu accelerare mai mare:  $a_{2x} > a_{1x}$ , deoarece viteza crește mai repede. Graficul 3, paralel cu graficul 1, reprezintă o mișcare cu viteza inițială nulă și accelerare  $a_{3x} = a_{1x}$ . Viteza corpului în mișcările reprezentate de graficele 1, 2 și 3 crește cu timpul, adică mișcările sunt uniform accelerate.

Graficul 4 redă o mișcare uniform variată cu proiecția vitezei inițiale  $v_{0x} > 0$  și cea a accelerării  $a_{4x} < 0$ . Cu timpul

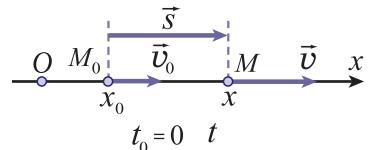


Fig. 1.37

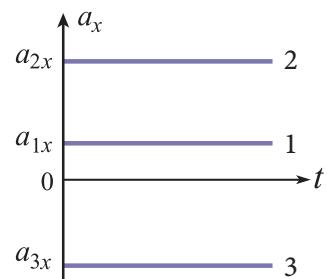


Fig. 1.38

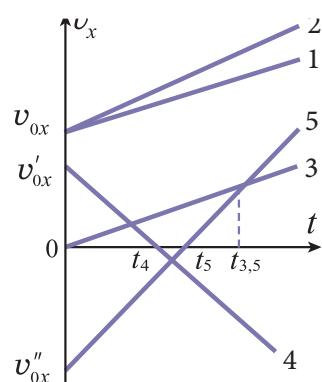


Fig. 1.39

viteza mobilului se micșorează, deci mișcarea lui este uniform încetinită. La momentul  $t_4$ , care corespunde punctului de intersecție a graficului 4 cu axa timpului, viteza mobilului a devenit nulă, deci el s-a oprit. După aceasta (la  $t > t_4$ ), proiecția vitezei a devenit negativă, corpul se mișcă în sens contrar mișcării inițiale cu viteză crescindă în modul. Astfel, mișcarea descrisă de graficul 4 este inițial uniform încetinită, pînă la momentul  $t_4$ , cînd trece în mișcare uniform accelerată.

Graficul 5 corespunde mișcării uniform încetinite în sensul negativ al axei  $Ox$  pînă la momentul  $t_5$ , în care viteza mobilului devine nulă, după ce mișcarea lui devine uniform accelerată în sensul pozitiv al axei  $Ox$ .

Punctele de intersecție a graficelor vitezelor pentru diferite mobile corespund momentelor de timp la care mobilele au viteze egale. De exemplu, mobilele 3 și 5 au viteze egale la momentul  $t_{3,5}$ .

Cunoscînd graficul proiecției vitezei, se poate determina proiecția accelerării mobilului (fig. 1.40). Considerăm un interval de timp  $\Delta t$  și determinăm din grafic variația  $\Delta v_x$  a proiecției vitezei în acest interval. Pentru proiecția accelerării avem  $a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ .

Procedeul determinării proiecției accelerării pe baza graficului vitezei mobilului în mișcare uniform accelerată este asemănător cu cel al determinării proiecției vitezei mobilului în mișcare uniformă conform graficului pentru coordonata lui.

#### d. Legea mișcării uniform variante a mobilului

Pentru a deduce expresia coordonatei mobilului în mișcare uniformă variată, să examinăm graficul pentru proiecția vitezei (fig. 1.41), amintindu-ne că proiecția deplasării mobilului în această mișcare este numeric egală cu aria dreptunghiului format de graficul proiecției vitezei, axa timpului și ordonatele ce corespund începutului și sfîrșitului intervalului de timp corespunzător (vezi fig. 1.29).

Spre deosebire de mișcarea rectilinie uniformă, cînd proiecția vitezei rămîne constantă, în mișcarea uniform accelerată proiecția vitezei mobilului variază pe parcursul intervalului  $0 \div t$  de la valoarea  $v_{0x}$  pînă la valoarea  $v_x = v_{0x} + a_x t$ .

Pentru a calcula proiecția deplasării în acest caz, împărțim imaginar intervalul de timp într-un număr mare de porțiuni (intervale) mici  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_i, \dots, \Delta t_j, \dots$ . Deplasarea mobilului în întreg intervalul de timp se egalează cu suma deplasărilor lui în toate porțiunile mici în care a fost împărțit acest interval (mișcarea este rectilinie în unul și același sens!). La calcularea proiecției deplasării mobilului pe parcursul unui interval destul de mic de timp  $\Delta t_i$  ținem seama de faptul că în acest interval variația vitezei este mult mai mică decît valoarea ei, ceea ce se vede și din figura 1.41. Dacă neglijăm această variație a proiecției vitezei, atunci mișcarea mobilului pe parcursul intervalului  $\Delta t_i$  poate fi considerată uniformă cu viteză  $v_{ix}$ . Prin urmare, proiecția deplasării respective,  $\Delta s_{ix}$ , este numeric egală cu aria de sub grafic – cu aria fișiei hașurate de lățime  $\Delta t_i$  și înălțime  $v_{ix}$ . Proiecția deplasării mobilului într-un alt interval mic  $\Delta t_j$  este numeric egală cu aria fișiei respective, de altă lățime  $\Delta t_j$  și de altă înălțime  $v_{jx}$ .

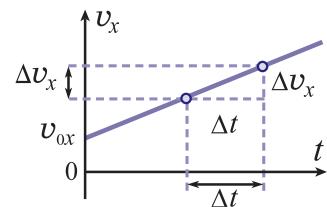


Fig. 1.40

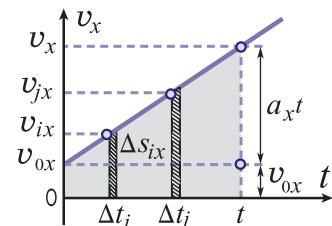


Fig. 1.41

Însumarea proiecțiilor deplasărilor în toate intervalele mici de timp se reduce la adunarea ariilor tuturor fișilor, obținându-se, astfel, aria figurii de sub grafic. Figura respectivă este un trapez cu bazele egale cu  $v_{0x}$  și  $(v_{0x} + a_x t)$  și înălțimea egală cu  $t$ . Pentru proiecția deplasării obținem

$$s_x = \frac{v_{0x} + (v_{0x} + a_x t)}{2} \cdot t = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Aceasta este **legea mișcării rectilinii uniform variante**.

Ținând seama de faptul că proiecția deplasării  $s_x = x - x_0$  (fig. 1.37), pentru coordonata mobilului avem

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_{0x} t + \frac{\mathbf{a}_x t^2}{2}. \quad (1.25)$$

Aceasta este **ecuația mișcării rectilinii uniform variante**. În funcție de semnele proiecțiilor  $v_{0x}$  și  $a_x$  coordonata  $x$  și proiecția vitezei  $v_x$  se pot mări sau micșora.

### e. Formula lui Galilei

Rezumînd rezultatele privitor la mișcarea rectilinie uniform variată, pentru proiecția deplasării și a vitezei mobilului în această mișcare avem relațiile

$$\begin{cases} s_x = \mathbf{v}_{0x} t + \frac{\mathbf{a}_x t^2}{2}, \\ \mathbf{v}_x = \mathbf{v}_{0x} + \mathbf{a}_x t. \end{cases} \quad (1.26)$$

Ecuațiile de mai sus conțin cinci mărimi:  $s_x$ ,  $v_x$ ,  $v_{0x}$ ,  $a_x$  și  $t$ , permitînd a determina două dintre aceste mărimi cînd sunt cunoscute celelalte trei. În acest mod se rezolvă toate problemele ce se referă la forma dată de mișcare.

În unele probleme timpul  $t$  nu este cunoscut și nici nu se cere determinarea lui. În astfel de cazuri este utilă folosirea unei relații ce se obține din cele două relații (1.26) după excluderea din ele a timpului  $t$ . Exprimăm din cea de-a doua formulă timpul  $t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$  și îl substituim în prima formulă din (1.26):

$$s_x = V_{0x} \left( \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \right) + \frac{a_x}{2} \left( \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \right)^2 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

sau

$$\mathbf{v}_x^2 - \mathbf{v}_{0x}^2 = 2a_x s_x. \quad (1.27)$$

Relația respectivă este cunoscută ca **formula lui Galilei**. Ea nu conține timpul și permite a determina una dintre mărimi cînd sunt cunoscute celelalte trei.



**Galileo GALILEI** (1564–1642), fizician și astronom italian

A descoperit principiul inerției, a stabilit caracterul relativ al mișcării mecanice, a formulat principiul clasic al relativității și legea compunerii vitezelor. A stabilit legitățile căderii libere, ale mișcării corpului pe planul înclimat și ale oscilațiilor pendulului.

Cu ajutorul unei lunete confecționate de el, a descoperit munții pe Lună, patru sateliți ai planetei Jupiter; a stabilit natura stelară a Căii-Lactee. A construit un telescop care i-a permis să descopere fazele planetei Venus, petele pe Soare.

Galilei a fost adept al sistemului heliocentric al lui Copernic, pentru aceasta fiind persecutat de inchizitie.

## f.º Raportul distanțelor parcuse de mobil în intervale de timp egale

Să analizăm o proprietate deosebită a mișcării uniform accelerate cu viteză inițială nulă ( $v_{0x} = 0$ ). Presupunem că axa  $Ox$  este orientată în sensul vitezei, care în cazul de față nu se modifică. Prin urmare, distanța parcursă este egală cu proiecția deplasării:  $l = s_x = \frac{a_x t^2}{2}$ .

Considerăm intervale de timp, egale fiecare cu  $\tau$ , care se succed. Distanța parcursă de corp în primul interval  $\tau$  este  $l_1 = \frac{a_x \tau^2}{2}$ .

Distanța parcursă în cel de-al doilea interval  $\tau$  este egală cu distanța parcursă în intervalul  $(2\tau)$  de la începutul mișcării minus cea parcursă în primul interval  $\tau$ , adică

$$l_2 = \frac{a_x (2\tau)^2}{2} - \frac{a_x \tau^2}{2} = 3 \frac{a_x \tau^2}{2}.$$

Distanța parcursă în cel de-al treilea interval succesiv de timp egal cu  $\tau$  coincide cu distanța parcursă în timpul  $(3\tau)$  minus cea parcursă în timpul  $(2\tau)$ :

$$l_3 = \frac{a_x (3\tau)^2}{2} - \frac{a_x (2\tau)^2}{2} = 5 \frac{a_x \tau^2}{2}.$$

În mod analog, obținem  $l_4 = 7 \frac{a_x \tau^2}{2}$ ,  $l_5 = 9 \frac{a_x \tau^2}{2}$ .

Din aceste expresii rezultă legitatea

$$l_1 : l_2 : l_3 : l_4 : \dots = 1 : 3 : 5 : 7 : \dots \quad (1.28)$$

**În mișcarea rectilinie uniform accelerată cu viteză inițială nulă, distanțele parcuse de mobil în intervale succesive de timp egale se raportă ca numerele impare succesive.**

Acest raport al distanțelor poate fi utilizat la cercetarea mișcării uniform accelerate, în particular, folosind cronofofotografia. Pe aceeași fotografie se obțin imagini ale corpului după intervale de timp egale. Practic ea se realizează prin fotografarea în întuneric a corpului ce se mișcă. Obiectivul aparatului de fotografat rămîne deschis, iar corpul este iluminat cu impulsuri de lumină de scurtă durată, care sunt orientate asupra lui după intervale de timp egale.

## g. Mișcarea corpului pe verticală

Un exemplu de mișcare rectilinie uniform variată este mișcarea corpului pe verticală la înălțimi mult mai mici decât raza Pământului. Mișcarea pe verticală este mișcarea corpului liber lansat vertical în sus, mișcarea unui corp în cădere liberă (cu sau fără viteză inițială, orientată vertical în jos ori în sus).

Primul care a cercetat căderea liberă a corpurilor a fost Galileo Galilei. El lăsa corperi diferite să cadă de pe vestitul turn înclinat de la Pisa (fig. 1.42), comparând timpii de cădere a acestora (timpul era evaluat numărind bătăile inimii sau după volumul de apă ce se scurgea printr-un orificiu al unui vas). În urma unor multiple experimente, Galilei a ajuns la concluzia că toate corpurile cad la fel.

La prima vedere pare că această concluzie contravine realității. Să ne amintim de căderea frunzei (fig. 1.1), analizată la începutul acestui capitol. Ea nu cade pe verticală, aşa cum cade, de exemplu, o bilă metalică, pentru că mișcarea frunzei este influențată puternic de aer,

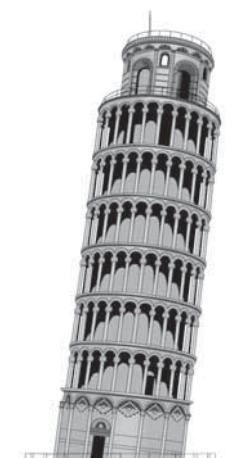


Fig. 1.42

de curenții de aer care o pot ridica. Este deci necesară realizarea unui experiment în care ar fi exclusă influența aerului.

Luăm tubul Newton – un tub de sticlă lung de circa 1 m având în interiorul său o pană, o bucătică de plută și o alice de plumb. La un capăt al său se află un tubușor cu robinet, care permite evacuarea aerului din tub, apoi închiderea etanșă a acestuia.

În poziția verticală a tubului corpurile se află la fundul lui. Întoarcem tubul cu fundul în sus. Ce observăm? Corpurile cad diferit: prima cade aicea, ultima – pana (fig. 1.43, a). Repetăm experimentul după ce aerul este evacuat parțial din tub. Ce se observă la răsturnarea lui? Corpurile au căzut în aceeași ordine, dar diferența dintre timpuri de cădere a devenit mai mică. La evacuarea aproape totală a aerului se observă căderea aproape simultană a corpurilor (fig. 1.43, b). Astfel, presupunerea ce se referă la influența aerului asupra căderii diferite a corpurilor prin el este justificată.

Concluzia privind căderea identică a corpurilor pe Pămînt se referă nu numai la căderea acestora în vid, dar și la căderea corpurilor din substanțe de densitate mare cu viteze nu prea mari (experimentul a confirmat influența mult mai slabă a aerului asupra căderii aicei de plumb).

Experimental s-a constatat faptul că un corp, fiind lăsat să cadă liber, se mișcă uniform accelerat. Această accelerare, unică pentru toate corpurile, numită **accelerație gravitațională**, este orientată vertical în jos. Pentru a o evidenția, ea se notează cu  $\vec{g}$ . Valoarea ei depinde de latitudinea geografică a locului unde se află corpul și de înălțimea lui deasupra Pămîntului.

La nivelul mării, accelerarea gravitațională ia următoarele valori: la poli  $g = 9,8324 \text{ m/s}^2$ , la latitudinea de  $45^\circ$  valoarea  $g = 9,8067 \text{ m/s}^2$ , iar la ecuator  $g = 9,7805 \text{ m/s}^2$ . Pentru rezolvarea problemelor se iau valorile indicate în ele:  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  sau, pentru a simplifica calculele numerice,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

Analizăm o situație concretă. Un corp este lansat vertical în sus, de la nivelul Pămîntului, cu viteza  $\vec{v}_0$ . Luăm axa  $Oy$  orientată vertical în sus cu originea în locul de lansare (fig. 1.44). Reprezentăm vectorul accelerării gravitaționale  $\vec{g}$ , orientat vertical în jos, puțin într-o parte de axa de coordinate, pentru a nu complica desenul. La această alegere a axei coordonatelor, proiecția accelerării  $a_y = -g$ , proiecția vitezei inițiale  $v_{0y} = v_0$ , coordonata inițială  $y_0 = 0$ . Expresiile generale (1.24) și (1.25) în cazul de față iau forma

$$\mathbf{v}_y = \mathbf{v}_0 - \mathbf{g}t, \quad (1.29)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{v}_0 t - \frac{\mathbf{g}t^2}{2}. \quad (1.30)$$

O mărime specifică ce caracterizează mișcarea corpului lansat vertical în sus este înălțimea maximă la care el urcă. Evident, înălțimea corpului crește atât timp cât proiecția  $v_y$  este pozitivă, adică pînă la momentul în care  $v_y = 0$ . Astfel, din expresia (1.29) determinăm timpul de urcare a corpului:  $0 = v_0 - gt_u$ , de unde

$$t_u = \frac{v_0}{g}. \quad (1.31)$$

Substituind această valoare în (1.30), determinăm înălțimea maximă la care a urcat corpul:

$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (1.32)$$

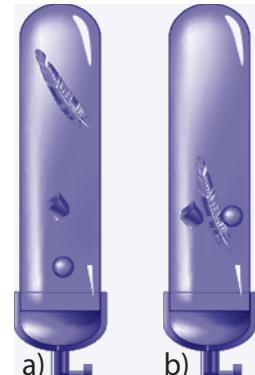


Fig. 1.43

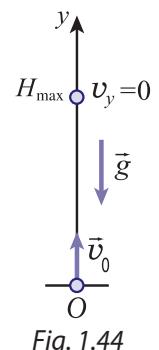


Fig. 1.44

La căderea pe Pămînt, coordonata corpului  $y = 0$ . Substituind această valoare în expresia (1.30), obținem ecuația pentru timpul total al mișcării:  $0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$  sau  $t (v_0 - \frac{gt}{2}) = 0$ . Ecuația are două rădăcini. Prima,  $t = 0$ , corespunde momentului lansării. Rădăcina a doua exprimă timpul total al mișcării:

$$t_t = \frac{2v_0}{g}. \quad (1.33)$$

Comparînd (1.33) cu (1.31), observăm că timpul total este de două ori mai mare decît timpul de urcare, deci timpul coborârii este egal cu timpul urcării. Această concluzie poate fi justă numai pentru cazul cînd corpul cade în locul din care a fost lansat.

Considerăm încă un caz: un corp este lansat de la o înălțime oarecare  $h$  cu o viteza inițială  $\vec{v}_0$  orientată vertical în jos. Dacă luăm axa de coordinate  $Oy$  ca în figura 1.45, a, atunci  $y_0 = h$ ,  $v_{0y} = -v_0$  și  $a_y = -g$ . Expresiile (1.24) și (1.25) pentru proiecția vitezei și coordonată iau forma următoare:

$$v_y = -v_0 - gt, \quad y = h - v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Coordonata punctului de cădere pe Pămînt este  $y = 0$ .

Axa de coordinate  $O'y'$  poate fi luată ca în figura 1.45, b. În acest caz  $y'_0 = 0$ ,  $v_{0y'} = v_0$ ,  $a_y' = g$ , mișcarea corpului fiind descrisă de expresiile  $v_{y'} = v_0 + gt$ ,  $y' = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$ .

Coordonata punctului de cădere a corpului pe Pămînt  $y' = h$ .

În ambele cazuri se obțin aceleasi valori pentru mărimele calculate. Dacă însă viteza corpului ar fi orientată nu vertical în jos, ci vertical în sus, atunci în formulele pentru proiecțiile vitezei și pentru coordonate semnele în fața vitezei  $v_0$  ar fi opuse celor din expresiile de mai sus.

## PROBLEME REZOLVATE

1. Un mobil parcurge prima treime din distanță cu viteza  $v_1 = 7,5$  m/s, iar restul distanței – cu viteza  $v_2 = 10$  m/s. Determinați viteza medie a mobilului pe întreaga distanță.

### REZOLVARE

**Se dă:**

$$\begin{aligned} v_1 &= 7,5 \text{ m/s}, \\ v_2 &= 10 \text{ m/s}, \\ l_1 &= l/3, \\ l_2 &= 2l/3 \end{aligned}$$

$$v_{\text{med}} - ?$$

Mișcarea mobilului este compusă din două mișcări uniforme:

pe distanță  $l_1 = \frac{1}{3}l$ , unde  $l$  este distanța totală, parcursă de mobil cu viteza

$v_1$  în timpul  $t_1 = \frac{l_1}{v_1} = \frac{l}{3v_1}$  și pe distanță  $l_2 = \frac{2}{3}l$  parcursă cu viteza  $v_2$  în timpul  $t_2 = \frac{l_2}{v_2} = \frac{2l}{3v_2}$ . Viteza medie pe întreaga distanță este

$$v_{\text{med}} = \frac{l_1 + l_2}{t_1 + t_2} = \frac{l}{\frac{l}{3v_1} + \frac{2l}{3v_2}} = \frac{3v_1 v_2}{2v_1 + v_2}; \quad v_{\text{med}} = 9 \text{ m/s.}$$

2. Două mobile încep să se miște de-a lungul unei drepte dintr-un punct al acesteia. Cunoscînd graficele pentru proiecțiile vitezelor mobilelor (fig. 1.46): a) descrieți calitativ mișcarea mobilelor; b) determinați accelerările mobilelor; c) scrieți expresiile pentru proiecțiile vitezelor și pentru coordonatele mobilelor; d) determinați momentul de timp cînd mobilele se întîlnesc; e) determinați distanțele parcurse de mobile pînă la întîlnire.

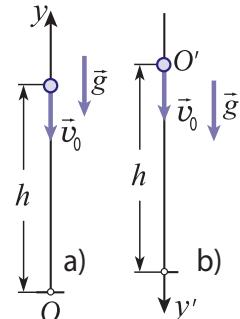


Fig. 1.45

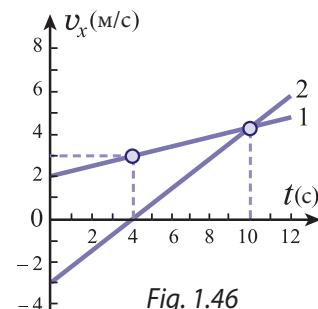


Fig. 1.46

## REZOLVARE

- a) Luăm originea  $O$  a coordonatelor în locul în care mobilele se aflau la momentul inițial de timp ( $t_0 = 0$ ). Deci coordonatele inițiale  $x_{01} = x_{02} = 0$ . În conformitate cu graficul 1 din figura 1.46, mobilul 1 se mișcă uniform accelerat cu viteză inițială, în sensul pozitiv al axei  $Ox$ . Mobilul 2 se mișcă uniform încetinit în sensul negativ al axei  $Ox$  până la momentul  $t_1 = 4$  s, cind viteză lui devine nulă, adică el se oprește. După aceasta mobilul 2 se mișcă uniform accelerat în sensul pozitiv al axei  $Ox$ , viteza sa crește și la momentul  $t_2 = 10$  s devine egală cu viteza mobilului 1, apoi o depășește. Astfel, până la momentul  $t_2 = 10$  s mobilele se îndepărtează unul de altul, după care se apropiie până la întîlnirea lor.
- b) Variația vitezei primului mobil în intervalul de timp de la  $t_0 = 0$  până la  $t_1 = 4$  s este egală cu  $\Delta v_{1x} = 1$  m/s. Prin urmare, proiecția accelerării lui  $a_{1x} = \frac{\Delta v_{1x}}{\Delta t} = 0,25$  m/s<sup>2</sup>. În același interval de timp proiecția vitezei mobilului 2 variază de la  $(-3)$  m/s până la 0, adică  $\Delta v_{2x} = 0 - (-3)\frac{m}{s} = 3$  m/s, deci accelerarea acestuia  $a_{2x} = \frac{\Delta v_{2x}}{\Delta t} = 0,75$  m/s<sup>2</sup>.
- c) Vitezele inițiale ale mobilelor au proiecțiile  $v_{10x} = 2$  m/s și  $v_{20x} = -3$  m/s. În conformitate cu formula (1.24), proiecțiile vitezelor sunt:  $v_{1x} = 2 + 0,25 t$  și  $v_{2x} = -3 + 0,75 t$ . Coordonatele inițiale ale mobilelor sunt egale cu zero, astfel, în acord cu (1.25), pentru valorile lor la orice moment de timp putem scrie:  $x_1 = 2t + 0,25 \frac{t^2}{2}$  și  $x_2 = -3t + 0,75 \frac{t^2}{2}$ .
- d) La momentul întîlnirii mobilele au coordonate egale:  $x_1 = x_2$ . Egalând coordonatele, obținem pentru timpul  $t$  ecuația:  $t(5 - 0,25t) = 0$ . Această ecuație are două rădăcini: prima dintre ele  $t_0 = 0$  corespunde momentului inițial cind mobilele se aflau în origine; rădăcina a doua  $t_3 = 20$  s corespunde momentului întîlnirii lor.
- e) Din expresiile pentru coordonate obținem valoarea lor la momentul întîlnirii  $x_1 = x_2 = 90$  m. Primul mobil nu-și schimbă sensul mișcării și distanța parcursă de el este egală cu modulul variației coordonatei:  $l_1 = x_1 - x_0 = 90$  m. Pentru a determina distanța parcursă de mobilul 2 până la întîlnire, trebuie să se țină seama de faptul că el mai întâi s-a mișcat în sensul negativ al axei  $Ox$ . La momentul opririi sale ( $t_1 = 4$  s), mobilul avea coordonata  $x_2 = -6$  m. Astfel, mobilul 2 a parcurs în sensul negativ al axei  $Ox$  o distanță egală cu 6 m, apoi această distanță în sens invers până la origine și încă 90 m până la locul întîlnirii. Deci mobilul 2 a parcurs până la întîlnire distanța  $l_2 = (2 \cdot 6 + 90)$  m = 102 m.
3. Un corp lansat vertical în sus de la suprafața Pământului se află la înălțimea  $h = 58,8$  m de două ori, cu un interval de timp  $\Delta t = 4$  s. Să se determine înălțimea maximă atinsă de corp și viteză cu care acesta a fost lansat. Se va lua  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

## REZOLVARE

**Se dă:**

$$h = 58,8 \text{ m},$$

$$\Delta t = 4 \text{ s},$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$H_{\max} - ?, V_0 - ?$$

$$= \frac{1}{2} g \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2, \text{ de unde exprimăm înălțimea maximă } H_{\max} = h + \frac{g (\Delta t)^2}{8};$$

$H_{\max} = 78,4$  m. Viteză inițială poate fi determinată mai simplu, utilizând formula lui Galilei:  $V_y^2 - V_{0y}^2 = 2 a_y s_y$ . Din figura 1.47 avem:  $V_y = 0$ ,  $V_{0y} = V_0$ ,  $a_y = -g$  și  $s_y = H_{\max}$ . Formula lui Galilei pentru acest caz ia forma:  $0 - V_0^2 = 2(-g)H_{\max}$ , de unde viteza inițială  $V_0 = \sqrt{2gH_{\max}}$ ;  $V_0 = 39,2$  m/s.

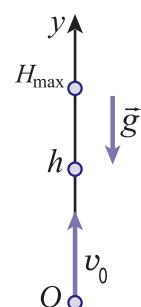


Fig. 1.47

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Ce este viteza medie a unui corp?
2. Cum se definește viteza momentană?
3. Care viteză este indicată de vitezometrul automobilului: cea medie sau cea momentană?
4. În care mișcare viteza momentană a corpului este permanent egală cu cea medie? Argumentați.
5. Care mișcare se numește rectilinie uniform variată?
6. Cum se definește accelerația mobilului? Ce caracterizează ea?
7. Ce prezintă graficul proiecției vitezei mobilului în mișcare uniform accelerată?
8. Poate oare mobilul să posede accelerație la momentul în care viteza momentană a lui este nulă? Ilustrați cu exemple.
9. Cum poate fi determinată proiecția accelerării mobilului ce se mișcă rectiliniu uniform variat, fiind cunoscut graficul proiecției vitezei lui?
10. Dacă este cunoscut graficul proiecției vitezei unui mobil ce se mișcă rectiliniu uniform variat, cum poate fi determinată proiecția deplasării lui?
11. Stabiliti relația (1.28) cunoscând graficul vitezei corpului în funcție de timp pentru mișcarea uniform accelerată a vitezei inițiale nule. Consultați figura 1.48.
12. Cum poate fi determinat timpul ridicării unui corp lansat vertical în sus?
13. Cum poate fi determinată înălțimea maximă la care se ridică un corp lansat vertical în sus?
14. Un corp se mișcă o treime din timp cu viteza  $V_1 = 21 \text{ m/s}$ , iar următoarele două treimi din timp cu viteza  $V_2 = 30 \text{ m/s}$ . Determinați viteza medie a corpului.
15. Un mobil a parcurs în timpul  $t_1 = 2 \text{ s}$  o distanță  $l_1 = 5 \text{ m}$ , apoi în timpul  $t_2 = 3 \text{ s}$  s-a mișcat uniform cu viteza  $V_2 = 5 \text{ m/s}$ . Să se determine viteza medie a mobilului în această mișcare.
16. Un biciclist a parcurs 6 km cu viteza de 12 km/h, s-a oprit, apoi ultimii 10 km s-a deplasat cu viteza de 10 km/h. Cît timp a durat staționarea biciclistului, dacă viteza medie a lui pe drumul întreg este egală cu 8 km/h?
17. Un motociclist care se deplasa cu viteza  $V_1 = 72 \text{ km/h}$  și-a micșorat viteza pînă la  $V_2 = 54 \text{ km/h}$  într-un interval de timp  $\Delta t = 25 \text{ s}$ . Care este accelerația motociclistului? Cum este orientată ea față de viteză?
18. Un automobil ce avea viteza  $V_0 = 7 \text{ m/s}$  a început să se deplaseze cu accelerația  $a = 0,25 \text{ m/s}^2$ . Care va fi viteza lui după  $\Delta t = 20 \text{ s}$ ?
19. În figura 1.49 este reprezentat graficul proiecției vitezei unui corp care la momentul inițial ( $t = 0$ ) se află în originea coordonatelor. Determinați coordonata corpului la momentul  $t_1 = 10 \text{ s}$ , modulul deplasării lui și distanța parcursă pînă la acest moment.
20. În cît timp un automobil care începe să se deplaseze cu accelerația  $a = 0,6 \text{ m/s}^2$  parcurge distanța  $l = 30 \text{ m}$ ?
21. Un automobil ce se deplasează cu viteza  $V_0 = 54 \text{ km/h}$  frînează și se oprește după  $\Delta t = 6 \text{ s}$  de la începutul frînării. Calculați distanța parcursă de automobil la frînare.
22. Un schior a coborât în intervalul de timp  $\Delta t = 20 \text{ s}$  o pantă cu lungimea  $l = 100 \text{ m}$ , accelerația lui fiind  $a = 0,3 \text{ m/s}^2$ . Care era viteza schiorului la începutul și la sfîrșitul pantei?
23. Un corp lăsat să cadă liber a atins suprafața Pămîntului după  $t = 6 \text{ s}$ . De la ce înălțime a căzut corpul și cu ce viteză a atins suprafața Pămîntului?

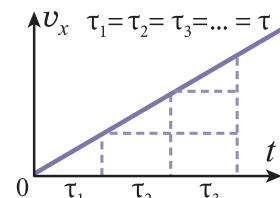


Fig. 1.48

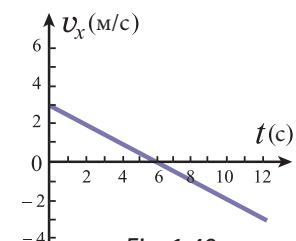


Fig. 1.49

- 24.** O bilă a fost aruncată vertical în sus cu viteza  $V_0 = 49$  m/s. După cât timp ea se va afla la înălțimea  $h = 102,9$  m? Comentați rezultatul obținut.
- 25.** Un corp cade liber de la înălțimea  $h = 176,4$  m. Ce distanță a parcurs el în ultima secundă înainte de a atinge Pămîntul? Dar în penultima?
- 26.** Un aerostat se ridică vertical în sus uniform, cu viteza  $V_0 = 4,9$  m/s. La momentul în care aerostatul se află la înălțimea  $h = 147$  m, din el a fost scăpată o minge. După cât timp și cu ce viteză aceasta va ajunge pe Pămînt?
- 27.** Două corpuși au fost lansate succesiv din același loc, vertical în sus, cu un interval de timp  $\tau = 1$  s. Viteza inițială a fost  $V_0 = 29,4$  m/s pentru ambele corpuși. După cât timp de la aruncarea corpușului al doilea ele se vor ciocni?

## 1.8 MIȘCAREA CIRCULARĂ UNIFORMĂ. ACCELERAȚIA CENTRIPETĂ

### a. Mișcarea circulară uniformă. Perioada și frecvența de rotație

În afară de formele de mișcare rectilinie (uniformă și uniform variată) mai există și forme de mișcare curbilinie, cea mai simplă fiind mișcarea circulară uniformă.

**Prin mișcare circulară a mobilului subînțelegem mișcarea lui pe un cerc.**

Importanța studierii acestei mișcări este determinată de doi factori.

În primul rînd, mișcarea circulară este foarte răspîndită. Punctele corpuriilor rigide ce se rotesc în jurul axelor fixe – ale turbinelor și rotoarelor stațiilor electrice, ale osiilor și roțiilor dințate ale strungurilor, ale aripilor morilor de vînt, ale acelor ceasornicului etc. – se mișcă pe cercuri. În al doilea rînd, orice traiectorie curbilinie poate fi prezentată ca una formată din porțiuni mici de arc de cerc (fig. 1.50). De aceea unele dintre afirmațiile ce se referă la mișcarea circulară sunt valabile și pentru mișcarea pe o traiectorie curbilinie oarecare.

Pentru a determina direcția vitezei momentane a mobilului ce se mișcă pe un cerc, admitem că în intervalul de timp  $\Delta t_1$  el s-a deplasat din poziția  $M_0$  în poziția  $M_1$  (fig. 1.51). Deplasarea mobilului este secanta  $\vec{\Delta s}_1 = \vec{M}_0 \vec{M}_1$ , iar viteza medie corespunzătoare  $\vec{\Delta V}_{\text{med}1} = \frac{\vec{\Delta s}_1}{\Delta t_1}$  are direcția acestei secante. Considerăm un interval de timp mai mic  $\Delta t_2 < \Delta t_1$ . La sfîrșitul acestuia, mobilul ocupă o poziție  $M_2$  mai aproape de poziția inițială  $M_0$ . Atât deplasarea  $\vec{\Delta s}_2$ , cât și viteza medie  $\vec{\Delta V}_{\text{med}2} = \frac{\vec{\Delta s}_2}{\Delta t_2}$  orientată de-a lungul secantei  $M_0 M_2$  au altă direcție, dar care trece prin aceeași poziție inițială  $M_0$ . Observăm că la micșorarea intervalului de timp unghiul  $\alpha$  dintre

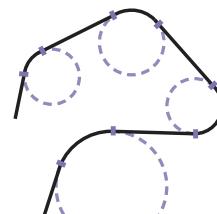


Fig. 1.50

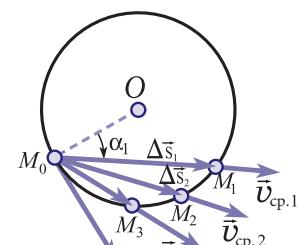


Fig. 1.51

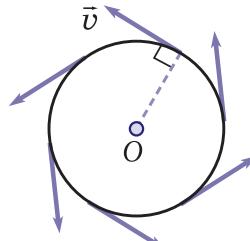


Fig. 1.52

\* În problemele 23–27 se va lua  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

viteza medie și raza  $M_0O$  a cercului se mărește. Acest unghi  $\alpha$  se apropiă tot mai mult de  $90^\circ$  pe măsură ce intervalul  $\Delta t$  devine tot mai mic. Conchidem că viteza momentană a mobilului este perpendiculară pe raza cercului pe care se mișcă, adică este orientată tangent la cerc (fig. 1.52).

Acest rezultat este valabil pentru orice mișcare curbilinie – **viteza momentană a mobilului este tangentă la traiectorie în punctul ocupat de acesta.**

Din figura 1.51 observăm, de asemenea, că diferența dintre modulul deplasării  $|\vec{\Delta s}|$  și distanța parcursă corespunzătoare  $\Delta l_i$  (lungimea arcului  $M_0M_i$ ) se micșorează concomitent cu micșorarea intervalului de timp. De aceea pentru modulul vitezei momentane putem scrie

$$v = \frac{|\vec{\Delta s}|}{\Delta t_i} = \frac{\Delta l}{\Delta t}, \quad (1.34)$$

unde intervalul  $\Delta t$  este foarte mic.

### Dacă în orice intervale egale de timp mobilul parurge distanțe egale, mișcarea circulară este uniformă.

Adică, în intervale mici de timp egale  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \dots$  mobilul parurge distanțe egale  $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 = \dots$ . În acest caz viteza momentană rămîne constantă în modul:

$$v = \frac{\Delta l_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta l_2}{\Delta t_2} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} = \dots = \text{const.}$$

### Mișcarea mobilului pe un cerc cu viteza constantă în modul este o mișcare circulară uniformă.

Pentru a caracteriza această mișcare, se introduc mărimi specifice. Cercul este o linie închisă și mișcarea mobilului se repetă după un anumit interval de timp caracteristic mișcării date. De exemplu, vîrful acului minutar după fiecare 3 600 s se află în fața cifrei 3 (sau a altei cifre).

### Intervalul minim de timp după care mișcarea mobilului se repetă întocmai, el trecind prin unul și același punct al cercului cu o viteza anumită, se numește perioadă de rotație $T$ sau perioadă.

Notăm cu  $\Delta t$  intervalul de timp în care mobilul efectuează  $N$  rotații complete în jurul centrului cercului, adică parurge  $N$  lungimi ale acestuia. În conformitate cu definiția, perioada de rotație este

$$T = \frac{\Delta t}{N}. \quad (1.35)$$

Mărimea egală cu numărul de rotații efectuat într-o unitate de timp este numită **frecvență de rotație  $v$** :

$$v = \frac{N}{\Delta t}. \quad (1.36)$$

Între frecvența de rotație și perioadă există o relație:

$$v = \frac{1}{T} \text{ și } T = \frac{1}{v}. \quad (1.37)$$

Unitățile acestor mărimi sunt:  $[T] = \text{s}$  și  $[v] = \text{s}^{-1}$ .

În tehnică se utilizează mărimea numită **turație**. Ea se notează cu  $n$  și este egală cu numărul de rotații complete într-un minut. Unitatea pentru turație este  $[n] = \frac{\text{rot.}}{\text{min.}}$ .

Noțiunile de perioadă și de frecvență de rotație au sens numai dacă mișcarea circulară este uniformă.

În cazul rigidului cu axă fixă de rotație, perioada, deci și frecvența de rotație, este aceeași pentru toate punctele lui, adică reprezintă o caracteristică unică pentru rigid. În caz contrar,

rigidul s-ar deforma, ceea ce contravine definiției rigidului.

Cunoașterea razei  $r$  a cercului descris de mobil și a perioadei  $T$  permite să se calculeze viteza mobilului. Într-o perioadă mobilul parcurge o distanță egală cu lungimea cercului  $l = 2\pi r$ , deci viteza lui

$$\mathbf{v} = \frac{l}{T} = \frac{2\pi r}{T}. \quad (1.38)$$

Ținând seama de relația (1.37), pentru viteza putem scrie

$$\mathbf{v} = 2\pi r v_r. \quad (1.39)$$

Expresiile pentru viteza demonstrează că vitezele punctelor rigidului sunt cu atât mai mari, cu cât ele se află la distanțe mai mari de axa de rotație.

### b. Accelerăția centripetă

Viteza mobilului în mișcare circulară uniformă, rămânind constantă în modul, variază după direcție. Cunoașteți că rapiditatea variației vitezei este caracterizată de accelerăție, a cărei definiție se dă de expresia (1.21):  $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ . Viteza mobilului în mișcare rectilinie uniformă variază direcție constantă, variază doar modulul ei. În cazul mișcării circulare uniforme a mobilului situația este inversă: variază direcția vitezei, modulul ei însă rămâne constant. Deci accelerăția mobilului în acest caz va avea o expresie deosebită de cea din mișcarea rectilinie uniformă variată.

Considerăm un mobil ce se mișcă cu viteza de modul constant egală cu  $v$  pe un cerc de rază  $r$ . Admitem că la momentul  $t_0$  mobilul ocupă poziția  $M_0$  și are viteza egală cu  $\vec{v}_0$ , iar la momentul  $t$  ocupă poziția  $M$  și are viteza egală cu  $\vec{v}$  (fig. 1.53). Pentru a determina variația vitezei  $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$  în intervalul de timp  $\Delta t = t - t_0$ , translăm vectorul  $\vec{v}$  paralel cu el însuși, astfel ca originea lui să coincidă cu originea vectorului  $\vec{v}_0$  (cu punctul  $M_0$ ). Vectorul diferență  $\Delta \vec{v}$  unește extremitățile vectorilor  $\vec{v}_0$  și  $\vec{v}$ . Acești vectori au module egale ( $|\vec{v}_0| = |\vec{v}| = v$ ), deci triunghiul  $M_0AB$  este isoscel. Vectorii vitezelor sunt perpendiculari pe razele pozițiilor corespunzătoare ale mobilului ( $\vec{v}_0 \perp M_0O$  și  $\vec{v} \perp MO$ ), deci unghiul  $AM_0B$  este egal cu unghiul  $\Delta\alpha$  dintre raze (fig. 1.53). La determinarea accelerăției, intervalul de timp  $\Delta t$  este considerat foarte mic, deci și unghiul  $\Delta\alpha$  este foarte mic. În acest caz arcul  $M_0M$  poate fi înlocuit cu secanta  $M_0M$ , a cărei lungime este modulul deplasării, egal cu distanța parcursă de mobil:  $M_0M = |\Delta \vec{s}| = \Delta l = v\Delta t$ . În această aproximare sectorul de cerc  $M_0OM$  poate fi considerat un triunghi isoscel. Astfel, s-au obținut două triunghiuri isoscele –  $M_0AB$  și  $OM_0M$  –, care au unghiiurile de la vîrf egale cu  $\Delta\alpha$ , deci triunghiurile sunt asemenea. Egalăm rapoartele laturilor corespunzătoare:

$$\frac{AB}{M_0A} = \frac{M_0M}{M_0O}.$$

După cum se vede din figura 1.53:  $AB = |\Delta \vec{v}|$ ,  $M_0A = |\vec{v}_0|$ ,  $M_0M = v\Delta t$  și  $M_0O = r$ . Egalitatea rapoartelor ia forma

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v} = \frac{v\Delta t}{r}.$$

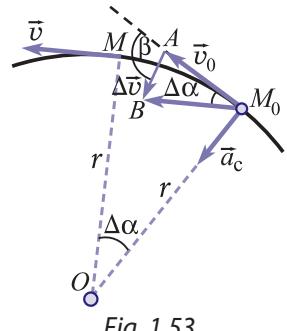


Fig. 1.53

De aici exprimăm modulul accelerării:

$$\mathbf{a} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}^2}{r}. \quad (1.40)$$

Accelerarea are direcția și sensul vectorului  $\Delta \vec{v}$ . Din figura 1.53 observăm că unghiul dintre vectorii  $\Delta \vec{v}$  și  $\vec{v}_0$  este egal cu  $\beta = 90^\circ + \frac{\Delta \alpha}{2}$ . Atunci cind intervalul de timp  $\Delta t$  este foarte mic, unghiul  $\Delta \alpha$  este și el foarte mic, deci unghiul  $\beta \approx 90^\circ$ . Prin urmare, pentru intervale  $\Delta t$  foarte mici vectorul  $\Delta \vec{v}$  este perpendicular pe vectorul vitezei  $\vec{v}_0$ , fiind orientat spre interiorul cercului. Deci vectorul accelerării, translat paralel cu originea în poziția  $M_0$  ocupată de mobil, este orientat spre centrul cercului, de aceea accelerarea mobilului în mișcare circulară uniformă se numește **accelerație centripetă**. Ea se notează cu  $a_c$ . Avem

$$a_c = \frac{\mathbf{v}^2}{r}. \quad (1.41)$$

Pornind de la expresiile (1.38) și (1.39) pentru viteza mobilului, transcriem expresia (1.41) astfel:

$$a_c = \frac{4\pi^2}{T^2} r = 4\pi^2 v^2 r. \quad (1.42)$$

Acstea relații arată că accelerarea centripetă a punctului unui corp rigid ce se rotește este direct proporțională cu distanța dintre punct și axa de rotație.

### c. Viteza unghiulară

Să examinăm un solid rigid cu axă fixă de rotație. Admitem că rotația acestuia este uniformă, adică punctele lui efectuează mișcări circulare uniforme. Distanțele parcuse de acestea în unul și același interval de timp, deci și vitezele, și accelerările lor sunt diferite, în funcție de distanțele punctelor de la axa de rotație.

Să luăm două puncte arbitrate,  $A$  și  $B$ , ale unui rigid cu axă fixă de rotație (fig. 1.54). Coborîm din aceste puncte perpendicularele  $AA_0$  și  $BB_0$  pe axa de rotație. În intervalul de timp  $\Delta t$  punctul  $A$  descrie arcul  $AA'$ , raza  $AA_0$  rotindu-se cu unghiul  $\Delta\alpha$ . În același timp, punctul  $B$  descrie un alt arc  $BB'$ , dar raza lui  $BB_0$  se rotește cu același unghi  $\Delta\alpha$ . Aceasta rezultă din faptul că corpul este rigid și distanțele dintre punctele lui nu se modifică în timpul mișcării.

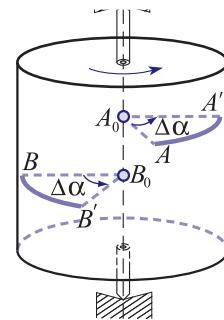


Fig. 1.54

**Unghiul  $\Delta\alpha$ , unic pentru toate punctele rigidului, este numit *unghi de rotație sau deplasare unghiulară* a rigidului.**

Pentru a caracteriza rapiditatea rotației rigidului, se introduce noțiunea de **viteză unghiulară momentană  $\omega$**  ca raport dintre unghiul de rotație  $\Delta\alpha$  și intervalul foarte mic de timp  $\Delta t$ :

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}. \quad (1.43)$$

Viteza unghiulară  $\omega$  caracterizează rotația corpului rigid, adică mișcarea circulară a tuturor punctelor sale.

Unghiiurile de rotație se exprimă în **radiani (rad)** (unghiul central care sprijină un arc de lungime egală cu raza cercului), deci viteza unghiulară se exprimă în rad/s. Radianul, ca raport al lungimii arcului la rază, este adimensional. La substituirea valorilor concrete ale vitezei unghiulare în formule termenul „rad” se omite.

Putem stabili ușor relația dintre viteza unghiulară  $\omega$  și perioada  $T$ . Într-un interval de timp de o perioadă,  $\Delta t = T$ , unghiul de rotație al corpului  $\Delta\alpha = 2\pi$ . Substituind aceste valori în definiția (1.43), obținem

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v, \quad (1.44)$$

unde s-a ținut seama de relația (1.37).

Pentru a nu confunda viteza unghiulară  $\omega$  cu viteza  $v$  a unui punct al rigidului, ultima este numită **viteză liniară**.

Formula (1.44) permite exprimarea vitezei liniare (1.39) și a accelerării centripete (1.41) prin viteza unghiulară:

$$v = \omega r, \quad a_c = \omega^2 r. \quad (1.45)$$

Mișcarea circulară uniformă, în care punctele corpului au viteze liniare constante în modul ( $v = \text{const.}$ ), poate fi definită ca rotație cu viteza unghiulară constantă ( $\omega = \text{const.}$ ).

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Care mișcare se numește circulară uniformă?
2. Ce reprezintă traiectoriile punctelor unui rigid cu axă fixă de rotație?
3. Care mișcări sunt numite periodice? Exemplificați.
4. Cum se definește perioada de rotație?
5. Care este direcția vectorului viteza medie a mobilului în mișcare circulară? Dar a celei momentane?
6. Cum este orientată accelerația mobilului în mișcare circulară uniformă? Ce unghi formează ea cu viteza momentană?
7. Cum se definește viteza unghiulară? Care este unitatea de viteza unghiulară?
8. Frecvența de rotație a unui disc de rază  $r = 0,2$  m este  $v = 15$   $\text{m/s}$ . Determinați viteza punctelor de la marginea discului.
9. Viteza punctelor de la marginea unui volant, al cărui diametru este  $d = 0,3$  m, are valoarea  $v = 1,57$   $\text{m/s}$ . Care este perioada de rotație a volantului?
10. Care este viteza unui punct de la ecuatorul Pământului, datorită rotației diurne a acestuia? Se va lua raza Pământului  $R = 6\ 400$  km.
11. Un punct al unui corp ce se rotește uniform în jurul unei axe fixe are viteza  $V_1 = 8$   $\text{m/s}$ , iar punctul situat cu  $d = 0,15$  m mai aproape de axă are viteza  $V_2 = 5$   $\text{m/s}$ . Care este distanța celui de-al doilea punct de la axa de rotație?
12. Acul minutар al unui ceasornic este de  $k = 3$  ori mai lung decât acul ce indică secundele. Calculați raportul vitezelor punctelor situate la capetele acestor ace.
13. Un biciclist parcurge un semicerc de rază  $r = 60$  m a unui traseu cu viteza  $v = 12$   $\text{m/s}$ . Care este accelerația centripetă a biciclistului?
14. Accelerația centripetă a unui mobil ce se mișcă pe un cerc cu viteza  $V_1 = 0,6$   $\text{m/s}$  este  $a_{c1} = 0,9$   $\text{m/s}^2$ . Care este accelerația centripetă a mobilului atunci cînd el se mișcă pe același cerc cu viteza  $V_2 = 0,8$   $\text{m/s}$ ?
15. Două roți, avînd razele  $r_1 = 5$  cm și  $r_2 = 15$  cm, sănt unite printr-o curea de transmisie. Să se determine viteza unghiulară a roții a două, știind că perioada de rotație a primei roți este  $T_1 = 0,628$  s.
16. Punctul de la marginea discului de rază  $r = 0,2$  m, ce se rotește uniform, are accelerația centripetă  $a_c = 1,8$   $\text{m/s}^2$ . Care este viteza unghiulară a discului?
17. Un punct al unui corp care se rotește are viteza  $v = 3,2$   $\text{m/s}$  și accelerația centripetă  $a_c = 25,6$   $\text{m/s}^2$ . Determinați viteza unghiulară a corpului și distanța dintre punctul considerat și axa de rotație.

## 1.9° MIŞCAREA CORPURILOR PE TRAJECTORII PARABOLICE

O formă de mișcare curbilinie o constituie și mișcarea punctului material lansat sub un unghi față de orizontală. Admitem că punctul material este lansat de la suprafața Pământului cu viteza  $\vec{v}_0$ , care formează un unghi  $\alpha$  cu orizontală. Luăm sistemul de coordonate cu originea O în locul de lansare, cu axa Ox orizontală și cu axa Oy verticală, astfel încât viteza inițială  $\vec{v}_0$  să se afle în planul de coordonate  $xOy$  (fig. 1.55).

Acceleratia corpului este egală cu acceleratia gravitațională  $\vec{g}$ , orientată vertical în jos. Astfel, proiecțiile acceleratiei corpului pe axe de coordonate sunt

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_y = -\mathbf{g}. \quad (1.46)$$

Pentru a analiza mișcarea corpului în planul  $xOy$  după lansare, vom descompune această mișcare în două mișcări componente de-a lungul celor două axe de coordonate, Ox și Oy (fig. 1.55).

Prima relație (1.46) arată că mișcarea corpului în direcția axei Ox este o mișcare uniformă. Viteza corpului  $v_x$  în această direcție rămîne constantă și egală cu viteza sa inițială  $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$  (fig. 1.55).

La momentul inițial coordonata  $x_0 = 0$ , deci pentru coordonata  $x$  a mobilului putem scrie în acord cu formula (1.11) pentru mișcarea rectilinie uniformă:  $x = v_x t = v_{0x} t \cdot \cos \alpha$ .

Mișcarea în direcția axei Oy este o mișcare a corpului lansat vertical în sus din origine cu viteza inițială  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$  (fig. 1.55). Substituind această valoare în formulele (1.29) și (1.30), obținem

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt,$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Astfel, în cazul unui corp lansat din originea coordonatelor cu viteza  $\vec{v}_0$ , care formează un unghi  $\alpha$  cu orizontală, avem expresiile următoare:

1) pentru proiecțiile vitezei:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad (1.47)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt; \quad (1.48)$$

2) pentru coordonate:

$$x = v_{0x} t \cos \alpha, \quad (1.49)$$

$$y = v_{0y} t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.50)$$

În primul rînd, stabilim forma traectoriei corpului. Pentru a obține ecuația ei, eliminăm timpul din ecuațiile (1.49) și (1.50). Avem  $t = \frac{x}{v_{0x} \cos \alpha}$ , apoi

$$y = \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_{0x}^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (1.51)$$

Aceasta este ecuația unei parabole avînd ramurile orientate în jos (coeficientul de pe lîngă  $x^2$  este negativ). Punctele de intersecție ale parbolei cu axa Ox (fig. 1.56) se determină din condiția  $y = 0$ . Obținem două valori:  $x_1 = 0$  și  $x_2 = \frac{2v_{0x}^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$ . Prima valoare indică

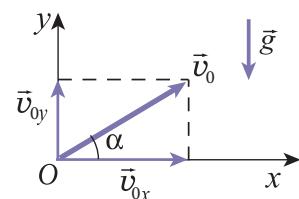


Fig. 1.55

faptul că lansarea corpului are loc din originea coordonatelor prin care trece parabola. A doua valoare exprimă distanța parcursă de mobil pe orizontală pînă la căderea pe Pămînt (fig. 1.56), numită bătaie:

$$L = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (1.52)$$

Această expresie arată că la viteza dată  $v_0$  bătaia maximă este atinsă atunci cînd unghiul  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  (deci  $\sin 2\alpha = 1$ ). Avem  $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$ .

Un alt punct caracteristic al parabolei este vîrful ei. După cum se vede din figura 1.56, coordonata  $y_m$  a acestui punct este înălțimea maximă  $H_{\max}$  atinsă de corp, iar coordonata  $x_m$  este distanța pe orizontală a acestui punct de la locul de lansare. Valorile acestor coordonate pot fi calculate în baza condiției că la înălțimea maximă viteza corpului pe verticală  $v_y$  este nulă,  $v_y = 0$ , condiție folosită și la determinarea înălțimii maxime a corpului lansat vertical în sus. Substituind  $v_y = 0$  în (1.48), obținem timpul de urcare:

$$t_u = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (1.53)$$

apoi din (1.50) înălțimea maximă:

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (1.54)$$

Pentru coordonata  $x_m$  din (1.49) și (1.53) avem  $x_m = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{L}{2}$ , ceea ce arată că parabola este simetrică față de dreapta  $x = x_m$ .

Timpul total de zbor  $t_t$  se obține din expresia (1.50) în care substituim coordonata punctului de cădere  $y = 0$ :

$$t_t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (1.55)$$

adică timpul total de zbor este de două ori mai mare decît timpul de urcare (1.53).

Substituind timpul (1.55) în expresia (1.49) a coordonatei  $x$ , obținem pentru bătaie expresia (1.52).

Unghiul  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  corespunde cazului particular al corpului lansat vertical în sus, iar formulele (1.53)–(1.55) trec în formulele (1.31)–(1.33) obținute pentru acest caz particular.

Expresiile (1.47) și (1.48) permit determinarea modulului vitezei corpului la orice moment de timp:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \quad (1.56)$$

și a unghiului  $\beta$  format de viteză cu orizontală. După cum se vede din figura 1.56:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha - gt}{v_0 \cos \alpha}. \quad (1.57)$$

Tinînd seama de expresia (1.53) pentru timpul de urcare  $t_u$ , observăm că  $\operatorname{tg} \beta > 0$  pentru  $t < t_u$  și  $\operatorname{tg} \beta < 0$  pentru  $t > t_u$ . Aceasta reiese și din forma traiectoriei (fig. 1.56), dacă luăm în considerare faptul că viteza momentană este tangentă la traiectorie.

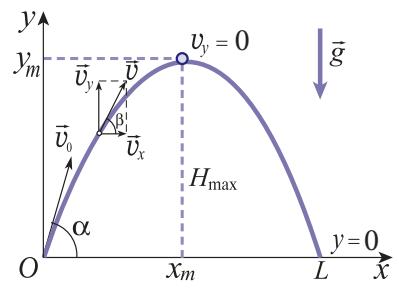


Fig. 1.56

Considerăm un caz mai general: un corp este lansat de la o anumită înălțime  $h_0$  cu viteza care formează un unghi  $\alpha$  cu orizontală (fig. 1.57). Unica modificare față de cazul precedent se produce în expresia (1.50) pentru coordonata  $y$ , care ia forma

$$y = h_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.58)$$

Să examinăm un caz particular: lansarea orizontală a corpului de la înălțimea  $h_0$  deasupra Pământului. Unghiul  $\alpha = 0$ , iar formulele (1.47)–(1.49) și (1.58) iau forma

$$\mathbf{v}_x = v_0, \quad \mathbf{v}_y = -gt, \quad (1.59)$$

$$x = v_0 t, \quad y = h_0 - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.60)$$

Acste expresii permit calcularea tuturor mărimilor ce se referă la corpul lansat orizontal.

Din analiza cazurilor de mișcare, studiate mai sus, conchidem că mișcarea corpului cu accelerare constantă ( $\vec{a} = \text{const.}$ ) este, în genere, o mișcare pe traiectorie parabolică. Doar în cazul particular, cînd viteza inițială  $\vec{V}$  este coliniară cu accelerarea constantă  $\vec{a}$ , mișcarea corpului este rectilinie uniform variată.

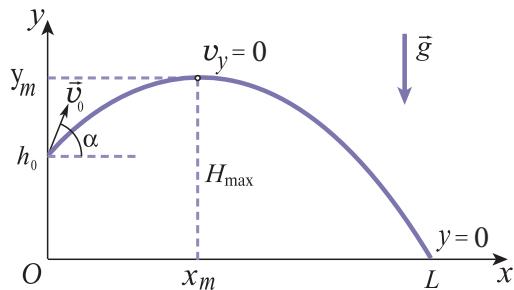
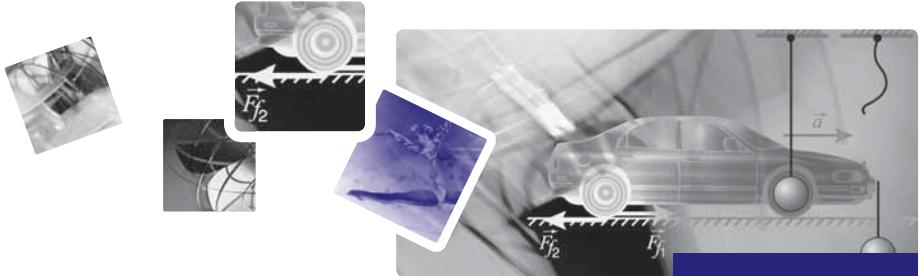


Fig. 1.57

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

- Obțineți expresia (1.54) pentru înălțimea maximă de zbor  $H_{\max}$ , pornind de la ecuația traiectoriei (1.51).
- Considerați două corpuri lansate de la suprafața Pământului cu viteze inițiale egale în modul, dar sub unghiuri diferite:  $\alpha_1 = \alpha$  și  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , unde  $\alpha < 45^\circ$ . Cum sunt bătăile acestor corpuri? Dar înălțimile maxime? Prin ce se deosebesc traiectoriile lor?
- Putem afirma că mișcarea cu accelerare constantă ( $\vec{a} = \text{const.}$ ) este totdeauna o mișcare rectilinie uniform accelerată? Argumentați răspunsul.
- Bătaia unui corp lansat cu viteza orizontală  $v_0 = 20$  m/s este egală cu înălțimea de la care a fost lansat. Determinați această înălțime.
- Un corp este lansat dintr-un turn cu viteza orizontală  $v_0 = 12$  m/s. Știind că viteza corpului la momentul atingerii solului formează un unghi  $\beta = 30^\circ$  cu verticala, determinați:
  - modulul vitezei corpului atunci cînd atinge solul;
  - intervalul de timp în care corpul a ajuns la sol;
  - înălțimea turnului de unde a fost lansat corpul;
  - distanța de la baza turnului pînă la locul unde corpul a atins solul.
- Cu ce viteză minimă trebuie aruncat oblic un corp pentru ca bătaia maximă a lui să fie  $L = 40$  m?
- Un copil aruncă o minge cu viteza  $v_0 = 20$  m/s, care formează un unghi  $\alpha = 60^\circ$  cu orizontală. Știind că după  $t = 2$  s mingea lovește un perete vertical, determinați înălțimea la care se află locul unde mingea a lovite peretele, viteza ei la momentul loviturii și unghiul format de ea cu orizontală.
- Un corp este aruncat de la înălțimea  $h_0 = 15$  m cu viteza  $v_0 = 40$  m/s care formează un unghi  $\alpha = 30^\circ$  cu orizontală. Să se determine:
  - înălțimea maximă la care urcă corpul;
  - intervalul de timp în care corpul ajunge la sol;
  - distanța parcursă de corp pe orizontală pînă la locul unde el a atins Pământul.



## Capitolul II

# PRINCIPIILE DINAMICII. FORȚELE NATURII

### 2.1 PRINCIPIUL INERTIEI. SISTEME DE REFERINȚĂ INERTIALE

La descrierea mișcării corpului, în cadrul cinematicii, s-a menționat că sistemul de referință se alege în funcție de preferință și poate fi legat cu orice alt corp. Astfel, din punctul de vedere al cinematicii, toate sistemele de referință sunt echivalente. Care este, din punctul de vedere al dinamicii, răspunsul la întrebările: „De ce corpul dat se mișcă anume în acest mod, și nu în altul? Există sisteme de referință preferențiale sau toate sistemele sunt echivalente?” Răspunsul la ultima întrebare a fost obținut pentru prima dată de către Galilei în urma analizei unor observații și experimente. Să examinăm unele dintre ele.

Luăm un uluc pe care-l fixăm puțin înclinat, astfel încât marginea inferioară a lui să se atingă de suprafața mesei (fig. 2.1). Din una și aceeași poziție de pe uluc va fi lăsată să se miște o bilă metalică. De fiecare dată însă masa se va acoperi cu un alt material pe care bila să-și continue mișcarea. După rostogolirea de pe uluc, se va măsura distanța parcursă de bilă pînă la oprire. Mai întîi, pe masă se așterne o bucată de țesătură de lînă, pe care bila parcurge o distanță  $l_1$ . În cazul în care în continuarea ulucului este pusă o bucată de carton, distanța  $l_2$  parcursă de bilă este mai mare:  $l_2 > l_1$ . Și mai mare este distanța  $l$ , parcursă de bilă pe o suprafață orizontală de sticlă (bila va cădea de pe sticlă dacă aceasta nu este suficient de lungă).

Aceste rezultate demonstrează că distanța parcursă de bilă pe orizontală depinde de proprietățile corpului pe care ea își continuă mișcarea, de calitățile suprafeței acestuia. Bila este oprită din mișcarea sa de corpul pe care se mișcă, precum și de aerul înconjurător. Cu cît suprafața este mai netedă, cu atît frînarea mișcării este mai mică, bila aflîndu-se în mișcare mai mult timp și parcurgînd o distanță mai mare.

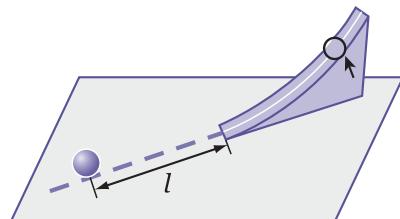


Fig. 2.1

Galilei a ajuns la concluzia: **bila nu se va opri niciodată din mișcarea sa rectilinie și uniformă, dacă nu va fi impusă de corpurile din jurul său.** Să ne imaginăm și un experiment „ideal” în acest sens: un corp se mișcă în vid având în calitate de suport o „pernă magnetică”. Vom constata că viteza acestui corp, practic, nu variază în timp, el mișcindu-se rectiliniu și uniform.

Să urmărim un alt experiment. Un cărucior încărcat se află în repaus pe o suprafață orizontală. Observăm că el continuă să se afle în repaus atât timp cât alte coruri nu acționează asupra lui (fig. 2.2, a). Pentru a-l pune în mișcare, adică a-l scoate din starea de repaus, este necesară o acțiune din exterior (fig. 2.2, b). Dacă însă căruciorul se mișcă, atunci pentru a-l opri este, de asemenea, necesară o anumită acțiune din exterior (fig. 2.2, c).

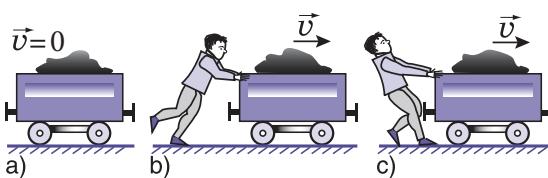


Fig. 2.2

În baza acestor experimente și a multor altora de acest gen se poate constata proprietatea corpurilor de a-și păstra starea de mișcare rectilinie uniformă sau de repaus atât timp cât alte coruri nu le impun să-și modifice această stare.

Proprietatea dată se numește **inertie**.

Această proprietate se manifestă în formă pură în cazul corpurilor libere, astfel fiind numite corurile care nu sunt acționate de alte coruri din exterior. În experimentele descrise bila sau căruciorul sunt acționate de Pămînt și de corpul pe care suprafață se află. Însă aceste acțiuni nu influențează starea de mișcare a corurilor cercetate, de aceea se spune că ele se **compensează** sau se **echilibrează**.

Pentru a ne convinge de existența compensării acțiunii corurilor, să analizăm experimentul următor (fig. 2.3). O bilă se află în repaus (fig. 2.3, a) sub acțiunea Pămîntului și a firului de care este suspendată. La tăierea firului (fig. 2.3, b), acțiunea acestuia este înălăturată, compensarea acțiunilor – dezechilibrată, bila cade pe pămînt, deci este scoasă din starea de repaus de acțiunea necompensată din partea Pămîntului.

Rezumînd cele expuse mai sus, ajungem la concluzia formulată pentru prima dată de către Galilei și preluată de către Newton în sistemul său de principii ale mecanicii în calitate de **principiul întii** sau **principiul inertiei**:

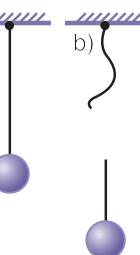


Fig. 2.3

**Orice corp continuă să-și păstreze starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă atât timp cât alte coruri nu acționează asupra lui și nu-l impun să-și modifice această stare.**

Experimentele descrise au fost efectuate și analizate în sistemul de referință legat cu Pămîntul, deci principiul formulat mai sus este valabil în acest sistem. Putem constata însă că există sisteme de referință în care principiul inertiei nu este valabil. De exemplu, un observator se află pe un disc rotitor sau în șaua de călușel (fig. 2.4). El vede pomii și casele din preajmă rotindu-se în jurul său fără ca asupra acestora să acționeze unele coruri în plan orizontal.

**Sistemele de referință în care este valabil principiul inertiei au fost numite sisteme de referință inerțiale sau galileene, iar cele în care acest principiu nu este valabil sunt**



Fig. 2.4

**numite neinertiale.** Pentru a stabili dacă sistemul de referință considerat este inertial sau nu, trebuie să se verifice experimental dacă principiul inerției se respectă sau nu față de acest sistem.

Din cele expuse mai sus reiese că sistemul de referință legat cu Pământul – numit și **geocentric** – este inertial. Însă trebuie să conștientizăm faptul că el este inertial doar aproximativ, deoarece toate corpurile de pe suprafața lui posedă accelerări centripetă datorită rotației diurne a Pământului. Aceasta însă este mult mai mică decât accelerarea gravitațională și în majoritatea problemelor de mișcare poate fi neglijată, iar sistemul de referință legat cu Pământul poate fi considerat inertial.

Cu un grad mult mai înalt de precizie este considerat inertial sistemul de referință care are originea în centrul Soarelui – sistemul **heliocentric** – și axele de coordonate orientate spre anumite stele.

În conformitate cu principiul inerției, starea de mișcare rectilinie uniformă a corpurilor este starea normală a acestora (despre astfel de corperi se spune că se mișcă în virtutea inerției). Ele nu pot să se afle decât în mișcare continuă. Corpurile care se află în repaus față de Pământ se rotesc în jurul axei lui, împreună cu Pământul se rotesc în jurul Soarelui, iar împreună cu acesta se mișcă în Univers.

În jurul nostru observăm frecvent că mișcarea corpurilor cu timpul încetează și ele se opresc. Aceasta însă nu contravine principiului inerției – mișcarea corpurilor încetează în urma acțiunii altor corperi din jur care impun corpurile în mișcare să-și micșoreze viteza treptat, pînă la oprire.

## ÎNTREBĂRI

- Prin ce se manifestă proprietatea de inerție a corpurilor? Aduceți exemple diferite de cele expuse în manual.
- În ce constă principiul inerției?
- Care sisteme de referință sunt inertiale?
- Cum se poate stabili dacă un sistem de referință este inertial?
- Realizați experimentul următor. Confectionați cîteva inele identice din hîrtie și o vergea subțire din lemn. Luati două suporturi și montați sistemul mecanic reprezentat

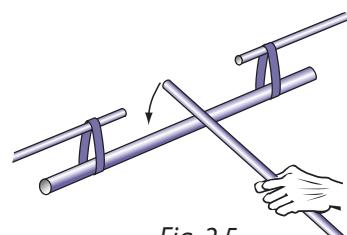


Fig. 2.5

în figura 2.5. Cu o vergea metalică apăsați ușor pe mijlocul vergelei de lemn, apoi apăsați din ce în ce mai puternic. La un moment dat observați că unul dintre inelele de hîrtie se rupe. Înlocuiți acest inel cu unul întreg și continuați experimentul. De această dată însă loviți brusc vergeaua de lemn cu cea metalică. Observați că în acest caz vergeaua de lemn se frînge, iar inelele de hîrtie rămîn întregi. Cum explicați acest fenomen?

- De ce înainte de a folosi termometrul medical, de obicei, îl scuturăți? Explicați fenomenul.

## 2.2 MASA ȘI FORȚA. PRINCIPIUL FUNDAMENTAL AL DINAMICII

### a. Interacțiuni fundamentale

Multitudinea de fenomene care au loc în Univers sunt determinate de interacțiunile dintre corperi. Datorită interacțiunii, corpurile cerești sunt amplasate într-o anumită ordine, iar structura substanței aflată în diferite stări este stabilă. Toate procesele care au loc în natură de asemenea sunt rezultatul interacțiunilor dintre corperi.

Chiar dacă substanța constă dintr-un număr foarte mare de particule diferite ce interacționează între ele, conform fizicii moderne, există doar patru tipuri de interacțiuni numite fundamentale: **gravitațională, electromagnetică, slabă și tare**.

*Interacțiunea gravitațională* este universală. Ea se manifestă între toate corpurile, însă devine substanțială pentru corpurile foarte mari din Univers sau pentru unul dintre ele (de exemplu, interacțiunea dintre un automobil și Pămînt). Datorită acestei interacțiuni, atmosfera, mările și oceanele, precum și toate corpurile din jurul nostru sănătății atrase de către Pămînt, Luna se rotește în jurul Pămîntului, iar Pămîntul împreună cu Luna – în jurul Soarelui.

*Interacțiunea electromagnetică* există între toate corpurile și particulele care posedă sarcină electrică. Această interacțiune determină comportamentul corpurilor macroscopice încărcate, al moleculelor, atomilor și ionilor din interiorul lor. Interacțiunea electromagnetică leagă electronii și nucleele în atomi și molecule, iar atomii și moleculele în diferite substanțe cu diverse proprietăți.

Atât interacțiunea electromagnetică, cât și cea gravitațională sunt interacțiuni la distanță. Intensitatea lor descrește lent odată cu mărirea distanței dintre particule sau corperi și au o rază de acțiune infinită.

*Interacțiunea slabă* este proprie tuturor particulelor elementare, cu excepția fotoniilor, și se manifestă în procesele de transformare reciprocă a acestora. Raza de acțiune a interacțiunilor slave este extrem de mică, ele au loc între particulele aflate la distanțe mai mici de  $10^{-18}$  m.

*Interacțiunea tare sau nucleară* se manifestă între particulele care constituie nucleele atomilor, menținându-le în stare legată și are o rază de acțiune de ordinul dimensiunii nucleelor și mai mică, adică de  $10^{-15}$  m.

Particulele care constituie nucleul atomic, protonii și neutronii, precum și particulele elementare vor fi studiate în clasa a XII-a.

## b. Masa

Cunoașteți faptul că inerția corpurilor este caracterizată de mărimea fizică numită **masă**. În cadrul experimentului ce urmează vom descoperi o metodă care permite compararea maselor diferitor corperi, de asemenea a maselor acestora cu masa unui corp ales ca etalon. Să urmărim două cărucioare care se pot mișca pe o porțiune rectilinie de drum neted. Fiecare cărucior are fixat pe el o bară magnetică de-a lungul direcției de mișcare și este dotat cu un accelerometru – aparat pentru determinarea accelerării cu care se mișcă căruciorul (accelerometrele se folosesc, îndeosebi, la vehiculele aeriene). Apropiem cărucioarele cu polii de același nume unul de altul (fig. 2.6, a). La un moment eliberăm cărucioarele: ele se resping și se îndepărtează unul de altul. Înregistram accelerările lor: la un moment (la o anumită distanță dintre ele) accelerările cărucioarelor sunt  $a_1$  și  $a_2$ , iar la un moment ulterior (la o distanță mai mare) valorile accelerărilor sunt  $a'_1$  și  $a'_2$ . Constatăm că  $a'_1 < a_1$  și  $a'_2 < a_2$ . Calculând rapoartele accelerărilor, obținem  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a'_2}{a'_1}$ .

Repetăm experimentul așezând cărucioarele cu polii de nume diferite unul spre altul (fig. 2.6, b). După eliberare, în urma atracției

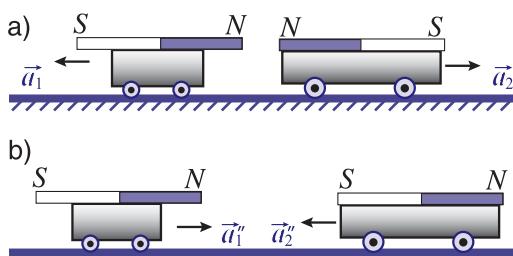


Fig. 2.6

magnetice, cărucioarele se apropiu unul de altul. La un anumit moment accelerăriile lor sunt egale cu  $a_1''$  și  $a_2''$ , iar la un moment ulterior (la o distanță mai mică) valorile accelerăriilor sunt  $a_1'''$  și  $a_2'''$ . Constatăm că  $a_1'' > a_1'''$  și  $a_2'' > a_2'''$ , iar rapoartele sunt egale:  $\frac{a_2''}{a_1''} = \frac{a_2'''}{a_1'''}$ .

Astfel, efectuând experimente de acest gen, observăm că de fiecare dată cînd accelerăția unui cărucior ia o valoare mai mare (mai mică), accelerăția celui de-al doilea, de asemenea, ia o valoare mai mare (mai mică), adică accelerăriile cărucioarelor se măresc sau se micșorează simultan.

Făcînd rapoartele accelerăriilor obținute de fiecare dată de către cărucioare, vom obține o legitate:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2'}{a_1'} = \frac{a_2''}{a_1''} = \dots, \quad (2.1)$$

adică **raportul accelerăriilor ale două corpuși ce interacționează ia o valoare constantă, independentă de caracterul interacțiunii lor.**

Despre corpul care în urma interacțiunii a obținut o accelerăție mai mică, adică se opune mai mult variației vitezei sale, se spune că este mai inert decît celălalt corp, adică are o masă mai mare. Această proprietate a corpurilor de a se opune variației vitezei lor este caracterizată de mărimea fizică scalară numită **masă** (sau **masă inertă**). Dacă notăm masele corpurilor ce interacționează între ele cu  $m_1$  și  $m_2$ , definim raportul lor prin relația

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}, \quad (2.2)$$

adică

**raportul maselor a două corpuși este egal cu raportul invers al accelerăriilor obținute de aceste corpuși ca rezultat al interacțiunii dintre ele.**

Astfel, în urma experimentului descris și în baza relației (2.2) pot fi determinate rapoartele dintre masele diferitor corpuși. Pentru a determina masa fiecărui corp în parte, este necesar să se considere un anumit corp drept etalon de masă, iar masa acestui etalon să fie luată în calitate de unitate de masă.

Un astfel de etalon de masă prezintă un cilindru confecționat dintr-un aliaj special din platină (90%) și iridiu (10%), al cărui diametru și înălțimea sunt egale cu 39 mm. Acest etalon se păstrează în condiții speciale (fig. 2.7) la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți de la Sèvres. Căpătii ale etalonului există în mai multe țări. Masa etalonului respectiv este considerată unitate de masă, fiind numită kilogram (kg), unitate fundamentală în Sistemul Internațional de unități SI.

Dacă determinăm accelerăția  $a$  a unui corp oarecare și accelerăția  $a_{et}$  a etalonului de masă, accelerării obținute în urma interacțiunii dintre ele, iar cu  $m$  și  $m_{et}$  notăm masele respective, atunci în conformitate cu (2.2) avem  $\frac{m}{m_{et}} = \frac{a_{et}}{a}$ .

Prin urmare, masa corpului

$$m = \frac{m_{et} a_{et}}{a}. \quad (2.3)$$

Cercetînd interacțiunea acestui corp (de masă deja cunoscută) cu altul și determinînd accelerăriile lor, putem afla masa celui de-al doilea corp etc.

Metoda descrisă de determinare a masei corpurilor nu este unică. În cazul corpurilor macroscopice cel mai frecvent este folosită cîntărirea corpurilor care are la bază

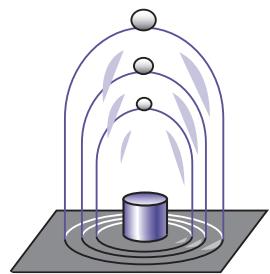


Fig. 2.7

compararea maselor după acțiunea produsă de Pămînt asupra corpurilor în cauză. Masele particulelor microscopice – molecule, atomi, electroni și.a. – se determină prin metode specifice.

Menționăm două proprietăți importante ale masei corpului:

1. Corpul format din corpurile de mase egale respectiv cu  $m_1, m_2, \dots, m_n$  se comportă asemenea unui corp de masă egală cu suma maselor corpurilor componente:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \dots + \mathbf{m}_n. \quad (2.4)$$

Această proprietate a masei se numește **aditivitate** (în lat. *additivus* „obținut prin adunare”).

2. În mecanică masa corpului este considerată o mărime constantă, independentă de sistemul de referință ales pentru descrierea mișcării lui. În 1905 s-a stabilit că această proprietate se manifestă numai la viteze ale corpurilor mult mai mici decât viteza luminii în vid care este  $c = 300\,000$  km/s.

### c. Forța

În urma interacțiunii dintre corperi, ele capătă accelerării. Prin urmare, dacă un corp se mișcă cu accelerări, aceasta îi este imprimată de un alt corp (sau de alte corperi), care acționează asupra corpului dat. Valoarea accelerării poate fi diferită, ceea ce indică faptul că acțiunile respective pot fi diferite.

**Mărimea fizică ce caracterizează cantitativ acțiunea unui corp asupra altuia se numește **forță**** (se notează, de obicei, cu  $\vec{F}$ ).

Forța este determinată de **punctul ei de aplicatie** (de corpul asupra căruia ea acționează), **de modul, direcție și sens**, deci este o mărime vectorială. Dreapta pe care este situat vectorul forței se numește **dreaptă-suport**. Unitatea de forță în SI este newtonul (N), care va fi definit ulterior.

În apropierea Pămîntului toate corpurile lăsate liber cad spre el cu una și aceeași accelerare gravitațională  $\vec{g}$  (vezi par. 1.7,  $g$ ). Ea este imprimată corpului de către Pămînt, manifestând acțiunea Pămîntului asupra corpului liber. Accelerarea gravitațională este orientată vertical în jos sau forță care o imprimă este orientată astfel. Forța ce acționează asupra corpului aflat în vecinătatea Pămîntului din partea acestuia și-i imprimă accelerarea gravitațională se numește **forță de greutate** (se notează cu  $\vec{G}$ ).

Considerăm un alt exemplu. Un resort are capătul superior fixat, iar cel inferior are un inel de care pot fi suspendate corperi cu cărlige (fig. 2.8, a). Notăm cu  $l_0$  lungimea acestui resort în stare nedeformată. La suspendarea de resort a unui corp cu cărlige, lungimea resortului crește cu  $\Delta l$  (fig. 2.8, b). Corpul suspendat se află în repaus, deci acțiunea Pămîntului asupra lui este echilibrată de acțiunea resortului deformat. Astfel, acțiunea corpurilor poate provoca deformarea altor corperi.

Asupra corpului suspendat acționează forță de greutate  $\vec{G}$  a Pămîntului, iar din partea resortului deformat – o forță  $\vec{F}_1$  orientată vertical în sus, numită **forță elastică**. Forța

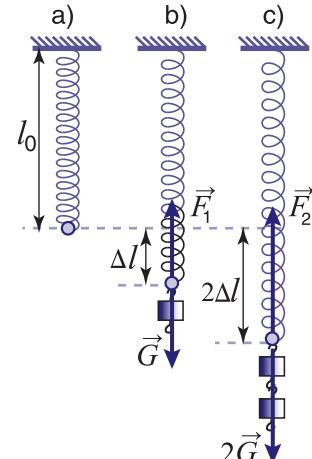


Fig. 2.8

elastică echilibrează forța de greutate, suma lor fiind nulă  $\vec{F}_1 + \vec{G} = 0$ . Aceste două forțe au module egale, aceeași dreaptă-suport și sensuri opuse. Punctele de aplicație a forțelor ce acționează asupra corpului, de fapt, sănătări, însă aproximarea utilizată în mecanică, conform căreia corpurile pot fi considerate puncte materiale, ne permite să reprezentăm toate forțele având un punct comun de aplicație.

Dacă suspendăm încă un corp, identic cu primul, alungirea resortului devine egală cu  $2\Delta l$  (fig. 2.8, c). Condiția de echilibru a corpurilor ia forma  $\vec{F}_2 + 2\vec{G} = 0$ , unde  $\vec{F}_2$  este forța elastică pentru acest caz. Observăm că dublarea forței de greutate este însoțită de dublarea forței elastice și de mărirea tot de două ori a alungirii resortului.

Prin urmare, resortul elastic poate fi utilizat la compararea valorilor forțelor. El este partea principală a dinamometrului (fig. 2.9) – dispozitiv folosit la măsurarea forțelor. Pe scara dinamometrului sunt indicate în newtoni valorile forțelor ce provoacă alungirile respective ale resortului.

Rezumînd cele expuse mai sus, constatăm că forța este o mărime fizică vectorială caracterizată de punctul de aplicație, de modul, direcție și sens. Acționînd asupra corpului, forța îi imprimă accelerăție sau îl deformează. Forța este determinată de două coruri: de corpul asupra căruia ea acționează și de corpul ce acționează cu această forță.

#### d. Principiul fundamental al dinamicii

Accelerăția corpului este imprimată de forță care acționează asupra lui. Experimentul următor demonstrează existența unei relații dintre aceste mărimi.

Cercetăm mișcarea unui cărucior pe o masă orizontală, netedă și lungă, la capătul căreia este fixat un scripete. Pe cărucior se află cîteva coruri identice cu cîrlige. De cărucior este legat un fir trecut peste scripete. Suspendăm unul dintre corpurile de pe cărucior de capătul liber al firului (fig. 2.10, a). Eliberăm căruciorul și determinăm timpul  $t_1$  în care el parcurge o distanță  $s_1$ . Repetăm experimentul și determinăm timpul  $t_2$  în care căruciorul parcurge distanța  $s_2$ . Se va constata egalitatea raportelor  $\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$ , adică distanța parcursă din stare de repaus este proporțională cu pătratul timpului. Această dependență este caracteristică mișcării uniform accelerate cu viteza inițială nulă:  $s = \frac{at^2}{2}$ . În baza datelor obținute, calculăm accelerăția  $a_1 = \frac{2s_1}{t_1^2}$  imprimată căruciorului de forța de greutate  $\vec{G}$  a unui corp suspendat.

Luăm încă un corp de pe cărucior și-l alăturăm corpului suspendat (fig. 2.10, b). Masa corpurilor aflate în mișcare a rămas aceeași, iar forța de greutate ce le imprimă accelerăție s-a dublat, a devenit egală cu  $2\vec{G}$ . Se constată că s-a dublat și accelerăția corpurilor:  $a_2 = 2a_1$ . Alăturînd la corpurile suspendate cel de-al treilea corp de pe cărucior, constatăm că forța de greutate  $3\vec{G}$  imprimă accelerăția  $a_3 = 3a_1$ . Prin urmare,



Fig. 2.9

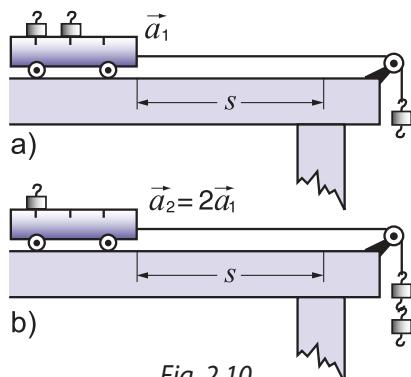


Fig. 2.10

accelerația sistemului de corpuri de masă constantă este direct proporțională cu forța care imprimă această accelerare:

$$a \sim F \text{ (pentru } m = \text{const.)}$$

Pentru a studia dependența accelerării de masa corpului (la forță dată), alăturăm la căruciorul de pe masă un cărucior identic cu el, ce are trei corpuri identice cu cele de pe primul. Astfel, masa sistemului de corpuri s-a dublat. Efectuând experimentul cu un corp suspendat, se obține o accelerare egală cu  $\frac{a_1}{m}$ , iar în cazul a două corpuri suspendate – o accelerare egală cu  $\frac{a_2}{m}$  etc. Prin urmare, una și aceeași forță imprimă sistemului de corpuri cu masa de două ori mai mare o accelerare de două ori mai mică, adică accelerarea este invers proporțională cu masa

$$a \sim \frac{1}{m} \text{ (pentru } F = \text{const.)}$$

Din rezultatele de mai sus obținem

$$a \sim \frac{F}{m} \text{ sau } ma \sim F.$$

Trecind la egalitate, trebuie să introducem un coeficient de proporționalitate care depinde de unitățile de măsură alese. În SI acest coeficient se consideră egal cu unitatea; prin urmare, relația obținută ia forma

$$ma = F. \quad (2.5)$$

Forța și accelerarea sunt mărimi vectoriale, au aceeași direcție și sens, deci relația (2.5) poate fi scrisă sub formă vectorială:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.6)$$

### Produsul dintre masa corpului și accelerarea lui este egal cu forța care imprimă corpului această accelerare.

Formularea dată exprimă principiul fundamental al dinamicii, numit și **principiul al doilea al dinamicii** sau **legea a doua a lui Newton**. În baza relației (2.6) poate fi determinată forța care acționează asupra corpului dacă este cunoscută mișcarea lui și invers, cunoscind forța, se poate determina accelerarea corpului, prin urmare, și caracterul mișcării lui.

În relația (2.5) se subînțelege că toate punctele corpului au accelerări egale, ceea ce se realizează doar în cazul în care corpul poate fi considerat un punct material sau un corp rigid aflat în mișcare de translație (în cazul corpului deformabil, distanțele dintre punctele lui variază în timp, deci vitezele și accelerările lor sunt diferite).

Substituind în relația (2.5) masa corpului  $m = 1 \text{ kg}$  și accelerarea  $a = 1 \text{ m/s}^2$ , obținem unitatea de forță în sistemul internațional de unități – newtonul (N):

$$[F] = [m] \cdot [a] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}.$$

**Newtonul este forța care imprimă corpului cu masa de 1 kg o accelerare egală cu 1 m/s<sup>2</sup>.**

Experimentele care ilustrează principiul fundamental al dinamicii au fost realizate în sistemul de referință legat cu Pământul, care este un sistem inerțial. Deci principiul dat este aplicabil numai în sisteme inerțiale de referință.

Dacă substituim forța  $\vec{F} = 0$  în relația (2.6), obținem accelerarea  $\vec{a} = 0$ , deci viteză corpului  $\vec{v} = \text{const.}$ , adică mișcarea lui este rectilinie și uniformă. Astfel, în lipsa acțiunii din exterior ( $\vec{F} = 0$ ), corpul se mișcă rectiliniu și uniform ( $\vec{v} = \text{const.}$ ). S-ar părea că principiul inerției constituie o consecință a principiului al doilea. Situația însă este alta: principiul fundamental este valabil numai în sisteme inerțiale, dar acestea pot fi

alese numai utilizînd principiul inerției. Prin urmare, concluzia că în lipsa acțiunilor din exterior corpul se mișcă rectiliniu și uniform demonstrează că primul și al doilea principiu ale dinamicii nu se contrazic, ci se află în concordanță.

### e.º Principiul suprapunerii forțelor

Relația (2.6) este stabilită pentru corpul asupra căruia acționează o singură forță. Cel mai frecvent însă corporile sănt supuse acțiunii mai multor forțe. Pentru a stabili cum se formulează principiul fundamental al dinamicii în acest caz, considerăm un corp de masă  $m$  asupra căruia acționează mai multe forțe:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ . Accelerările imprimate de aceste forțe sănt egale cu

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}, \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}, \dots, \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}. \quad (2.7)$$

Experimentul arată că:

**La acțiunea simultană a unui sistem de forțe, fiecare dintre ele imprimă corpului aceeași accelerare pe care o imprimă acțiونînd de una singură, iar accelerarea corpului este egală cu suma accelerărilor imprimate de fiecare forță:**

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n. \quad (2.8)$$

Acest rezultat a fost numit **principiul suprapunerii forțelor** sau **principiul independenței acțiunii forțelor**.

Substituind relațiile (2.7) în (2.8), obținem  $\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + \dots + \frac{\vec{F}_n}{m}$  sau

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (2.9)$$

Relația respectivă exprimă principiul fundamental al dinamicii generalizat pentru



**Isaac NEWTON** (1643–1727), savant englez

A obținut rezultate deosebite în mecanică, optică, astronomie și matematică.

Newton a generalizat cercetările predecesorilor săi și cele proprii în domeniul mecanicii și le-a expus în opera sa fundamentală „Principiile matematice ale filosofiei naturale” (1687), unde a enunțat pentru prima dată sistemul de trei principii (principiul inerției, principiul fundamental al dinamicii, principiul acțiunii și reacțiunii), care constituie temelia mecanicii, ulterior numită mecanică newtoniană sau clasică. În această lucrare a expus legea gravitației universale stabilită de el. În baza acestei

legi și a principiilor mecanicii a argumentat legile experimentale ale lui Kepler referitor la mișcarea planetelor, a explicitat legitățile mișcării Lunii, fluxurile și refluxurile, a dezvoltat teoria privind forma Pămîntului. Newton a stabilit expresia pentru forță de rezistență care acționează asupra corpului la mișcarea lui în lichide și gaze. A elaborat bazele calculului diferențial și integral.

În 1666, folosind o prismă cu trei fețe, a cercetat fenomenul dispersiei luminii. A studiat interferența și difracția luminii, culorile peliculelor subțiri și a descoperit inelele de interferență (inelele lui Newton). A construit un telescop reflector cu un sistem optic original (telescopul lui Newton), în care una dintre lentile a fost înlocuită cu o oglindă sferică concavă. Rezultatele cercetărilor în acest domeniu au fost expuse în lucrarea sa „Optica” (1704).

A. Einstein afirma că „Newton a fost primul care a încercat să formuleze legi simple pentru a determina mersul în timp al unei game largi de fenomene ale naturii” și „...lucrările sale au avut o influență puternică asupra concepției noastre despre natură”.

corpul supus acțiunii mai multor forțe.

Forța  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$  este rezultanta sistemului de forțe care acționează asupra corpului. Prin urmare:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.10)$$

**Produsul dintre masa și accelerăția corpului este egal cu rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra lui și-i imprimă această accelerăție.**

În figura 2.11 este ilustrată această afirmație pentru cazul în care asupra corpului acționează un sistem de două forțe.

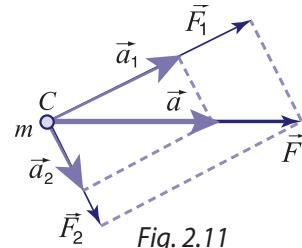


Fig. 2.11

### ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

- Care sunt interacțiunile fundamentale? Caracterizați-le.
- Caracterizați raportul accelerărilor a două corpuri obținute în urma interacțiunii dintre ele.
- Ce proprietate a corpului este caracterizată de masa lui?
- Ca rezultat al interacțiunii dintre două corpuri, accelerăția primului corp este de trei ori mai mare decât accelerăția corpului al doilea. Ce putem afirma referitor la masele acestor corpuri?
- Cum se poate determina masa unui corp?
- Ce înțelegeți prin faptul că masa este o mărime aditivă?
- Care este unitatea de forță în SI? Cum se definește ea?
- Din expresia principiului fundamental al dinamicii exprimăm masa corpului:  $m = \frac{F}{a}$ . Se poate oare afirma pe baza acestei relații că masa corpului este direct proporțională cu forța ce acționează asupra lui? Justificați răspunsul.
- În ce condiții corpul se mișcă uniform accelerat? Argumentați răspunsul pornind de la principiul fundamental al dinamicii.
- Se poate oare afirma că principiul inerției este o consecință a principiului fundamental al dinamicii? Argumentați răspunsul.
- Depinde oare accelerăția imprimată corpului de forță dată de alte forțe care acționează simultan asupra acestui corp?
- La interacțiunea dintre corpurile A și B accelerăția corpului A este de 3 ori mai mare decât a corpului B. Accelerăția obținută de corpul B în urma interacțiunii cu corpul C este de 2 ori mai mică decât cea a corpului C. Determinați masa corpului C dacă  $m_A = 0,4 \text{ kg}$ .
- Asupra unui corp acționează o forță al cărei modul este egal cu 42 N. Care este masa corpului dacă accelerăția ce-i este imprimată de această forță este egală cu  $6 \text{ m/s}^2$ ?
- O forță imprimă unui corp cu masa de 1,5 kg o accelerăție egală cu  $0,3 \text{ m/s}^2$ . Determinați masa corpului, căruia această forță îi imprimă o accelerăție egală cu  $0,4 \text{ m/s}^2$ .
- O forță de 15 N imprimă unui corp o accelerăție egală cu  $1,2 \text{ m/s}^2$ . Ce accelerăție imprimă acestui corp o forță egală cu 60 N?
- Un corp se mișcă rectiliniu având viteza egală cu  $4 \text{ m/s}$ . La un moment, asupra corpului începe să acționeze, în direcția vitezei lui, o forță egală cu  $0,8 \text{ N}$ . Ca rezultat, viteza corpului crește pînă la  $6 \text{ m/s}$  în timp ce el parcurge o distanță de 15 m. Determinați masa corpului.
- Rezultanta a două forțe reciproc perpendiculare este egală cu 10 N. Una din forțe este egală cu 6 N. Ce accelerăție imprimă forța a două unui corp cu masa de 4 kg?

## 2.3 PRINCIPIUL ACȚIUNII ȘI REACȚIUNII

Se știe că la interacțiune corporile acționează cu forțe unul asupra altuia. Există vreo relație între aceste forțe, iar dacă există, atunci care este ea?

Să pornim de la relația (2.2) dintre masele corporilor și accelerările obținute de acestea în urma interacțiunii:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \text{ sau } m_1 a_1 = m_2 a_2. \quad (2.11)$$

Din experimentul reprezentat în figura 2.6 se poate vedea că vectorii accelerărilor  $\vec{a}_1$  și  $\vec{a}_2$  au sensuri opuse, de aceea, trecind de la relația scalară (2.11) la relația vectorială, avem

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2. \quad (2.12)$$

În conformitate cu principiul fundamental (2.6), produsul  $m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{12}$  este forța care acționează asupra corpului 1 din partea corpului 2. Respectiv,  $m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{21}$  este forța ce acționează asupra corpului 2 din partea corpului 1, prin urmare, relația (2.12) ia forma

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.13)$$

Aceasta este expresia matematică a **principiului al treilea al dinamicii numit principiu acțiunii și reacțiunii**.

**Două corpi acționează unul asupra altuia cu forțe egale în modul, situate pe aceeași dreaptă-suport și orientate în sensuri opuse.**

Pentru a ilustra acest principiu, realizăm următorul experiment pentru efectuarea căruia sunt necesare cărucioare cu bare magnetice fixate pe ele. Cu ajutorul a două resorturi identice legăm cărucioarele de doi pereți verticali. Dacă situăm cărucioarele cu polii magnetici de același

număr unul spre altul (fig. 2.12, a), polii se resping și resorturile se comprimă la fel, adică forțele elastice  $\vec{F}_{e1} = -\vec{F}_{e2}$ . Notăm cu  $\vec{F}_{12}$  și  $\vec{F}_{21}$  forțele de interacțiune dintre magneti. Fiecare cărucior se află în repaus, prin urmare  $\vec{F}_{e1} + \vec{F}_{12} = 0$  și  $\vec{F}_{e2} + \vec{F}_{21} = 0$ , de unde rezultă  $\vec{F}_{e1} = -\vec{F}_{12}$  și  $\vec{F}_{e2} = -\vec{F}_{21}$ . Înținând seama de relația de mai sus dintre forțele elastice, obținem  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ , adică expresia (2.13).

Dacă situăm cărucioarele cu polii magnetici de număr diferite unul spre altul (fig. 2.12, b), constatăm că alungirile resorturilor sunt egale. Repetând raționamente similare celor din cazul precedent, se ajunge din nou la relația (2.13).

Rezultatul este același și la modificarea distanței dintre pereții verticali, de care este fixat cîte un capăt al resorturilor.

Să analizăm încă un exemplu: un corp de formă unui paralelipiped este așezat pe un burete aflat pe o masă (fig. 2.13). Asupra corpului acționează forța de greutate  $\vec{G}$  datorită atrac-

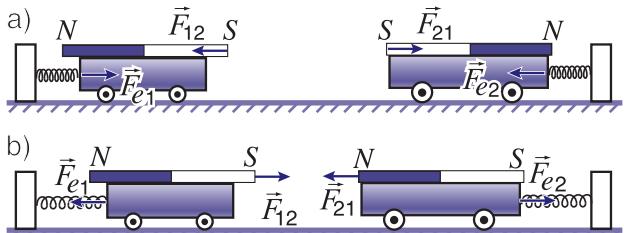


Fig. 2.12

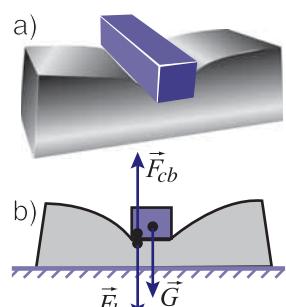


Fig. 2.13

ției exercitate de Pămînt, corpul aflându-se în repaus. Asupra lui acționează vertical în sus o forță  $\vec{F}_{cb}$  din partea buretelui, astfel încât  $\vec{G} + \vec{F}_{cb} = 0$ . Se observă că buretele este deformat, deci asupra lui acționează o forță  $\vec{F}_{bc}$  exercitată de corpul așezat pe el. Aceste forțe,  $\vec{F}_{cb}$  și  $\vec{F}_{bc}$ , satisfac relația (2.13), adică  $\vec{F}_{cb} = -\vec{F}_{bc}$ . Forța aplicată buretelui este numită, de obicei, acțiune, iar cea exercitată de burete asupra corpului a fost numită reacțiune.

În legătură cu acest principiu al dinamicii trebuie menționate următoarele:

1. Forțele de interacțiune dintre două corpuși au întotdeauna aceeași natură fizică: în primul exemplu forțele  $\vec{F}_{12}$  și  $\vec{F}_{21}$  constituie forțe magnetice, iar în exemplul al doilea forțele  $\vec{F}_{bc}$  și  $\vec{F}_{cb}$  sunt condiționate de deformările corpurilor ce interacționează.

2. Forțele de interacțiune se aplică la corpuși diferite și, prin urmare, nu se pot echilibra între ele.

3. Forțele de interacțiune apar simultan. Din acest punct de vedere, termenii „forță de acțiune” și „forță de reacțiune” nu sunt reuși, deoarece se creează impresia că mai întâi apare forță de acțiune, iar după un timp – forță de reacțiune. Dacă în cazul corpușului aflat pe un burete forța  $\vec{F}_{bc}$  aplicată buretelui este numită „forță de acțiune”, atunci forța  $\vec{F}_{cb}$  aplicată corpului poate fi numită „forță de reacțiune”. În cazul interacțiunii dintre barele magnetice însă nu se poate acorda o prioritate uneia din cele două forțe de interacțiune:  $\vec{F}_{12}$  și  $\vec{F}_{21}$ .

Cele trei principii ale dinamicii formulate mai sus nu sunt independente, ci constituie un sistem integrul de principii interdependente. Justețea acestor principii este confirmată de faptul că rezultatele obținute pe baza lor pentru sisteme mecanice concrete corespund realității.

## ÎNTREBĂRI

1. Este oare posibilă o situație în care un corp să acționeze asupra altuia, dar al doilea să nu acționeze asupra primului?
2. Se pot oare echilibra forțele de interacțiune dintre două corpuși? Argumentați răspunsul.
3. Un elev ține în mână un dinamometru și acționează asupra cîrligelor lui, întinzînd resortul, cu două forțe egale cu cîte 25 N. Care este indicația dinamometrului?
4. Un fir se rupe dacă suspendăm de el un corp a cărui forță de greutate este de cel puțin 15 N. Se va rupe firul întins dacă se aplică simultan la capetele lui forțe a cîte 10 N?

## 2.4º ATRACȚIA UNIVERSALĂ

### a. Legea atracției universale

Corpurile aflate în cădere liberă se mișcă accelerat. Din principiul doi al dinamicii rezultă că asupra lor acționează o forță oarecare din partea altui corp. Ce reprezintă această forță și care este natura ei? Întrucît toate corpurile din apropierea Pămîntului, indiferent de masa lor, au aceeași acceleratie  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , se poate presupune că ea este determinată de Pămînt și reprezintă o forță de atracție orientată spre centrul lui. Această forță a fost numită **forță de greutate**. Conform legii a doua a lui Newton, asupra unui corp de masă  $m$  aflat în cădere liberă acționează o forță de greutate  $\vec{G} = m\vec{g}$ .

Conform unei legende, observînd căderea unui măr, Newton și-a pus întrebarea: „Dacă mărul lăsat liber cade spre Pămînt, atunci Luna, care este de asemenea liberă, nu va cădea și ea în direcția Pămîntului?” Astfel, Newton a ajuns la concluzia că asupra Lunii trebuie să acționeze o forță care este de aceeași natură cu forța de greutate ce acționează asupra mărului. Ea a fost numită **forță gravitațională**. Anume acțiunea ei impune „căderea” permanentă a Lunii în direcția Pămîntului prin abaterea mișcării de pe o traiectorie rectilinie pe una aproape circulară. Într-adevăr, dacă n-ar acționa forță gravitațională, atunci peste un interval mic de timp, mișcîndu-se rectiliniu cu viteza  $\vec{v}$ , Luna ar ajunge în punctul A (fig. 2.14). Sub acțiunea ei însă Luna „cade” pînă în punctul B, parcurgînd distanța de cădere AB.

Pentru obținerea relației ce exprimă forța gravitațională, vom analiza acțiunea ei asupra corpuriilor de la suprafața Pămîntului și asupra Lunii. Cunoaștem deja că în condiții terestre această forță imprimă corpuri o accelerare  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , numită gravitațională. Accelerarea pe care o posedă Luna la mișcarea sa pe orbita aproape circulară este una centripetă și se determină din relația (1.42):

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2} r,$$

unde  $r$  este raza orbitei care reprezintă distanța dintre Pămînt și Lună, iar  $T$  este perioada de rotație a Lunii în jurul Pămîntului.

Distanța dintre Pămînt și Lună este  $r = 384\,403 \text{ km} \approx 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$ , iar perioada  $T = 27,3$  zile  $= 27,3 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}$ . Deci accelerarea centripetă a Lunii este egală cu

$$a_c = \frac{4\pi^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8}{(27,3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 2,72 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Se constată că accelerarea centripetă a Lunii este mult mai mică decît cea gravitațională la suprafața Pămîntului, iar raportul lor este

$$\frac{g}{a_c} = \frac{9,81}{2,72 \cdot 10^{-3}} \approx 3\,600.$$

Astfel, dacă la suprafața Pămîntului asupra unui corp acționează o forță gravitațională de o anumită valoare, atunci aceasta se micșorează de aproximativ 3 600 de ori cînd corpul este plasat pe traiectoria de mișcare a Lunii. Rezultă că forța gravitațională se micșorează simultan cu creșterea distanței dintre corpurile ce interacționează în conformitate cu o anumită legitate.

Pentru stabilirea acestei legități, Newton a presupus că Pămîntul se comportă ca și cum masa lui este concentrată într-un punct în centrul său. În acest caz distanța dintre Pămînt și un corp de pe suprafața lui este egală cu raza Pămîntului  $R = 6\,371 \text{ km} \approx 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ . Observăm că distanța dintre centrul Pămîntului și cel al Lunii este de aproximativ 60 de ori mai mare decît raza Pămîntului:  $\frac{r}{R} = \frac{3,84 \cdot 10^8 \text{ m}}{6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} \approx 60$ . Comparînd aceste două raporturi, Newton a ajuns la concluzia că  $\frac{g}{a_c} = \left[ \frac{r}{R} \right]^2$  și că accelerarea centripetă imprimată Lunii de forță gravitațională a Pămîntului este  $a_c = \frac{g R^2}{r^2}$ .

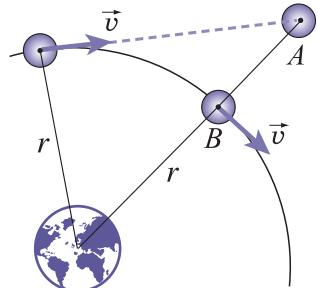


Fig. 2.14

În baza rezultatelor obținute din analiza mișcării Lunii în jurul Pământului, Newton a presupus că toate corpurile din Univers se atrag reciproc cu o anumită forță gravitațională care le imprimă o accelerare invers proporțională cu pătratul distanței  $r$  dintre ele:

$$\mathbf{a} \sim \frac{1}{r^2}. \quad (2.14)$$

Conform principiului doi al dinamicii,  $F \sim a$  și luând în considerare (2.14), rezultă că  $F \sim 1/r^2$ . Se poate demonstra că această forță mai este proporțională și cu produsul dintre masele corpurilor ce interacționează.

Astfel, în anul 1687, Newton formulează **legea atracției universale**:

**Forța gravitațională ce acționează între două coruri punctiforme din Univers este direct proporțională cu produsul dintre masele lor, invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele și este orientată de-a lungul dreptei ce unește centrele corurilor.**

$$\mathbf{F} = K \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.15)$$

Interacțiunea gravitațională dintre coruri reprezintă întotdeauna o pereche de forțe acțiune–reație. Corpul de masă  $m_1$  acționează asupra corpului având masa  $m_2$  cu o forță  $\vec{F}_{21}$  orientată de la corpul 2 spre corpul 1 (fig. 2.15). În același timp, corpul cu masa  $m_2$  acționează asupra celui de masă  $m_1$  cu forța  $\vec{F}_{12}$  de sens opus cu  $\vec{F}_{21}$ , dar egale în modul.

Legea atracției universale a fost formulată pentru coruri punctiforme, adică coruri cu dimensiunile mult mai mici decât distanța dintre ele. Se poate însă demonstra că ea este valabilă și în cazul corurilor sferice omogene,  $r$  fiind distanța dintre centrele lor.

Constanta  $K$  din (2.15) are una și aceeași valoare pentru oricare două coruri din Univers și este numită **constantă a gravitației universale sau constantă gravitațională**. Ea este numeric egală cu forța de interacțiune, exprimată în newtoni, dintre două coruri punctiforme cu masa de 1 kg fiecare și situate la distanța de 1 m unul față de celălalt. În SI unitatea ei este

$$[K] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} = \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}.$$

Valoarea numerică a constantei gravitației universale a fost determinată experimental pentru prima dată în anul 1798 de către fizicianul și chimistul englez Henry Cavendish (1731–1810). În acest scop, el a folosit o balanță de torsion, principiul de funcționare al căreia este reprezentat schematic în figura 2.16. La capetele unei tije ușoare 1 sunt fixate două bile mici de plumb, fiecare cu diametrul de 5 cm și masa  $m = 0,775$  kg. Tija este suspendată cu ajutorul unui fir subțire elastic 2, pe care se află fixată o oglindă mică 3. În vecinătatea bilelor mici se aduc două bile mari de plumb cu diametrul de 20 cm și masa  $M = 49,5$  kg. În urma atracției dintre cele două perechi de coruri cu masele  $m$  și  $M$ , bilele mici se mișcă spre cele mari, răsucind puțin firul vertical 2. Unghiul de răsucire al firului se măsoară cu ajutorul unei

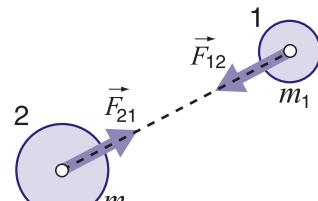


Fig. 2.15

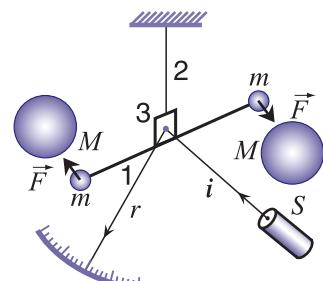


Fig. 2.16

raze de lumină  $i$  provenită de la sursa  $S$  și reflectată de la oglinda 3 pe o scară gradată. Determinând acest unghi, care este proporțional cu forța de atracție dintre bile, Cavendish a obținut valoarea constantei  $K$  ce s-a dovedit a fi foarte mică:

$$K = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}. \quad (2.16)$$

Aceasta înseamnă că două corpuri cu masele de cîte 1 kg, aflate la 1 m distanță unul față de altul, se atrag cu o forță de  $6,67 \cdot 10^{-11}$  N.

Rezultatul obținut de Cavendish a fost confirmat de multe alte experimente de acest gen. S-a constatat că valoarea constantei gravitației universale nu depinde nici de natura corpuriilor, nici de proprietățile mediului în care ele se află și este întotdeauna aceeași.

### b. Cîmpul gravitațional

Se știe că forța reprezintă acțiunea pe care o exercită un corp asupra altuia fie printr-un contact direct, fie prin intermediul unor legături materiale (tije, fire etc.). De exemplu, un fotbalist acționează cu o anumită forță asupra mingii numai în momentul loviturii, iar o macara ridică greutățile prin intermediul unui cablu. O situație diferită prezintă însă acțiunea forțelor gravitaționale ce se manifestă între corpurile aflate la distanță. Cum se transmite acțiunea în acest caz? Inițial a fost înaintată concepția, conform căreia interacțiunea dintre corpuri se produce instantaneu, iar spațiul dintre ele este un mediu nematerial care nu o influențează în niciun mod. Cu toate că această concepție presupune existența mișcării fără materie, ceea ce este absurd, ea a dominat în fizică mai mult de un secol și constituie esența așa-numitei teorii a acțiunii la distanță.

Ideea existenței unui mediu material prin intermediul căruia se realizează interacțiunea dintre corpurile aflate la distanță aparține lui Michael Faraday (1791–1867). În anii '30 ai secolului al XIX-lea, cercetând interacțiunea sarcinilor electrice, Faraday introduce noțiunea de cîmp, care mai tîrziu a fost aplicată și la studiul interacțiunii gravitaționale. Conform acestei noțiuni, un corp oarecare nu acționează direct asupra altui corp, ci atribuie spațiului înconjurător proprietăți deosebite, transformîndu-l într-un mediu material care realizează această acțiune. Astfel, materia poate exista sub două forme distincte: de substanță și de cîmp. Spre deosebire de substanță, cîmpul nu poate fi sesizat cu organele de simț și despre existența lui se poate judeca numai după acțiunea exercitată asupra altor corpuri. Așadar, **cîmpul gravitațional este o formă de existență a materiei**, prin intermediul căruia se exercită interacțiunea corpuriilor în conformitate cu legea atracției universale.

Pentru descrierea cantitativă a acestui cîmp, se introduce noțiunea de **intensitate a cîmpului gravitațional**.

**Mărimea fizică vectorială egală cu raportul dintre forță gravitațională ce acționează asupra unui corp și masa acestuia se numește intensitate a cîmpului gravitațional.**

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.17)$$

În SI intensitatea cîmpului gravitațional se exprimă în N/kg.

Pentru determinarea intensității cîmpului gravitațional  $\vec{g}$  într-un punct arbitrar al spațiului, se măsoară forța  $\vec{F}$  ce acționează asupra unui corp punctiform cu masa  $m$ ,

numit **corp de probă**. În cazul în care corpul generator de câmp este punctiform și are masa  $M$  din (2.15) și (2.17), pentru modulul intensității câmpului gravitațional obținem

$$\Gamma = K \frac{M}{r^2}, \quad (2.18)$$

de unde se observă că intensitatea câmpului nu depinde de masa corpului de probă, ci numai de masa  $M$  a corpului care generează câmpul și de distanța  $r$  de la acesta.

Dacă în punctul dat câmpul este creat de mai multe corperi, atunci intensitatea lui  $\vec{\Gamma}$  este egală cu suma geometrică a intensităților câmpurilor generate de fiecare corp aparte:

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2 + \dots + \vec{\Gamma}_n. \quad (2.19)$$

Relația (2.19) constituie **principiul superpoziției** sau **suprapunerii** câmpurilor gravitaționale. Forța gravitațională este orientată întotdeauna spre centrul corpului generator de câmp, de aceea câmpul gravitațional este numit **central** sau **radial**.

Să analizăm mai detaliat câmpul gravitațional al Pământului considerînd un corp de probă cu masa  $m$  situat la suprafața lui. Egalind forța de greutate  $G = mg$  ce acționează asupra corpului de probă cu forța gravitațională  $F$  din legea atracției universale (2.15), obținem relația

$$g = K \frac{M_p}{R^2}, \quad (2.20)$$

unde  $M_p$  și  $R$  sînt, respectiv, masa și raza Pământului.

Comparînd (2.18) cu (2.20), constatăm că în condiții terestre accelerăția gravitațională coincide cu intensitatea câmpului gravitațional și nu depinde de masa corpului din acest câmp. Iată de ce în experiențele lui Galilei toate corpurile, indiferent de masa lor, cădeau cu una și aceeași accelerăție  $g$ .

Dacă corpul de probă se află la o înălțime  $h$  de la suprafața Pământului, atunci distanța de la centrul acestuia este egală cu  $(R + h)$  și în locul formulei (2.20) pentru accelerăția gravitațională la înălțimea  $h$  avem

$$g_h = K \frac{M_p}{(R+h)^2}. \quad (2.21)$$

Din (2.21) rezultă că atît forța de greutate  $G_h = mg_h$ , cît și accelerăția gravitațională  $g_h$  se micșorează odată cu îndepărțarea corpului de suprafața Pământului.

Făcînd raportul relațiilor (2.21) și (2.20), obținem  $\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$  sau

$$g_h = g \frac{R^2}{(R+h)^2}. \quad (2.22)$$

Deoarece raza Pământului este  $R = 6\ 371$  km, din această formulă reiese că, pînă și la înălțimi de sute de kilometri, accelerăția gravitațională nu suferă modificări esențiale. Așadar, pentru înălțimi mult mai mici decît raza Pământului  $g_h \approx g = \text{const.}$

### c. Sateliți artificiali

Să analizăm mișcarea unui corp cu masa  $m$  în câmpul gravitațional terestru. Dacă corpul este lăsat liber într-un punct  $A$  la înălțimea  $h$  deasupra Pământului (fig. 2.17), el se mișcă de-a lungul direcției razei acestuia și cade în punctul  $B$  de pe suprafața lui. Să presupunem că în punctul  $A$  corpul posedă o viteza  $\vec{v}_A$  orientată perpendicular pe

direcția verticală. În acest caz corpul descrie o traiectorie parabolică și cade în punctul  $B_1$ . Dacă viteza  $v_A$  se mărește, atunci corpul cade în puncte tot mai îndepărtate de  $B$ , pînă cînd pentru o viteza  $v_A = v_h$  el nu mai ajunge pe Pămînt, ci se deplasează pe o traiectorie circulară de rază  $r = R + h$ . Astfel, mișcarea corpului devine asemănătoare cu mișcarea Lunii (satelit natural al Pămîntului), acesta fiind numit satelit artificial.

Să determinăm viteza  $v_h$  pentru care un corp oarecare devine satelit artificial. În acest scop, stabilim că unica forță ce acționează asupra lui este forța gravitațională  $F = mg_h$  care-i imprimă o accelerație centripetă  $a_c = v_h^2/r$ . Din principiul fundamental al dinamicii  $F = ma_c$  avem  $mg_h = m \frac{v_h^2}{R+h}$ , de unde rezultă

$$v_h = \sqrt{g_h(R+h)}. \quad (2.23)$$

Substituind  $g_h$  conform formulei (2.22) din (2.23), obținem

$$v_h = R \sqrt{\frac{g}{R+h}}. \quad (2.24)$$

Viteza care trebuie imprimată corpului în direcția perpendiculară pe raza cercului pe care el se va deplasa devenind satelit artificial depinde de înălțimea lui  $h$  deasupra suprafeței terestre. Dacă satelitul artificial se mișcă pe o traiectorie circulară din apropierea Pămîntului, adică  $h \ll R$ , atunci viteza lui este

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{m}} \approx 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

și se numește **prima vitează cosmică**. Perioada de rotație (numită în astronomie și perioadă de revoluție) a acestui satelit, adică timpul unei rotații complete în jurul Pămîntului, are valoarea  $T = \frac{2\pi R}{v_1} \approx 84$  min.

În cazul în care viteza de lansare a satelitului este mai mare decît prima vitează cosmică  $v_1$ , traiectoria lui se transformă într-o elipsă (fig. 2.17). Odată cu creșterea vitezei de lansare apare posibilitatea învingerii cîmpului gravitațional terestru. Viteza minimă la care un corp poate părăsi regiunea de atracție a Pămîntului este  $v_{II} = \sqrt{2} v_1 \approx 11,2$  km/s și se numește **a doua vitează cosmică**. În acest caz, traiectoria corpului degeneră din elipsă în parabolă și el nu se mai poate întoarce pe Pămînt (fig. 2.17). Astfel, corpul poate ajunge în cîmpul de gravitație al unei alte planete din sistemul solar și, după o anumită modificare a vitezei lui, devine satelit artificial al acesteia.

Este cunoscută și a **treia vitează cosmică**  $v_{III} = 16,7$  km/s, cînd corpul se mișcă pe o traiectorie hiperbolică (fig. 2.17). Ea reprezintă viteza minimă necesară pentru lansarea unui corp de pe Pămînt pentru ca acesta să poată părăsi sistemul solar.

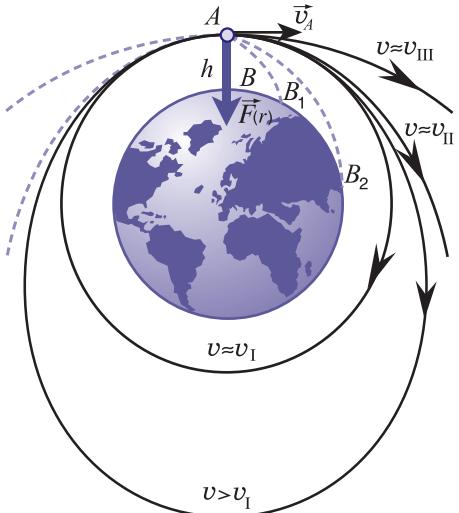


Fig. 2.17

■

Un rol deosebit pentru asigurarea sistemelor de comunicații intercontinentale îl au așa-numiții **sateliți sincronici sau geostaționari** (fig. 2.18). Un satelit sincronic se mișcă pe o orbită circulară, astfel încât perioada lui de rotație coincide cu perioada de rotație a Pământului în jurul axei sale. În acest caz, satelitul rămîne tot timpul deasupra unui și același punct al Pământului, adică se află pe o orbită geostaționară. Întrucât Pământul face o rotație completă în  $T_0 = 24$  de ore, iar  $v_h = \frac{2\pi}{T_0}(R + h)$ , din (2.24) obținem

$$\frac{4\pi^2(R+h)^2}{T_0^2} = \frac{R^2g}{R+h},$$

de unde rezultă că înălțimea  $h$  a satelitului sincronic deasupra Pământului este

$$h = \sqrt[3]{\frac{R^2 T_0^2 g}{4\pi^2}} - R \approx 35\,850 \text{ km} \approx 5,6R.$$

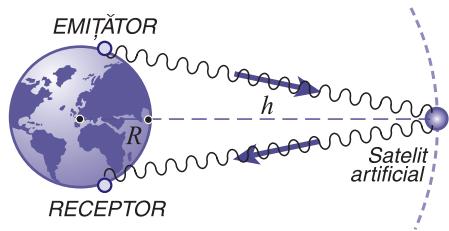


Fig. 2.18

## PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Raza planetei Neptun este de  $k = 3,6$  ori mai mare decît raza Pământului, iar densitatea de  $n = 2,4$  ori mai mică. Să se determine accelerarea gravitațională la suprafața planetei Neptun.

### REZOLVARE

Conform relației (2.20), accelerarea gravitațională la suprafața Pământului

**Se dă:**  $k = R_N/R_P = 3,6$ ,  $n = \rho_P/\rho_N = 2,4$ ,

$$\frac{g_P = 9,81 \text{ m/s}^2}{g_N - ?}$$

este  $g_P = K \frac{M_P}{R_P^2}$ . Considerînd Pământul de formă sferică cu volumul

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$  și exprimînd masa  $M_P = \rho_P V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_P$ , obținem

$g_P = \frac{K}{R_P^2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_P = \frac{4}{3}\pi K R_P \rho_P$ . Analogic pentru accelerarea gravita-

țională la suprafața planetei Neptun avem  $g_N = \frac{4}{3}\pi K R_N \rho_N$ . Făcînd raportul

ultimelor două relații, obținem  $\frac{g_N}{g_P} = \frac{R_N \rho_N}{R_P \rho_P} = \frac{k}{n}$ , de unde  $g_N = \frac{k}{n} g_P = \frac{3,6}{2,4} \cdot 9,81 \approx 14,7 \text{ m/s}^2$ .

## ÎNTRĂBĂRI ȘI PROBLEME

1. Formulați legea atracției universale și explicați cum este orientată forța gravitațională.
2. Care este sensul fizic al constantei gravitației universale și în ce unități se exprimă?
3. Descrieți metoda lui Cavendish de determinare a constantei gravitației universale.
4. Ce este cîmpul gravitațional?
5. Cum se definește intensitatea cîmpului gravitațional?
6. De ce accelerarea gravitațională în apropierea Pământului este aceeași pentru orice corp?
7. Care este expresia pentru accelerarea gravitațională a unui corp aflat la o înălțime oarecare deasupra Pământului? Explicați cum depinde ea de această înălțime.
8. Ce reprezintă prima viteză cosmică? Dar a doua?
9. Care satelit artificial este numit sincronic?
10. Calculați masa Pământului, dacă se cunoaște raza lui  $R = 6\,370 \text{ km}$  și accelerarea gravitațională  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

11. Să se determine masa Soarelui, dacă se cunoaște viteza de mișcare a Pământului în jurul lui  $V = 30 \text{ km/s}$  și raza orbitei pămîntești  $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .
12. Perioada de revoluție a Lunii în jurul Pământului este  $T = 27$  de zile. Determinați raza orbitei pe care se mișcă Luna.
13. Un asteroid de formă sferică cu densitatea  $\rho = 3,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  are raza  $R = 30 \text{ km}$ . Să se determine accelerația gravitațională la suprafața asteroidului.
14. Determinați prima viteză cosmică în condițiile planetei Marte, considerind raza ei de 3 400 km, iar accelerația gravitațională la suprafața planetei egală cu  $3,8 \text{ m/s}^2$ .
15. Un satelit artificial se află pe o orbită circulară la înălțimea  $h = 3 R$ , unde  $R$  este raza Pământului. De câte ori perioada de revoluție a satelitului pe această orbită este mai mare decât perioada de revoluție de pe o orbită din apropierea Pământului?

## 2.5 FORȚA ELASTICĂ. MIȘCAREA SUB ACȚIUNEA FORȚEI ELASTICE

Dacă asupra unui corp acționează forțe exterioare, atunci el se poate deforma, adică își poate modifica dimensiunile sau/și forma. În multe cazuri odată cu încetarea acțiunii forței exterioare, deformarea dispare complet sau parțial. Reiese că există o forță care, conform principiului acțiunii și reacțiunii, este egală în modul cu cea exterioară și care înălță deformarea produsă. Ea este numită **forță elastică** și reprezintă o manifestare a structurii interne a corpului. Într-adevăr, orice corp constă din atomi și molecule, iar atomii, la rîndul lor, sunt compuși din nucleu cu sarcină pozitivă și electroni cu sarcină negativă. Astfel, între atomii oricărui corp acționează forțe de interacție electrică, care determină realizarea unei stări de echilibru stabil cînd forțele de atracție și cele de respingere dintre nucleele și electronii atomilor vecini devin egale. În urma acțiunii forțelor exterioare, distanțele dintre atomi se modifică și rezultanta forțelor de atracție și a celor de respingere capătă o valoare diferită de zero. Ea este egală în modul cu forța exterioară, are sensul contrar și tinde să restabilească starea de echilibru inițială. Dacă, de exemplu, sub acțiunea unei forțe exterioare corpul a fost comprimat, atunci distanța dintre atomi a devenit mai mică și între ei predomină forțele de respingere care îi readuc la poziția lor de echilibru stabil, iar corpul își restabilește forma și dimensiunile inițiale.

Așadar:

**Forța elastică este o forță de natură electrică, care ia naștere la deformarea corpurilor și are în totdeauna sensul contrar deplasării reciproce a particulelor lui.**

Pentru stabilirea unei relații cantitative dintre mărimea deformării și forța de elasticitate, vom cerceta deformarea de alungire a unui fir elastic de lungimea  $l_0$  și aria secțiunii transversale  $S_0$ , ce se produce sub acțiunea forței deformatoare  $F$ . Diferența  $l - l_0 = \Delta l$  este numită **alungire absolută** și caracterizează mărimea acestei deformări. Experimental, se constată că alungirea absolută depinde atât de dimensiunile geometrice ale firului, cât și de valoarea forței deformatoare. Într-adevăr, pentru una și aceeași valoare a forței deformatoare  $F$ , un fir de lungime  $l_0$  se alungește cu  $\Delta l$ , iar altul din același material de lungime  $2l_0$  – cu  $2\Delta l$ . Rezultă că  $\Delta l \sim l_0$ :

**alungirea este direct proporțională cu lungimea inițială.**

Un fir cu aria secțiunii transversale  $S_0$  se alungește cu  $\Delta l$ , iar altul din același material și cu aceeași lungime  $l_0$ , dar cu aria secțiunii  $2S_0$  – cu  $\Delta l/2$ . Rezultă că  $\Delta l \sim 1/S_0$ :

### ■ alungirea este invers proporțională cu aria secțiunii transversale.

Modificând valoarea forței deformatoare de un anumit număr de ori, se constată că în limitele deformațiilor mici de același număr de ori se modifică și alungirea absolută, deci  $\Delta l \sim F$ :

### ■ alungirea este direct proporțională cu forța deformatoare.

Rezultatele experimentale descrise mai sus pot fi prezentate sub forma  $\Delta l \sim Fl_0/S_0$  sau

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{Fl_0}{S_0}, \quad (2.25)$$

unde factorul de proporționalitate  $E$  caracterizează natura materialului supus deformării și este numit **modulul lui Young**.

Forța de elasticitate  $F_e$  este egală în modul cu forța deformatoare, dar orientată în sens opus. Folosind relația (2.25), obținem

$$F_e = \frac{ES_0}{l_0} \Delta l. \quad (2.26)$$

Notând  $k = ES_0/l_0$ , avem

$$F_e = k \Delta l, \quad (2.27)$$

sau sub formă vectorială

$$\vec{F}_e = -k \vec{\Delta l},$$

unde semnul „–” arată că forța de elasticitate în totdeauna este orientată în sens opus deformației.

### ■ La deformări mici, forța de elasticitate este proporțională cu valoarea deformației.

Coefficientul de proporționalitate  $k$ , numit **constantă de elasticitate**, depinde de proprietățile elastice ale corpului și de dimensiunile lui geometrice. Dependența (2.27) a fost stabilită de către fizicianul englez Robert Hooke (1635–1703) și este numită **legea lui Hooke**.

În figura 2.19 sunt reprezentate forțele elastice  $\vec{F}_e$  și deformatoare  $\vec{F}$  în cazul unui resort cu masa neglijabilă. Deformația produsă în acest caz este vizibilă, însă există multe situații cînd ea nu se observă cu ochiul liber. De exemplu, o radieră aflată pe o placă de oțel sub acțiunea forței sale de greutate nu produce o deformație vizibilă (fig. 2.20, a), însă dacă se aşază placă de oțel pe radieră, atunci forța de greutate a plăcii deformează considerabil radiera (fig. 2.20, b).

Un corp suspendat la capătul unui fir de cauciuc cu lungimea  $l_0$  (fig. 2.21, a) produce o deformație vizibilă, pe cînd deformația unui fir de oțel cu aceeași lungime, practic, nu se observă (fig. 2.21, b).

Forța elastică  $\vec{F}_e$  care acționează asupra corpului din partea suportului sau a suspensiei (fig. 2.20 și 2.21) este numită, respectiv, **forță de reacțiune normală** (notată cu  $\vec{N}$ ) sau **forță de tensiune** (notată cu  $\vec{T}$ ). Ea acționează întotdeauna

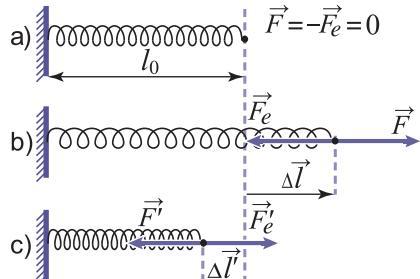


Fig. 2.19

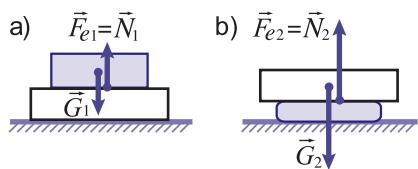


Fig. 2.20

la contactul dintre corpurile care interacționează și este orientată perpendicular la suprafața de contact sau de-a lungul firelor, tijelor sau al resorturilor.

Corpurile reprezentate în figurile 2.20 și 2.21 se află în repaus, accelerația lor  $\vec{a} = 0$ ; prin urmare, suma forțelor ce acționează asupra fiecăruiu dintre ele este nulă. Rezultă  $\vec{N} = -\vec{G}$  și  $\vec{T} = -\vec{G}$ .

Reacțiunea normală  $\vec{N}$  (fig. 2.20 și 2.22, a) este forța care acționează asupra corpului din partea suportului orizontal pe care se află. La rîndul său, conform principiului acțiunii și reacțiunii, corpul apasă suportul cu o forță elastică  $\vec{P} = -\vec{N}$ . Înțînd seama de relația  $\vec{N} = -\vec{G}$ , obținem  $\vec{P} = \vec{G}$ , adică forța de apăsare  $\vec{P}$  pe suport are același modul, direcție și sens ca și forța de greutate  $\vec{G}$ . Forțele  $\vec{P}$  și  $\vec{G}$  sunt însă de natură diferită: forța  $\vec{G}$  este de natură gravitațională, iar  $\vec{P}$  de natură elastică. În afară de aceasta, forța de greutate  $\vec{G}$  ca rezultantă a forțelor gravitaționale care acționează asupra punctelor corpului din partea Pămîntului este o forță volumică, aplicată într-un punct al corpului. Forța de apăsare  $\vec{P}$  este o forță aplicată suportului și repartizată pe suprafața suportului aflată în contact cu corpul.

Raționamente similare sugerează concluzia că în cazul corpului suspendat de un fir (fig. 2.22, b) există o forță  $\vec{P} = \vec{G}$  de natură elastică, aplicată firului de suspensie.

### Forța de natură elastică $\vec{P}$ caracterizează acțiunea corpului asupra suportului orizontal sau a firului vertical de suspensie și este numită pondere sau greutate.

În cazul în care suportul sau punctul de suspensie al firului se află în repaus, după cum s-a stabilit mai sus, forțele  $\vec{P}$  și  $\vec{G}$  au același modul, direcție și sens. În general însă ele au module diferite în funcție de starea de mișcare a suportului sau a punctului de suspensie a firului. Să analizăm această dependență în baza următorului exemplu: un om cu masa  $m$  se află într-un ascensor care se poate deplasa pe verticală în ambele sensuri cu accelerația  $\vec{a}$  constantă. Podeaua ascensorului reprezintă suportul asupra căruia acționează omul cu forța  $\vec{P}$  egală în modul cu forța de reacțiune normală  $\vec{G}$ .

Conform principiului fundamental al dinamicii, avem

$$\vec{G} + \vec{N} = m\vec{a}. \quad (2.28)$$

În cazul cel mai simplu, cînd accelerația ascensorului este egală cu zero (fig. 2.23, a), adică suportul se află în stare de repaus sau de mișcare uniformă, din (2.28) rezultă

$$G - N = 0 \text{ sau } N = G = mg.$$

Așadar, în această situație omul apasă asupra suportului cu o forță egală cu forța sa de greutate.

Dacă accelerația ascensorului este orientată vertical în sus (fig. 2.23, b), atunci, proiectînd vectorii din ecuația (2.28) pe direcția mișcării, obținem  $N - G = ma$ , de unde

$$N = G + ma = m(g + a).$$

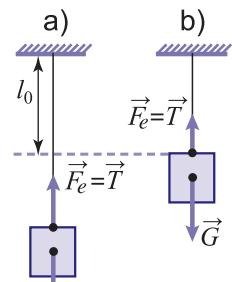


Fig. 2.21

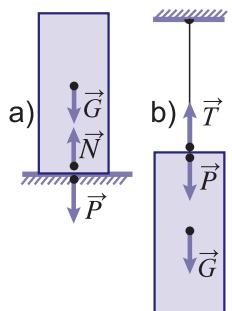


Fig. 2.22

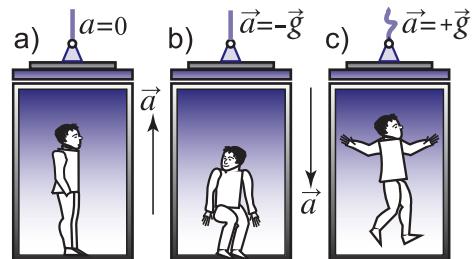


Fig. 2.23

## PROBLEMĂ REZOLVATĂ

O bilă cu masa  $m = 100$  g, suspendată la capătul unui fir elastic cu lungimea  $l_0 = 30$  cm, efectuează o mișcare de rotație în planul orizontal. Determinați viteza liniară a bilei și constanta de elasticitate a firului dacă el se alungește cu  $\Delta l = 5$  cm și formează un unghi  $\alpha = 30^\circ$  cu verticala.

### REZOLVARE

Se dă:	SI:
$m = 100$ g,	$0,1$ kg,
$l_0 = 30$ cm,	$0,3$ m,
$\Delta l = 5$ cm,	$0,05$ m
$\alpha = 30^\circ$	
$k - ?$ , $v - ?$	$\frac{\text{N}}{\text{m}} ; \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Asupra bilei acționează forța de greutate, orientată vertical în jos, și cea elastică  $\vec{F}_e$  – de-a lungul firului (fig. 2.25). Rezultanta lor imprimă bilei o accelerare centripetă  $\vec{a}_c$ , orientată spre centrul cercului de rază  $R$  și a cărei valoare este  $\vec{a}_c = v^2/R$ . Conform principiului fundamental al dinamicii, avem

$$\vec{F}_e + \vec{G} = m\vec{a}_c. \quad (2.30)$$

Dacă vom alege un sistem de coordonate  $xOy$  legat cu centrul cercului (fig. 2.25), atunci din ecuația (2.30), în proiecții pe axele  $Ox$  și  $Oy$ , se obține corespunzător:  $-F_e \sin \alpha = -\frac{mv^2}{R}$  și  $F_e \cos \alpha - mg = 0$ . Luând în considerare (2.27) și observând din figură că  $R = (l_0 + \Delta l) \sin \alpha$ , se obțin următoarele două ecuații:  $k\Delta l \sin \alpha = \frac{mv^2}{(l_0 + \Delta l) \sin \alpha}$ ;  $k\Delta l \cos \alpha = mg$ .

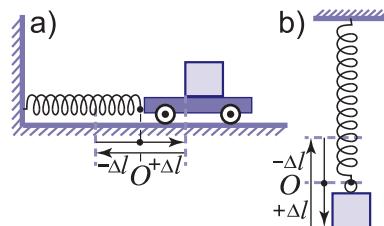


Fig. 2.24

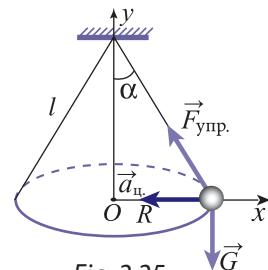


Fig. 2.25

Din ecuația a două obținem  $k = \frac{mg}{\Delta l \cdot \cos \alpha}$ , iar din prima ecuație, după înlocuirea constantei  $k$ , se află viteza  $V = \sqrt{g(l_0 + \Delta l) \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}$ . Substituind valorile numerice, se obține  $k \approx 23,1 \text{ N/m}$  și  $V \approx 1 \text{ m/s}$ .

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Ce este forța elastică și care este natura ei?
2. Enunțați legea lui Hooke. Ce reprezintă constanta elastică și în ce unități se exprimă ea?
3. Ce reprezintă forțele de reacție normală și de tensiune?
4. Explicați în ce condiții se obțin stările de suprasarcină și de imponderabilitate.
5. Ce fel de mișcări efectuează un corp numai sub acțiunea forței elastice?
6. Cu cît se va alungi un resort sub acțiunea forței deformatoare de 15 N, dacă el se alungește cu 5 cm cînd acționează o forță de 10 N?
7. Două resorturi de lungimi egale sunt legate (în serie) unul în continuarea celuilalt, iar la capetele libere acționează două forțe egale în modul și de sens opus. Care este constanta de elasticitate a resortului care s-a alungit cu 2 mm, dacă celălalt s-a alungit cu 2 cm, avînd constanta de elasticitate egală cu 100 N/m?
8. Două resorturi cu constantele de elasticitate  $k_1 = 200 \text{ N/m}$  și  $k_2 = 300 \text{ N/m}$  sunt legate: a) în serie; b) în paralel. Determinați constanta de elasticitate a sistemului de resorturi.
9. Cu cît se alungește o sîrmă de oțel cu lungimea de 2 m și diametrul de 0,15 mm, acționată de o forță  $G = 2,25 \text{ N}$ ? Modulul lui Young pentru oțel  $E = 200 \text{ GPa}$ .
10. Calculați modulul lui Young pentru cupru, dacă se știe că o sîrmă din acest material cu lungimea de 1 m și aria secțiunii transversale de  $1 \text{ mm}^2$  se alungește cu 2 mm sub acțiunea unei forțe de 240 N.
11. Forța maximă de tensiune pe care o poate suporta un cablu este de 2 kN. La ce valoare a accelerării se va rupe cablul, dacă cu ajutorul lui se ridică vertical un corp cu masa de 160 kg?
12. O bilă cu masa  $m = 150 \text{ g}$  poate culisa fără frecări de-a lungul unei tije orizontale care se rotește în jurul axei verticale ce trece prin unul dintre capetele ei. Bila este legată cu axa de rotație printr-un resort cu lungimea de 25 cm în stare nedeformată și constanta de elasticitate de 10 N/m. Cu ce viteză liniară se rotește bila, dacă alungirea resortului este de 5 cm?

### 2.6

## FORȚA DE FRECARE. MIȘCAREA ÎN PREZENȚA FORȚEI DE FRECARE

Mișcarea reală a oricărui corp întotdeauna este însorită de o rezistență din partea mediului înconjurător sau a altor corpuși cu care el vine în contact. În consecință, viteza lui se micșorează și, în urma unei mișcări încetinîte, corpul se oprește. Deoarece mișcarea încetinîță este caracterizată de o accelerare orientată în sens opus vectorului vitezei, rezultă că există o forță ce acționează pe aceeași direcție în care se produce mișcarea și este orientată în sensul opus acestei mișcări. Ce reprezintă această forță și cum apare ea?

Chiar și cele mai netede suprafețe ale corpurilor solide privite la microscop prezintă nenumărate asperități sau neregularități. Din această cauză aria reală  $S'$  a contactului dintre suprafețele a două corpuși este mult mai mică (de  $\approx 10^4$  ori) decât cea aparentă  $S$  (fig. 2.26). Presiunea exercitată asupra punctelor de contact este atât de mare încît în ele se produc deformări plastice, în urma căroror aria de contact  $S'$  crește, iar presiunea  $p$  se

micșorează. Acest proces continuă pînă cînd rezultanta forțelor de presiune  $F_p = pS'$  se egalează în modûl cu forța de reacțiune normală  $N$  (fig. 2.26). În punctele de contact acționează forțe de interacțiune moleculară de natură electrică, rezultanta cărora este proporțională cu  $N$ , și care formează niște microsuduri între corpurile aflate în contact. Forța  $\vec{F}_f$ , egală în modûl și de sens opus cu forța  $\vec{F}$  (fig. 2.26) ce acționează asupra unuia dintre corpi pentru a-l deplasa pe suprafața celuilalt, este numită **forță de frecare**. Ea apare la contactul nemijlocit dintre corpi, este de natură electrică, se află în planul de alunecare a lor, fiind orientată în sens opus vitezei.

Să facem o descriere aproximativă a forțelor de frecare pe baza observațiilor experimentale. Considerăm un corp situat pe o suprafață orizontală și acționăm asupra lui cu o forță de tracțiune paralelă cu planul de contact prin intermediul unui fir trecut peste un scripete, la capătul căruia pe un platan săt plasate treptat diferite etaloane de masă mici (fig. 2.27, a). Se observă că inițial corpul nu se mișcă. Rezultă că forța de tracțiune  $\vec{F}$  este echilibrată de forța de frecare ce ia naștere la suprafața de contact. Prin adăugarea etaloanelor de masă se mărește treptat forța de tracțiune și atîta timp cît corpul se află în stare de repaus se mărește și forța de frecare, astfel încît  $|\vec{F}_f| = |\vec{F}|$ . Această egalitate are loc pînă la momentul în care corpul este urmat din loc și începe alunecarea lui. Forța de frecare ce acționează între corpurile solide aflate în stare de repaus este numită **forță de frecare de repaus sau forță de frecare statică**  $\vec{F}_{fs}$  și atunci cînd începe alunecarea ea posedă valoare maximă.

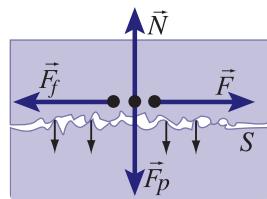


Fig. 2.26

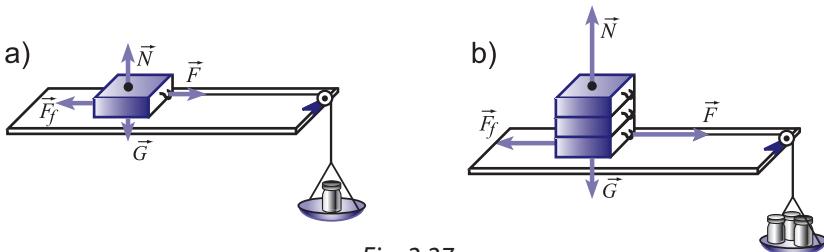


Fig. 2.27

**Forța de frecare de repaus  $F_{fs}$  este egală în modûl și de sens opus cu forța aplicată corpului paralel cu planul de contact cu alt corp și poate lua valori pînă la o valoare maximă  $F_{fs}^{\max}$ .**

Experimental se observă că dacă forța de greutate a corpului, deci și forța de reacțiune normală se mărește de 2, 3, ... ori, atunci forță necesară pentru începerea alunecării, adică  $F_{fs}^{\max}$  tot crește de 2, 3, ... ori (fig. 2.27, b).

**Valoarea maximă a forței de frecare de repaus este proporțională cu forța de reacție normală  $N$ .**

$$F_{fs}^{\max} = \mu_s N, \quad (2.31)$$

unde  $\mu_s$  este un coeficient de proporționalitate numit **coeficient de frecare statică** și depinde de natura corpurilor și de calitatea șlefuirii suprafețelor de contact.

Dacă valoarea forței de tracțiune  $\vec{F}$  depășește valoarea forței maxime de frecare de repaus  $F_{fs}^{\max}$ , atunci corpul începe alunecarea cu o anumită accelerare. Forța de frecare ce acționează în aceste condiții este numită **forță de frecare la alunecare sau forță**

**de frecare cinetică**  $\vec{F}_{fc}$ . Ea se află în planul de alunecare și este orientată în sens opus vectorului viteză relativă a corpurilor aflate în contact.

Pentru măsurarea modulului forței de frecare la alunecare, este necesar să asigurăm o mișcare uniformă a corpurilor. În acest caz, rezultanta forțelor ce acționează în planul de alunecare se egalează cu zero și forța de frecare la alunecare este egală cu cea de tracțiune. Valoarea forței de frecare la alunecare întotdeauna este mai mică decât cea a forței de frecare de repaus maximă, însă această deosebire este mică și se consideră ca  $F_{fc} \approx F_{fs}^{\max}$ . La fel ca în cazul forței de frecare de repaus se verifică experimental că forța de frecare la alunecare este proporțională cu cea de reacțiune normală a suprafeței de contact:

$$F_{fc} = \mu_c N, \quad (2.32)$$

unde  $\mu_c$  este coeficientul de frecare la alunecare. Valoarea lui numerică este puțin mai mică decât cea a coeficientului de frecare de repaus, însă în practică se consideră că  $\mu_c \approx \mu_s = \mu$ .

Se constată experimental că coeficientul de frecare nu depinde de aria suprafeței de contact. Dacă așezăm trei corpuri paralelipipedice unul peste altul (fig. 2.27, b) sau pe diferite fețe, atunci aria suprafeței de sprijin este de fiecare dată diferită, iar coeficientul de frecare rămîne mereu același.

Din (2.31) și (2.32) rezultă  $\mu = \vec{F}_{fs}^{\max}/N = \vec{F}_{fc}/N$ , unde coeficientul de frecare  $\mu$  este o mărime adimensională. Se constată experimental că în majoritatea cazurilor el are valoare mai mică decât unitatea. Coeficientul de frecare caracterizează nu numai corpul asupra căruia acționează forța de frecare, ci ambele corpuri aflate în contact.

### | **Coefficientul de frecare depinde atât de materialul din care sînt confectionate corpurile, cît și de calitatea șlefuirii suprafețelor aflate în contact.**

Valoarea numerică a coeficientului de frecare se determină de fiecare dată experimental, luînd în considerare și factorii externi ce influențează fenomenul frecării. De exemplu, coeficientul de frecare dintre două suprafețe de oțel este 0,2, iar dintre oțel și gheată are valoarea 0,02. Dacă însă între suprafețele de oțel aflate în contact se introduce un lubrifiant, atunci coeficientul de frecare se micșorează considerabil, devenind aproximativ egal cu cel al frecării dintre oțel și gheată.

Pentru determinarea coeficientului de frecare ce caracterizează diferite materiale, în condiții de laborator este folosit un dispozitiv special numit **tribometru** (fig. 2.28). El este format dintr-o scîndură prevăzută la un capăt cu un scripete ușor în care frecarea este neglijabilă. Poziția scîndurii se poate fixa atât orizontal, cît și sub un unghi față de orizont, astfel avînd posibilitatea de a studia frecarea și pe un plan înclinat. Dispozitivul mai are cîteva corpuri paralelipipedice identice, pe fețele laterale ale căror se pot fixa plăci confectionate din materiale diferite. Un paralelipiped avînd fixate plăci din materialul studiat se aşază pe scîndura orizontală a tribometrului și prin intermediul unui fir trecut peste scripete se leagă cu un platan pe care se adaugă treptat etaloane de masă, pînă la momentul cînd începe alunecarea. Valoarea forței de greutate pentru care se realizează alunecarea uniformă a paralelipipedului este egală cu forța de frecare la alunecare.

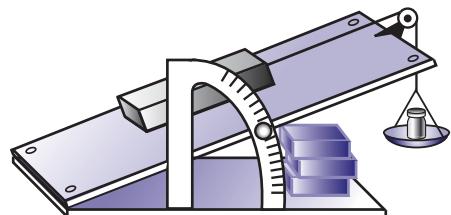


Fig. 2.28

Rezultatele experimentale prezentate mai sus pot fi generalizate în următoarele trei legi de bază ale frecării, stabilite pentru prima dată de către savanții francezi Guillaume Amontons (1663–1705) în anul 1699 și Charles Coulomb (1736–1806) în 1781.

**Forța de frecare este proporțională cu forța de reacțiune normală a suprafeței de contact:**

$$F_f = \mu N, \quad (2.33)$$

**Valoarea forței de frecare pentru fiecare pereche de corpuri nu depinde de aria suprafeței de contact dintre ele, ci numai de natura corpurilor și de calitatea șlefuirii acestor suprafețe.**

**Forța de frecare este orientată întotdeauna în sens opus mișcării și se află în planul de alunecare a corpurilor unul în raport cu altul.**

Aceste legi sunt numite **legile Amontons–Coulomb**.

Dacă un corp aluneca fără accelerare pe un plan înclinat, atunci coeficientul de frecare se exprimă prin unghiul de înclinare al planului, numit în acest caz **unghi de frecare**. Într-adevăr, la alunecarea uniformă a corpului, conform principiului fundamental al dinamicii, avem

$$\vec{F}_f + \vec{N} + \vec{G} = 0.$$

Trecind la proiecții pe axele de coordonate  $Ox$  și  $Oy$  (fig. 2.29), din această relație obținem

$$F_f - G \sin \varphi_f = 0,$$

$$N - G \cos \varphi_f = 0,$$

care, introduse în (2.33), dau egalitatea

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi_f. \quad (2.34)$$

Dacă unghiul planului înclinat  $\varphi$  este mai mare decât unghiul de frecare  $\varphi_f$ , atunci  $\mu = \operatorname{tg} \varphi_f$  și corpul aluneca cu accelerare, iar dacă  $\varphi < \varphi_f$ , el se află în stare de repaus și  $F_f < F_{fs}^{\max}$ .

În cazul corpurilor de formă cilindrică sau sferică se manifestă forța de frecare la rostogolire. Ea este de sute de ori mai mică decât forța de frecare la alunecare. Din această cauză la funcționarea diferitor mecanisme, unde frecarea la alunecare este dăunătoare prin uzarea, încălzirea sau chiar topirea unor piese în mișcare, ea se înlocuiește cu frecarea la rostogolire. Aceasta se poate realiza cu ajutorul rulmenților cu bile sau cu role, construcția cărora este arătată în figura 2.30. Dacă se folosesc și lubrifianti, atunci frecarea devine foarte mică.

Cu toate că forța de frecare este una de frânare, în multe cazuri ea reprezintă o forță motoare. Anume datorită forței de frecare este posibilă mișcarea automobilelor și mersul oamenilor pe Pămînt. Între roțile motoare ale automobilului și Pămînt (fig. 2.31, a) acționează forțele de frecare de repaus  $\vec{F}_{f1}$  exercitate de Pămînt asupra roților, prin intermediul

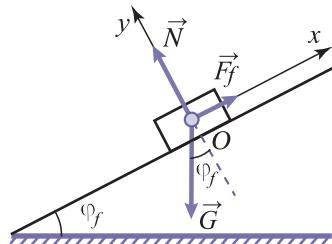


Fig. 2.29

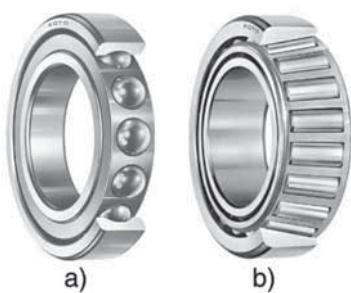


Fig. 2.30

cărora se imprimă accelerare de la automobilului și  $\vec{F}_{f2}$  exercitată de roți asupra Pământului. Din cauza masei lui foarte mari în comparație cu cea a automobilului, accelerarea imprimată Pământului este, practic, egală cu zero. Dacă însă un om ar merge pe suprafața unui cilindru care se poate rota în jurul axei sale (fig. 2.31, b), atunci forța de frecare de repaus  $\vec{F}_{f2}$  care acționează asupra cilindrului l-ar pune în mișcare de rotație.

La mișcarea corpuri solide, contactul se poate realiza nu numai cu alte corpuri solide, dar și cu lichide sau gaze, de exemplu, mișcarea unui submarin, a unui avion și.a. În aceste cazuri ia naștere o forță asemănătoare cu cea de frecare la alunecare, numită **forță de rezistență**. Ea, de asemenea, se situează în planul de contact și este orientată în sens opus vitezei relative  $v_r$  a corpului în raport cu lichidul sau gazul, valoarea numerică a ei fiind în funcție de modulul acestei viteze. Pentru viteze relative mici ale corpului, forța de rezistență este proporțională cu valoarea vitezei:

$$F_r = \alpha v_r, \quad (2.35, a)$$

iar pentru viteze mari – cu pătratul acestei mărimi:

$$F_r = \beta v_r^2, \quad (2.35, b)$$

unde  $\alpha$  și  $\beta$  sunt coeficienți de proporționalitate ce caracterizează rezistența lichidului sau a gazului.

Forța de rezistență mai depinde de forma, dimensiunile corpuri și calitatea prelucrării suprafețelor. De exemplu, corpurile din figura 2.32 au aceeași arie a secțiunii transversale, însă forța de rezistență este de fiecare dată diferită. Forma geometrică a corpuri pentru care forța de rezistență este minimă se numește **formă aerodinamică**. Ea are o importanță deosebită la construirea diferitor aparate de zbor, a automobilelor și a altor mecanisme care înfruntă rezistența lichidelor sau a gazelor.

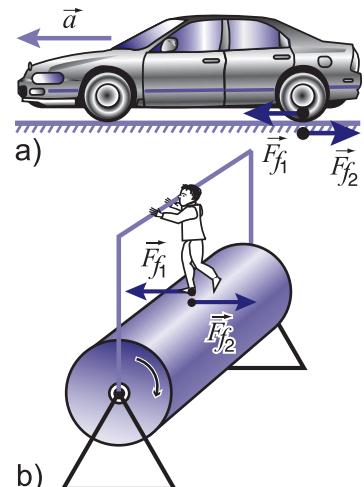


Fig. 2.31

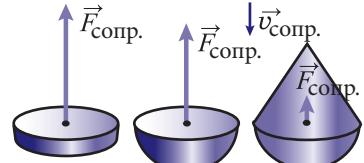


Fig. 2.32

## PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Un automobil se deplasează pe un drum orizontal cu o viteză de 60 km/h. Observând un obstacol, șoferul a frânat brusc. Determinați peste cât timp se va opri automobilul și care este distanța de frânare (distanța parcursă pînă la oprire), în cazul cînd coeficientul de frecare la alunecarea roților pe asfalt este  $\mu = 0,75$ .

### REZOLVARE

Se dă:	SI:
$v = 60 \text{ km/h}$ ,	$16,67 \text{ m/s}$
$\mu = 0,75$	
$t = ?$ , $s_x = ?$	$\text{s}; \text{ m}$

Considerăm mișcarea automobilului de-a lungul axei  $Ox$  și unui sistem de coordonate legat cu drumul. Deoarece viteză finală a automobilului este egală cu zero, din definiția accelerării  $a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$  obținem timpul de frânare  $t = -\frac{v_{0x}}{a_x}$ . Indicele  $x$  la toate mărimile din această problemă arată că mărimea respectivă reprezintă proiecția ei pe direcția mișcării

ce coincide cu axa  $Ox$ . Accelerația  $a_x$  la mișcarea uniform încetinată a automobilului se determină din principiul fundamental al dinamicii:  $a_x = -F_f/m$ . Folosind (2.33) și principiul acțiunii și reacțiunii, conform căruia  $N = mg$ , obținem  $a_x = -\frac{\mu mg}{m} = -\mu g$ . Așadar,  $t = \frac{v_{0x}}{\mu g}$ ,  $t \approx 2,3$  s. Pentru determinarea distanței de frânare se folosește formula lui Galilei (1.27):  $s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$ , în care  $v_x = 0$  și  $a_x = -\mu g$ . Atunci  $s_x = \frac{v_{0x}^2}{2\mu g}$ ,  $s_x \approx 19$  m.

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Ce este forța de frecare? În ce condiții apare forța de frecare și care este natura ei?
2. Ce este forța de frecare de repaus? Care este valoarea ei maximă?
3. Prin ce se deosebesc forțele de frecare la alunecare de cele de repaus?
4. Ce reprezintă tribometrul?
5. Enunțați legile lui Amontons–Coulomb pentru frecare.
6. Ce reprezintă unghiul de frecare?
7. Care este deosebirea dintre valorile forțelor de frecare la alunecare și la rostogolire?
8. Dați exemple în care forța de frecare este utilă și în care ea este dăunătoare.
9. Ce reprezintă forța de rezistență a lichidelor sau a gazelor și de ce factori depinde ea?
10. Un motociclist, deplasându-se cu o viteză de 12 m/s, a observat la o distanță de aproximativ 15 m un obstacol și a frânat brusc. Va reuși el să se oprească pînă la obstacol sau nu? Coeficientul de frecare la alunecare  $\mu = 0,7$ .
11. Un corp alunecă uniform pe suprafața unui plan înclinat cu înălțimea de 3 m și baza de 5 m. Determinați coeficientul de frecare la alunecarea corpului pe planul înclinat.
12. Un corp alunecă pe o suprafață orizontală acoperită cu gheăță și, parcurgînd o distanță de 25 m, se oprește. Determinați viteza inițială a corpului, în cazul în care coeficientul de frecare la alunecarea lui pe gheăță este  $\mu = 0,5$ .
13. Un corp cu masa de 5 kg alunecă uniform pe o suprafață orizontală sub acțiunea unei forțe orizontale aplicate lui prin intermediul unui resort. Determinați alungirea resortului, în cazul în care coeficientul de frecare  $\mu = 0,2$ , iar cel de elasticitate  $k = 500$  N/m.
14. De pe un plan înclinat cu înălțimea de 3 m și baza de 4 m alunecă un corp cu accelerăția de  $2 \text{ m/s}^2$ . Determinați coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și planul înclinat.

## 2.7º MIȘCAREA CORPURILOR SUB ACȚIUNEA MAI MULTOR FORȚE

În temele precedente am studiat mișcarea corpurilor cînd asupra lor acționa o singură forță: de greutate, de elasticitate sau de frecare. În realitate însă corpurile sănt supuse concomitent acțiunii mai multor tipuri de forțe. Mai mult decît atât, există situații cînd mișcarea este determinată de interacțiunile ce au loc între corpurile din sistemul considerat.

Să analizăm, în baza unui exemplu, metodele de rezolvare a unor probleme cu aplicarea principiilor dinamicii, menționînd, totodată, unele recomandări privind algoritmul de rezolvare.

**I. Două corpuri cu masele  $m_1$  și  $m_2$  sunt legate cu un fir ideal și se află pe o suprafață orizontală. Asupra corpului cu masa  $m_1$  acționează forță orizontală  $\vec{F}_1$ , iar asupra celui cu masa  $m_2$  – forță  $\vec{F}_2$  orientată sub un unghi  $\alpha$  față de orizontală. Să se determine accelerarea sistemului și forța de tensiune din fir, în cazul în care coeficientul de frecare la alunecarea ambelor corpuri este  $\mu$ , iar mișcarea are loc în sensul acțiunii forței  $\vec{F}_1$ .**

**Rezolvare.** Vom explica mai întâi noțiunea de *fir ideal*, deseori folosită în cazul sistemelor de corpurile legate între ele. Un *fir ideal* se consideră firul care este inextensibil, ușor flexibil și fără masă. Corpurile de la capetele firului ideal au în modul aceleiași viteze și accelerării, iar forțele de tensiune din fire rămân invariabile, de-a lungul lor.

### 1. După analiza situației concrete în care se realizează mișcarea în problema cercetată, se construiește o diagramă schematică, unde se reprezintă corpurile ce participă la mișcare.

Diagrama schematică în care sunt reprezentate corpurile de mase  $m_1$  și  $m_2$  are aspectul din figura 2.33.

### 2. Se identifică toate forțele care acționează asupra corpurilor din sistem, reprezentându-le în diagramă.

Asupra corpurilor acționează forțele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  date în problemă, forțele de greutate  $\vec{G}_1$  și  $\vec{G}_2$ , orientate vertical în jos; de reacție normală  $\vec{N}_1$  și  $\vec{N}_2$ , orientate normal la suprafața de contact; de frecare  $\vec{F}_{f1}$  și  $\vec{F}_{f2}$ , orientate în sens opus mișcării, și de tensiune din fir  $\vec{T}_1$  și  $\vec{T}_2$  (fig. 2.33).

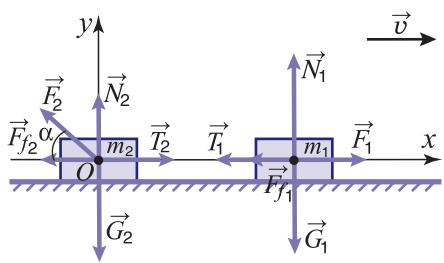


Fig. 2.33

### 3. Se scrie principiul fundamental al dinamicii sub formă vectorială pentru situația concretă a problemei:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (2.36, a)$$

Dacă în problemă se cercetează un sistem de corpură, atunci ecuația (2.36, a) se scrie pentru fiecare corp.

După aplicarea ecuației (2.36, a), pentru corpurile cu masele  $m_1$  și  $m_2$  avem

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{F}_1, \\ m_2\vec{a} = \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{f2} + \vec{F}_2. \end{cases} \quad (2.36, b)$$

### 4. Se alege un sistem de coordonate și se determină unghiiurile pe care le formează forțele și accelerările corpurilor cu axele lui.

Alegerea convenabilă a sistemului de coordonate este foarte importantă pentru efectuarea calculelor. De obicei, acesta se alege astfel încât o axă să fie orientată în direcția și sensul accelerării, iar a doua – perpendicular pe ea. În figura 2.33 este reprezentat sistemul de coordonate legat cu centrul corpului de masă  $m_2$ .

**5. Se trece de la ecuații vectoriale la ecuații scalare pentru proiecțiile pe axele de coordonate, iar sistemul de ecuații obținut din (2.36, a) se rezolvă în raport cu necunoscutele problemei.**

$$\begin{cases} m a_x = F_{x1} + F_{x2} + \dots + F_{xn}, \\ m a_y = F_{y1} + F_{y2} + \dots + F_{yn}, \\ m a_z = F_{z1} + F_{z2} + \dots + F_{zn}. \end{cases} \quad (2.37, a)$$

În proiecții pe axele sistemului de coordonate ales, ecuațiile (2.36, b) au forma

$$\begin{cases} m_1 a = F_1 - T_1 - F_{f1}, \\ 0 = N_1 - G_1, \\ m_2 a = T_2 - F_2 \cos \alpha - F_{f2}, \\ 0 = N_2 + F_2 \sin \alpha - G_2. \end{cases} \quad (2.37, b)$$

Din ecuațiile a doua și a patra ale sistemului de ecuații (2.37, b) se determină forțele de reacție normală  $N_1$  și  $N_2$ :

$$\begin{aligned} N_1 &= G_1 = m_1 g, \\ N_2 &= G_2 - F_2 \sin \alpha = m_2 g - F_2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Luând în considerare că  $F_{f1} = \mu N_1$ ;  $F_{f2} = \mu N_2$  și  $T_1 = T_2 = T$ , sistemul de ecuații (2.37, b) ia forma

$$\begin{cases} m_1 a = F_1 - T - \mu m_1 g, \\ m_2 a = T - F_2 \cos \alpha - \mu(m_2 g - F_2 \sin \alpha), \end{cases}$$

de unde se determină mărimele căutate:

$$\begin{aligned} a &= \frac{F_1 - F_2 \cos \alpha - \mu(m_1 g + m_2 g - F_2 \sin \alpha)}{m_1 + m_2}, \\ T &= F_1 - \mu m_1 g - m_1 a. \end{aligned}$$

**II. Un corp cu masa  $m_1$  se mișcă pe un plan înclinat de unghi  $\alpha$  sub acțiunea altui corp cu masa  $m_2 > m_1$  legat cu primul printr-un fir ideal trecut peste un scripete cu masă neglijabilă și fără frecări, situat în vîrful planului. Coeficientul de frecare la alunecarea corpului pe planul înclinat este  $\mu$ . Determinați accelerația sistemului și forța de tensiune din fir.**

**Rezolvare.** Diagrama schematică a situației concrete din această problemă este reprezentată în figura 2.34, unde sunt indicate și forțele care acționează asupra corpurilor.

Folosind ecuația (2.36, a) pentru corpurile de mase  $m_1$  și  $m_2$ , obținem

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G}_1, \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{T}_2 + \vec{G}_2. \end{cases} \quad (2.36, c)$$

Pentru rezolvarea problemei este mai convenabil să se aleagă pentru fiecare corp cîte un sistem de coordonate, aşa încît una dintre axe să fie orientată în sensul accelerării sale (fig. 2.34). În asemenea cazuri se mai spune că proiecțarea se face pe direcția mișării. Proiectînd vectorii ce caracterizează fiecare corp pe

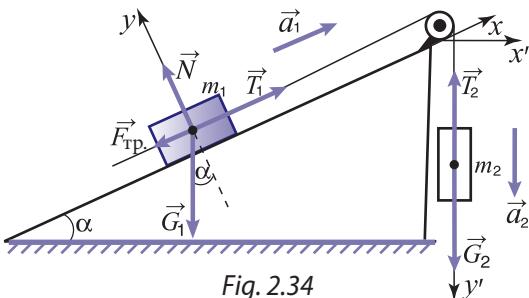


Fig. 2.34

axele de coordonate alese și luînd în considerare că  $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$  și  $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$ , sistemul (2.36, c) are aspectul

$$\begin{cases} m_1 a = T - G_1 \sin \alpha - \mu N, \\ m_2 a = G_2 - T, \\ 0 = N - G_1 \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.37, c)$$

Deoarece  $G = mg$ , din ecuația a treia a sistemului (2.37, c) avem  $N = m_1 g \cos \alpha$  și după adunarea primelor două ecuații se determină accelerația sistemului de corpuști:

$$a = g \frac{m_2 - m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Din relație se observă că mișcarea corpuștilor în condițiile acestei probleme are loc dacă se îndeplinește condiția:

$$m_2 \geq m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Dacă introducem valoarea accelerării  $a$  în ecuația a doua a sistemului (2.37, c), obținem valoarea forței de tensiune a firului:

$$T = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}.$$

**III. Determinați accelerăriile corpuștilor cu masele  $m_1$  și  $m_2$  și forța de tensiune din fir în sistemul de scripeți din figura 2.35. Se consideră că frecarea în scripeți și masele lor sunt neglijabile, iar firul este ideal.**

**Rezolvare.** În sistemul cercetat acționează forțele de greutate  $\vec{G}_1 = m_1 \vec{g}$ ,  $\vec{G}_2 = m_2 \vec{g}$  și forțele de tensiune din fire  $\vec{T}_1$ ,  $\vec{T}_2$  și  $\vec{T}_3$ , egale în modul, arătate în figura 2.35. Ecuațiile (2.36, a) pentru corpuștilor cu masele  $m_1$  și  $m_2$  au aspectul

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{T}_1, \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3. \end{cases} \quad (2.36, d)$$

Deoarece toate forțele și accelerăriile sunt orientate pe verticală, în acest caz este mai comod să se facă proiecțiile vectorilor din ecuațiile (2.36, d) pe direcția mișcării și obținem

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - G_1, \\ m_2 a_2 = G_2 - 2T. \end{cases} \quad (2.37, d)$$

Întrucît corpul cu masa  $m_1$  parcurge în același timp o distanță de 2 ori mai mare decât corpul cu masa  $m_2$ , rezultă că  $a_1 = 2a_2$  și din (2.37, d), după unele transformări simple, avem soluția

$$a_2 = \frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2} g; \quad a_1 = 2a_2; \quad T = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}.$$

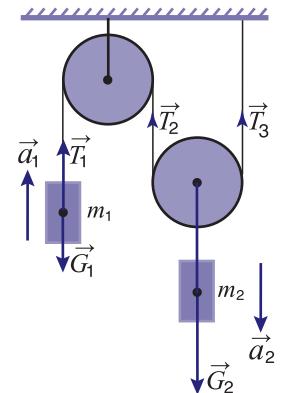


Fig. 2.35

**IV.** Un automobil cu masa  $m$  se mișcă uniform cu viteza  $v$  pe un pod: a) concav; b) convex cu raza de curbură  $R$  (fig. 2.36). Cu ce forță apasă automobilul pe mijlocul podului?

**Rezolvare.** Asupra automobilului acționează forțele: de greutate  $\vec{G}$ , de reacțiune normală a podului  $\vec{N}$ , de tracțiune  $\vec{F}_t$  (forță de frecare ce acționează asupra roților din partea podului) și de rezistență din partea mediului  $\vec{F}_r$ , sub acțiunea căroră automobilul se mișcă cu viteza  $v$  constantă.

Ecuatia (2.36, a) în ambele cazuri are aspectul

$$\vec{ma} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_r + \vec{F}_t. \quad (2.36, e)$$

La mișcarea pe traiectoria de rază  $R$  automobilul posedă o acceleratie centripetă  $a = v^2/R$ , orientată întotdeauna spre centrul de curbură (fig. 2.36). Dacă alegem un sistem de coordinate comun pentru ambele cazuri, atunci pentru podul concav ecuația (2.36, e) în proiecții pe axele de coordonate are forma

$$\begin{cases} ma = N - G, \\ 0 = F_r - F_t. \end{cases} \quad (2.37, e)$$

Întrucât  $G = mg$ , din (2.37, e) pentru forță de apăsare asupra podului concav, egală în modul cu reacțiunea normală a podului, obținem  $N = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right)$ .

După cum se observă din figura 2.36, unica deosebire dintre cele două situații constă în orientarea opusă a accelerării centripete. Atunci forță de apăsare asupra podului convex se obține din relația pentru cel concav prin înlocuirea semnului „+” din fața accelerării centripete  $\frac{v^2}{R}$  cu semnul „-”. Așadar,  $N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$ .

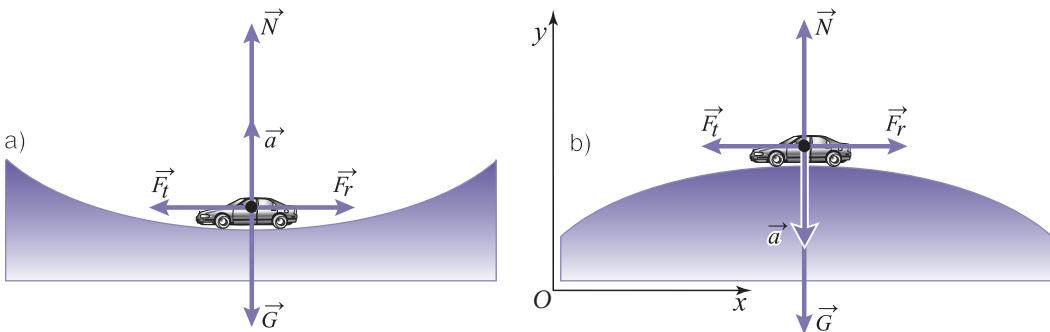


Fig. 2.36

Din ultima relație se observă că pentru viteza  $v = \sqrt{gR}$  forță de apăsare asupra podului este egală cu zero și automobilul se află în stare de imponderabilitate.

## PROBLEME

- Pe o masă netedă se află două corpi cu masele  $m_1 = 1$  kg și  $m_2 = 3$  kg, legate cu un fir ideal. Asupra lor acționează, respectiv, forțele  $F_1 = 7$  N și  $F_2 = 10$  N, orientate în sensuri opuse de-a lungul firului. Neglijind frecarea, determinați accelerăția corpurilor.

2. Un corp cu masa  $m = 60 \text{ kg}$  se deplasează în sus pe un plan înclinat cu unghiul de înclinare  $\alpha = 30^\circ$ . Coeficientul de frecare este  $\mu = 0,05$ . Determinați accelerația corpului, dacă asupra lui acționează în direcția mișcării o forță  $F = 600 \text{ N}$  paralelă cu baza planului înclinat.
3. Două corpurile cu masele  $m_1 = 3 \text{ kg}$  și  $m_2 = 2 \text{ kg}$  sunt legate între ele cu un fir ideal trecut peste un scripete fixat în vîrful unei prisme, ale cărei fețe formează două plane înclinate. Determinați accelerăriile corporilor, dacă unghiurile de la baza planelor inclinate sunt, respectiv,  $\alpha_1 = 60^\circ$  și  $\alpha_2 = 30^\circ$ , iar coeficientul de frecare la alunecarea lor  $\mu = 0,2$ .
4. Peste un scripete de masă neglijabilă și fără frecări este trecut un fir ideal, la capetele căruia sunt legate două corpurile cu masele  $m_1 = 4 \text{ kg}$  și  $m_2 = 4,1 \text{ kg}$ . Care este tensiunea din fir și cu cît se deplasează corpurile unul față de altul în timp de 3 s, dacă în starea inițială corpurile se aflau în repaus?
5. Un corp cu masa  $m = 0,2 \text{ kg}$  este legat la capătul unui fir ideal cu lungimea  $l = 40 \text{ cm}$  și se rotește într-un plan vertical cu viteza  $v = 2,5 \text{ m/s}$ . Determinați forța de tensiune din fir cind corpul se află în punctele superior și inferior ale traectoriei.

## 2.8º PRINCIPIUL RELATIVITĂȚII AL LUI GALILEI

Problema relativității mișcării mecanice a corpurilor a fost abordată în cadrul cinematicii (par. 1.6). S-a stabilit că mișcarea mecanică este relativă: traекторiile corpurilor depind de sistemul de referință ales și în sisteme diferite pot avea forme diferite; vitezele corpurilor, de asemenea, depind de sistemul de referință în raport cu care este considerată mișcarea și satisfac legea compunerii vitezelor (1.16).

Aici problema relativității mișcării va fi cercetată din punctul de vedere al dinamicii, vor fi stabilite condițiile în care formularea principiului fundamental al dinamicii rămîne aceeași în sisteme de referință diferite.

Considerăm un **sistem de referință inerțial** S a cărui parte componentă este sistemul de coordonate  $Oxyz$ . Considerăm și un alt doilea sistem de referință  $S'$ , din care face parte sistemul de coordonate  $O'x'y'z'$ . Referitor la sistemul  $S'$ , admitem următoarele: sistemul  $S'$  se mișcă în raport cu sistemul S cu o viteză constantă  $\vec{u}$  paralelă la axa  $Ox$  și la momentul inițial de timp  $t_0 = t'_0 = 0$ , comun pentru ambele sisteme, axele de coordonate respective coincid ( $O'x'$  cu  $Ox$ ,  $O'y'$  cu  $Oy$  și  $O'z'$  cu  $Oz$ ).

La această mișcare axa  $O'x'$  aluneca pe axa  $Ox$ , axa  $O'y'$  rămîne paralelă cu  $Oy$ , iar  $O'z'$  – paralelă cu  $Oz$  (fig. 2.37). **Mișcarea sistemului de coordonate  $O'x'y'z'$  este o mișcare de translație.**

Să analizăm mișcarea unui punct material  $M$  în raport cu aceste două sisteme de referință și să stabilim relațiile dintre caracteristicile corespunzătoare ale mișcării lui. Poziția punctului material în raport cu sistemul S este determinată de coordonatele  $x, y, z$ , iar în raport cu sistemul  $S'$  – de coordonatele  $x', y', z'$ . Pozițiile punctului material în sistemele S și  $S'$  pot fi determinate și folosind vectorii de poziție  $\vec{r}$  și  $\vec{r}'$  (fig. 2.37).

Timpul și spațiul sunt absolute: intervalul de timp dintre două evenimente este unul

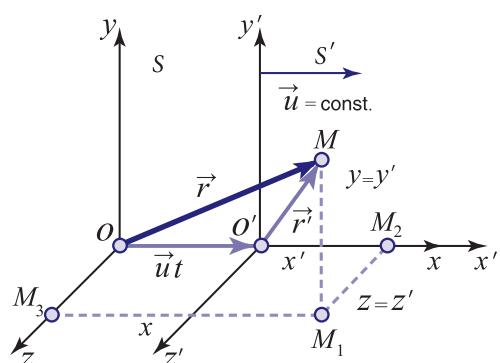


Fig. 2.37

și același în ambele sisteme de referință, iar distanța dintre două puncte fiind aceeași în ambele sisteme.

Originea timpului în  $S$  și  $S'$  este comună:  $t_0 = t'_0 = 0$ . Intervalele de timp  $\Delta t = t - t_0 = t$  și  $\Delta t' = t' - t'_0 = t'$ . Din egalitatea intervalor  $\Delta t = \Delta t'$  rezultă egalitatea momentelor de timp  $t = t'$ .

Originea  $O'$  se mișcă rectiliniu uniform cu viteza  $\vec{u}$ , deci vectorul deplasare  $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}t$  și distanța parcursă  $|\overrightarrow{OO'}| = ut$ . Din figura 2.37 se observă că

$$x = OM_2 = OO' + O'M_2 = ut + x', \quad y = M_1M = y' \quad \text{și} \quad z = M_1M_2 = z'.$$

Astfel, s-au obținut următoarele relații dintre coordonate și timp în cele două sisteme de referință:

$$\begin{cases} x = x' + ut, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'. \end{cases} \quad (2.38)$$

Formulele (2.38) se numesc **transformările lui Galilei**. Ele permit să se determine mișcarea punctului material în sistemul  $S$  atunci cînd este cunoscută mișcarea lui în sistemul  $S'$  și invers.

Transformările lui Galilei pot fi scrise într-o formă mai compactă, trecînd la vectorii de poziție:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t, \\ t = t'. \end{cases} \quad (2.39)$$

Relațiile (2.39) au un caracter mai general decît (2.38) și sunt valabile pentru orientări arbitrară ale vitezei constante  $\vec{u}$ , în timp ce relațiile (2.38) se referă doar la cazul particular al vitezei  $\vec{u}$  paralele cu axa  $Ox$ .

Să stabilim relația dintre viteza  $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  a punctului  $M$  în raport cu sistemul  $S$  și viteza  $\vec{v}' = \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t'} = \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t}$  în raport cu sistemul  $S'$ . La scrierea ultimei relații s-a ținut seama de egalitatea intervalor de timp  $\Delta t = \Delta t'$ . Deplasările punctului  $M$  în intervalul de timp  $\Delta t = t_2 - t_1$  față de sistemele  $S$  și  $S'$  sunt  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  și  $\Delta \vec{r}' = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$ . În acord cu relațiile (2.39) avem

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\vec{r}'_2 + \vec{u}t_2) - (\vec{r}'_1 + \vec{u}t_1) = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 + \vec{u}(t_2 - t_1)$$

sau

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}' + \vec{u}\Delta t. \quad (2.40)$$

Această relație arată că **deplasările punctului material în raport cu sistemele de referință  $S$  și  $S'$  sunt diferite**.

Împărțind termenii egalității (2.40) la intervalul de timp, căpătăm relația dintre viteze:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}. \quad (2.41)$$

S-a obținut din nou **legea clasică de compunere a vitezelor** (1.16).

Prin urmare, **coordonatele, vectorii de poziție, deplasările și vitezele punctului material în cele două sisteme de referință sunt diferite, adică reprezintă mărimi relative**.

Considerăm viteza relativă  $\vec{v}_{AB}$  a punctului material A în raport cu un alt punct B. Ea este egală cu  $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$ . Din această expresie rezultă  $\vec{v}_A = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_B$  – viteza  $\vec{v}_A$  a punctului A în raport cu un sistem de referință este egală cu viteza sa  $\vec{v}_{AB}$  în raport cu punctul B (viteza relativă) plus viteza punctului B în raport cu același sistem de referință (vezi par. 1.6).

Pentru viteza relativă în sistemul S avem:

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = (\vec{v}'_A + \vec{u}) - (\vec{v}'_B + \vec{u}) = \vec{v}'_A - \vec{v}'_B.$$

Aici  $\vec{v}'_A - \vec{v}'_B = \vec{v}_{AB}$  este viteza relativă în sistemul S'. Deci

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}'_{AB}. \quad (2.42)$$

### I | Viteza relativă este aceeași în ambele sisteme de referință, S și S'.

Stabilim relația dintre accelerăriile  $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  și  $\vec{a}' = \frac{\Delta \vec{v}'}{\Delta t}$  ale punctului material față de sistemul S și, respectiv, S'. Din formula (2.41), determinăm relația dintre variațiile vitezelor:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (\vec{v}'_2 + \vec{u}) - (\vec{v}'_1 + \vec{u}) = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = \Delta \vec{v}'.$$

Împărțind termenii ultimei egalități la intervalul de timp  $\Delta t$ , obținem relația dintre accelerării:

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (2.43)$$

### I | Accelerăriile punctului material în raport cu sistemele de referință S și S' sunt egale între ele.

Sistemul S a fost considerat inerțial. În raport cu el corpul liber se mișcă rectiliniu și uniform sau se află în stare de repaus. Accelerarea lui  $\vec{a} = 0$ . Din (2.43) rezultă  $\vec{a}' = 0$ ; prin urmare, corpul liber se mișcă rectiliniu uniform sau se află în repaus și în raport cu sistemul S'. Astfel, în S' are loc principiul inerției, adică sistemul S' este un sistem de referință inerțial.

### I | Orice sistem de referință aflat în mișcare de translație cu viteză constantă în raport cu un sistem inerțial este, de asemenea, un sistem de referință inerțial.

Viteza constantă  $\vec{u}$  poate lua orice valori și poate fi orientată în orice direcții. Conchidem că există o infinitate de sisteme de referință inerțiale.

Dacă sistemul S' se mișcă accelerat față de un sistem inerțial, atunci el este sistem neinerțial ( $\vec{a} \neq \vec{a}'$ ).

Acum să cercetăm formularea principiului fundamental al dinamicii în diferite sisteme de referință inerțiale și să răspundem la întrebarea: se modifică formularea acestui principiu la trecerea de la un sistem inerțial la altul sau nu?

Admitem că sistemul inerțial S este legat cu Pământul. În el expresia matematică a principiului fundamental este cea cunoscută:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.44)$$

Să obținem expresia respectivă în sistemul inerțial S'.

Relația dintre accelerării este dată de formula (2.43).

După cum s-a menționat, masa corpului este o mărime constantă și nu depinde de viteza, dacă aceasta este mult mai mică decât viteza luminii în vid. În mecanica

newtoniană se iau în considerare anume astfel de viteze. Prin urmare, masa corpului în  $S$  și  $S'$  este una și aceeași:

$$m = m'. \quad (2.45)$$

Forțele din natură pot depinde de următoarele mărimi: distanța dintre corpurile în interacțiune (de exemplu, forța de atracție universală), viteza relativă a corpurilor (de exemplu, forța de frecare, forța de rezistență din partea mediului în care el se mișcă), timpul (de exemplu, forța ce acționează între două corperi electrizate ale căror sarcini variază în timp). Observăm că mărimile de care depind forțele nu se modifică la trecerea de la un sistem inerțial la altul, în cazul de față de la sistemul  $S$  la  $S'$ . Aceasta ne permite să conchidem că și forțele nu se modifică la astfel de trecere, adică

$$\vec{F} = \vec{F}'. \quad (2.46)$$

Substituind (2.43), (2.45) și (2.46) în expresia (2.44), obținem

$$m\vec{a}' = \vec{F}'. \quad (2.47)$$

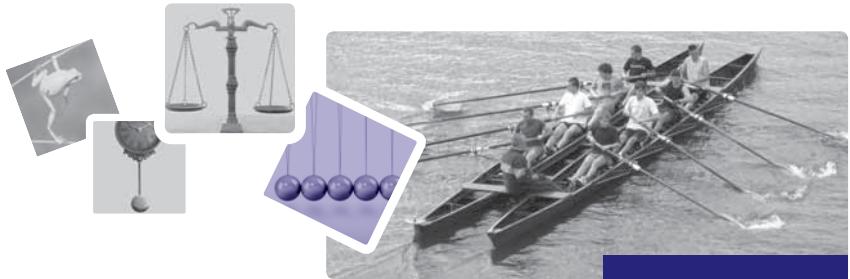
### Principiile mecanicii clasice (newtoniene) își păstrează forma la trecerea de la un sistem de referință inerțial la altul.

Acesta este principiul relativității formulat de Galilei. În conformitate cu acest principiu, **toate sistemele de referință inerțiale sunt echivalente din punct de vedere mecanic**.

Să ilustrăm această concluzie cu un exemplu. Admitem că vă aflați într-o cameră închisă care se poate mișca rectiliniu uniform în raport cu Pământul. Efectuând experimente mecanice în interiorul camerei (ea prezintă un sistem de referință inerțial), nu veți reuși să stabiliți dacă ea se mișcă sau nu și care este viteza ei. Anume o interpretare de acest gen a principiului relativității a fost propusă de către Galilei.

### ÎNTREBĂRI

1. Cum sunt deplasările, vitezele și accelerațiile punctului material în raport cu două sisteme de referință inerțiale?
2. Un corp care se află în repaus față de un sistem de referință inerțial se mișcă rectiliniu uniform accelerat în raport cu un alt doilea sistem de referință. Este alt doilea sistem de referință inerțial? Argumentați răspunsul.
3. Accelerarea unui punct material este aceeași în raport cu două sisteme diferite de referință. Putem afirma că aceste sisteme sunt inerțiale? Argumentați răspunsul.
4. Două sisteme de referință  $S'$  și  $S''$  se deplasează cu viteze constante, dar diferite, în raport cu un sistem inerțial  $S$ . Diferă oare formele principiilor dinamicii în sistemele  $S'$  și  $S''$ ?



## Capitolul III

# ELEMENTE DE STATICĂ

### 3.1 ECHILIBRUL DE TRANSLAȚIE AL RIGIDULUI

După cum știți din cinematică, la mișcarea de translație a solidului rigid, dreapta imaginară care trece prin două puncte oarecare ale lui rămîne paralelă cu ea însăși. Din această definiție a mișcării de translație și din faptul că distanțele dintre punctele rigidului nu se modifică în timpul mișcării reiese că toate punctele lui efectuează deplasări egale în intervalul de timp considerat. Ca urmare, la orice moment punctele rigidului au viteze egale, deci și accelerări egale. Aceasta permite folosirea modelului de punct material pentru rigidul în mișcare de translație, chiar dacă dimensiunile acestuia nu sunt neglijabile.

Din cele expuse rezultă că pentru rigidul în mișcare de translație sunt valabile aceleași condiții de echilibru ca și pentru un punct material.

În conformitate cu principiul inerției, punctul material se află în repaus sau se mișcă rectiliniu uniform atunci cînd asupra lui nu acționează nicio forță sau cînd rezultanta forțelor este egală cu zero.

Astfel, **condiția de echilibru a unui punct material sau a unui rigid în mișcare de translație este**

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0, \quad (3.1)$$

unde  $\vec{R}$  este rezultanta forțelor  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  care acționează asupra punctului material sau a corpului rigid.

Considerăm un exemplu concret: echilibrul unei bile mici încărcate cu sarcină electrică pozitivă  $q_0$  (fig. 3.1, a). Asupra ei acționează forță de greutate  $\vec{G}$  și forțele electrice de respingere  $\vec{F}_{el1}$  și  $\vec{F}_{el2}$  din partea a două bile identice, încărcate cu sarcini egale și de același semn. Condiția de echilibru în cazul de față ia forma

$$\vec{G} + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} = 0.$$

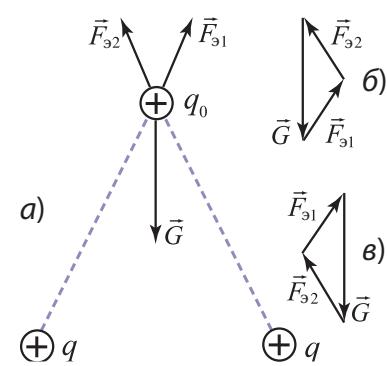


Fig. 3.1

Pentru a aduna vectorii forță construim vectorul  $\vec{G}$ , apoi construim vectorul  $\vec{F}_{el}$  cu originea în extremitatea vectorului  $\vec{G}$  și vectorul  $\vec{F}_{e2}$  cu originea în vîrful lui  $\vec{F}_{el}$ . Se obține un poligon închis – în cazul nostru, un triunghi (fig. 3.1, b). Un rezultat analog se obține la adunarea vectorilor în orice altă succesiune (fig. 3.1, c). Această construcție grafică și obținerea unei linii frînte închise corespunde relației (3.1).

În majoritatea cazurilor, corpul din stare de echilibru se află în contact cu alte corpuși – fire, tije, corpuși cu suprafețe plane, cilindrice sau de alte forme. Aceste corpuși limitează mișcarea corpului considerat și poartă numele de **corpuri de legătură** sau, mai simplu, **legături**.

Legăturile acționează asupra corpului considerat cu forțe oarecare, numite **forțe de reacțiune** sau **forțe de legătură**. Aceste forțe depind de restul forțelor care acționează asupra corpului considerat.

Analizăm un exemplu: o bilă mică, încărcată cu sarcină electrică pozitivă, este suspendată de un fir subțire de mătase (fig. 3.2). În cazul reprezentat în figura 3.2, a din condiția de echilibru  $\vec{T}_a + \vec{G} = 0$  sau  $\vec{T}_a = -\vec{G}$  obținem valoarea tensiunii firului  $|\vec{T}_a| = |\vec{G}|$ .

Admitem că sub bila suspendată este situată o altă bilă încărcată negativ în figura 3.2, b și pozitiv în figura 3.2, c. Ținând seama de semnele sarcinilor, reprezentăm forțele electrice și care acționează asupra bilei suspendate (fig. 3.2, b și c). Procedînd ca în cazul precedent, determinăm valorile tensiunilor în fir  $T_b = G + F_e$  și  $T_c = G - F'_e$ .

Astfel, valoarea forței de reacțiune – tensiunea firului – în aceste trei cazuri rămîne verticală, dar ia valori diferite. Tensiunea în fir poate avea și o altă direcție, diferită de cea verticală (fig. 3.2, d).

Condiția de echilibru al punctului material supus legăturilor rămîne aceeași (3.1), dar conține toate forțele ce acționează asupra acestui punct, inclusiv reacțiunile legăturilor. În majoritatea problemelor de echilibru al punctului material (de echilibru, de translație a rigidului) se cere tocmai determinarea acestor reacțiuni.

În unele cazuri, direcțiile forțelor de reacțiune sunt cunoscute, ele depinzînd de corpul ce realizează legătura, și anume direcția reacțiunii coincide cu direcția în care mișcarea punctului material este limitată de legătura dată. Astfel, firul împiedică îndepărțarea bilei de punctul de suspensie O (fig. 3.2), reacțiunea lui – tensiunea – este orientată de-a lungul firului spre punctul de suspensie. În cazul

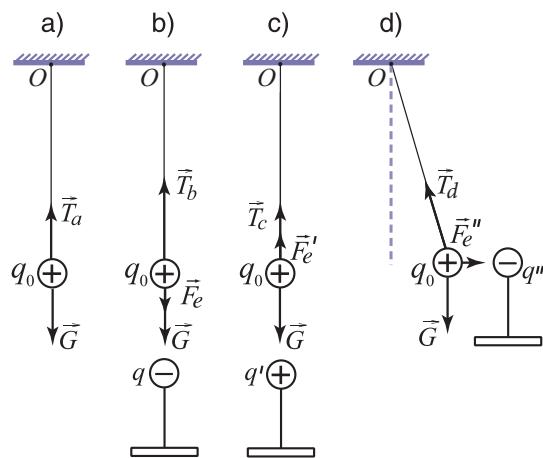


Fig. 3.2

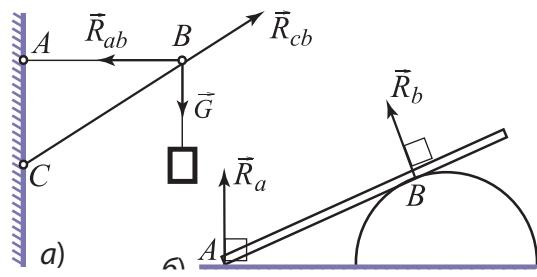


Fig. 3.3

cînd legăturile sînt realizate de tije articulate la ambele capete, reacțiunile sînt orientate de-a lungul tijelor. Sensul lor depinde însă de starea de deformare în care se află tija (fig. 3.3, a): comprimată (tija BC) sau alungită (tija AB). În fine, în cazul cînd legătura este realizată de un corp cu suprafață plană (în punctul A din fig. 3.3, b) sau corpul considerat are o suprafață plană ce vine în contact cu corpul de legătură (punctul B din fig. 3.3, b), forța de reacție este normală la suprafața plană.

Determinarea reacțiunilor în legături sau a unor forțe necunoscute care acționează asupra corpului rigid aflat în echilibru poate fi realizată prin metodă grafică sau prin metodă analitică. Metoda grafică necesită construirea poligonului forțelor la o scară aleasă și determinarea mărimilor necunoscute din el.

Mult mai frecvent se folosește metoda analitică. În această metodă se alege cît mai convenabil sistemul de coordonate (cît mai multe forțe să fie orientate de-a lungul axelor lui), apoi se trece de la ecuația vectorială (3.1) la ecuațiile scalare pentru proiecțiile forțelor:

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} &= 0, \\ F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} &= 0, \\ F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Aceste trei condiții scalare de echilibru (3.2) sînt echivalente cu condiția vectorială (3.1).

Pentru simplitate, în cazul sistemului plan de forțe se alege o axă (de obicei, Oz) perpendiculară pe planul în care se situează forțele, astfel încît în cea de-a treia ecuație (3.2) toți termenii sînt nuli. Sistemul (3.2) se reduce la un sistem cu numai 2 ecuații.

## PROBLEME REZOLVATE

1. Un felinar de stradă, de masă  $m = 12\text{ kg}$ , este suspendat cu ajutorul tijei orizontale AB, articulata la capătul A, și al cablului BC care formează cu tija un unghi  $\alpha = 30^\circ$  (fig. 3.4). Să se determine forța ce întinde cablul și forța ce comprimă tija.

### REZOLVARE

**Se dă:**

$$m = 12\text{ kg}, \quad \alpha = 30^\circ$$

$$T - ?, \quad R_{AB} - ?$$

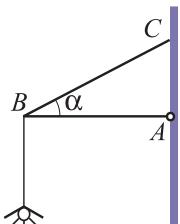


Fig. 3.4

Reprezentăm în figura 3.5 sistemul de forțe aplicate în punctul B: forța de greutate  $\vec{G} = m\vec{g}$  a felinarului, tensiunea  $\vec{T}$  din cablu și reacțunea  $\vec{R}_{AB}$  a tijei. Punctul de suspensie B se află în repaus, deci, conform condiției de echilibru de translație (3.1), suma forțelor ce acționează asupra lui este nulă:  $\vec{T} + \vec{R}_{AB} + \vec{G} = 0$ . Luăm axele de coordonate, aşa cum este indicat în figura 3.5, și trecem de la ecuația vectorială la ecuațiile pentru proiecțiile forțelor pe aceste axe:

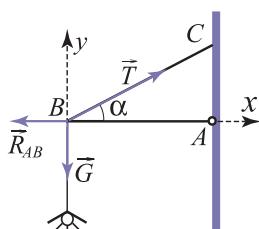


Fig. 3.5

$$\text{pe axa } Bx \quad T \cos \alpha - R_{AB} = 0,$$

$$\text{pe axa } By \quad T \sin \alpha - G = 0.$$

Din cele două ecuații, care reprezintă condițiile de echilibru, găsim:  $T = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{mg}{\sin \alpha}$ ;  $T = 240\text{ N}$

și  $R_{AB} = T \cos \alpha$ ;  $R_{AB} = 208\text{ N}$ . În conformitate cu principiul acțiunii și reacțiunii, forțele deformatoare sunt egale în modul cu forțele de reacție ale legăturilor. Prin urmare, forța ce întinde cablul este egală cu tensiunea din el  $T = 240\text{ N}$ , iar forța ce comprimă tija – cu reacțunea acesteia  $R_{AB} = 208\text{ N}$ .

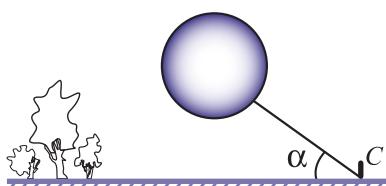


Fig. 3.6

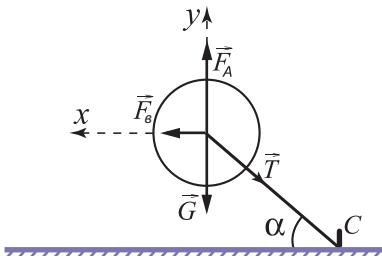


Fig. 3.7

- 2.** Un aerostat de greutate  $G = 2\,500\text{ N}$  este menținut la sol cu ajutorul unui cablu (fig. 3.6), care pe timp cu vînt formează cu suprafața Pământului un unghi  $\alpha = 60^\circ$ . Să se determine forța arhimedică ce acționează asupra aerostatului și forța orizontală cu care vîntul acționează asupra lui, dacă tensiunea din cablu este  $T = 3\,000\text{ N}$ .

### REZOLVARE

**Se dă:**

$$G = 2\,500\text{ N},$$

$$\alpha = 60^\circ,$$

$$T = 3\,000\text{ N}$$

$$F_A = ?, F_v = ?$$

Asupra aerostatului acționează forțele următoare (fig. 3.7): forța de greutate  $\vec{G}$ , forța arhimedică  $\vec{F}_A$ , orientată vertical în sus, tensiunea  $\vec{T}$  din cablu și forța vîntului  $\vec{F}_v$ . Condiția de echilibru al acestui sistem de forțe este

$$\vec{G} + \vec{F}_A + \vec{T} + \vec{F}_v = 0.$$

În proiecție pe axe de coordonate, alese așa cum este reprezentat în figură, obținem două ecuații scalare:

$$\text{pe axa } Ox \quad -T \cos \alpha + F_v = 0,$$

$$\text{pe axa } Oy \quad -G + F_A - T \sin \alpha = 0.$$

Determinăm forțele necunoscute:  $F_v = T \cos \alpha$  și  $F_A = G + T \sin \alpha$ . Valorile lor sunt  $F_v = 2\,595\text{ N}$  și  $F_A = 4\,000\text{ N}$ .

### ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

- Cum înțelegeți afirmația că un corp se află în echilibru de translație?
- Un corp se află în echilibru dinamic de translație în raport cu un sistem inerțial de referință. Cum trebuie ales un alt sistem de referință, încât față de acesta corpul considerat să se afle în echilibru static?
- Care este condiția de echilibru al unui rigid în mișcare de translație?
- Ce corperi se numesc corperi de legătură?
- Cum este orientată reacțiunea unei tije articulate? De ce depinde sensul acesteia?
- O greutate de masă  $m = 60\text{ kg}$  este suspendată de un cablu a cărui tensiune de rupere este  $T_r = 1\,176\text{ N}$ . La capătul cablului de care atîrnă greutatea este aplicată o forță orizontală  $\vec{F}$  (fig. 3.8). Determinați unghiul minim  $\alpha$  pe care-l poate forma cablul cu orizontală și valoarea forței  $\vec{F}$  ce corespunde acestui unghi.
- Un felinar ce iluminează partea carosabilă a unei străzi este suspendat la mijlocul unui cablu de lungime  $l = 30\text{ m}$ . Punctul de care este suspendat felinarul se află cu  $h = 1,2\text{ m}$  mai jos de punctele în care capetele cablului sunt fixate pe stilpii de susținere. Determinați tensiunea în cablu, dacă masa felinarului  $m = 16\text{ kg}$ .
- O sferă de masă  $m = 2,4\text{ kg}$  și rază  $r = 6\text{ cm}$  este suspendată de un fir de lungime  $l = 24\text{ cm}$ , celălalt capăt al firului fiind fixat într-un punct al unui perete vertical neted (fig. 3.9). Care este tensiunea în firul de suspensie și forța cu care sferă apasă asupra peretelui?

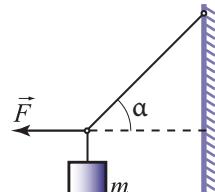


Fig. 3.8

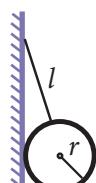


Fig. 3.9

### 3.2º MOMENTUL FORȚEI. ECHILIBRUL DE ROTAȚIE AL RIGIDULUI

Să efectuăm următorul experiment. Luăm două scînduri avînd fiecare un scripete la unul din capete (planele folosite la studierea frecării). Le aşezăm una lîngă alta, cu scripetii în părți opuse. Pe ele situăm o bară de lemn, în care sătăcătă două cuie, astfel încît firele legate de cuie și trecute peste scripeti să fie paralele (fig. 3.10). Cu o mînă menținem bara fixă, iar de capetele libere ale firelor, trecute peste scripeti, suspendăm corpuri de mase egale. Astfel, asupra barei acționează două forțe  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$ , care au module egale, drepte-suport parallele și sensuri contrare (fig. 3.11, a). Sistemul de forțe de acest fel este numit **cuplu de forțe**. Distanța dintre dreptele-suport ale forțelor ce constituie cuplul este numită **braț al cuplului**. Conform definiției cuplului  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ , rezultanta forțelor ce constituie un cuplu este nulă.

Bara se eliberează, dar ea nu rămîne în repaus. Ea se rotește și ajunge în poziția în care forțele  $\vec{F}_1$  și  $\vec{F}_2$  au o dreaptă-suport comună (fig. 3.11, b).

Acest experiment demonstrează următoarele: condiția de echilibru (3.1) (condiția ca rezultanta să fie nulă) nu este suficientă pentru ca un corp să se afle în echilibru, deoarece nu exclude mișcarea de rotație.

Pentru a stabili condiția de echilibru al mișcării de rotație, efectuăm un experiment în care folosim discul cu ace și cu axă de rotație. Fixăm pe disc o coală de hîrtie și realizăm o stare de echilibru de rotație asemenea celei reprezentate în figura 3.12, a. Cu un creion marcam pe hîrtie direcțiile firelor de care sătăcătă suspinatele corpuri. Scoatem coala de hîrtie de pe disc, construim drepte-suport ale forțelor (prelungim direcțiile firelor). Măsurăm distanțele  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  de la axa de rotație pînă la aceste drepte. Scoatem coala de hîrtie de pe disc, construim drepte-suport ale forțelor (prelungim direcțiile firelor). Măsurăm distanțele  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  de la axa de rotație pînă la aceste drepte.

Forța  $G_1$  ar roti discul în sens trigonometric (antiorar), iar forțele  $G_2$  și  $G_3$  – în sens orar (fig. 3.12, b). Calculăm mărimele  $G_1d_1$  și  $G_2d_2 + G_3d_3$ . Observăm că ele satisfac condiția

$$G_1d_1 = G_2d_2 + G_3d_3. \quad (3.3)$$

**Mărimea  $d$  egală cu distanța dintre axa de rotație și dreapta-suport a forței se numește braț al forței în raport cu această axă.**

Introducem mărimea numită **moment al forței în raport cu axa de rotație**

$$M = \pm F \cdot d. \quad (3.4)$$

Ea este egală cu valoarea produsul dintre forță și brațul ei. Convențional, se ia semnul „plus” cînd forța ar roti corpul în sens antiorar (trigonometric) și semnul „minus” atunci cînd ea l-ar roti în sens orar.

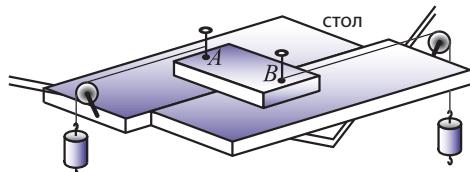


Fig. 3.10

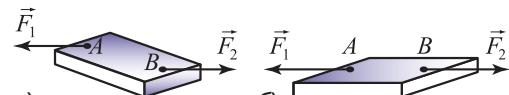


Fig. 3.11

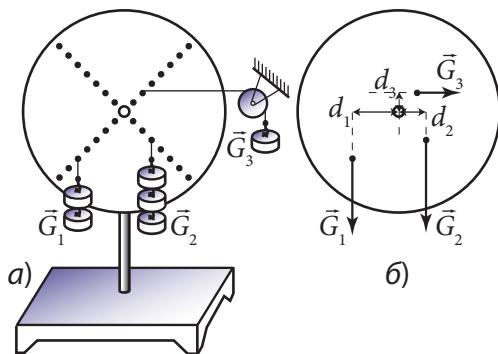


Fig. 3.12

În cazul experimentului reprezentat în figura 3.12 momentele forțelor de greutate sînt  $M_1 = G_1 d_1$ ,  $M_2 = -G_2 d_2$  și  $M_3 = -G_3 d_3$ , iar condiția (3.3) se scrie astfel:

$$\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_3 = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

În caz general, condiția echilibrului de rotație al unui corp rigid este

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_n = \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

**Un corp rigid se află în echilibru de rotație atunci cînd suma algebraică a momentelor tuturor forțelor în raport cu axa de rotație este egală cu zero.**

Deci un corp rigid se află în echilibru în raport cu un sistem de referință inerțial numai atunci cînd se respectă ambele condiții de echilibru – pentru mișcarea de translație (3.1) și pentru mișcarea de rotație (3.6):

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_n = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Menționăm că pentru un sistem plan de forțe alegerea axei de rotație care este perpendiculară pe acest plan poate fi arbitrară, dacă rezultanta acestor forțe se egalează cu zero. De aceea axa de rotație, în raport cu care se calculează suma momentelor forțelor, se ia astfel încît momentele unui număr mai mare de forțe să fie egale cu zero.

### PROBLEMĂ REZOLVATĂ

O bară omogenă  $AB$  de masă  $m = 24 \text{ kg}$  și lungime  $l = 2 \text{ m}$  se sprijină de podeaua netedă și se reazemă de muchia  $C$  situată la înălțimea  $h = 1,5 \text{ m}$  deasupra podelei. Bară formează unghiul  $\alpha = 60^\circ$  cu podeaua și este susținută de cablul orizontal  $AD$  întins aproape de podea, paralel cu ea (fig. 3.13). Determinați tensiunea cablului, reacțiunea podelei și reacțiunea muchiei  $C$ .

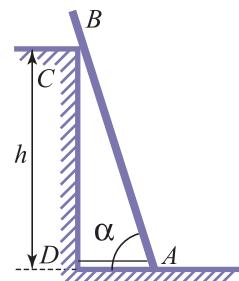


Fig. 3.13

### REZOLVARE

**Se dă:**

$m = 24 \text{ kg}$ ,  
 $l = 2 \text{ m}$ ,  
 $h = 1,5 \text{ m}$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$

$T - ?, N - ?, R - ?$

Asupra barei acționează forță de greutate  $m\vec{g}$ , reacțiunea  $\vec{N}$  normală pe podea, reacțiunea muchiei  $\vec{R}$  perpendiculară pe bară și tensiunea firului  $\vec{T}$  (fig. 3.14). Condiția pentru echilibrul de translație al barei impune  $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{T} = 0$ .

Făcînd proiecția pe axele de coordonate indicate în figura 3.14, obținem

$$\text{pe axa } Dx \quad R \sin \alpha - T = 0; \quad (1)$$

$$\text{pe axă } Dy \quad -mg + N + R \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Celor două ecuații cu trei mărimi necunoscute ( $N$ ,  $R$  și  $T$ ) o alăturăm pe a treia, care exprimă condiția pentru echilibrul de rotație. Egalăm cu zero suma momentelor forțelor în raport cu axa ce trece prin  $A$ , perpendicular pe planul figurii. Momentele reacțiunilor  $\vec{N}$  și  $\vec{T}$  în raport cu această axă sunt nule. Astfel obținem o ecuație cu o singură necunoscută:

$$mg \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha - R \cdot AC = 0. \quad (3)$$

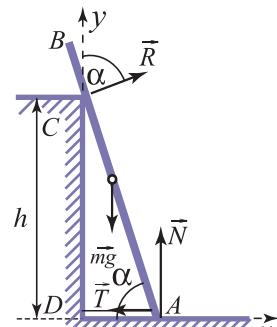


Fig. 3.14

Distanța  $AC = \frac{h}{\sin \alpha}$ ; prin urmare, ecuația se transcrie sub forma  $mg \frac{l}{2} \cos \alpha - R \frac{h}{\sin \alpha} = 0$ .

Exprimăm reacțiunea muchiei

$$R = \frac{mgl \sin \alpha \cos \alpha}{2h}; R = 69,2 \text{ N.}$$

Apoi din ecuația (1) exprimăm tensiunea firului  $T = R \sin \alpha$ ;  $T = 59,9 \text{ N}$ . În fine, exprimăm reacțiunea podelei din ecuația (2). Avem  $N = mg - R \cos \alpha$ ;  $N = 205,4 \text{ N}$ .

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Ce se numește braț al forței?
2. Cum se definește momentul momentul forței?
3. Care este condiția de echilibru al unui rigid cu axă fixă de rotație?
4. Cum se va modifica condiția de echilibru de rotație, dacă s-ar adopta o altă convenție privind semnele momentelor forțelor: cele ce ar roti în sens orar ar fi considerate pozitive, iar cele care ar roti în sens trigonometric – negative?
5. Ce sistem de forțe este numit cuplu de forțe?
6. Forțele care constituie un cuplu de forțe au module egale cu  $F$ , iar distanța dintre direcțiile lor este  $d$ . Calculați momentul cuplului, ca suma momentelor forțelor ce-l constituie, în raport cu o axă perpendiculară pe planul cuplului. Depinde oare momentul cuplului de poziția acestei axe?
7. O tijă omogenă de masă  $m = 2 \text{ kg}$  și lungime  $l = 1,2 \text{ m}$  are suspendate de capetele sale două corpuri cu masele  $m_1 = 4 \text{ kg}$  și  $m_2 = 6 \text{ kg}$ . La ce distanță de la capătul de care este suspendat cel mai ușor trebuie să se afle punctul de sprijin, pentru ca tija să se afle în echilibru?
8. Un muncitor menține o scindură de masă  $m = 30 \text{ kg}$  de un capăt al acesteia, astfel încât scindura formează un unghi  $\alpha = 30^\circ$  față de orizontală. Care este valoarea forței aplicate perpendicular pe scindură de către muncitor? Care ar fi valoarea forței, dacă aceasta ar fi verticală?
9. O scară de lungime  $l = 4 \text{ m}$  și de masă  $m = 18 \text{ kg}$  este sprijinită de un perete vertical neted și formează cu acesta un unghi  $\alpha = 30^\circ$ . Pînă la ce înălțime maximă poate urca un om pe scară înainte ca aceasta să alunecă, dacă coeficientul de frecare dintre scară și podea  $\mu = 0,3$ , iar masa omului este de  $n = 4$  ori mai mare decît masa scării? Cu ce forță apasă scara asupra peretelui atunci cînd omul se află la această înălțime?
10. O tijă omogenă a fost îndoită sub un unghi drept, astfel încât lungimea unei părți a ei este egală cu  $1/3$  din lungimea tijei. Tija a fost atîrnată cu unghiul drept de un cui. Ce unghi formează porțiunea mai scurtă a tijei cu direcția orizontală?

## 3.3º CENTRUL DE GREUTATE AL SISTEMULUI DE PUNCTE MATERIALE. CENTRUL DE MASĂ

### a. Centrul de greutate. Centrul de masă

Considerăm un corp rigid ale cărui dimensiuni sunt mult mai mici decît raza Pămîntului. Ne imaginăm corpul divizat într-un număr mare  $n$  de volume mici  $V_i$  de mase egale cu  $m_i$ . Asupra acestora acționează forțe de greutate  $\vec{G}_i = m_i \vec{g}$ . Dimensiunile corpului fiind mici, aceste forțe sunt paralele.

**Rezultanta forțelor paralele  $\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \dots + \vec{G}_n$  este forța de greutate a corpului, iar punctul de aplicatie al ei se numește centru de greutate al corpului.**

Cunoașterea poziției centrului de greutate este deosebit de importantă în tehnică, deoarece ea determină stabilitatea clădirilor, a turnurilor, a strungurilor, a barajelor, a navelor maritime, a automobilelor etc.

Să determinăm poziția centrului de greutate al unui sistem de două bile omogene, unite cu o tijă subțire. Pentru simplitate, admitem că masa tijei este mult mai mică decât masele  $m_1$  și  $m_2$  ale bilelor, iar razele acestora sunt mult mai mici decât lungimea tijei. În acest caz masa tijei se neglijeză, iar bilele se consideră puncte materiale.

Considerăm că tija are un punct de sprijin  $C$ , luat astfel încât ea se află în echilibru în poziție orizontală (fig. 3.15). Notăm reacțiunea sprijinului cu  $\vec{F}$ . Ecuațiile ce exprimă condițiile de echilibru ale sistemului mecanic considerat sunt

$$\vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F} = 0, \quad (3.8)$$

$$G_1 d_1 - G_2 d_2 = 0. \quad (3.9)$$

Reacțiunea  $\vec{F}$  este forța cu care sprijinul acționează asupra tijei. În conformitate cu principiul acțiunii și reacțiunii, tija apasă asupra sprijinului cu forța  $\vec{R} = -\vec{F}$ . Ținând seama de ecuația (3.8), obținem

$$\vec{R} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2. \quad (3.10)$$

Deci rezultanta forțelor de greutate  $\vec{G}_1$  și  $\vec{G}_2$  este aplicată în acel punct, în raport cu care suma momentelor acestor forțe este nulă. Astfel, rezultanta forțelor de greutate ale bilelor este aplicată în punctul determinat de condiția de echilibru (3.9).

Deducem formula care permite calcularea coordonatelor centrului de greutate al celor două puncte materiale (al bilelor) cînd sunt cunoscute coordonatele lor. Reprezentăm sistemul considerat în figura 3.16 și introducem notațiile corespunzătoare. Din condiția (3.9) exprimăm raportul modulelor forțelor de greutate:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{d_2}{d_1}. \quad (3.11)$$

Triunghiurile dreptunghice  $CDA$  și  $CEB$  sunt asemenea. Scriem raportul laturilor corespunzătoare:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{CE}{CD} = \frac{BE}{AD}. \quad (3.12)$$

Din figură observăm:  $BC = d_2$ ,  $AC = d_1$ ,  $CE = x_2 - x_c$ ,  $DC = x_c - x_1$ ,  $BE = y_2 - y_c$  și  $AD = y_c - y_1$ . Relațiile (3.12) iau forma

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{x_2 - x_c}{x_c - x_1} = \frac{y_2 - y_c}{y_c - y_1}.$$

Ținând seama de relația (3.11), putem scrie

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{x_2 - x_c}{x_c - x_1} \text{ și } \frac{G_1}{G_2} = \frac{y_2 - y_c}{y_c - y_1}.$$

De aici obținem expresiile coordonatelor centrului de greutate al celor două bile (puncte materiale):

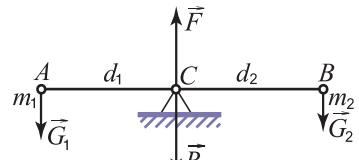


Fig. 3.15

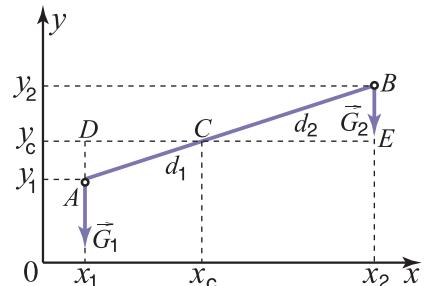


Fig. 3.16

$$\mathbf{x}_c = \frac{\mathbf{G}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{G}_n \mathbf{x}_n}{\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \dots + \mathbf{G}_n}; \mathbf{y}_c = \frac{\mathbf{G}_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{y}_2 + \dots + \mathbf{G}_n \mathbf{y}_n}{\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \dots + \mathbf{G}_n}. \quad (3.13)$$

Menționăm că aceste formule își păstrează forma și în cazul unui sistem din mai multe puncte materiale:

$$\mathbf{x}_c = \frac{\mathbf{G}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{G}_n \mathbf{x}_n}{\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \dots + \mathbf{G}_n}; \mathbf{y}_c = \frac{\mathbf{G}_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{y}_2 + \dots + \mathbf{G}_n \mathbf{y}_n}{\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \dots + \mathbf{G}_n}. \quad (3.14)$$

O formulă similară poate fi scrisă și pentru coordonata  $z_c$  în cazul cînd punctele materiale nu se află în unul și același plan.

Substituind  $G_1 = m_1 g$  și  $G_2 = m_2 g$  în formulele (3.13), după simplificarea prin  $g$ , obținem

$$\mathbf{x}_c = \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{m}_2 \mathbf{x}_2}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}; \mathbf{y}_c = \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{m}_2 \mathbf{y}_2}{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2}. \quad (3.15)$$

Evident, aceleași formule (3.15) se obțin și în cazul cînd asupra punctelor materiale acționează forțe paralele, ale căror valori sunt proporționale cu masele:  $\vec{F}_1 = m_1 \vec{k}$ ,  $\vec{F}_2 = m_2 \vec{k}$ . Deci formulele (3.15) au un caracter mai general decît formulele (3.13).

**Punctul C, ale căruia coordonate se determină din formulele (3.15), este numit centrul de masă al sistemului de puncte materiale.**

Această noțiune rămîne aplicabilă și atunci cînd asupra punctelor materiale nu acționează forțe de greutate paralele, de exemplu, în stare de imponderabilitate.

## b. Determinarea poziției centrului de greutate

Pozitia centrului de greutate al corpului se determină mai simplu atunci cînd acesta este omogen și are elemente de simetrie. De exemplu, inelul, figura plană de forma unui paralelogram de grosime constantă, sferă, cilindrul, prisma dreaptă au centre de simetrie. Centrele de greutate coincid cu ele. Menționăm că centrul de greutate poate fi și un punct ce nu aparține corpului, ca la inel. Trunchiul de con (fig. 3.17, a) are o axă de simetrie  $OO'$  – centrul de greutate al său se află pe această axă. Un ciocan (fig. 3.17, b) are două plane de simetrie –  $P$  și  $P'$ . Centrul de greutate al ciocanului se află pe aceste plane de simetrie, adică pe linia de intersecție a lor.

Relativ simplu se determină poziția centrului de greutate al unei plăci triunghiulare omogene de grosime constantă. Ne imaginăm triunghiul divizat în fișii înguste paralele cu una din laturile lui, de exemplu, cu  $AD$  (fig. 3.18). Centrul de greutate al fiecărei fișii se află la mijlocul ei, adică centrele de greutate ale tuturor fișilor se află pe mediana  $BE$ ; pe ea se află deci și centrul de greutate al triunghiului. Dacă ne-am fi imaginat triunghiul divizat în fișii paralele cu latura  $AB$ , am fi ajuns la concluzia că centrul de greutate se află pe mediana  $DF$ . Astfel conchidem că centrul de greutate  $C$  al plăcii triunghiulare de grosime constantă se află la intersecția medianelor. Se știe că acest punct împarte mediana într-un

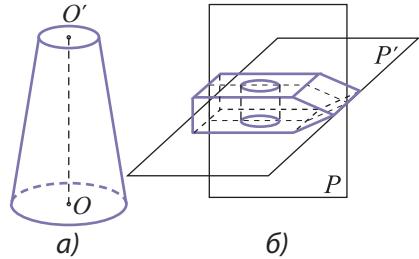


Fig. 3.17

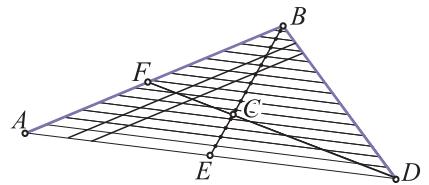


Fig. 3.18

raport anumit:  $EC : CB = FC : CD = 1 : 2$ .

Deseori corpul de o formă geometrică mai complicată (fig. 3.19) poate fi divizat în corpi de forme mai simple având pozițiile centrelor de greutate cunoscute. Mai întii, determinăm pozițiile centrelor de greutate  $C_1$  și  $C_2$  ale acestora. Considerînd forțele de greutate  $\vec{G}_1$  și  $\vec{G}_2$  aplicate în aceste centre, determinăm poziția centrului de greutate al corpului întreg cu ajutorul formulelor (3.13).

Poziția centrului de greutate al figurii plane de formă neregulată sau neomogenă se determină, cel mai simplu, pe cale experimentală. Corpul se suspendează de un fir. În stare de echilibru, forța sa de greutate, aplicată în centrul de greutate, este echilibrată de tensiunea firului. Prin urmare, aceste două forțe au o dreaptă suport comună. Centrul de greutate se află pe direcția firului de suspensie. Trasăm direcția corespunzătoare  $AA'$  pe corp (fig. 3.20, a). Experimentul se repetă suspendînd corpul în alt punct al său  $B$  (fig. 3.20, b) și se trasează pe corp direcția  $BB'$  a firului. Centrul de greutate aparține ambelor direcții ( $AA'$  și  $BB'$ ), deci se află în punctul  $C$  de intersecție a lor.

Evident, corpul fixat în centrul de greutate se află în echilibru în orice poziție a sa, cînd asupra lui acționează numai forțele de greutate.

Cunoașterea poziției centrului de greutate este necesară pentru a analiza stabilitatea corpurilor. Analizăm un corp care are o suprafață de sprijin, de exemplu, un cilindru. Din figura 3.21 se vede că în cazul a) corpul se află în echilibru (forța de greutate este echilibrată de reacțiunea suportului), iar în cazul c) corpul se răstoarnă. În cazul b) corpul se află la limita echilibrului, adică în echilibru nestabil.

Astfel, **corpul cu suprafață de sprijin se află în echilibru stabil atunci cînd verticala coborîtă din centrul de greutate trece prin această suprafață**.

Stabilitatea echilibrului unui corp cu

mai multe suprafețe posibile de sprijin depinde de suprafața pe care el este aşezat. Din figura 3.22 se vede că la inclinarea corpului cu același unghi  $\alpha$ , după eliberarea lui, în cazul a) corpul se întoarce în poziția inițială, iar în cazul b) el se răstoarnă. Echilibrul este cu atît mai stabil, cu cît poziția centrului de greutate al corpului este mai joasă. Ulterior

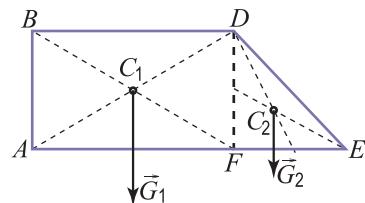


Fig. 3.19

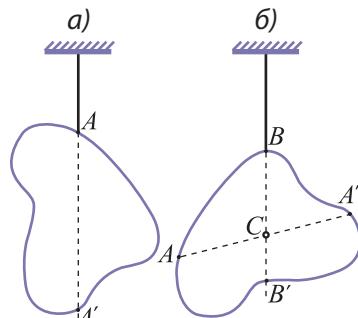


Fig. 3.20

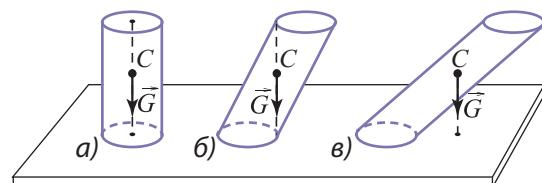


Fig. 3.21

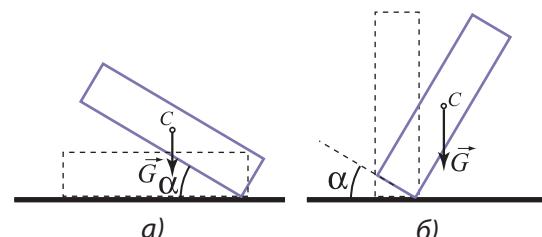


Fig. 3.22

la aceeași concluzie se va ajunge din alte considerente.

Dacă un corp are mai multe regiuni de contact cu suportul pe care se află, atunci rolul suprafetei de sprijin îl are **baza de sprijin** – suprafață limitată de conturul obținut prin unirea punctelor celor mai îndepărțate de contact cu suportul. În figura 3.23 este reprezentată baza de sprijin a unei mese.

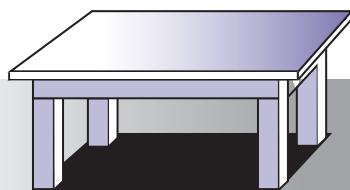


Fig. 3.23

## PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Două sfere omogene de raze  $r$  și  $2r$ , confectionate din același material, sînt fixate în punctul lor de tangență. Determinați poziția centrului de greutate al sistemului de sfere în raport cu punctul de tangență al sferelor.

**Se dă:**

$$\begin{aligned} R_1 &= r, \\ R_2 &= 2r, \\ \rho_1 &= \rho_2 = \rho \\ x_c - ? \end{aligned}$$

### REZOLVARE

Reprezentăm sistemul mecanic considerat în figura 3.24. Centrul de greutate  $C$  al sistemului se află pe axa  $Ox$ , care trece prin linia centrelor  $C_1$  și  $C_2$  și este o axă de simetrie.

Masele sferelor sunt  $m_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$  și  $m_2 = \frac{4}{3} \pi (2r)^3 \rho$ , unde  $\rho$  este densitatea substanței din care s-au confecționat sferele.

Coordonatele centrelor de greutate ale sferelor sunt  $x_1 = -r$  și  $x_2 = +2r$ .

Folosim formula (3.13) pentru coordonata centrului de greutate:  $x_c = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2}{G_1 + G_2}$ . Substituind mărimile corespunzătoare, obținem  $x_c = \frac{5r}{3}$ .

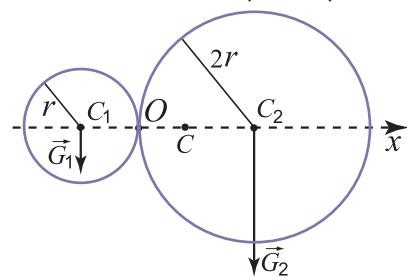
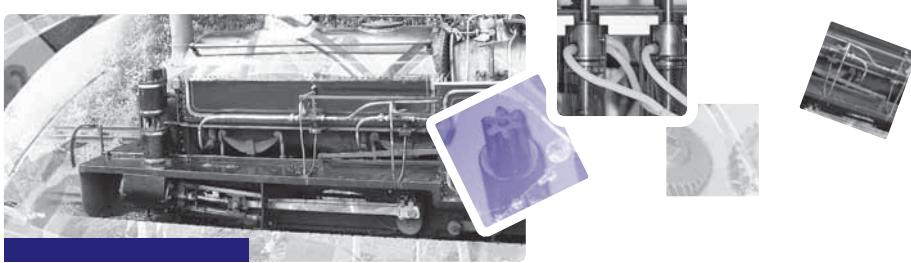


Fig. 3.24

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Ce este centrul de greutate al corpului?
2. Care noțiune este mai generală: centrul de greutate sau centrul de masă? Argumentați răspunsul.
3. În ce caz corpul cu suprafață de sprijin se află în echilibru?
4. De la un cilindru omogen de lungime  $L = 2$  m a fost tăiat un capăt de lungime  $l = 0,4$  m. În ce sens și cu cît s-a deplasat centrul de greutate al cilindrului?
5. Două sfere de raze  $r = 10$  cm, una din aluminiu și a doua din cupru, sînt fixate rigid în punctul de tangență al lor. Determinați poziția centrului de greutate al sistemului de sfere față de punctul lor de tangență. Densitatea aluminiului  $\rho_1 = 2,70 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, densitatea cuprului  $\rho_2 = 8,96 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>.
6. O figură de forma celei reprezentate în figura 3.19 este tăiată dintr-o foaie de tablă. Determinați coordonatele centrului ei de masă, dacă se cunosc dimensiunile:  $AB = 12$  cm,  $BD = 20$  cm,  $AE = 35$  cm.
7. O tijă omogenă a fost îndoită în două părți egale, care formează între ele un unghi drept. Tija a fost suspendată de un capăt cu un fir. Ce unghi formează partea superioară a tijei cu direcția orizontală?



## Capitolul IV

# IMPULSUL MECANIC. LUCRUL ȘI ENERGIA MECANICĂ

### 4.1 IMPULSUL PUNCTULUI MATERIAL. TEOREMA VARIATIEI ȘI LEGEA CONSERVĂRII IMPULSULUI PUNCTULUI MATERIAL

Considerăm un corp care poate fi aproximat cu un punct material. Notăm masa lui cu  $m$ , iar rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra lui cu  $\vec{F}$ . În conformitate cu principiul fundamental al dinamicii, avem

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (4.1)$$

unde accelerarea imprimată de rezultanta  $\vec{F}$  este  $a = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ . Intervalul de timp  $\Delta t$  se consideră destul de mic și pe parcursul lui forța  $\vec{F}$  rămîne, practic, constantă. Dacă însă forța  $\vec{F}$  este constantă, intervalul  $\Delta t$  poate lua orice valoare.

Variata vitezei este  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ , prin urmare, accelerarea  $a = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$ . Substituind această expresie în relația (4.1), obținem

$$\frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} = \vec{F}. \quad (4.2)$$

Introducem o mărime fizică nouă, notată cu  $\vec{p}$ :

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (4.3)$$

Mărimea  $\vec{p}$  este numită **impuls mecanic al corpului** (impuls al corpului ori al punctului material) sau **cantitate de mișcare**.

**■ Impulsul punctului material este egal cu produsul dintre masa și viteza lui.**

Unitatea de impuls este  $[p] = [m] \cdot [v] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$ .

Din definiția (4.3) observăm că impulsul corpului reprezintă o mărime fizică vectorială care are aceeași direcție și sens ca și viteza. Deoarece viteza este relativă, impulsul, de asemenea, constituie o mărime relativă, adică dependentă de sistemul de referință inerțial față de care este descrisă mișcarea.

Substituim  $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$  și  $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$  – impulsurile corpului la momentele  $t_1$  și  $t_2$ , adică la începutul și, respectiv, la sfîrșitul intervalului  $\Delta t$  – în relația (4.2):

$$\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} = \vec{F}.$$

Dar  $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$  este variația impulsului. Astfel, obținem

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}. \quad (4.4)$$

**Raportul variației impulsului punctului material la intervalul respectiv de timp este egal cu rezultanta forțelor ce acționează asupra lui.**

Relația (4.4) poate fi scrisă:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t. \quad (4.5)$$

Notăm cu  $H$  mărimea fizică egală cu produsul dintre forță și durata acțiunii ei:

$$\vec{H} = \vec{F} \cdot \Delta t. \quad (4.6)$$

Această mărime poartă denumirea de **impuls al forței**.

Unitatea de impuls al forței ( $N \cdot s$ ) este aceeași ca și a impulsului corpului.

În conformitate cu relația (4.5), **variația impulsului punctului material este egală cu impulsul forței rezultante aplicate punctului material în intervalul de timp corespunzător**.

Relațiile (4.4) și (4.5) sunt două expresii matematice ale aceleiași **teoreme a variației impulsului punctului material**. Aceste două formulări au fost obținute din principiul fundamental al dinamicii dat de relația (4.1). Ele au însă un caracter general, aplicindu-se și în cazul corpului de masă variabilă, în timp ce relația (4.1) se aplică numai corporilor de masă constantă. Formularea dată de Newton în „Principiile matematice ale filosofiei naturale” corespunde relației (4.5).

Din relația (4.5) observăm că variația impulsului corpului este determinată nu numai de valoarea forței aplicate, ci și de durata acțiunii ei. Astfel, o forță mai puțin intensă, acționând timp îndelungat, poate produce aceeași variație a impulsului corpului ca și o forță de intensitate mare, dar de durată mai mică de acțiune.

Impulsul forței poate fi calculat și printr-o metodă grafică. Admitem mai întâi că forță este constantă. Construim graficul forței pentru intervalul de timp  $\Delta t = t_2 - t_1$  în care ea acționează (fig. 4.1, a). Observăm că impulsul forței  $F\Delta t = F(t_2 - t_1)$  este numeric egal cu aria dreptunghiului de sub graficul forței.

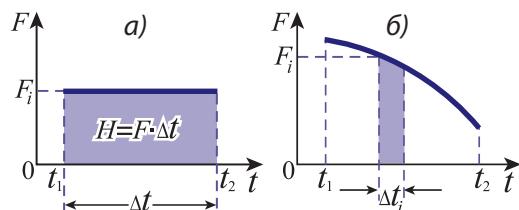


Fig. 4.1

Impulsul forței de modul variabil și de direcție constantă se calculează ca suma impulsurilor acestei forțe pentru mai multe intervale mai mici  $\Delta t_i$ , în care este divizat intervalul  $(t_2 - t_1)$ . Pe parcursul intervalului mic  $\Delta t_i$  variația forței este destul de mică, astfel încât se poate considera că valoarea ei  $F_i$  rămîne constantă. Impulsul forței pentru acest interval  $F_i\Delta t_i$  este numeric egal cu aria unei fisi înguste (fig. 4.1, b). Adunările impulsurilor forței  $F_i\Delta t_i$  îi corespunde adunarea ariilor tuturor fisiiilor de sub grafic.

Rezultă că **impulsul forței este numeric egal cu aria figurii delimitate de graficul forței, axa timpului și segmentele care trec prin extremitățile graficului forței paralel la axa ordonatelor** (fig. 4.1).

Admitem că rezultanta  $\vec{F}$  a forțelor aplicate corpului este nulă. Această situație se constată și în cazul particular al **corpului izolat**, adică al **corpului ce nu interacționează cu alte coruri**. Substituind  $\vec{F} = 0$  în relația (4.4) sau în (4.5), obținem  $\Delta\vec{p} = 0$ . Variatia unei mărimi este nulă atunci cînd această mărime este constantă, în cazul de față avem  $\vec{p} = \text{const.}$ :

$$\vec{p} = \text{const.}, \text{ dacă } \vec{F} = 0. \quad (4.7)$$

**Impulsul punctului material se conservă dacă rezultanta forțelor aplicate lui este egală cu zero.**

Aceasta este **legea conservării impulsului pentru un punct material**.

Din legea conservării impulsului (4.7) și din definiția lui (4.3) rezultă că viteza  $\vec{v} = \text{const.}$ , adică punctul material se mișcă rectiliniu uniform dacă rezultanta forțelor aplicate lui este nulă. Această concluzie arată că legea conservării (4.7) se află în concordanță cu principiul inerției.

## PROBLEME REZOLVATE

- Un automobil cu masa  $m = 1500 \text{ kg}$  se mișcă cu viteza  $v_1 = 9 \text{ m/s}$ . La intersecție automobilul cotește pe o stradă perpendiculară și își mărește viteza pînă la  $v_2 = 12 \text{ m/s}$ . Determinați variația impulsului automobilului. Care ar fi variația impulsului, dacă automobilul și-ar mări viteza fără a-și schimba direcția mișcării?

### REZOLVARE

**Se dă:**

$$\begin{aligned}m &= 1500 \text{ kg}, \\v_1 &= 9 \text{ m/s}, \\v_2 &= 12 \text{ m/s}\end{aligned}$$

$$\Delta p - ?, \Delta p' - ?$$

Impulsul automobilului pînă la intersecție a fost  $\vec{p} = m\vec{v}_1$ , iar după intersecție a devenit  $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ , vectorul  $\vec{p}_2$  fiind perpendicular pe  $\vec{p}_1$ . Variația impulsului automobilului  $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$  sau  $\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}$ . Construim vectorii respectivi (fig. 4.2). Din figură observăm că:  $\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ , deci  $\Delta p = m\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ .

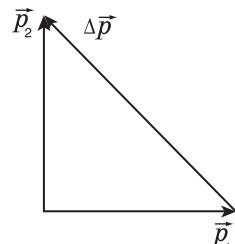


Fig. 4.2

Efectuînd calculele, obținem pentru variația impulsului automobilului valoarea  $\Delta p = 22500 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ . Cînd automobilul nu-și schimbă direcția mișcării, vectorii  $\vec{p}_1$  și  $\vec{p}_2$  sunt coliniari și variația impulsului  $\Delta p' = p_2 - p_1 = m(v_2 - v_1)$ ;  $\Delta p' = 4500 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ .

- Un cărucior cu masa  $m = 27 \text{ kg}$  se mișcă rectiliniu cu viteza  $v_1 = 2 \text{ m/s}$ . La un moment asupra lui începe să acționeze, în direcția mișcării sale, o forță dependență de timp conform graficului din figura 4.3. Care este viteza obținută de cărucior în urma acțiunii acestei forțe? Frecările se neglijeză.

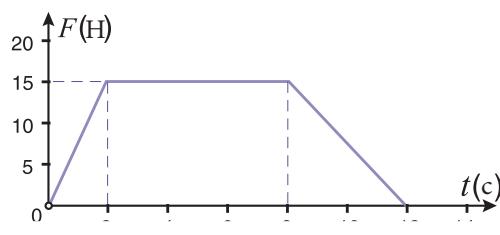


Fig. 4.3

## REZOLVARE

**Se dă:**

$$m = 27 \text{ kg},$$

$$v_1 = 2 \text{ m/s}$$

$$v_2 - ?$$

Egalăm variația impulsului căruciorului cu impulsul forței ce acționează asupra lui  $m(v_2 - v_1) = H$ . De aici exprimăm viteza căutată  $v_2 = v_1 + H/m$ . Valoarea impulsului forței se determină din figura 4.3 ca aria figurii de sub grafic:

$$H = \frac{6+12}{2} \cdot 15 = 135 \text{ (N}\cdot\text{s)}.$$

Obținem  $v_2 = 7 \text{ m/s}$ .

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Ce este impulsul unui corp? Cum este orientat?
2. Depinde oare impulsul corpului de sistemul de referință ales? Ilustrați prin exemple.
3. Ce se numește impuls al forței? În ce sens este orientat?
4. Cum se formulează teorema variației impulsului punctului material?
5. Un cărucior cu masa  $m_1 = 18 \text{ kg}$  se mișcă cu viteza  $v_1 = 6 \text{ m/s}$ , iar un alt cărucior cu masa  $m_2 = 40 \text{ kg}$  se mișcă cu viteza  $v_2 = 1,8 \text{ m/s}$ . Impulsul căruia cărucior este mai mare și de câte ori?
6. Se știe că două corperi cu mase  $m_1 = 1,8 \text{ kg}$  și  $m_2 = 3,2 \text{ kg}$  au impulsuri egale. Care este viteza  $v_2$  a corpului al doilea, dacă viteza primului corp  $v_1 = 4,8 \text{ m/s}$ ?
7. Un corp cu masa  $m = 0,4 \text{ kg}$  se mișcă pe un cerc, având viteza  $v$  de valoare constantă  $v = 1,5 \text{ m/s}$ . Care este valoarea impulsului corpului? Care este variația impulsului acestui corp: a) într-o perioadă de rotație; b) într-o jumătate de perioadă; c) într-un sfert de perioadă; d) în a șasea parte din perioada de rotație?
8. Un automobil cu masa  $m = 1200 \text{ kg}$  se mișcă pe o porțiune rectilinie de drum cu viteza  $v = 15 \text{ m/s}$ . La un moment dat el începe să frâneze cu o accelerare a cărei valoare este  $a = 2,5 \text{ m/s}^2$ . Care este impulsul automobilului după  $t = 3 \text{ s}$  de la începutul frânării?
9. Impulsul unui cărucior este  $p = 120 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ . În cît timp el se va opri fiind acționat de o forță de frânare  $F_f = 48 \text{ N}$ ?

### 4.2

## IMPULSUL SISTEMULUI DE PUNCTE MATERIALE. TEOREMA VARIATIEI ȘI LEGEA CONSERVĂRII IMPULSULUI SISTEMULUI DE PUNCTE MATERIALE

Fie un sistem de puncte materiale. Notăm masele lor cu  $m_1, m_2, \dots$ , iar vitezele, respectiv, cu  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$ . Impulsurile acestor puncte materiale sunt  $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1, \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2, \dots$ .

**Suma impulsurilor tuturor punctelor din componența lui se numește *impuls al sistemului de puncte materiale*:**

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots \quad (4.8)$$

Impulsurile  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots$  sunt mărimi vectoriale, deci suma din definiția (4.8) este o sumă vectorială.

### a. Forțe interne și externe. Proprietatea forțelor interne

Punctele materiale din componența sistemului interacționează atât între ele, cât și cu corpurile ce nu fac parte din componența lui. Forțele care acționează asupra punctelor materiale ale unui sistem se clasifică în **forțe interne** și **forțe externe**.

**Forțe interne** sunt forțele de interacțiune dintre punctele materiale care constituie sistemul. Aceste forțe se notează cu doi indici: primul arată punctul material asupra căruia se acționează, iar al doilea punctul ce acționează cu această forță. De exemplu,  $\vec{F}_{32}$  este forța care acționează asupra punctului material 3 din partea punctului 2.

Forțele de interacțiune dintre punctele materiale ale sistemului cu corpurile ce nu fac parte din el sunt numite **forțe externe**. Notăm cu  $\vec{F}_1$  rezultanta forțelor externe aplicate punctului material 1, cu  $\vec{F}_2$  rezultanta forțelor externe care acționează asupra punctului 2 etc.

Să considerăm un sistem din trei puncte materiale, trei particule electrizate, și să analizăm forțele interne (fig. 4.4). Admitem că particulele 1 și 3 sunt încărcate cu sarcină pozitivă, iar particula 2 cu sarcină negativă. Reprezentăm forțele de interacțiune ținând seama de faptul că sarcinile electrice de același semn se resping, iar cele de semne opuse se atrag (fig. 4.4). Notăm forțele din figură după cum este specificat în textul de mai sus.

În conformitate cu principiul acțiunii și reacțiunii, forțele de interacțiune dintre fiecare pereche de particule sunt egale în modul și orientare în sensuri opuse de-a lungul dreptei-suport comune:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31} \text{ și } \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32};$$

prin urmare,

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0, \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} = 0 \text{ și } \vec{F}_{23} + \vec{F}_{32} = 0.$$

Astfel, putem afirma că **rezultanta forțelor interne dintr-un sistem de puncte materiale este egală cu zero**. Aceasta este o proprietate caracteristică forțelor interne, independentă de natura lor.

### b. Teorema variației impulsului sistemului de puncte materiale

Considerăm un sistem din două puncte materiale. Notăm impulsurile lor cu  $\vec{p}_1$  și  $\vec{p}_2$ , iar forțele după cum s-a convenit mai sus (fig. 4.5). Asupra fiecărui punct din sistem acționează o forță internă și mai multe forțe externe, a căror rezultantă este reprezentată în figură. Pornind de la aceasta, scriem teorema variației impulsului (4.5) pentru fiecare punct material în parte:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{p}_1 &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12})\Delta t, \\ \Delta\vec{p}_2 &= (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21})\Delta t.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Adunăm aceste relații, luând în considerare faptul că rezultanta forțelor interne este nulă. Obținem

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\Delta t.\tag{4.10}$$

Deoarece suma variațiilor impulsurilor este egală cu variația sumei lor  $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{\Delta P}$ , unde  $\vec{P}$  constituie impulsul sistemului, iar  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$  este rezultanta forțelor externe aplicate celor două puncte, transcriem relația (4.10) în forma următoare:

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}\Delta t.\tag{4.11}$$

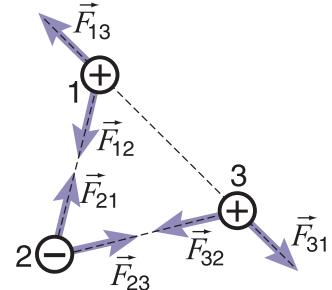


Fig. 4.4

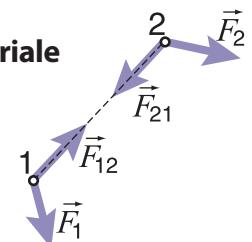


Fig. 4.5

Această relație exprimă teorema variației impulsului mecanic al unui sistem de puncte materiale.

### **Variatia impulsului unui sistem de puncte materiale este egală cu impulsul rezultantei tuturor forțelor externe care acționează asupra sistemului.**

Teorema a fost stabilită pentru un sistem de două puncte materiale. Înînd seama de proprietatea forțelor interne stabilită mai sus, conchidem că teorema formulată este aplicabilă oricărui sistem de puncte materiale.

Din relația (4.9) rezultă că forțele interne pot modifica impulsul fiecărui punct material în parte, dar din (4.11) observăm că ele nu pot modifica impulsul sistemului. Cu alte cuvinte, forțele interne modifică impulsurile punctelor din componența sistemului astfel încât suma variațiilor lor este nulă și nu provoacă variația impulsului sistemului.

### **c. Legea conservării impulsului sistemului de puncte materiale. Aplicații**

Considerăm cazul în care rezultanta forțelor externe aplicate sistemului este nulă ( $\vec{F} = 0$ ) sau sistemul este izolat. În acest caz din (4.11) rezultă că variația impulsului mecanic al sistemului de asemenea este nulă ( $\Delta \vec{P} = 0$ ), ceea ce arată că impulsul  $\vec{P} = \text{const.}$

Am obținut **legea conservării impulsului mecanic al sistemului de puncte materiale**.

### **Impulsul sistemului de puncte materiale se conservă în timp dacă rezultanta forțelor externe aplicate sistemului este nulă:**

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots = \text{const., dacă } \vec{F} = 0. \quad (4.12)$$

Legea conservării impulsului mecanic este o lege fundamentală a naturii. Aici ea a fost obținută din principiile mecanicii newtoniene. Legea dată este însă valabilă și în cazul unor sisteme fizice la care nu pot fi aplicate principiile menționate, de exemplu, nucleele atomice care interacționează cu diferite particule, electronii care interacționează cu undele electromagnetice, particulele elementare și.a.

Această lege poate fi aplicată și în cazul în care rezultanta forțelor externe este diferită de zero, dacă însă în sistem acționează, pe parcursul unui interval scurt de timp  $\Delta t$ , forțe interne de intensitate mult mai mare decât cele externe. Într-un astfel de interval de timp forțele externe nu reușesc să modifice considerabil impulsul total al sistemului de puncte materiale, dar forțele interne modifică esențial impulsurile punctelor din sistem. Cu alte cuvinte, variațiile impulsurilor punctelor pe parcursul intervalului scurt de timp  $\Delta t$  sunt considerabile, dar suma acestor variații este aproximativ egală cu zero.

Un exemplu de situații de acest gen sunt **ciocnirile** corporilor. La ciocnire corporurile vin în contact și în timpul unei interacțiuni de durată scurtă, cînd forțele elastice devin destul de mari, impulsurile corporilor capătă variații a căror sumă este egală cu zero. Deci suma impulsurilor corporilor înainte de ciocnire este egală cu suma impulsurilor lor după ciocnire. Notăm masele corporilor cu  $m_1$  și  $m_2$ , vitezele lor înainte de ciocnire cu  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$ , iar după ciocnire – cu  $\vec{u}_1$  și  $\vec{u}_2$  (fig. 4.6). Legea conservării impulsului pentru această ciocnire se va scrie sub forma

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \quad (4.13)$$

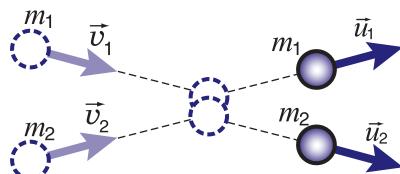


Fig. 4.6

Un caz particular de ciocnire reprezintă **ciocnirea plastică** sau **neelastică**, adică ciocnirea în urma căreia corpurile ce vin în contact formează un corp comun. De exemplu, un băiat care aleargă și apoi sare într-un cărucior aflat în repaus sau în mișcare; două vagoane de tren care se cuplează; două bile de plastilină care după ciocnire formează un singur corp și.a. Masa corpului obținut în urma ciocnirii  $m$  este egală cu suma maselor corpuriilor înainte de ciocnire:  $m = m_1 + m_2$ , iar viteza lui după ciocnire a devenit egală cu  $\vec{u}$ .

Deci în cazul ciocnirilor plastice relația (4.13) devine

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

de unde

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.14)$$

O situație „inversă în timp” ciocnirii plastice este explozia: un corp se divizează, sub acțiunea forțelor interne, în mai multe fragmente; de exemplu, explozia unei grenade sau a unui proiectil (fig. 4.7).

Să analizăm cîteva cazuri particulare de aplicare a legii conservării impulsului.

**1.** Presupunem că în urma exploziei se formează numai două fragmente. Notăm masa corpului înainte de explozie cu  $m$  și viteza lui cu  $\vec{v}$ , masele celor două fragmente obținute în urma exploziei cu  $m_1$  și  $m_2$ , unde  $m_1 + m_2 = m$ , iar vitezele lor cu  $\vec{u}_1$  și  $\vec{u}_2$ .

Legea conservării impulsului mecanic pentru cazul de față este exprimată de relația

$$m\vec{v} = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2. \quad (4.15)$$

**2.** Considerăm o armă care la momentul tragerii se află în repaus ( $v = 0$ ). Notăm cu  $m_1$  și  $m_2$  masa glonțului și a armei, cu  $\vec{u}_1$  viteza glonțului și cu  $\vec{u}_2$  viteza armei – viteza de recul. Relația (4.15) devine

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0,$$

de unde determinăm viteza de recul a armei:

$$\vec{u}_2 = -\frac{m_1\vec{u}_1}{m_2}. \quad (4.16)$$

Viteza de recul este orientată în sens opus vitezei obținute de glonț și este mai mică decît viteza acestuia de atîtea ori de câte ori masa armei este mai mare decît masa glonțului.

Menționăm că în unele cazuri se conservă doar proiecțiile impulsului mecanic pe unele direcții, fără a se conserva pe alte direcții. De exemplu, considerăm un sistem de puncte materiale într-o regiune limitată din apropierea Pămîntului, astfel încît să putem considera accelerația gravitațională  $\vec{g} = \text{const}$ . Forțe externe sunt doar forțele de greutate. Rezultanta lor este orientată vertical în jos, proiecțiile ei pe orice direcție orizontală sunt nule. Atunci, după cum rezultă din relația (4.11), se conservă numai proiecția impulsului mecanic al sistemului pe orice direcție orizontală, dar pe orice alte direcții nu se conservă.

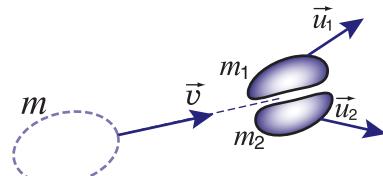


Fig. 4.7

#### d.º Mișcarea reactivă

Mișcarea reactivă a corpului este o aplicație a legii conservării impulsului mecanic. Ea este condiționată de forțele interne care separă unele părți ale corpului și imprimă acestora o viteză oarecare. Forțele interne nu modifică impulsul sistemului, deci variația impulsului părții rămase din corp și variația impulsului părților separate de el sunt egale în modul și orientare în sensuri opuse. Ca rezultat, partea rămasă din corp se mișcă în sens opus vitezei părților separate de el.

Un exemplu simplu de mișcare reactivă observăm atunci când umflăm un balon și îl lăsăm liber, fără a-i lega orificiul: aerul din balon iese, iar balonul se mișcă în partea opusă.

Unele vietăți se deplasează aplicînd aceeași lege. De exemplu, calmarul și caracatița, expulzînd periodic apa, dezvoltă viteze de pînă la  $60 \div 70$  km/h.

Să reprezentăm schematic o rachetă (fig. 4.8) și să analizăm mișcarea reactivă a ei. Partea din față 1 conține încărcătura utilă – aparatura științifică, cosmonauții și toate cele necesare pentru asigurarea vieții lor. Partea centrală 2 conține combustibilul și rezervele de oxidant destinate menținerii arderii. În partea din spate a rachetei se află camera de combustie 3, unde arde combustibilul și de unde gazele rezultate, aflate la temperaturi ridicate și presiune înaltă, ies cu viteze mari.

Pentru simplitate, vom admite că toate gazele obținute în urma arderii combustibilului ies din rachetă simultan – nu treptat, aşa cum se produce în realitate. Vom nota cu  $m_r$  masa utilă a rachetei (după expulzarea gazelor), cu  $m_g$  masa gazelor expulzate din rachetă, cu  $\vec{v}_r$  viteza obținută de rachetă și cu  $\vec{v}_g$  viteza gazelor expulzate, ambele viteze fiind în raport cu un sistem de referință legat cu Pămîntul. Inițial racheta se află pe Pămînt, în repaus, impulsul ei este egal cu zero. Considerînd că durata expulzării gazelor este destul de mică, putem neglijă impulsul forței de greutate în comparație cu impulsurile forțelor interne. În acest caz impulsul mecanic se conservă, adică impulsul sistemului format din corpul rachetei și din gazele expulzate rămîne egal cu zero:

$$m_r \vec{v}_r + m_g \vec{v}_g = 0.$$

De aici exprimăm viteza rachetei:

$$\vec{v}_r = -\frac{m_g}{m_r} \cdot \vec{v}_g. \quad (4.17)$$

Semnul minus arată că viteza rachetei  $\vec{v}_r$  este orientată în sens opus vitezei  $\vec{v}_g$  cu care sînt expulzate gazele.

Din formula (4.17) se observă că viteza rachetei poate fi mărită pe două căi: majorînd raportul dintre masa gazelor expulzate și masa utilă a rachetei sau mărinînd viteza de expulzare a gazelor. În urma arderii combustibilului, viteza gazelor expulzate poate atinge valori de circa 4 000 m/s. Pentru a mări raportul dintre masa gazelor și masa utilă a rachetei, acestea se construiesc în mai multe trepte – pe măsura arderii combustibilului treptele care-l conțineau sînt separate, astfel masa rachetei se micșorează, ceea ce duce la creșterea rapidă a vitezei ei.

În jumătatea a doua a secolului al XX-lea s-au obținut succese deosebite în construirea rachetelor, au fost lansate nave cosmice și stații cosmice. La 4 octombrie



Fig. 4.8

1957, în Uniunea Sovietică, a fost lansat primul satelit artificial al Pământului, iar la 12 aprilie 1961, Iuri Gagarin, la bordul navei cosmice „Vostok”, a efectuat pentru prima dată ocolul Pământului. În iulie 1969, astronauții americani Neil Armstrong și Edwin Aldrin au făcut primii pași pe Lună, unde s-au aflat 21 h și 36 min. Colegul lor Michael Collins în acest timp făcea ocolul Lunii la bordul navei „Apollo XI”. Au fost lansate nave cosmice nu numai în jurul Pământului și spre satelitul său natural Luna, ci și spre planetele Sistemului Solar: de la cele apropiate – Venus și Marte – până la planete mai îndepărtate – Uranus și Neptun.

## PROBLEME REZOLVATE

- Un vagonet cu masa  $m_1 = 1200$  kg se mișcă cu viteza  $v_1 = 0,4$  m/s spre un alt vagonet cu masa  $m_2 = 1600$  kg care-i vine în întâmpinare cu viteza  $v_2 = 0,5$  m/s. Determinați viteza vagonetelor după cuplarea lor.

### REZOLVARE

**Se dă:**

$$\begin{aligned}m_1 &= 1200 \text{ kg}, \\v_1 &= 0,4 \text{ m/s}, \\m_2 &= 1600 \text{ kg}, \\v_2 &= 0,5 \text{ m/s}\end{aligned}$$


---


$$u - ?$$

După cuplare, sistemul format din cele două vagonete are masa  $(m_1 + m_2)$  și viteza  $\vec{u}$ . Presupunem că viteza  $\vec{u}$  este orientată în sensul pozitiv al axei  $Ox$  (fig. 4.9). Scriem legea conservării impulsului:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}$$

sau pentru proiecțiile pe axa  $Ox$ :  $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$ . De aici exprimăm viteza căutată  $u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ ;  $u = -0,11$  m/s.

Semnul minus arată că viteza comună  $\vec{u}$  după cuplare a vagonetelor este orientată în sensul negativ al axei  $Ox$ , adică în sensul vitezei  $\vec{v}_2$ .

- Un proiectil cu masa  $m$  a explodat în punctul superior al traectoriei sale, unde viteza lui era egală cu  $v = 600$  m/s, în două fragmente cu masele  $m_1 = 0,4$  m și  $m_2 = 0,6$  m. Determinați vitezele fragmentelor imediat după explozie, știind că în acest moment viteza fragmentului cu masa mai mică formează un unghi  $\alpha = 30^\circ$  cu orizontală, iar viteza fragmentului al doilea este orientată vertical în jos.

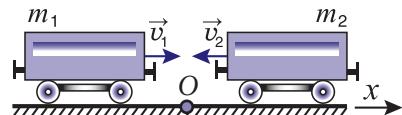


Fig. 4.9

### REZOLVARE

**Se dă:**

$$\begin{aligned}v &= 600 \text{ m/s}, \\m_1 &= 0,4 \text{ m}, \\m_2 &= 0,6 \text{ m}, \\\alpha &= 30^\circ \\u_1 - ?, u_2 - ?\end{aligned}$$


---

Notăm cu  $\vec{p}$  impulsul proiectilului înainte de explozie, iar cu  $\vec{p}_1$  și  $\vec{p}_2$  impulsurile fragmentelor. Se aplică legea conservării impulsului:  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$ . Reprezentăm această sumă vectorială în figura 4.10, ținând seama de direcțiile vectorilor  $\vec{p}_1$  și  $\vec{p}_2$ . După cum se vede din figură, impulsul  $p_1 = \frac{p}{\cos \alpha}$  și

$$p_2 = p_1 \sin \alpha = p \operatorname{tg} \alpha. \text{ Dar } p = mv, p_1 = m_1 u_1 = 0,4 mu_1 \text{ și } p_2 = m_2 u_2 = 0,6 mu_2.$$

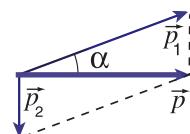


Fig. 4.10

Substituim valorile impulsurilor în relațiile de mai sus:  $0,4 mu_1 = \frac{mv}{\cos \alpha}$  și  $0,6 mu_2 = m v \operatorname{tg} \alpha$ .

Exprimăm vitezele căutate  $u_1 = \frac{v}{0,4 \cos \alpha}$  și  $u_2 = \frac{v \operatorname{tg} \alpha}{0,6}$ . Obținem  $u_1 = 1734$  m/s și  $u_2 = 578$  m/s.

## ÎNTREBĂRI ŞI PROBLEME

- Pot oare forțele interne să modifice impulsul sistemului de puncte materiale? Argumentați răspunsul.
- În ce condiții impulsul sistemului de puncte materiale se conservă?
- Poate un motor cu reacție să accelereze o rachetă în afara atmosferei Pământului?
- Un elev a hotărât să perfectioneze barca sa cu pînze. A instalat pe ea un ventilator și un acumulator ce-l pune în mișcare. Încotro trebuie să fie orientat jetul de aer al ventilatorului, pentru a mări viteza bărcii?
- Un cărucior cu masa  $m_1 = 20 \text{ kg}$  se deplasează rectiliniu cu viteza  $v_1 = 2,8 \text{ m/s}$  pe un drum orizontal. La un moment în el este aruncat vertical în jos un sac cu masa  $m_2 = 50 \text{ kg}$ . Care este viteza mișcării ulterioare a căruciorului cu sacul în el?
- Un elev cu masa  $m_1 = 50 \text{ kg}$  aleargă cu viteza  $v_1 = 6 \text{ m/s}$ , ajunge din urmă un cărucior cu masa  $m_2 = 30 \text{ kg}$  ce se mișcă cu viteza  $v_2 = 2 \text{ m/s}$  și sare în el. Determinați viteza căruciorului în care se află elevul.
- Masa unei luntri cu vînătorul în ea este  $M = 180 \text{ kg}$ . Din luntrea aflată în repaus, vînătorul trage un foc orizontal, de-a lungul ei. Care este viteza de recul a luntrii și a vînătorului din ea, dacă masa glonțului  $m = 0,01 \text{ kg}$ , iar viteza lui  $v = 900 \text{ m/s}$ ?
- Pe o masă netedă orizontală se mișcă pe direcții perpendiculare două bile de plastilină. Masele lor sunt  $m_1 = 0,3 \text{ kg}$  și  $m_2 = 0,2 \text{ kg}$ , iar vitezele  $v_1 = 8 \text{ m/s}$  și  $v_2 = 16 \text{ m/s}$ . Care este viteza corpului obținut în urma ciocnirii plastice a celor două bile și ce unghi  $\beta$  formează cu viteza  $\vec{v}$ ?
- Masa unei rachete și a combustibilului ei  $m = 4 \cdot 10^5 \text{ kg}$ . Determinați masa totală a combustibilului și a oxidantului ce trebuie consumat pentru a imprima rachetei prima viteza cosmică  $v = 7,9 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ , dacă se știe că produsele arderii sunt expulzate din rachetă cu viteza  $u = 3,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ . Se va considera că arderea combustibilului se produce instantaneu.

### 4.3° MOMENTUL CINETIC AL PUNCTULUI MATERIAL. LEGEA CONSERVĂRII MOMENTULUI CINETIC

Să analizăm mișcarea unui punct material (corp punctiform) de masa  $m$  în raport cu o axă de rotație ce trece prin punctul  $O$  la o distanță  $r$  de la corp (fig. 4.11). Vom considera un caz particular simplu cînd punctul material are viteza  $v$  orientată perpendicular pe distanța  $r$  (fig. 4.11, a).

Din par. 3.2. cunoaștem că efectul de rotație al unei forțe este caracterizat de momentul forței  $M$ . Dacă forța  $F$  are aceeași orientare ca și viteza  $v$  în cazul considerat, atunci brațul forței  $d = r$  și  $M = rF$ . Efectul de rotație însă mai poate fi caracterizat și cu ajutorul impulsului  $p = mv$ . În acest scop, prin analogie cu momentul forței, se introduce o mărime fizică nouă, numită **moment al impulsului sau moment kinetic**, notată cu  $L$  și care descrie efectul de rotație al punctului material produs de impulsul acestuia.

$$L = r \cdot p = r \cdot mv.$$

Dacă punctul material are viteza orientată sub un unghi  $\alpha$  față de linia care unește centrul de rotație și corpul punctiform (fig. 4.11, b), atunci

$$L = d \cdot p = r \cdot p \sin \alpha = r \cdot mv \sin \alpha,$$

unde  $d = r \sin \alpha$  este brațul impulsului și are aceeași semnificație ca și brațul forței – reprezentă distanța de la centrul de rotație pînă la dreapta-suport a vitezei. Din figu-

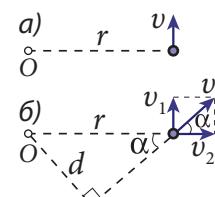


Fig. 4.11

ra 4.11, b se observă că efectul de rotație al punctului material este produs doar de componenta  $v_{\perp}$  a vitezei. Deoarece  $v_{\perp} = v \sin \alpha$ , din relația precedentă obținem

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{m}v_{\perp}. \quad (4.18)$$

**Momentul cinetic al punctului material  $L$  este egal cu produsul dintre distanța  $r$  de la centrul de rotație pînă la corpul punctiform și componenta perpendiculară a impulsului acestuia.**

Unitatea momentului cinetic în SI

$$[L] = [m] \cdot [v] \cdot [r] = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Folosind relația dintre viteza liniară și cea unghiulară (1.45), momentul cinetic al punctului material poate fi reprezentat și sub forma

$$\mathbf{L} = mr^2\omega. \quad (4.19)$$

Este necesar de menționat că momentul cinetic are sens nu numai în cazul mișcării de rotație. De exemplu, la mișcarea rectilinie a unui corp punctiform de masă  $m$  cu viteza  $v$ , distanța  $r$  de la un punct de referință pînă la dreapta de-a lungul căreia se mișcă corpul este permanent aceeași. Reiese că dacă momentul forțelor exterioare este nul, atunci momentul cinetic al corpului în raport cu acest punct  $L = mvr$  este constant.

În par. 4.1 a fost formulată teorema variației impulsului punctului material (4.5), din care s-a obținut o lege importantă în fizică – legea conservării impulsului. O teoremă asemănătoare este valabilă și pentru variația momentului cinetic. Într-adevăr, în același caz particular analizat mai sus, cînd viteza (impulsul) punctului material este orientată perpendicular pe distanța  $r$ , după multiplicarea relației (4.5) cu  $r$ , avem

$$r \cdot \Delta p = rF\Delta t,$$

sau luînd în considerare definițiile momentului cinetic și a momentului forței, după împărțirea la  $\Delta t$ , obținem

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = M. \quad (4.20)$$

**Raportul variației momentului cinetic al punctului material la intervalul respectiv de timp este egal cu momentul forței ce acționează asupra lui.**

Admitem că momentul rezultantei forțelor exterioare ce acționează asupra punctului material se egalează cu zero sau punctul material este izolat (nu interacționează cu alte corpuși). În acest caz din (4.20) rezultă că  $\Delta L = 0$  sau  $L = \text{const}$ . Așadar, are loc legea conservării momentului cinetic al punctului material:

$$L = \text{const}, \text{ dacă } M = 0. \quad (4.21)$$

**Momentul cinetic al punctului material se conservă, dacă momentul rezultantei forțelor aplicate lui este egal cu zero.**

### PROBLEMĂ REZOLVATĂ

O bilă cu masa de 5 kg legată la capătul unei coarde inextensibile se mișcă pe un cerc cu raza de 2 m avînd o viteză de 4 m/s (fig. 4.12). Care este momentul cinetic al bilei? Cum se modifică viteza liniară și cea unghiulară a bilei, dacă în decursul mișcării lungimea coardei s-a micșorat de 2 ori?

## REZOLVARE

**Se dă:**

$$m = 5 \text{ kg},$$

$$r_1 = 2 \text{ m},$$

$$v_1 = 4 \text{ m/s},$$

$$r_2 = r_1 / 2$$

$$L_1 - ?, v_2 - ?, \omega_2 - ?$$

Din definiția momentului cinetic avem  $L_1 = mv_1r_1 = 5 \cdot 4 \cdot 2 = 40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ . Folosind exprimarea momentului cinetic prin viteza unghiulară (4.19), obținem valoarea acesteia în cazul lungimii inițiale a coardei  $\omega_1 = L_1 / (mr_1^2) = 40 / (5 \cdot 4) = 2 \text{ rad/s}$ .

La micșorarea lungimii coardei, de-a lungul ei acționează o anumită forță. Deoarece momentul acestei forțe este nul (brațul forței este egal cu zero), are loc legea conservării momentului cinetic  $mv_1r_1 = mv_2r_2$ , de unde obținem  $v_2 = (r_1/r_2)v_1 = 2v_1 = 8 \text{ m/s}$ .

Folosind (4.19), legea conservării momentului cinetic are forma  $mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$ , de unde  $\omega_2 = (r_1/r_2)^2\omega_1 = 4\omega_1 = 8 \text{ rad/s}$ .

Așadar, la micșorarea lungimii coardei de 2 ori viteza liniară se mărește de 2 ori, iar cea unghiulară – de 4 ori.

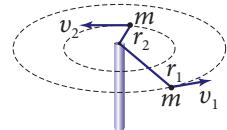


Fig. 4.12

## ÎNTREBĂRI ŞI PROBLEME

1. Ce reprezintă momentul cinetic al punctului material? Care este expresia pentru momentul cinetic?
2. Cum se formulează teorema variației momentului cinetic?
3. Formulați legea conservării momentului cinetic al punctului material.
4. Momentul cinetic în raport cu un punct al unui corp cu masa de 10 kg ce se mișcă rectiliniu cu viteza de 5 m/s este de 200  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ . Care este distanța de la acel punct pînă la dreapta de-a lungul căreia se mișcă corpul?
5. Calculați momentul cinetic al Lunii la mișcarea ei în jurul Pămîntului dacă se cunosc: masa Lunii –  $7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ , viteza ei pe orbită – 1 km/s și distanța dintre Lună și Pămînt –  $3,84 \cdot 10^6 \text{ km}$ .
6. La mișcarea unui corp pe o traiectorie circulară raza acesteia s-a mărit de 3 ori. Cum și de câte ori s-a modificat perioada de rotație a corpului?

## 4.4 LUCRUL MECANIC. PUTerea

### a. Lucrul mecanic al forței constante

Considerăm un corp de forma unui paralelipiped aflat pe o podea orizontală. Presupunem că forța  $\vec{F}$  aplicată corpului pentru a-l mișca este orizontală și constantă, iar traiectoria corpului pe podea este rectilinie și paralelă forței (fig. 4.13). Dacă distanța parcursă (modulul vectorului deplasare) este egală cu  $s$ , atunci în decursul mișcării corpului forța  $\vec{F}$  a efectuat un lucru mecanic egal cu

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (4.22)$$

Această expresie pentru lucru mecanic al forței constante vă este cunoscută încă din clasa a VII-a. Tot de atunci cunoașteți și unitatea de lucru mecanic:

$$[L] = [F] \cdot [s] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}.$$

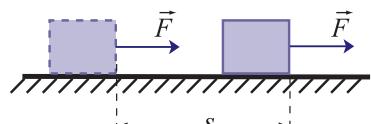


Fig. 4.13

În conformitate cu definiția, un joule (1J) este lucrul mecanic efectuat de o forță constantă egală cu 1 N la deplasarea punctului său de aplicație cu 1 m de-a lungul suportului forței în sensul acesteia.

În practică, cel mai frecvent, forța formează un unghi oarecare cu direcția deplasării corpului (fig. 4.14). Admitem că forța  $\vec{F}$  este constantă, mișcarea  $\vec{s}$  a corpului este rectilinie, deci unghiul  $\alpha$  este constant. În acest caz lucrul mecanic pe distanță  $s$  este definit de relația

$$L = Fs \cos \alpha. \quad (4.23)$$

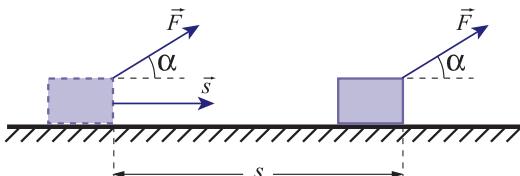


Fig. 4.14

**Lucrul mecanic efectuat de o forță constantă în cazul mișării rectilinii a corpului este mărimea scalară egală cu produsul dintre valoarea forței, a distanței parcuse de punctul ei de aplicație și cosinusul unghiului dintre vectorul forță și vectorul deplasare.**

Să analizăm formula (4.23). Pentru unghiuri  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  (fig. 4.15, a) avem  $\cos \alpha > 0$ , deci lucru mecanic este pozitiv. Forțele care efectuează lucru pozitiv au fost numite **forțe motoare**, iar lucru lor se numește **lucru motor** sau **activ**. Dacă unghiul  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (fig. 4.15, b), atunci  $\cos \alpha = 0$ , lucru mecanic al forței este egal cu zero. Dacă însă unghiul  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$  (fig. 4.15, c), avem  $\cos \alpha < 0$  și lucru mecanic este negativ. Forțele al căror lucru mecanic este negativ se numesc **forțe rezistente**, iar lucru lor – **lucru rezistent**.

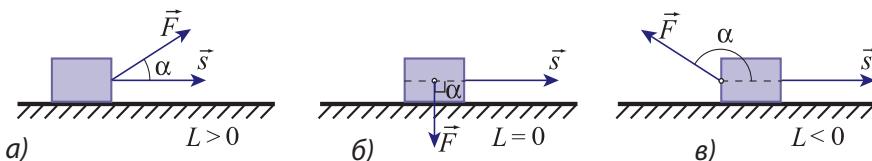
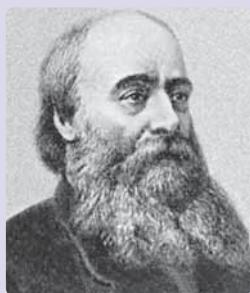


Fig. 4.15



**James Prescott JOULE** (1818–1889), fizician englez

A studiat efectul termic al curentului electric (1841) și a stabilit, independent de Lenz, legea care exprimă cantitatea de căldură degajată în conductorul parcurs de curentul electric (legea Joule-Lenz). A contribuit la fundamentarea legii conservării și transformării energiei, a cercetat transformarea lucrului mecanic în căldură și invers, a determinat experimental echivalentul mecanic al căldurii (1843). A stabilit că energia internă a gazelor, la presiuni nu prea mari, aflate la temperatură constantă, nu depinde de volum (legea lui Joule). Împreună cu W. Thomson (lordul Kelvin) a cercetat variația temperaturii gazului

la trecerea lui printr-un dop poros (efectul Joule-Thomson), efect ce se folosește la obținerea temperaturilor joase.

Considerăm un exemplu: mișcarea săniuței pe un drum orizontal (fig. 4.16). Asupra ei acționează forță de tracțiune  $\vec{F}_T$ , forță de greutate  $\vec{G}$ , reacțiunea normală  $\vec{N}$  și forță de frecare  $\vec{F}_f$ . Lucrul mecanic al forței de tracțiune este pozitiv (unghiul  $\alpha_1$  este ascuțit), lucrul forței de frecare este negativ (unghiul  $\alpha_4 = \pi$ ), iar lucrul mecanic al forței de greutate și al reacțiunii normale este egal cu zero (unghiurile  $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ ).

Expresia (4.23) pentru lucru mecanic poate fi scrisă sub alte forme. Mărimea  $F \cdot \cos \alpha$  este proiecția forței  $\vec{F}$  pe direcția deplasării  $\vec{s}$ , adică  $F \cdot \cos \alpha = F_s$ . Formula (4.23) ia forma

$$L = F_s \cdot s. \quad (4.24)$$

În algebra vectorială se definește produsul scalar a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  ca mărimea scalară  $c$  egală cu produsul modulelor vectorilor ce se înmulțesc și cosinusul unghiului  $\alpha$  dintre ei:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha. \quad (4.25)$$

Folosind definiția produsului scalar, expresia (4.23) se va scrie sub forma

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (4.26)$$

Lucrul mecanic poate fi determinat și printr-o metodă grafică. Construim graficul proiecției  $F_s$  în funcție de coordonata  $x$  a punctului de aplicare al forței  $\vec{F}$ , axa  $Ox$  fiind orientată de-a lungul vectorului deplasare  $\vec{s}$ . Admitem că proiecția  $F_s$  este constantă și pozitivă. Graficul respectiv este reprezentat în figura 4.17, a. Valoarea deplasării punctului de aplicare al forței este egală cu  $s = x_2 - x_1$ . Din figură se vede clar că lucrul mecanic al forței constante  $\vec{F}$  în cazul mișcării rectilinii pe distanță  $\vec{s}$  este numeric egal cu aria dreptunghiului limitat de graficul proiecției  $F_s$ , de axa absciselor și de segmentele paralele cu ordonata, care trec prin punctele cu coordinatele  $x_1$  și  $x_2$ .

Metoda grafică poate fi aplicată și la calcularea lucrului mecanic al forței care variază în funcție de coordonata punctului său de aplicare (fig. 4.17, b). Împărțim distanța parcursă  $s = x_2 - x_1$  în porțiuni destul de mici  $\Delta x_i$ , astfel încât pe ele forțele să varieze destul de puțin, ceea ce ar permite să le considerăm constante pe fiecare porțiune, dar lăsând valori diferite pe porțiuni diferite. Atunci lucrul mecanic pe fiecare porțiune mică  $\Delta x_i$  se va calcula după expresia (4.24) și va fi numeric egal cu aria fășiei înguste (fig. 4.17, b). Lucrul mecanic al forței pe întreaga distanță  $\vec{s}$  este egal cu suma lucrurilor pe toate porțiunile mici. Adunând ariile tuturor fășilor înguste, obținem aria de sub grafic. Astfel, interpretarea grafică pentru lucrul mecanic al unei forțe constante rămâne valabilă și pentru forțele variabile.

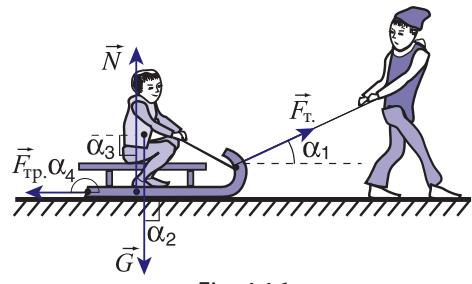


Fig. 4.16

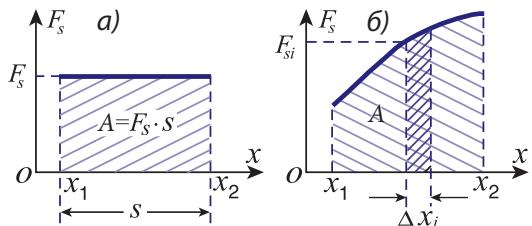


Fig. 4.17

În figura 4.17 sunt reprezentate cazuri cînd proiecția forței pe direcția deplasării este pozitivă. Dacă însă proiecția este negativă, graficul se află sub axa absciselor, iar lucru mecanic este numeric egal cu aria respectivă luată cu semnul minus.

Din cele expuse mai sus rezultă că lucru mecanic al forței date depinde atât de poziția inițială și de cea finală a corpului în mișcare, cît și de forma traectoriei parcuse de el între aceste poziții. Mărurile fizice care posedă asemenea proprietate se numesc **mărimi de proces**. Deci **lucrul mecanic este o mărime de proces**.

### b. Puterea

La analiza noțiunii de lucru mecanic nu s-a ținut seama de intervalul de timp în care el a fost efectuat. Dar unul și același lucru mecanic poate fi efectuat în intervale de timp diferite. De exemplu, la un șantier de construcții trebuie urcate la o înălțime anumită niște cărămizi. Această muncă poate fi efectuată de doi muncitori, care pun o parte din cărămizi pe targă și le ridică urcînd treptele. Pentru a le transporta pe toate, ei execută de mai multe ori aceeași operație. O macara ridică cărămizile într-un interval de timp mult mai scurt decât cel consumat de muncitori. În această situație, utilizarea macaralei este mai eficientă.

Pentru a caracteriza productivitatea unui mecanism, se folosește noțiunea de **putere mecanică sau putere**. Fie lucrul mecanic  $L$  efectuat în intervalul de timp  $\Delta t$ .

**Mărimea fizică egală cu raportul dintre lucrul mecanic și intervalul de timp în care el a fost efectuat se numește putere medie.**

$$P_m = \frac{L}{\Delta t}. \quad (4.27)$$

Din definiția (4.27) stabilim unitatea de putere:  $[P] = \frac{[L]}{\Delta t} = \frac{J}{s} = W$ .

Puterea unui sistem fizic care efectuează un lucru mecanic de 1 joule în timp de o secundă este egală cu 1 watt (W).

Puterea motoarelor cu ardere internă se exprimă, de regulă, printr-o unitate tolerată, mai veche, care nu face parte din SI. Această unitate este numită cal-putere:  $1CP \approx 736 W$ . Automobilele obișnuite au puteri între 40 și 200 CP, iar cele destinate curselor automobilistice au puteri de pînă la 1000 CP.

În energetică se utilizează o unitate tolerată pentru lucru mecanic, exprimată prin unitatea de putere, anume kilowattul-oră ( $kW \cdot h$ ). Avem  $1 kW \cdot h = 10^3 W \cdot 3600 s = 3,6 \cdot 10^6 W \cdot s = 3,6 \cdot 10^6 J$ .

Substituind expresia lucrului mecanic (4.26), în definiția puterii medii avem  $P_m = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{\Delta t}$ . Dar raportul deplasării la intervalul de timp este viteza medie:  $\vec{v}_m = \frac{\vec{s}}{\Delta t}$ . Deci puterea medie poate fi scrisă și sub forma

$$P_m = \vec{F} \cdot \vec{v}_m. \quad (4.28)$$

Considerînd intervalul de timp  $\Delta t$  foarte mic, valorile medii trec în valori instantanee:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (4.29)$$

**Puterea instantanee este egală cu produsul scalar dintre forță  $\vec{F}$  și viteza  $\vec{v}$  a punctului de aplicare a ei la momentul respectiv de timp.**

## PROBLEME REZOLVATE

1. Un corp cu masa  $m = 5 \text{ kg}$  se deplasează rectiliniu pe o suprafață orizontală netedă astfel încât coordonata  $x$  a lui variază conform ecuației  $x = 4 + 3t + 0,4t^2$ , unde timpul  $t$  este exprimat în s, iar coordonata în m. Să se determine lucrul mecanic efectuat de forța ce acționează asupra corpului în primele  $t_1 = 2 \text{ s}$  ale mișcării lui.

### REZOLVARE

**Se dă:**

$$\begin{aligned}m &= 5 \text{ kg}, \\x &= 4 + 3t + 0,4t^2, \\t_1 &= 2 \text{ s}\end{aligned}$$


---


$$L - ?$$

Comparăm ecuația mișcării corpului considerat cu ecuația mișcării rectilinii uniform accelerate  $x = x_0 + v_{0x}t + a_x t^2/2$  și egalăm coeficienții de pe lângă  $t^2$ . Astfel determinăm accelerarea corpului  $a_x = 0,8 \text{ m/s}^2$ . Deci proiecția pe axa  $x$  a forței care imprimă această accelerare corporului este egală cu  $F_x = ma_x$ ;  $F_x = 4 \text{ N}$ . Distanța parcursă de corp este egală cu variația coordonatei lui  $s = x(2) - x(0) = 7,6 \text{ m}$ . Lucrul mecanic efectuat  $L = F_x s$ ;  $L = 30,4 \text{ J}$ .

2. Un automobil cu masa  $m = 4\,500 \text{ kg}$  se mișcă pe o porțiune orizontală de drum cu viteza  $v = 72 \text{ km/h}$ . Care este puterea dezvoltată de motorul automobilului, dacă se știe că forța de rezistență opusă mișcării automobilului constituie  $k = 5\%$  din forța de greutate a lui?

### REZOLVARE

**Se dă:**

$$\begin{aligned}m &= 4\,500 \text{ kg}, \\v &= 72 \text{ km/h}, \\k &= \frac{F_r}{G} \cdot 100\% = 5\% \\P - ?\end{aligned}$$

**SI:**

$$\begin{aligned}20 \text{ m/s}, \\0,05 \\W\end{aligned}$$

Mișcarea este uniformă, deci rezultanta forțelor care acționează asupra automobilului este egală cu zero. Prin urmare, forța de tracțiune  $F_t$  este egală ca modul cu forța de rezistență  $F_r = kG = kmg$ . Avem  $F_t = kmg$ . Puterea dezvoltată de motor  $P = F_t v = kmgv$ ;  $P = 45 \text{ kW}$ .

## ÎNTREBĂRI ŞI PROBLEME

- În ce caz lucrul mecanic se exprimă prin formula  $L = F \cdot s$ ?
- Care este expresia pentru lucrul mecanic efectuat de o forță constantă ce formează un unghi oarecare cu direcția deplasării punctului de aplicare al ei? Pentru ce valori ale acestui unghi lucrul mecanic este negativ?
- Cum se definește puterea medie?
- Ce expresie are puterea instantanee?
- Care este unitatea de putere în SI? Cum se exprimă ea prin unitățile fundamentale?
- Să se afle valoarea forței orizontale aplicate de elev unei lăzi, dacă se știe că la deplasarea acesteia la distanță  $s = 15 \text{ m}$  a fost efectuat un lucru mecanic  $L = 420 \text{ J}$ .
- Un copil trage o sanie pe un drum rectiliniu orizontal cu ajutorul unei sfori ce formează unghiul  $\alpha = 30^\circ$  cu orizontală. Tensiunea în sfoară este  $T = 28 \text{ N}$ , viteza saniei este  $v = 1,5 \text{ m/s}$ . Care este lucrul mecanic efectuat de copil în timpul  $t = 20 \text{ s}$ ?
- Un pescar se mișcă pe malul unui rîu, în amonte, și trage luntrea cu ajutorul unei frânghii. Ce unghi formează frânghia cu direcția deplasării luntrii, dacă se știe că forța de tensiune din frângie este  $T = 200 \text{ N}$  și lucru mecanic efectuat de pescar la deplasarea luntrii cu  $s = 8 \text{ m}$  este  $L = 1\,384 \text{ J}$ ?
- La mișcarea unui corp cu masa  $m = 3 \text{ kg}$  pe un plan orizontal neted la o distanță  $s = 4,8 \text{ m}$  a fost efectuat un lucru mecanic  $L = 36 \text{ J}$ . Să se determine accelerația cu care s-a mișcat corpul.

10. Un corp cu masa  $m = 4\text{ kg}$  se mișcă rectiliniu uniform sub acțiunea unei forțe constante  $F$  ce formează unghiul  $\alpha = 45^\circ$  cu orizontală. Să se determine coeficientul de frecare dintre corp și suprafața orizontală pe care el se mișcă, dacă se știe că lucrul mecanic efectuat de forță pe distanță  $s = 5,2\text{ m}$  este  $L = 48\text{ J}$ .
11. Determinați puterea motorului care în timpul  $t = 30\text{ min.}$  efectuează un lucru mecanic  $L = 270\text{ kJ}$ .
12. Puterea unui motor de motocicletă  $P = 10,8\text{ kW}$ . Care este viteza motocicletei cînd forța de tracțiune dezvoltată de motor  $F = 270\text{ N}$ ?
13. Un automobil cu masa de  $2\,500\text{ kg}$  se mișcă cu viteza de  $36\text{ km/h}$ , ridicîndu-se pe o pantă. Motorul automobilului dezvoltă o putere  $P = 150\text{ kW}$ . Determinați unghiul pantei, dacă se știe că forța de rezistență opusă mișcării automobilului constituie  $k = 10\%$  din forță de greutate a lui.

## 4.5 ENERGIA CINETICĂ. TEOREMA VARIAȚIEI ENERGIEI CINETICE

Considerăm un punct material (corp punctiform) cu masa  $m$  acționat de mai multe forțe constante. Notăm rezultanta acestor forțe cu  $\vec{F}$ , iar accelerarea imprimată de ea cu  $\vec{a}$ . În conformitate cu principiul fundamental al dinamicii (2.6), avem  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Admitem că punctul material se mișcă rectiliniu în direcția accelerării sale. Atunci lucrul forței  $\vec{F}$  pe deplasarea  $\vec{s}$  dintre poziția inițială 1 și cea finală 2 a corpului este egal cu

$$L_{12} = \vec{F} \cdot \vec{s} = m\vec{a} \cdot \vec{s}. \quad (4.30)$$

Forța  $\vec{F}$  este constantă, deci și accelerarea  $\vec{a}$  este constantă; prin urmare, corpul se mișcă uniform accelerat. Conform formulei lui Galilei (1.27), obținem

$$m\vec{a} = \frac{\vec{v}_2^2 - \vec{v}_1^2}{2}, \quad (4.31)$$

unde  $v_1$  și  $v_2$  sunt vitezele corpului la începutul și la sfîrșitul deplasării  $\vec{s}$ .

Substituind (4.31) în (4.30), obținem

$$L_{12} = m \cdot \frac{\vec{v}_2^2 - \vec{v}_1^2}{2} = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2}. \quad (4.32)$$

Introducem o mărime fizică nouă, numită **energie cinetică**:

$$E_c = \frac{m v^2}{2}. \quad (4.33)$$

Relația (4.32) se va scrie sub forma

$$L_{12} = E_{c2} - E_{c1} \quad (4.34)$$

sau

$$L_{12} = \Delta E_c, \quad (4.35)$$

unde variația energiei cinetice

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}. \quad (4.36)$$

**Energia cinetică este o mărime scalară egală cu semiprodusul dintre masa punctului material și pătratul vitezei lui** (relația 4.33).

Această expresie pentru energia cinetică (sub numele de „forță vie”) a fost introdusă în 1829 de către inginerul și fizicianul francez Gaspard de Coriolis (1792–1843).

Din definiția (4.33) rezultă că energia cinetică a punctului material este determinată de viteza lui la momentul dat și nu depinde de valorile ei precedente. **Mărimele ale căror valori sănătățile determinante de starea mecanică a punctului material (de poziția și de viteza lui) se numesc mărimi de stare.** Astfel, **energia cinetică este o mărime de stare.**

Observăm că **energia cinetică nu poate lua valori negative** ( $E_c \geq 0$ ). Ea este egală cu zero pentru punctul material aflat în repaus ( $v = 0$ ).

Energia cinetică se exprimă prin viteză, care este relativă. Prin urmare, **energia cinetică este o mărime relativă**. De exemplu, energia cinetică a pasagerului așezat pe scaunul unui mijloc de transport se egalează cu zero în raport cu acesta și este deosebită de zero în raport cu Pământul atunci cînd mijlocul de transport se află în mișcare.

Din formula (4.34) observăm că energia cinetică are aceeași unitate ca și lucru mecanic, adică  $[E_c] = J$ .

Relația (4.34) dintre lucru mecanic și energia cinetică este cunoscută ca **teorema variației energiei cinetice pentru un punct material**.

### **Variația energiei cinetice a punctului material este egală cu lucrul mecanic al rezultantei forțelor care acționează asupra acestuia, în mișcarea respectivă.**

Dacă lucru mecanic  $L_{12}$  este pozitiv, energia cinetică a punctului material se mărește. În cazul lucrului negativ energia cinetică se micșorează. Ea poate deveni egală cu zero atunci cînd punctul material se oprește.

Relația (4.34) a fost dedusă pentru cazul particular cînd forța care acționează asupra punctului material este constantă și acesta se mișcă rectiliniu uniform accelerat de-a lungul liniei de acțiune a forței. Se poate demonstra că relația (4.34) are un caracter general, fiind valabilă și atunci cînd asupra punctului material acționează forțe variabile, iar traiectoria lui este curbilinie.

Energia cinetică a corpului aflat în repaus  $E_{c1} = 0$ . Din (4.34) rezultă  $E_{c2} = L_{12}$ , adică energia cinetică a lui este egală cu lucru efectuat de forțele exterioare asupra corpului aflat inițial în repaus pentru a-i mări viteza pînă la valoarea  $v$ .

La rîndul său, corpurile ce posedă energie cinetică pot efectua lucru mecanic, valoarea maximă a căruia este egală cu energia cinetică. De exemplu, masele de aer în mișcare, vîntul, pun în funcțiune morile de vînt, stațiile electrice eoliene, vasele cu pînze. La viteze, deci și energii cinetice destul de mari, ca în cazul uraganelor, ele provoacă distrugeri considerabile, deteriorează sau chiar distrug diferite construcții, smulg copaci, rup linii electrice etc.

Exemplul descris mai sus poate fi generalizat pentru un sistem de puncte materiale. Energia cinetică a sistemului se definește ca suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor ce-l constituie:

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} + \dots = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots , \quad (4.37)$$

unde  $m_1, m_2, \dots$  sunt masele, iar  $v_1, v_2, \dots$  – vitezele punctelor materiale.

Teorema variației energiei cinetice exprimată de relația (4.34) rămîne valabilă și pentru un sistem de puncte materiale. Aceasta se poate demonstra printr-un procedeu analog celui folosit la obținerea legii impulsului mecanic al unui sistem de

puncte materiale (4.11). Înscriind relația (4.34) pentru fiecare punct din componența sistemului, apoi însumând termenii respectivi ai acestor relații, vom constata că variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma lucrurilor mecanice efectuate de forțele externe și interne ce acționează asupra punctelor din sistem pe deplasările respective.

Cercetând legea variației impulsului pentru un sistem de puncte materiale, am stabilit că forțele interne nu pot modifica valoarea lui. Care este însă situația în cazul energiei cinetice a unui sistem? Pot oare forțele interne să modifice valoarea ei?

Considerăm un sistem constituit din două bile mici încărcate cu sarcini electrice de semne opuse și plasate pe o suprafață orizontală izolatoare. Admitem că inițial bilele se aflau în repaus, apoi eliberate. Sub acțiunea forțelor interne de atracție electrică  $\vec{F}_{12}$  și  $\vec{F}_{21}$ , bilele se deplasează una spre alta, de-a lungul dreptei pe care sunt situate (fig. 4.18). Deplasările bilelor au același sens ca și forțele care acționează asupra lor. Deci lucruul fiecareia dintre ele este pozitiv, ceea ce demonstrează că suma lucrurilor forțelor interne este, în general, diferită de zero.

Prin urmare, teorema variației energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale se formulează astfel:

**Variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma lucrurilor mecanice ale tuturor forțelor (externe și interne) ce acționează în sistem pe deplasările respective ale punctelor sistemului.**

Analizând acest exemplu, putem presupune că lucruul forțelor interne este nul doar atunci când distanțele dintre punctele materiale nu se modifică, adică acestea sunt legate rigid între ele. Demonstrați acest fapt considerînd un sistem de două puncte materiale, distanța dintre care rămîne constantă, și calculînd suma lucrurilor forțelor interne în cazul mișcărilor de translație și de rotație ale acestui sistem.

## PROBLEME REZOLVATE

- Un corp cu masa  $m = 0,16 \text{ kg}$  se mișcă pe o suprafață orizontală netedă cu viteza  $v_0 = 5 \text{ m/s}$ . Care este energia cinetică a corpului după ce asupra lui acționează o forță  $F = 6 \text{ N}$  pe deplasarea  $s = 0,5 \text{ m}$  și care are același sens cu viteza  $v_0$ ?

### REZOLVARE

**Se dă:**

$m = 0,16 \text{ kg}$ ,  
 $v_0 = 5 \text{ m/s}$ ,  
 $F = 6 \text{ N}$ ,  
 $s = 0,5 \text{ m}$

$E_{c2} - ?$

Din teorema variației energiei cinetice a punctului material

$L_{12} = E_{c2} - E_{c1}$  exprimăm mărimea căutată:  $E_{c2} = E_{c1} + L_{12}$ . Aici energia cinetică inițială  $E_{c1} = \frac{mv_0^2}{2}$  și lucruul forței constante pe deplasarea rectilinie de același sens cu forța  $L_{12} = F \cdot s$ .

Obținem  $E_{c2} = \frac{mv_0^2}{2} + F \cdot s$ ;  $E_{c2} = 5 \text{ J}$ .

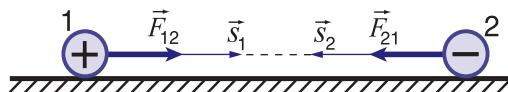


Fig. 4.18

2. Un glonț cu masa  $m = 10 \text{ g}$  are înainte de intrarea într-o scîndură viteza  $v_1 = 600 \text{ m/s}$ , iar la ieșirea din aceasta viteza lui  $v_2 = 400 \text{ m/s}$ . Calculați lucru efectuat de forță de rezistență ce acționează asupra glonțului exercitată de scîndură. Care este valoarea acestei forțe, dacă grosimea scîndurii  $s = 2 \text{ cm}$ ?

### REZOLVARE

Se dă:	SI:
$m = 10 \text{ g}$ ,	$0,01 \text{ kg}$ ,
$V_1 = 600 \text{ m/s}$ ,	
$V_2 = 400 \text{ m/s}$ ,	
$s = 2 \text{ cm}$	$0,02 \text{ m}$
$L - ?$ , $F_r - ?$	J; N

Lucrul forței de rezistență  $L_{12} = E_{c2} - E_{cl} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$ ;

$L_{12} = -1000 \text{ J}$ . Semnul minus indică faptul că lucru este rezistent și condiționează micșorarea energiei cinetice a glonțului.

Notăm valoarea forței de rezistență cu  $F_r$ . Lucrul ei pe deplasarea  $s$  este  $L_{12} = -F_r \cdot s$ , de unde exprimăm

$$F_r = -\frac{L_{12}}{s}; F_r = 50 \text{ kN}.$$

### ÎNTREBĂRI ŞI PROBLEME

- Definiți energia cinetică a unui punct material și a unui sistem de puncte materiale.
- Care mărimi fizice se numesc mărimi de stare? Este energia cinetică o mărime de stare? Argumentați răspunsul.
- Deinde energia cinetică de sistemul de referință ales? Ilustrați cu exemple deosebite de cel din text.
- Formulați teorema variației energiei cinetice.
- Care este sensul fizic al energiei cinetice?
- Pot forțele interne să modifice energia cinetică a unui sistem de puncte materiale? Ilustrați cu exemple.
- Energia cinetică a unui corp este  $E_c = 9 \text{ J}$  atunci cînd viteza acestuia este  $v = 15 \text{ m/s}$ . Determinați masa corpului.
- De cîte ori energia cinetică a unui automobil cu masa  $m_1 = 1500 \text{ kg}$  ce se mișcă cu viteza  $v_1 = 120 \text{ km/h}$  este mai mare decît energia cinetică a unui autocamion cu masa  $m_2 = 4800 \text{ kg}$  ce se mișcă cu viteza  $v_2 = 54 \text{ km/h}$ ?
- Energia cinetică a unui corp  $E_{cl} = 14,4 \text{ J}$  atunci cînd acesta se mișcă cu viteza  $v_1 = 6 \text{ m/s}$ . Care este energia cinetică a corpului dat atunci cînd el se mișcă cu viteza  $v_2 = 10 \text{ m/s}$ ?
- Un corp cu masa  $m_1 = 0,10 \text{ kg}$  are la viteza  $v_1 = 8 \text{ m/s}$  aceeași energie cinetică ca unui corp la viteza  $v_2 = 5 \text{ m/s}$ . Care este masa celui de-al doilea corp?
- Asupra unui corp aflat în repaus începe să acționeze o forță constantă. Care este valoarea acestei forțe, dacă după parcurgerea distanței  $s = 3 \text{ m}$  energia cinetică a corpului a devenit  $E_c = 42 \text{ J}$ ?
- Determinați lucru mecanic necesar pentru a mări viteza unui automobil cu masa  $m = 1600 \text{ kg}$ , cu  $\Delta v = 18 \text{ km/h}$ : a) de la  $18 \text{ km/h}$  pînă la  $36 \text{ km/h}$ ; b) de la  $36 \text{ km/h}$  pînă la  $54 \text{ km/h}$ . Analizați rezultatele obținute.
- Mai multe scînduri identice sunt așezate paralel între ele, la distanțe mici una de alta. Dintr-o armă s-a tras un glonț în direcție perpendiculară pe scînduri. Viteza glonțului la ieșirea din prima scîndură este  $v_1 = 0,8 v_0$ , unde  $v_0$  este viteza glonțului înainte de a o străpunge. Determinați în a cîta scîndură se va opri glonțul.

## 4.6

## LUCRUL FORȚEI DE GREUTATE. ENERGIA POTENȚIALĂ GRAVITAȚIONALĂ

### a. Forța de greutate – forță conservativă

Considerăm un punct material cu masa  $m$  care se mișcă într-o regiune limitată din apropierea suprafeței Pământului. Dimensiunile acestei regiuni sunt mult mai mici decât raza Pământului, în limitele ei accelerația gravitațională  $\bar{g}$ , deci și forța de greutate  $\bar{G} = m\bar{g}$  rămîn constantă. **Cîmpul de forțe, în care forță aplicată punctului material rămîne constantă, se numește cîmp omogen.**

Admitem că un punct material (corp punctiform) cu masa  $m$  se deplasează în cîmpul omogen al forței de greutate din poziția 1 în poziția 2 (fig. 4.19). Notăm cu  $h_1$  și  $h_2$  înălțimile acestor poziții în raport cu un nivel orizontal – nivel zero – ales arbitrar.

Calculăm lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a corpului la această mișcare, considerind că mișcarea lui are loc de-a lungul segmentului de dreaptă care unește aceste poziții. Notăm lungimea acestui segment cu  $l$ . Forța de greutate formează cu direcția deplasării un unghi  $\beta$  (fig. 4.19), deci lucrul ei este  $L_{12} = mg \cdot l \cos \beta$ . După cum se vede din figură,  $l \cdot \cos \beta = h_1 - h_2$ . Pentru lucru obținem

$$L_{12} = mg(h_1 - h_2). \quad (4.38)$$

Calculăm lucrul forței de greutate la deplasarea corpului punctiform considerat între aceleași poziții, dar de-a lungul unei alte traекторii. Considerăm că această traекторie  $1abcde2$  (fig. 4.19) este constituită din porțiuni orizontale și verticale. Lucrul  $L'_{12}$  al forței de greutate pe această traекторie este egal cu suma lucrurilor pe porțiunile din care ea se alcătuiește:

$$L'_{12} = L_{1a} + L_{ab} + L_{bc} + L_{cd} + L_{de} + L_{e2}.$$

Porțiunile orizontale formează cu forța de greutate un unghi drept, deci lucru pe ele este nul:  $L_{1a} = L_{bc} = L_{de} = 0$ . Prin urmare:

$$L'_{12} = L_{ab} + L_{cd} + L_{e2}.$$

Notăm lungimile porțiunilor verticale cu  $l_1$ ,  $l_2$  și  $l_3$ , după cum este indicat în figura 4.19. Pe porțiunea  $ab$  corpul se deplasează în sens contrar forței de greutate (lucru este negativ), iar pe porțiunile  $cd$  și  $e2$  el se deplasează în sensul forței de greutate (lucru este pozitiv). Astfel, pentru lucru  $L'_{12}$  avem

$$L'_{12} = -mg \cdot l_1 + mg \cdot l_2 + mg \cdot l_3 = mg(l_2 + l_3 - l_1).$$

Din figura 4.19 observăm că  $l_2 + l_3 - l_1 = h_1 - h_2$ ; prin urmare:

$$L'_{12} = mg(h_1 - h_2). \quad (4.39)$$

Rezultatul (4.39) rămîne valabil pentru orice traекторie formată din porțiuni orizontale și porțiuni verticale de drum. El rămîne valabil, de asemenea, și pentru orice

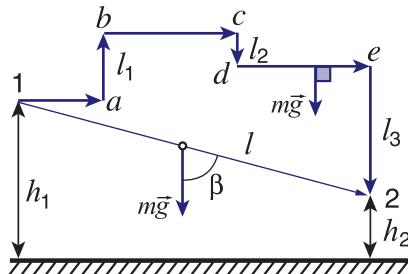


Fig. 4.19

traierie curbilinie, deoarece aceasta poate fi aproximată cu un număr mare de porțiuni mici verticale și orizontale (fig. 4.20).

Comparând formulele (4.38) și (4.39), conchidem că lucru mecanic efectuat de forța de greutate, care acționează asupra unui punct material la deplasarea acestuia dintr-o poziție în alta, depinde numai de aceste poziții, dar nu și de forma traieriei parcuse.

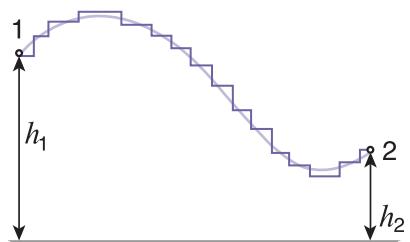


Fig. 4.20

**Forțele al căror lucru mecanic nu depinde de forma traieriei parcuse de corp, ci doar de poziția inițială și de cea finală ale corpului, se numesc *forțe conservative*. Cîmpul unor astfel de forțe se numește *cîmp potențial*.**

Din formula (4.39) observăm că lucru forței de greutate pe un drum închis, cînd  $h_2 = h_1$ , este egal cu zero.

**Forțele al căror lucru mecanic pe orice drum închis este egal cu zero sînt forțe conservative.**

**Forța de greutate este o forță conservativă, iar cîmpul ei omogen este un cîmp potențial.**

## b. Energia potențială gravitațională

Transcriem expresia (4.38) pentru lucru mecanic al forței de greutate:

$$L_{12} = mgh_1 - mgh_2. \quad (4.40)$$

Aici  $h_1$  și  $h_2$  sunt înălțimile poziției inițiale și ale celei finale ale punctului material deasupra unui nivel ales arbitrar, din considerente de comoditate, luat ca nivel zero.

Relația (4.40) arată că lucru mecanic al forței de greutate este prezentat ca diferența valorilor unei mărimi fizice, dintre care o valoare corespunde stării inițiale, iar a doua stării finale. Această mărime se notează cu  $E_p$  și este numită **energie potențială a corpului în cîmpul forței de greutate sau energie potențială gravitațională**. Relația (4.40) ia forma

$$L_{12} = E_{p1} - E_{p2} \quad (4.41)$$

sau

$$L_{12} = -\Delta E_p, \quad (4.42)$$

unde s-a introdus variația energiei potențiale

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}. \quad (4.43)$$

Din relația (4.41) rezultă că energia potențială se exprimă în jouli (J), ca și lucru mecanic și energia cinetică.

Conform relației (4.42), lucru mecanic al forței de greutate este egal cu variația energiei potențiale gravitaționale a corpului, luată cu semn opus.

Astfel, lucru mecanic definește variația energiei potențiale, și nu valoarea acesteia. Dar variația unei mărimi, ca diferență a două valori ale acesteia, nu se modifică dacă la fiecare valoare adunăm una și aceeași constantă arbitrară. De aceea, comparând relația (4.41) cu (4.40), putem scrie că  $E_p = mgh + \text{const.}$  În acest caz, lucru mecanic efectuat de forța de greutate

$$L_{12} = E_{p1} - E_{p2} = (mgh_1 + \text{const.}) - (mgh_2 + \text{const.}) = mgh_1 - mgh_2$$

nu depinde de valoarea constantei arbitrară. Aceasta se determină dintr-o condiție suplimentară, luată din considerente de comoditate. Se admite, de regulă, că la nivelul nul al înălțimilor ( $h = 0$ ) energia potențială este nulă ( $E_p = 0$ ). Aceasta este deci și nivelul zero al energiei potențiale. Obținem const. = 0. Prin urmare, energia potențială gravitațională

$$E_p = mgh. \quad (4.44)$$

Definiția energiei potențiale gravitaționale (4.44) arată că valoarea acesteia depinde de poziția corpului la momentul dat în raport cu nivelul nul ales: cu cât corpul se află mai sus de acest nivel, cu atât energia potențială a lui este mai mare; dacă însă corpul se află sub acest nivel, energia potențială a lui este negativă. **Energia potențială gravitațională este o mărime de stare.**

Valoarea energiei potențiale a corpului aflat în poziția dată depinde, de asemenea, de nivelul nul, fiind diferită pentru niveluri nule diferite. Însă lucru mecanic efectuat de forță de greutate la trecerea corpului dintr-o poziție în alta nu depinde de alegerea nivelului nul.

Pentru a stabili sensul fizic al energiei potențiale, considerăm un corp care trece dintr-o poziție oarecare 1 în poziția 2 situată la nivelul nul, unde  $E_{p0} = 0$ . Atunci din (4.41) rezultă

$$L_{10} = E_{p1}, \quad (4.45)$$

adică **energia potențială gravitațională a corpului într-o poziție oarecare este egală cu lucru mecanic efectuat de forță de greutate a acestuia la trecerea sa din această poziție într-o poziție situată la nivelul nul.**

Energia potențială gravitațională a corpului ridicat deasupra Pământului ca sursă de lucru mecanic este utilizată în tehnica. De exemplu, energia potențială a apei aflate la un nivel mai înalt este folosită la hidrocentrale, pentru a pune în mișcare turbinele, cea a corpului ridicat și lăsat să cadă – la tasarea solului în timpul pregătirii acestuia pentru temeliile construcțiilor etc.

Astfel, energia potențială, ca și cea cinetică, caracterizează lucru mecanic ce poate fi efectuat de corpul respectiv.

### c. Echilibrul în cîmpul gravitațional

Admitem că energia potențială gravitațională în starea inițială  $E_{p1}$  este mai mare decât în starea finală  $E_{p2} < E_{p1}$ . Atunci din relația (4.41) rezultă că lucru forței de greutate este pozitiv  $L_{12} > 0$ , deci unghiul dintre forță și deplasare este ascuțit. Aceasta înseamnă că forța de greutate are o componentă orientată în sensul deplasării, adică în sensul micșorării energiei potențiale.

Relația dintre lucru mecanic și energia potențială gravitațională permite să se tragă unele concluzii referitoare la **stabilitatea stării de echilibru mecanic**.

Considerăm trei cazuri diferite ale echilibrului unei bile (fig. 4.21). În toate cazurile, în poziția de echilibru 1, forța de greutate  $m\vec{g}$  a bilei este echilibrată de reacția unei normale  $\vec{N}$  a suprafeței pe care ea se află. Pentru a cerceta stabilitatea stărilor de echilibru, ne imaginăm că bila este deviată puțin (stările 2) de la poziția sa de echilibru și să urmărim comportarea ulterioară a ei.

Energia potențială a bilei în poziția de echilibru 1 din figura 4.21, a este maximă. Fie bila este deplasată puțin, în poziția 2. Energia potențială a bilei se micșorează și forța rezultantă  $\vec{R}$  care acționează asupra bilei o îndepărtează de poziția de echilibru.

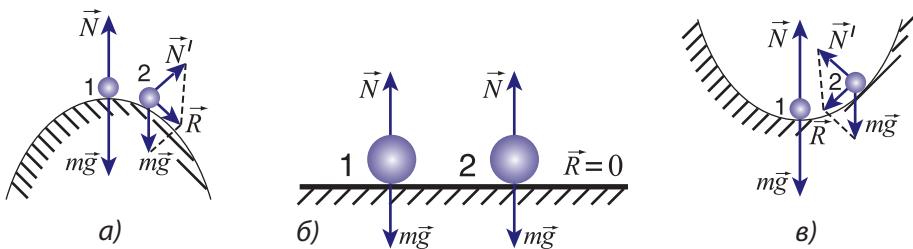


Fig. 4.21

Un astfel de echilibru – starea 1 (fig. 4.21, a) – este numit **echilibru nestabil**. Bila, fiind puțin deplasată din această stare, se îndepărtează tot mai mult de ea.

La devierea bilei din poziția sa de echilibru 1 pe o suprafață orizontală (fig. 4.21, b) energia potențială rămîne constantă ( $\Delta E_p = 0$ ), deci în direcție orizontală asupra bilei nu acționează o forță rezultantă diferită de zero. Același rezultat se obține adunînd forțele ce acționează asupra bilei în poziția 2. Bila continuă să rămînă în echilibru, numit **echilibru indiferent**.

În fine, în starea de echilibru 1, reprezentată în figura 4.21, c, energia potențială a bilei este minimă. La o mică deplasare a ei din această poziție energia potențială crește (în poziția 2), deci asupra bilei acționează o forță orientată în sens contrar deplasării, adică spre poziția de echilibru. Același rezultat se obține și în urma compunerii forțelor ce acționează asupra bilei în poziția 2 (fig. 4.21, c). Starea de echilibru 1 din această figură se numește stare de **echilibru stabil**.

Rezumînd cele expuse mai sus, conchidem că starea de echilibru nestabil reprezintă starea în care energia potențială gravitațională a corpului este maximă, starea de echilibru stabil constituie acea stare, în care energia potențială este minimă, iar stării de echilibru indiferent îi corespunde o valoare constantă a acestei energii în regiunile vecine ale corpului.

Aceste concluzii privind stabilitatea stării de echilibru mecanic rămîn valabile pentru orice cîmp de forțe conservative. Putem afirma că **starea de echilibru stabil al unui sistem de corpi aflat într-un cîmp de forțe conservative este starea cu energia potențială minimă**.

### PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Dintr-o mină cu adîncimea  $l = 200$  m este ridicată o încărcătură avînd masa  $m = 500$  kg cu ajutorul unui cablu, a cărui densitate liniară (masă unei unități de lungime)  $\rho_l = 1,5$  kg/m. Care este lucrul consumat la ridicarea încărcăturii?

### REZOLVARE

**Se dă:**

$l = 200$  m,

$m = 500$  kg,

$\rho_l = 1,5$  kg/m

$L'_{12} - ?$

Lucrul mecanic consumat la ridicarea încărcăturii  $L'_{12} = -L_{12} = \Delta E_p$ . Variatia energiei potențiale a încărcăturii  $\Delta E_{p1} = mgl$ . La ridicarea încărcăturii cu  $l$ , centrul de greutate al cablului se ridică cu  $\frac{l}{2}$ .

Masa cablului  $m_c = \rho_l \cdot l$ , deci energia potențială a acestuia crește cu  $\Delta E_{p2} = m_c g \frac{l}{2} = \rho_l g \frac{l^2}{2}$ .

Lucrul total consumat

$$L'_{12} = \Delta E_{p1} + \Delta E_{p2} = (m + \rho_l \frac{l}{2}) g \cdot l; L'_{12} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ J.}$$

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Care forțe sunt conservative?
2. Cu ce este egal lucrul mecanic efectuat de o forță conservativă pe un drum închis?
3. Care mărimi fizice se numesc mărimi de stare? Energia potențială gravitațională este o mărime de stare? Argumentați răspunsul.
4. Energia potențială gravitațională poate lua valori negative? Aduceți exemple.
5. Care este relația dintre lucrul mecanic al forței de greutate și variația energiei potențiale a corpului dat?
6. Două corpuși de volume egale – unul din aluminiu și altul din oțel – se află la aceeași înălțime. Energia potențială a cărui corp este mai mare? De câte ori? Densitatea aluminiului  $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , a oțelului –  $\rho_2 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .
7. La ce înălțime măsurată de la suprafața Pământului un corp are energie potențială egală cu energia sa potențială la înălțimea  $h_1 = 490 \text{ m}$  deasupra suprafetei Lunii? Accelerarea gravitațională pe Lună  $g_1 = 1,6 \text{ m/s}^2$ , pe Pămînt  $g_2 = 9,8 \text{ m/s}^2$ .
8. Un corp cu masa  $m = 2 \text{ kg}$  se află pe suprafața Pământului. La un moment dat asupra lui începe să acționeze vertical în sus o forță  $F = 28 \text{ N}$ . Care este energia potențială a corpului după  $t = 5 \text{ s}$  de la începutul acțiunii forței? Se va lăsa  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .
9. Determinați lucru mecanic minim care trebuie efectuat pentru a ridica în poziție verticală o bară cu masa  $m = 150 \text{ kg}$  și lungimea  $l = 6 \text{ m}$  care se află pe pămînt în poziție orizontală.

### 4.7

## LUCRUL FORȚEI ELASTICE. ENERGIA POTENȚIALĂ ELASTICĂ

Considerăm un resort nedeformat având constanta de elasticitate  $k$  și un capăt fix. Orientăm axa de coordonate  $Ox$  de-a lungul resortului având originea în capătul liber al lui (fig. 4.22, a). Aplicăm la capătul liber, de-a lungul axei  $Ox$ , o forță deformatoare  $\vec{F}$ . Sub acțiunea ei resortul se va alungi și va reacționa cu o forță elastică  $\vec{F}_e$  (fig. 4.22, b). Pentru proiecția acesteia pe axa  $Ox$ , în conformitate cu legea lui Hooke, avem

$$F_{ex} = -kx, \quad (4.46)$$

unde coordonata  $x$  a capătului liber este egală cu deformația absolută a lui:  $x = \Delta l$ .

Calculăm lucru mecanic efectuat de forța elastică. Această forță este variabilă și la calcularea lucrului ei se va utiliza metoda grafică. Relația (4.46) arată că dependența proiecției forței elastice de deformația  $x$  este liniară, coeficientul de proporționalitate fiind negativ. Graficul respectiv este reprezentat în figura 4.23.

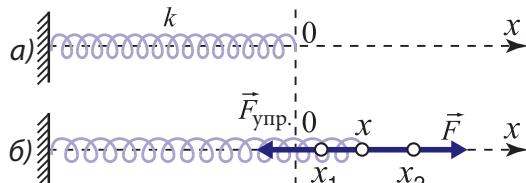


Fig. 4.22

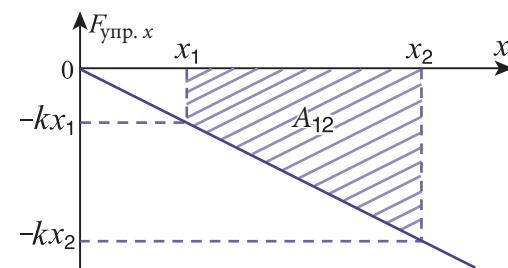


Fig. 4.23

Lucrul forței elastice atunci cînd deformația resortului crește de la  $x_1$  pînă la  $x_2$  este numeric egal cu aria figurii limitate de graficul forței, axa  $Ox$  și segmentele de ordonate ce corespund coordonatelor  $x_1$  și  $x_2$ . Această figură este un trapez (în fig. 4.23 este hașurat) de înălțime  $(x_2 - x_1)$ , cu bazele de lungimi  $kx_1$  și  $kx_2$ . Trapezul este situat sub axa absciselor, deci lucrul forței este negativ pentru  $x_2 > x_1$ . Acest fapt reiese și din figura 4.22, b, din care se vede că forța elastică este orientată în sens opus deplasării căptului liber al resortului.

Pentru lucrul mecanic al forței elastice, obținem

$$L_{12} = -\frac{kx_1 + kx_2}{2} (x_2 - x_1) = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (4.47)$$

Din această relație rezultă că lucrul forței elastice a resortului dat depinde numai de deformația inițială și de cea finală a lui și nu depinde de modalitatea de trecere de la o deformație la alta. Prin urmare, **forța elastică este o forță conservativă**.

Comparînd relațiile (4.47) și (4.41), pentru energia potențială a resortului deformat, numită **energie potențială elastică**, obținem:  $E_p = \frac{kx^2}{2} + \text{const}$ . Această constantă se determină pornind de la condiția că energia potențială elastică este nulă ( $E_p = 0$ ), atunci cînd resortul nu este deformat ( $x = 0$ ), adică în calitate de nivel zero se ia energia potențială a resortului nedeformat.

Obținem const. = 0, deci

$$E_p = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.48)$$

La această alegere a constantei arbitrară energia potențială a resortului deformat ( $x \neq 0$ ) ia valori pozitive, care nu depind de faptul că resortul a fost alungit sau comprimat, ci doar de modulul deformației.

Punctul de aplicație al forței deformatoare coincide cu punctul de aplicație al forței elastice, aceste forțe fiind egale în modul și de sensuri contrare. Prin urmare, lucrul forței deformatoare  $L'_{12}$  și lucru forței elastice  $L_{12}$  satisfac relația

$$L'_{12} = -L_{12}, \quad (4.49)$$

adică

$$L'_{12} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (4.50)$$

Din formulele (4.47) și (4.50) rezultă că la creșterea deformației resortului ( $|x_2| > |x_1|$ ) lucrul forței deformatoare este pozitiv ( $L'_{12} > 0$ ), consumîndu-se la mărirea energiei potențiale elastice a lui. Atunci cînd deformația resortului se micșorează ( $|x_2| < |x_1|$ ), lucrul forței elastice este pozitiv ( $L_{12} > 0$ ), adică resortul efectuează un lucru mecanic pe seama energiei sale potențiale.

Deoarece forța este caracteristica interacțiunii corpurilor, deseori energia potențială este numită **energie potențială de interacțiune**. Energia potențială gravitațională caracterizează interacțiunea dintre corpul dat și Pămînt sau un alt corp, iar energia potențială elastică caracterizează interacțiunea dintre porțiunile corpului deformat elastic. Pentru ambele forme de energie potențială este specific faptul că valorile lor sunt determinate de pozițiile reciproce ale corpurilor sau ale părților componente ale aceluiași corp.

## PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Două resorturi de constante elastice  $k_1$  și  $k_2$  sunt legate în serie (unul în prelungirea celuilalt). Care este energia potențială elastică a acestui resort combinat atunci cînd alungirea totală a lui este egală cu  $\Delta l$ ?

### REZOLVARE

Notăm cu  $\Delta l_1$  și  $\Delta l_2$  alungirile fiecărui resort în parte. Atunci energia potențială a sistemului celor două resorturi este  $E_p = \frac{k_1(\Delta l_1)^2}{2} + \frac{k_2(\Delta l_2)^2}{2}$ .

Pentru a determina alungirile  $\Delta l_1$  și  $\Delta l_2$ , vom folosi două condiții:

1 – suma alungirilor  $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l$ ;

2 – forțele elastice cu care un resort acționează asupra celuilalt sunt egale în modul (ca acțiune și reacțiune), adică  $k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2$ .

Exprimăm  $\Delta l_2 = \frac{k_1}{k_2} \Delta l_1$ , deci  $\Delta l_1 + \frac{k_1}{k_2} \Delta l_1 = \Delta l$ , de unde avem  $\Delta l_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \Delta l$ , apoi și

$\Delta l_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \Delta l$ . Pentru energia potențială elastică a resortului combinat obținem

$E_p = \frac{k_1 k_2 (\Delta l)^2}{2(k_1 + k_2)}$ . Din această expresie rezultă că resortul combinat (prin legarea în serie) se

comportă ca un resort cu o constantă elastică echivalentă  $k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ .

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

- Forța elastică este o forță conservativă? Argumentați răspunsul.
- Care este expresia pentru energia potențială elastică? Cum este ales nivelul nul al ei?
- Energia potențială elastică poate lua valori negative? Argumentați răspunsul.
- În care caz resortul efectuează un lucru pozitiv: atunci cînd deformația lui se mărește sau cînd aceasta se micșorează?
- Pentru a alungi un resort inițial nedeformat cu  $\Delta l$ , s-a consumat un lucru mecanic  $L' = 1,25\text{J}$ . Ce lucru mecanic trebuie consumat suplimentar pentru a mări alungirea resortului de la  $\Delta l$  pînă la  $3\Delta l$ ?
- Determinați energia potențială a unui resort comprimat cu  $|\Delta l| = 0,05\text{ m}$ , dacă se știe că valoarea forței care echilibrează forța elastică la acest moment este  $F = 60\text{ N}$ .
- Pentru a comprima un resort cu  $|\Delta l_1| = 0,02\text{ m}$ , este necesară o forță  $F_1 = 8\text{ N}$ . Care va fi energia potențială a acestui resort dacă este alungit cu  $\Delta l_2 = 0,04\text{ m}$ ?
- Un resort de care este suspendat un corp cu masa  $m_1 = 4\text{ kg}$  are lungimea  $l_1 = 0,30\text{ m}$ . Dacă suspendăm încă un corp cu masa  $m_2 = 3\text{ kg}$  lungimea resortului devine  $l_2 = 0,36\text{ m}$ . Cu cât a crescut energia potențială a resortului după suspendarea celui de-al doilea corp?

## 4.8 LUCRUL FORȚEI DE FRECARE

Pentru a analiza lucrul forțelor de frecare ce acționează între corpurile solide, considerăm un corp solid care alunecă pe suprafața unui alt corp solid. Asupra primului acționează forță de frecare la alunecare, a cărei valoare  $F_f = \mu N$  ( $N$  este valoarea forței de presiune normală a primului corp asupra celui de-al doilea, iar  $\mu$  este coeficientul de

frecare dintre corpi). Această forță este permanent orientată în sens contrar vitezei  $\vec{v}$  a primului corp în raport cu al doilea. Introducind vectorul unitar al vitezei  $\frac{\vec{v}}{v}$ , pentru forța de frecare la alunecare putem scrie

$$\vec{F}_f = -\mu N \frac{\vec{v}}{v}. \quad (4.51)$$

Pentru a calcula lucrul acestei forțe, examinăm un exemplu concret. În colțul 1 al unei camere cu laturile egale cu  $l_1$  și  $l_2$ , se află o lăda ce trebuie deplasată în colțul opus 3 al camerei (fig. 4.24). Admitem că lada poate fi deplasată pe două cai: de-a lungul diagonalei 1–3 sau de-a lungul laturilor 1–2, apoi 2–3. Notăm lucruul forței de frecare la alunecare pe aceste cai prin  $L_{13}$  și  $L_{123}$ .

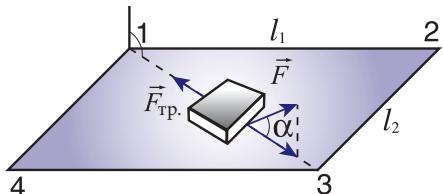


Fig. 4.24

Presupunem că forța de tracțiune  $\vec{F}$  și unghiul  $\alpha$ , format de ea cu podeaua, rămân constante. Rămân deci constante și reacțiunea normală  $\vec{N}$  a podelei, și valoarea forței de frecare la alunecare  $F_f$ . Deoarece această forță formează cu vectorul deplasare un unghi de  $180^\circ$ , pentru lucruul ei pe cele două cai menționate, obținem

$$\begin{aligned} L_{13} &= -F_f \cdot \sqrt{l_1^2 + l_2^2} = -\mu N \sqrt{l_1^2 + l_2^2}, \\ L_{123} &= -F_f (l_1 + l_2) = -\mu N (l_1 + l_2). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Observăm că  $L_{13} \neq L_{123}$ , adică lucruul forței de frecare la alunecare la trecerea unui corp dintr-o poziție în alta depinde nu numai de aceste poziții, dar și de forma traectoriei parcuse de corp între ele. Prin urmare, **forța de frecare la alunecare nu este o forță conservativă**.

Lucrul forței conservative pe un drum închis se egalează cu zero, dar în cazul forței de frecare la alunecare, al cărei lucru pe orice porțiune de drum este negativ, lucru pe un drum închis este, de asemenea, negativ, diferit de zero.

În cazul în care corpul solid nu aluneca pe suprafața corpului al doilea, între ele pot acționa forțe de frecare de repaus, care echilibrează sistemul de forțe ce acționează asupra fiecărui corp în parte.

Considerăm un corp aflat pe o bandă rulantă (fig. 4.25) care se mișcă cu viteză constantă. Corpul este în repaus față de bandă, suma forțelor care acționează asupra lui este egală cu zero:  $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$ . De aici pentru forța de frecare de repaus care acționează asupra corpului obținem  $F_f = mg \sin \alpha$ . Această forță are același sens cu viteza, deci lucruul ei este pozitiv. Pe o distanță egală cu  $l$ , lucruul este egal cu  $L = F_f \cdot l = mg \cdot l \sin \alpha = mgh$ , unde  $h$  este înălțimea la care a fost ridicat corpul. Astfel, energia potențială gravitațională a corpului s-a mărit datorită lucrului pozitiv efectuat de forța de frecare de repaus.

Asupra corpului solid care se mișcă într-un mediu gazos sau lichid acționează din partea mediului o **forță de rezistență**. Ca și forța de frecare la alunecare, forța de rezistență este orientată în sens contrar vitezei relative a corpului, egale cu

$$\vec{v}_r = \vec{v}_c - \vec{v}_m, \quad (4.53)$$

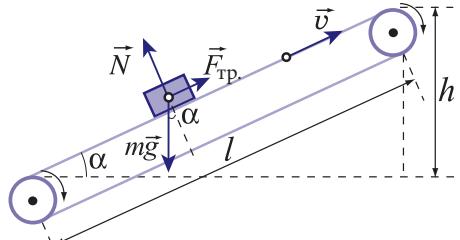


Fig. 4.25

unde  $\vec{v}_c$  și  $\vec{v}_m$  sunt vitezele corpului și ale mediului în raport cu același sistem de referință, de exemplu, legat cu Pământul. Valoarea forței de rezistență depinde de valoarea vitezei relative. În cazul vitezelor mici această dependență este liniară, astfel putem scrie (2.35, a):

$$\vec{F}_r = -\alpha \vec{v}_r. \quad (4.54)$$

Coefficientul de proporționalitate  $\alpha$  este numit **coeficient de rezistență**. Valoarea lui depinde de dimensiunile și forma corpului, de natura mediului în care el se mișcă.

Lucrul forței de rezistență (4.54) poate fi atât negativ, cât și pozitiv, în funcție de sensul vitezei relative  $\vec{v}_r$ , în raport cu viteza corpului  $\vec{v}_c$ . Dacă ambele viteze au același sens, de exemplu, în cazul automobilului ce se deplasează cu viteză  $\vec{v}_c$  mai mare decât viteza aerului (mediului)  $\vec{v}_m$ , lucrul forței de rezistență este negativ. Un alt exemplu: viteza vasului cu pînze este mai mică decât viteza vîntului care-l suflă din spate. În acest caz, viteza relativă  $\vec{v}_r$  a vasului este de sens contrar vitezei  $\vec{v}_c$  a vasului față de mal, iar lucrul forței de rezistență este pozitiv.

Rezumînd cele expuse mai sus, conchidem că lucrul forțelor de frecare și de rezistență poate fi atât pozitiv, cât și negativ, în funcție de situația concretă în care se manifestă aceste forțe.

### ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Forța de frecare la alunecare este conservativă? Argumentați răspunsul.
2. Depinde sau nu depinde lucrul forței de frecare la alunecare de forma traiectoriei corpului între poziția sa inițială și cea finală? Ilustrați răspunsul.
3. Poate fi pozitiv lucrul forței de rezistență ce acționează asupra corpului din partea mediului în care el se mișcă? Dar negativ? Exemplificați.
4. Calculați lucrul forței de frecare la alunecare pe drumurile închise 1–2–3–1 și 1–2–3–4–1 din figura 4.24. Comparați rezultatele obținute și comentați-le.
5. Într-o zi fără vînt un automobil a parcurs unul și același traseu de două ori: prima oară cu o viteză mai mică, a doua oară cu o viteză mai mare. Comparați lucruul forței de rezistență din partea aerului în cele două cazuri.

## 4.9 LEGEA CONSERVĂRII ȘI TRANSFORMĂRII ENERGIEI MECANICE

### a. Legea conservării și transformării energiei mecanice în sisteme izolate în care acționează forțe conservative

Considerăm un sistem izolat de corpuri, adică un sistem de corpuri care interacționează numai între ele și nu interacționează cu corpurile din exteriorul sistemului considerat. Admitem că forțele de interacțiune dintre corpuri sunt forțe conservative.

Din teorema variației energiei cinetice (4.34) avem

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{12}. \quad (4.55)$$

Amintim că aici  $E_{c1}$  este energia cinetică a sistemului de corpuri în pozițiile lor inițiale,  $E_{c2}$  – în pozițiile finale, iar  $L_{12}$  este lucrul mecanic efectuat de forțele de interacțiune la trecerea corpurilor din pozițiile inițiale în cele finale. Aceste forțe sunt conservative, deci

lucrul efectuat de ele este egal cu variația energiei potențiale a sistemului de corpuși, luată cu semnul minus (4.41):

$$L_{12} = - (E_{p2} - E_{p1}). \quad (4.56)$$

Substituind relația (4.56) în (4.55), obținem

$$E_{c2} - E_{c1} = - (E_{p2} - E_{p1})$$

sau

$$E_{c2} + E_{p2} = E_{c1} + E_{p1}. \quad (4.57)$$

**Mărimea fizică  $E$  egală cu suma energiei cinetice și a celei potențiale a sistemului la momentul dat se numește *energie mecanică* a acestui sistem.**

$$E = E_c + E_p. \quad (4.58)$$

Astfel, relația (4.57) ia forma

$$E_2 = E_1. \quad (4.59)$$

Această relație sau (4.57) exprimă legea conservării și transformării energiei mecanice.

**Energia mecanică a sistemului izolat de corpuși în care acționează numai forțe conservative rămîne invariabilă în timp.**

Legea în cauză arată că se conservă suma celor două forme de energie mecanică și că variația uneia dintre ele impune variația respectivă a celeilalte forme. De exemplu, creșterea energiei cinetice este însotită de micșorarea energiei potențiale cu aceeași mărime.

Să ilustrăm această lege.

Considerăm un corp cu masa  $m$  aflat la înălțimea  $H$  deasupra suprafeței Pământului. Sistemul izolat este constituit din acest corp și Pământ. Energia mecanică a acestui sistem se compune din energia cinetică a corpului și cea a Pământului și din energia potențială de interacțiune corp-Pământ. Forța de atracție universală dintre corp și Pământ le imprimă accelerării al căror raport este egal cu raportul invers al maselor. Masa Pământului este incomparabil mai mare decât cea a corpului; ca rezultat, accelerarea Pământului este nulă. Prin urmare, deplasarea Pământului, ca și lucrul forței de atracție universală, ce acționează asupra lui este nulă, deci energia cinetică a Pământului rămîne constantă. Din această cauză, la înscrierea legii conservării energiei mecanice în cazul unui sistem de corpuși, printre care se află și Pământul, nu figurează energia cinetică a acestuia, ci doar energia potențială de interacțiune cu el.

În starea inițială, la înălțimea  $H$ , viteza corpului și energia sa cinetică sunt nule. Energia mecanică a lui se reduce la energia potențială  $E_1 = E_{p1} = mgH$ . Corpul, fiind lăsat liber, cade spre Pământ. În această mișcare el posedă și energie cinetică, și energie potențială, astfel că energia mecanică a lui la înălțimea  $h$  are valoarea  $E = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} + mgh$ . Conform legii conservării energiei, avem

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = mgH. \quad (4.60)$$

Cu cît corpul se află mai aproape de Pământ (înălțimea  $h$  este mai mică), energia potențială este mai mică, iar cea cinetică – mai mare. La suprafața Pământului ( $h=0$ ) energia potențială devine nulă, toată energia mecanică a corpului transformându-se în energie cinetică:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH, \quad (4.61)$$

unde  $v_0$  este viteza corpului la suprafața Pământului.

Relația (4.61) a fost obținută aplicînd legea conservării și transformării energiei mecanice. Ea poate fi obținută și pe altă cale, considerînd mișcarea uniform accelerată a corpului în cădere liberă, avînd accelerăția gravitațională  $g$  și viteză inițială nulă.

Dacă notăm timpul căderii cu  $t$ , avem  $v_0 = gt$ ,  $H = \frac{gt^2}{2}$ . Din aceste două relații, după excluderea timpului  $t$ , obținem relația (4.61).

Legea conservării și transformării energiei a fost formulată în anul 1847 de către H. Helmholtz.

### b.º Ciocnirile corpurilor

Să aplicăm legea conservării impulsului mecanic al unui sistem de puncte materiale (par. 4.2, c) la ciocnirea corpurilor. Folosim aceleasi notații:  $m_1$  și  $m_2$  – masele corpurilor,  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  – vitezele corpurilor pînă la ciocnire, iar  $\vec{u}_1$  și  $\vec{u}_2$  – vitezele lor după ciocnire. Legea conservării impulsului a fost scrisă sub forma (4.13):

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2. \quad (4.62)$$

În cazul ciocnirii plastice, corpurile ce se ciocnesc formează un corp comun de masă egală cu suma maselor, adică egală cu  $(m_1 + m_2)$ , a fost obținută vîteza  $\vec{u}$  (4.14) a acestui corp după ciocnire:

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.63)$$

Pentru a cerceta modul cum se comportă energia cinetică a corpurilor la acest gen de ciocniri, calculăm variația ei:

$$\Delta E_c = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} - \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right).$$

Substituind expresia (4.63) pentru vîteza  $\vec{u}$ , în urma transformărilor evidente, obținem

$$\Delta E_c = - \frac{m_1 m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (4.64)$$

Observăm că în urma ciocnirii plastice a corpurilor energia cinetică se micșorează, transformîndu-se în căldură.

Să analizăm un alt gen de ciocnire a corpurilor – **ciocnirea perfect elastică** sau **ciocnirea elastică**. După această ciocnire, corpurile se separă unul de altul fără a fi deformate, energia cinetică a lor conservîndu-se. Aceasta este un model ideal, deoarece în realitate corpurile după ciocnire rămîn parțial deformate. Dacă însă deformațiile sănt destul de



**Hermann von HELMHOLTZ** (1821–1894), fizician și fiziolog german

Descoperiri în electromagnetism, optică, acustică, mecanica fluidelor, fizica fenomenelor termice. A formulat (1847) legea conservării energiei demonstrînd caracterul general al acesteia, stabilind că ea se respectă în fenomenele mecanice, termice, electomagnetice, fizio-logicice etc. A construit primul circuit oscilant dintr-o inductanță și un condensator, a formulat ideea despre structura atomară a electricității și a. În domeniul acusticii fizio-logicice a elaborat o teorie a auzului, a construit modelul urechii, iar în cel al fizio-logiciei văzului a propus teoria acomodării ochiului, teoria văzului color.

mici și pot fi neglijate, ca în cazul ciocnirii dintre bilele de biliard din fildeș sau din oțel, modelul ciocnirii perfect elastice poate fi aplicat.

Considerăm ciocnirea elastică centrică a două bile. În cazul ciocnirii centrice vitezele bilelor pînă la și după ciocnire sunt situate pe dreapta care trece prin centrele lor (fig. 4.26).

Astfel, în cazul ciocnirii elastice se respectă legea conservării impulsului (4.62) și legea conservării energiei cinetice care se scrie după cum urmează:

$$\frac{m_1 \vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2^2}{2} = \frac{m_1 \vec{u}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{u}_2^2}{2}. \quad (4.65)$$

Transcriem legile de conservare (4.62) și (4.65) sub forma

$$\begin{cases} m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1)(\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2)(\vec{u}_2 + \vec{v}_2). \end{cases}$$

Comparînd aceste ecuații, obținem un sistem echivalent:

$$\begin{cases} m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ \vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2. \end{cases} \quad (4.66)$$

Pentru a determina viteza necunoscută  $\vec{u}_1$ , înmulțim ecuația a doua cu  $(-m_2)$  și adunăm ecuația astfel obținută cu prima ecuație (4.66).

Pe această cale obținem pentru viteza  $\vec{u}_1$  expresia

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.67)$$

Formula pentru viteza  $\vec{u}_2$  poate fi obținută folosind o proprietate a sistemului inițial de ecuații (4.62) și (4.65). Observăm că acest sistem este simetric față de indicii 1 și 2, adică la înlocuirea simultană a indicelui 1 cu 2 și a indicelui 2 cu 1 sistemul de ecuații nu se modifică. Aceeași proprietate trebuie să o posede și soluțiile lui. Prin urmare, expresia pentru viteza  $\vec{u}_2$  se obține din formula (4.67) după înlocuirea simultană a indicelui 1 cu 2 și invers.

Obținem

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \quad (4.68)$$

Evidențiem cîteva cazuri particolare.

**1.** Bilele au mase egale,  $m_1 = m_2$ . Pentru vitezele lor după ciocnire obținem  $\vec{u}_1 = \vec{v}_2$  și  $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$ , adică în urma ciocnirii elastice bilele au făcut schimb de viteze.

**2.** Bila cu masa  $m_2$  se află inițial în repaus. Vitezele bilelor după ciocnire sunt

$$\vec{u}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1; \vec{u}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \quad (4.69)$$

**3.** Dacă bilele au mase egale și a doua se află în repaus, avem  $\vec{u}_1 = 0$  și  $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$ . Prin urmare, prima bilă după ciocnire se oprește, iar a două se mișcă cu viteza primei bile pînă la ciocnire.

**4.** Bila cu masa  $m_1$  se ciocnește de un corp cu masa  $m_2 >> m_1$  aflat în repaus. De exemplu, o bilă se ciocnește elastic cu un perete imobil, viteza bilei  $\vec{v}_1$  fiind perpendiculară la peretele imobil.

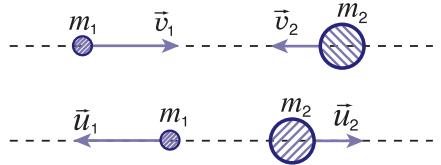


Fig. 4.26

culară pe acesta. Din expresiile (4.69) obținem  $\vec{u}_1 = -\vec{v}_1$  și  $\vec{u}_2 = 0$ , adică după ciocnirea elastică bila se mișcă cu viteza de aceeași valoare ca și pînă la ciocnire, dar de sens contrar.

### c.º Variația energiei mecanice a sistemului în prezența forțelor neconservative și a forțelor externe

Considerăm un sistem de coruri care interacționează nu numai între ele, ci și cu corurile din exteriorul sistemului. Admitem că unele dintre aceste forțe sunt neconservative.

Pornim de la teorema variației energiei cinetice (4.34):

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{12}.$$

Lucrul total al forțelor este egal cu suma lucrurilor forțelor interne  $L_{12}^i$  și a celor externe  $L_{12}^e$ , adică  $L_{12} = L_{12}^i + L_{12}^e$ . Lucrul forțelor interne, la rîndul lor, este egal cu lucru forțelor interne conservative  $L_{12}^{ic}$  plus lucru forțelor interne neconservative  $L_{12}^{inc}$ , deci  $L_{12} = L_{12}^{ic} + L_{12}^{inc}$ . Prin urmare, lucrul total  $L_{12} = L_{12}^{ic} + L_{12}^{inc} + L_{12}^e$ . Dar lucru forțelor conservative se exprimă prin energia potențială de interacție – relația (4.41). Avem  $L_{12}^{ic} = E_{p1} - E_{p2}$ . Astfel, lucru total se prezintă sub forma

$$L_{12} = E_{p1} - E_{p2} + L_{12}^{inc} + L_{12}^e. \quad (4.70)$$

Substituind această expresie în relația ce exprimă teorema variației energiei cinetice, obținem

$$E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{p2} + L_{12}^{inc} + L_{12}^e$$

sau

$$(E_{c2} + E_{p2}) - (E_{c1} + E_{p1}) = L_{12}^{inc} + L_{12}^e.$$

Introducem energia mecanică  $E = E_c + E_p$ . Pentru variația acesteia avem

$$E_2 - E_1 = L_{12}^{inc} + L_{12}^e. \quad (4.71)$$

### Variația energiei mecanice a unui sistem de coruri este egală cu lucrul forțelor interne neconservative plus lucrul forțelor externe.

Lucrul forțelor neconservative – al forței de frecare la alunecare, al forței de rezistență ce acționează asupra corpului din partea mediului în care el se mișcă – este negativ. Ca rezultat, acțiunea acestor forțe provoacă micșorarea energiei mecanice a sistemului de coruri. Acestea se încălzesc, energia internă a lor mărinindu-se cu valoarea respectivă.

Lucrul forțelor externe poate fi atât pozitiv, cât și negativ, în funcție de corelație dintre sensul lor în raport cu viteza coruprilor asupra căror ele acționează. Prin urmare, sub acțiunea forțelor externe, energia mecanică a sistemului se mărește atunci cînd lucrul lor este pozitiv și se micșorează în cazul lucrului negativ al forțelor externe.

## PROBLEME REZOLVATE

- O sanie cu masa  $m = 10 \text{ kg}$  a coborât, din stare de repaus, o pantă de zăpadă de înălțimea  $h = 5 \text{ m}$ , apoi a continuat mișcarea pe o porțiune orizontală de drum și s-a oprit după ce a parcurs pe aceasta o distanță egală cu  $l = 25 \text{ m}$ . Neglijînd frecarea dintre sanie și pantă de zăpadă, determinați: **a)** viteza saniei la capătul inferior al pantei; **b)** coeficientul de frecare dintre sanie și porțiunea orizontală de drum; **c)** lucrul mecanic minim care trebuie consumat pentru a readuce sania în poziția sa inițială de pe pantă.

## REZOLVARE

**Se dă:**

$$m = 10 \text{ kg},$$

$$h = 5 \text{ m},$$

$$l = 25 \text{ m}$$

$$a) v_B - ?; b) \mu - ?;$$

$$c) L' - ?$$

Reprezentăm schematic situația descrisă în problemă (fig. 4.27).

a) În conformitate cu legea conservării energiei mecanice pentru mișcarea pe pantă, unde nu acționează forțe neconservative, avem

$E_B = E_A$ . În poziția inițială A, sanie posedă energie potențială, astfel că  $E_A = E_{pA} = mgh$ , iar în poziția B – energie cinetică, deci

$E_B = E_{CB} = \frac{mv_B^2}{2}$ . Egalând energiile mecanice ale saniei, obținem  $\frac{mv_B^2}{2} = mgh$ , de unde rezultă că  $v_B = \sqrt{2gh}$ ;  $v_B = 10 \text{ m/s}$ .

- b) La mișcarea pe porțiunea orizontală asupra saniei acționează forță de frecare

$$F_f = \mu N = \mu mg.$$

Egalăm variația energiei cinetice a saniei cu lucrul acestei forțe:

$$E_{cC} - E_{cB} = -F_f l \text{ sau } 0 - \frac{mv_B^2}{2} = -\mu mgl.$$

Exprimăm coeficientul de frecare  $\mu = \frac{v_B^2}{2gl} = \frac{h}{l}$ ,  $\mu = 0,2$ .

- c) Pentru a deplasa sanie pe drumul CB, trebuie să acționăm din exterior cu o forță de tracțiune orizontală egală ca modul cu forța de frecare. Deci  $L'_{CB} = F_f \cdot l = \mu mgl$ . Pentru a deplasa sanie pe panta BA, trebuie să consumăm un lucru egal cu variația energiei potențiale a acestieia:  $L'_{BA} = E_{pA} - E_{pB} = mgh$ . Astfel, lucrul total consumat este

$$L' = L'_{CB} + L'_{BA} = \mu mgl + mgh = \frac{h}{l} mgl + mgh = 2 mgh.$$

Aici s-a ținut seama de valoarea coeficientului de frecare obținut la punctul (b). Efectuind calculele, avem  $L' = 1000 \text{ J} = 1 \text{ kJ}$ .

2. Pentru a determina viteza unui glonț, se folosește instalația reprezentată în figura 4.28. O bară de lemn cu masa  $M$  este legată la capătul unui resort nedeformat de constanță elastică egală cu  $k$ . Glonțul cu masa  $m$ , ieșit din armă, nimerește în bară, pătrunde în ea și se oprește. Cunoscind comprimarea maximă  $\Delta l_m$  a resortului, determinați viteza glonțului. Frecarea dintre bară și suprafața orizontală pe care se află este neglijabilă.

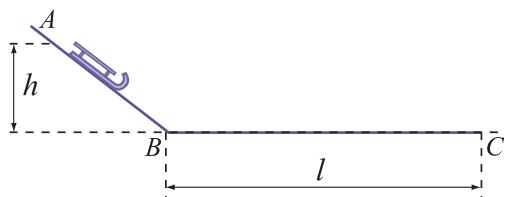


Fig. 4.27

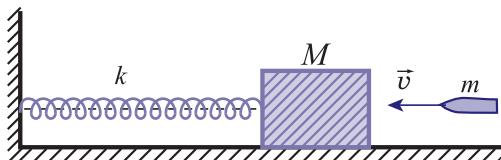


Fig. 4.28

## REZOLVARE

Interacțiunea glonțului cu bara este o ciocnire plastică. Dacă notăm viteza glonțului cu  $v$ , iar viteza barei având glonțul în ea cu  $u$ , atunci în conformitate cu legea conservării impulsului avem  $mv = (M + m)u$ .

La mișcarea ulterioară a barei și a glonțului, resortul se comprimă, energia potențială elastică a lui crește pe contul energiei cinetice a sistemului bară–glonț, care se micșorează. La atingerea comprimării maxime  $\Delta l_m$ , energia cinetică devine nulă, trecind complet în energie potențială. Conform legii conservării și transformării energiei mecanice, avem

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = \frac{k(\Delta l_m)^2}{2}.$$

Din expresiile acestor două legi de conservare determinăm viteza glonțului:

$$v = \frac{\Delta l_m}{m} \cdot \sqrt{k(M+m)}.$$

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Definiți energia mecanică a unui sistem de corpuși.
2. În ce condiții energia mecanică a unui sistem de corpuși rămîne invariabilă în timp?
3. Care ciocniri ale corpurilor se numesc elastice (perfect elastice)?
4. Care dintre legile de conservare este valabilă atât în cazul ciocnirilor elastice, cât și în cel al ciocnirilor plastice ale corpurilor?
- 5.º Cum variază energia cinetică a sistemului de corpuși în urma ciocnirii plastice dintre ele?
- 6.º Un corp cade liber de la înălțimea  $H = 60$  m. Determinați înălțimea la care energia lui cinetică este de două ori mai mare decît cea potențială.
7. Un corp este aruncat oblic de la suprafața Pământului cu viteza  $v_0 = 25$  m/s. Care este viteza lui la momentul cînd se află la înălțimea  $h = 20$  m?
8. O bară mică alunecă de la vîrful unui plan înclinat de lungime  $l = 2,8$  m, care formează unghiul  $\alpha = 30^\circ$  cu orizontală. Determinați viteza barei la baza planului înclinat:
  - a) în lipsa frecării dintre bară și planul înclinat;
  - b) în cazul cînd coeficientul de frecare dintre bară și planul înclinat  $\mu = 0,5$ .
9. Determinați viteza unei bile cu masa  $m = 0,02$  kg la lansarea ei de un pistol-jucărie cu resort, fixat orizontal. Constanta elastică a resortului  $k = 242$  N/m, acesta fiind comprimat cu  $\Delta l = 0,01$  m.
- 10.º Un vagon cu masa  $m = 30$  t se mișcă cu viteza  $v = 2$  m/s pe o linie de rezervă a căii ferate, spre bariera de la capătul acesteia. Bariera este dotată cu două resorturi identice de constantă de elasticitate  $k = 2,4 \cdot 10^5$  N/m. Determinați comprimarea maximă a resorturilor atunci cînd ele opresc vagonul.
- 11.º O sferă din plumb cu masa  $m_1 = 0,5$  kg care se mișca cu viteza  $v_1 = 4$  m/s s-a ciocnit cu o sferă din plastilină cu masa  $m_2 = 0,3$  kg care se mișca în întîmpinare cu viteza  $v_2 = 2$  m/s. Calculați energia cinetică a corpului comun format din cele două sfere în urma ciocnirii plastice a acestora.
- 12.º Un copil cu masa  $m_1$  se află pe gheăță, pe patine, lîngă săniuța cu masa  $m_2$ . Copilul a împins săniuța, imprimîndu-i viteza  $v_2$ , el mișcîndu-se în sens contrar. Ce lucru mecanic a efectuat copilul?
- 13.º O bilă de masă  $m_1 = 0,4$  kg a ciocnit elastic și central o altă bilă de masă  $m_2 = 0,2$  kg care se află în repaus. Energia cinetică a bilei a două după ciocnire a devenit egală cu 40 J. Determinați energia cinetică a primei bile pînă la ciocnire și după aceasta.
14. O piatră cu masa  $m = 0,5$  kg a fost aruncată de la înălțimea  $h = 30$  m cu o viteza inițială  $v_1 = 25$  m/s. Stabiliți lucrul forțelor de rezistență care au acționat asupra pietrei, dacă viteza ei la cădere pe Pămînt a fost egală cu  $v_2 = 30$  m/s.
15. Un corp cu masa  $m = 0,8$  kg aruncat vertical în sus cu viteza  $v_0 = 12$  m/s atinge înălțimea maximă  $H = 6$  m. Care este valoarea medie a forței de rezistență ce a acționat asupra corpului din partea aerului? Cu ce viteză va reveni corpul la locul de lansare, dacă admitem că forța medie de rezistență în ambele cazuri are aceeași valoare?



# Capitolul V

## OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE

### 5.1 MIȘCAREA OSCILATORIE

În natură întâlnim frecvent mișcări ce se repetă după anumite intervale de timp, adică **periodic**. De exemplu, orice mișcare uniformă de rotație a unui corp este periodică: fiecare punct al corpului trece prin pozițiile ocupate la rotațiile precedente, având, totodată, viteza și sensul mișcării identice. O mișcare periodică efectuează și corpul suspendat de un fir sau un resort, balansierul unui ceasornic, barca pe valurile mării, plasa păianjenului, cînd în ea nimerește prada etc. Însă nu orice mișcare periodică este și oscilatorie. Mișcarea uniformă de rotație diferă esențial de cea descrisă în exemplele menționate. La o analiză mai detaliată observăm că mișcarea se poate realiza în jurul unei poziții fixe, care coincide cu cea de echilibru stabil, numită **centru de oscilație**, sau o asemenea poziție nu există (cazul mișcării de rotație). În figura 5.1 sînt prezentate exemple de mișcări oscilatorii, unde cu  $OO'$  este indicat nivelul poziției echilibrului stabil.

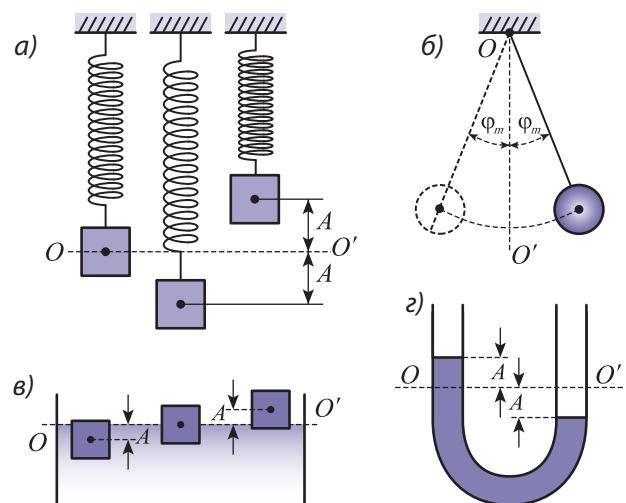


Fig. 5.1

**Mișcarea ce se repetă periodic de-a lungul unei oarecare traiectorii parcuse succesiv în sensuri opuse se numește oscilație mecanică, iar sistemul care o realizează – oscilator.**

Orice oscilație se caracterizează prin anumiți parametri cantitativi, care, în condițiile date, își mențin valoarea numerică constantă și o deosebesc de alte oscilații. Acești parametri sunt **amplitudinea, perioada și frecvența**.

**Valoarea abaterii maxime a corpului ce oscilează de la poziția de echilibru stabil se numește amplitudine.**

Ea este determinată de condițiile initiale aplicate oscilatorului, adică de acțiunea care îl aduce în stare de mișcare. Amplitudinea poate fi atât o mărime liniară, cât și unghiulară. În funcție de aceasta, unitatea ei în SI este **metrul (m)** sau **radianul (rad)**. În figura 5.1 amplitudinea este notată cu litera  $A$  (fig. 5.1, a, c, d) și, respectiv, cu  $\varphi_m$  (amplitudine unghiulară) (fig. 5.1, b).

**Mișcarea dintre două treceri succesive a oscilatorului prin același punct al traiectoriei, posedînd viteza și accelerare identice, reprezintă o oscilație completă. Timpul ( $T$ ) necesar pentru efectuarea ei se numește perioadă. În SI unitatea perioadei este secunda,  $[T] = 1$  s.**

Dacă se cunoaște perioada oscilațiilor  $T$ , atunci numărul de oscilații complete  $N$ , efectuate în intervalul de timp  $t$ , se determină din relația

$$N = \frac{t}{T}. \quad (5.1)$$

Un alt parametru ce descrie o oscilație este **frecvența**. Ea este notată cu litera grecească  $v$  (niu) și caracterizează rapiditatea repetării mișcării oscilatorii.

**Mărimea  $v$ , egală numeric cu numărul de oscilații complete efectuate într-o unitate de timp, se numește frecvență (a oscilației):**

$$v = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}. \quad (5.2)$$

Unitatea frecvenței în SI este un **hertz (Hz)**:

$$[v] = 1\text{s}^{-1} = 1\text{Hz}.$$

Pentru a stabili condițiile necesare apariției și menținerii mișcării oscilatorii, să analizăm mișcarea unui corp fixat la capătul unui resort. Presupunem că se realizează o situație ideală, cind forțele de frecare și de rezistență nu acționează (fig. 5.2). Mișcarea oscilatorie, ca oricare altă mișcare, se produce numai în urma unor interacțiuni cu alte corpuși. Astfel, corpul care oscilează împreună cu cele ce interacționează alcătuiesc un **sistem oscilant**, în care se realizează starea de echilibru stabil și se pot produce os-

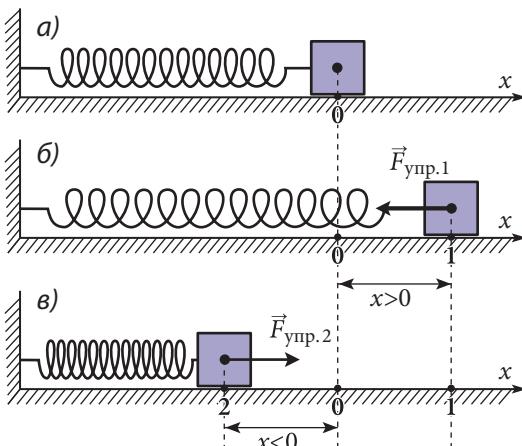


Fig. 5.2

cilații. În exemplul considerat, sistemul oscilant conține două componente: corpul, a cărui mișcare se va cerceta, și resortul.

Inițial corpul se află în poziția de echilibru stabil O (fig. 5.2, a), în care forța de elasticitate este nulă. Pentru a-l scoate din această poziție, este necesară acțiunea unei forțe exterioare. Considerînd că această forță nu depășește limitele elasticității, în resortul deformat prin alungire apare forța de elasticitate  $F_{e,x} = -kx$ , sub a cărei acțiune corpul începe să se deplaseze din poziția 1 spre poziția de echilibru O (fig. 5.2, b), mărindu-și treptat viteza. Conform principiului fundamental al dinamicii:

$$-kx = ma_x. \quad (5.3)$$

În poziția 1 forța de elasticitate, deci și accelerarea corpului, este maximă. Odată cu apropierea corpului de poziția de echilibru (micșorarea coordonatei  $x$ ), forța de elasticitate  $\vec{F}_{e1}$  și accelerarea corpului tind spre zero, iar viteza crește și în poziția de echilibru atinge o valoare maximă. Datorită inerției, corpul trece prin poziția de echilibru O și se deplasează spre stînga, comprimînd resortul. Întrucît la comprimare în resort ia naștere forța de elasticitate  $\vec{F}_{e2}$  de sens opus vitezei corpului, mișcarea lui este încetinită. Accelerarea corpului se mărește în modul, iar viteza lui se micșorează. În poziția 2 (fig. 5.2, c) viteza este egală cu zero, iar valorile forței din resort și a accelerării devin maxime. Mai mult ca atât, deoarece se cercetează o situație ideală  $|\vec{F}_{e2}| = |\vec{F}_{e1}|$ , deplasările corpului în stînga și în dreapta de la poziția de echilibru sunt egale. Sub acțiunea forței  $\vec{F}_{e2}$ , corpul începe mișcarea accelerată spre dreapta, mărindu-și viteza. Deoarece în poziția de echilibru  $|\vec{F}_{e2}| = 0$ , conform ecuației (5.3), accelerarea corpului de asemenea este egală cu zero, iar viteza devine maximă. Continuîndu-și, după inerție, mișcarea spre dreapta, corpul își micșorează viteza, ajungînd în poziția 1 (fig. 5.2, b) cu viteză nulă, forța  $\vec{F}_{e1}$  și accelerarea fiind maxime. Ulterior mișcarea corpului se va repeta în aceeași ordine. Așadar, corpul efectuează o mișcare periodică numită **oscilatorie**, trecînd succesiv prin pozițiile 1 – O – 2 – O – 1. Forța sub a cărei acțiune se produce mișcarea oscilatorie este orientată întotdeauna spre poziția de echilibru stabil și se numește **forță de revenire**.

Oscilațiile efectuate de un corp numai sub acțiunea forței de revenire au fost numite **oscilații proprii**. În realitate însă asupra oricărui corp acționează și forțele de rezistență ale mediului. Din această cauză, oscilațiile proprii reprezintă o situație ideală care nu se realizează în practică. Oscilațiile corpului care se produc sub acțiunea forței de revenire și a forțelor de rezistență ale mediului se numesc **oscilații libere**. Ele se deosebesc de oscilațiile proprii cu atât mai puțin cu cât forțele de rezistență sunt mai mici.

Din cele expuse, pot fi formulate condițiile necesare pentru apariția și menținerea oscilațiilor unui corp:

- **corpul trebuie să posede o energie suplimentară în comparație cu energia lui în starea de echilibru stabil;**
- **asupra corpului scos din poziția de echilibru trebuie să acționeze o forță de revenire;**
- **dacă asupra corpului acționează și forțe de rezistență, atunci energia suplimentară nu trebuie să se consume complet pentru învingerea lor.**

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Ce se numește oscilație mecanică? Propuneți exemple.
2. Prin ce se deosebește mișcarea oscillatorie de cea de rotație? Ce reprezintă centrul de oscilație?
3. Definiți amplitudinea, perioada și frecvența mișcării oscillatorii. Care sunt unitățile acestora în SI?
4. Care oscilații sunt numite libere? Prin ce se deosebesc ele de oscilațiile proprii?
5. Formulați condițiile necesare pentru apariția și menținerea oscilațiilor.
6. Bila  $B$  se poate afla în pozițiile de echilibru 1 sau 2 (fig. 5.3). În care dintre aceste poziții este posibilă mișcarea oscillatorie? Argumentați răspunsul.
7. Un corp efectuează oscilații cu amplitudinea  $A = 2$  cm. Ce distanță parcurge corpul timp de o perioadă?
8. În timp de 1 min. un balansoar (scrîncior) a efectuat 20 de oscilații complete. Care este perioada de oscilație a balansoarului?
9. Căruciorul fixat la capătul unui resort efectuează o oscilație completă în 0,5 s. Determinați frecvența oscilațiilor.

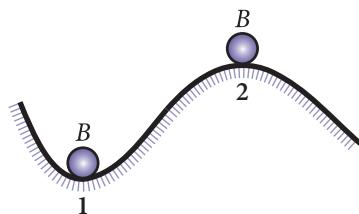


Fig. 5.3

## 5.2 OSCILATORUL LINIAR ARMONIC

În funcție de condițiile în care se află oscilatorul, mișcările executate de acesta sunt diverse, de cele mai multe ori, foarte complicate, iar descrierea lor cantitativă este destul de dificilă. Din această cauză, vom alcătui un model fizic idealizat, cu ajutorul căruia se va studia cea mai simplă mișcare oscillatorie. În calitate de oscilator se va considera un punct material de masă  $m$ , asupra căruia acționează doar forță de revenire, care reprezintă o funcție liniară în raport cu abaterea de la poziția echilibrului stabil (de exemplu, forță de elasticitate). Astfel de forțe sunt numite **cviastică sau de tip elastic**. Deoarece mișcarea oscillatorie realizată în cadrul acestui model, după cum vom vedea ulterior, este descrisă de o funcție armonică, el a fost numit **oscilator liniar armonic**. În realitate astfel de oscilatori nu există, însă în condiții de laborator se pot confeționa sisteme oscilante cu proprietăți apropiate de condițiile ideale. De exemplu, un corp de dimensiuni mici și masă mare, suspendat de un resort perfect elastic, având masa neglijabilă în raport cu cea a corpului, este numit **pendul elastic**, iar același corp, suspendat de un fir lung inextensibil și imponderabil, **pendul gravitațional sau matematic**.

### a. Pendulul elastic

Fie un pendul elastic de masă  $m$  și constantă de elasticitate  $k$ . În starea inițială, sub acțiunea forței de greutate  $\vec{G}$ , resortul deja este alungit cu  $x_0$ , iar forța de elasticitate menține sistemul în poziția echilibrului stabil (fig. 5.4). Dacă luăm în această poziție originea axei de coordonate  $Ox$ , de-a lungul căreia se va produce mișcarea oscillatorie, atunci condiția echilibrului stabil se scrie sub forma

$$\mathbf{G} = -kx_0. \quad (5.4)$$

La deplasarea corpului de la poziția de echilibru cu valoarea  $x$  în sensul pozitiv al axei de coordonate, din partea resortului acționează forță de elasticitate egală cu  $-k(x - x_0)$  și legea a doua a lui Newton, care descrie această mișcare, capătă aspectul:

$$ma_x = -k(x - x_0) + G_x, \quad (5.5)$$

unde  $a_x$  este proiecția vectorului acceleratie pe această axă. Luând în considerare (5.4), din (5.5), avem  $ma_x = -kx$ . Dacă împărțim această ecuație la  $m$ , obținem

$$a_x + \omega^2 x = 0, \quad (5.6)$$

unde

$$\omega^2 = k/m \quad (5.7)$$

reprezintă o constantă dependentă de proprietățile pendulului elastic.

Relația (5.6) descrie complet mișcarea osculatorie a pendulului elastic și a fost numită **ecuația oscilatorului liniar armonic**.

### b. Pendulul gravitațional

Să analizăm particularitățile mișcării osculatorii în cazul **pendulului gravitațional** (fig. 5.5). Sistemul oscilant este alcătuit din firul de lungime  $l$ , corpul punctiform de masă  $m$  și Pământul, din partea căruia acționează forță de greutate. Se scoate pendulul din poziția de echilibru stabil. În această stare asupra corpului acționează forță de greutate  $\vec{G} = m\vec{g}$ , orientată vertical în jos, și forță de tensiune  $\vec{T}$  din fir, direcționată de-a lungul lui. Din figura 5.5 se observă că forța de greutate este caracterizată de două componente: normală  $\vec{G}_n$  și tangentă  $\vec{G}_t$  la traекторia mișcării corpului, fiind orientate, respectiv, pe direcția firului și perpendicular acestuia.

Componenta  $\vec{G}_t$  a forței de greutate imprimă corpului o acceleratie  $\vec{a}_t$ , numită **tangențială**, datorită căreia se modifică modulul vitezei lui. Sub acțiunea ei, pendulul începe să se depleteze spre poziția de echilibru stabil de-a lungul unui arc de cerc de rază egală cu lungimea pendulului  $l$ , mărindu-și treptat viteză. În același timp, valoarea acestei componente  $\vec{G}_t$  se micșorează și la treccerea prin poziția de echilibru stabil este egală cu zero (fig. 5.5), viteza fiind maximă. Datorită inertiei, corpul trece dincolo de poziția de echilibru, continuindu-și mișcarea cu viteză descrescătoare, deoarece apare compoñenta  $\vec{G}_t$  a forței de greutate, orientată

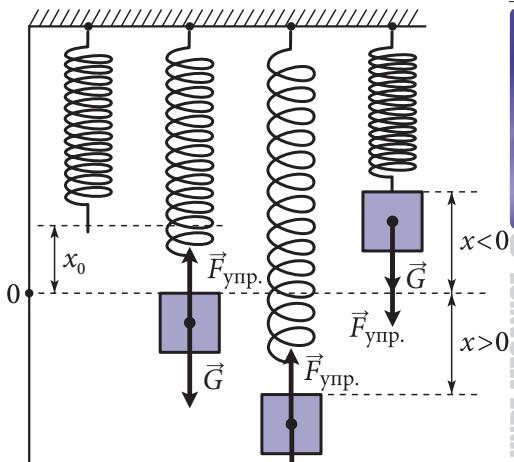


Fig. 5.4

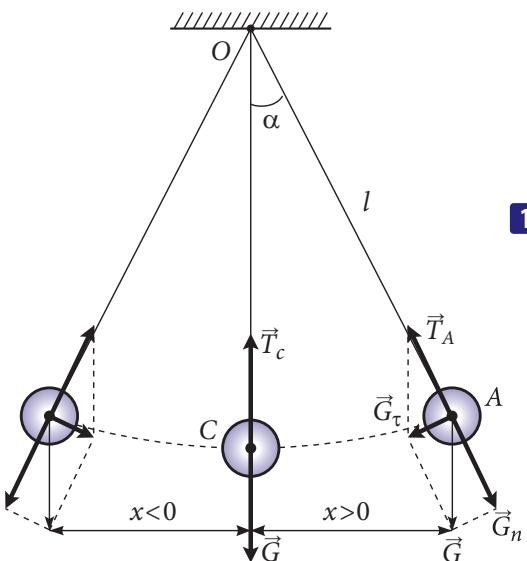


Fig. 5.5

spre poziția de echilibru, însă de sens opus vectorului viteză. Cînd viteza corpului este egală cu zero, componenta tangențială a forței de greutate  $\vec{G}_t$  are valoare maximă, corpul mișcîndu-se spre poziția de echilibru.  $\vec{G}_t$  se manifestă ca o forță de revenire, sistemul cercetat îndeplinind condițiile necesare pentru realizarea mișcării oscilatorii.

Pentru obținerea ecuației mișcării acestui sistem oscilant, observăm că poziția corpului la orice moment de timp este descrisă de unghiul de abatere  $\alpha$  a firului de la verticală sau de lungimea arcului, de-a lungul căruia se produce mișcarea. Unghiul  $\alpha$  și lungimea arcului se vor considera pozitive dacă pendulul deviază spre dreapta de la poziția de echilibru și negative cînd deviază spre stînga. Din figura 5.5 se observă că proiecția forței de greutate pe direcția tangentă la traectoria mișcării corpului, cînd firul pendulului formează unghiul  $\alpha$  cu verticala, este

$$G_t = -G \sin \alpha = -mg \sin \alpha, \quad (5.8)$$

unde semnul „-” arată că  $G_t$  și  $\alpha$  (sau deplasarea) au întotdeauna orientări opuse. Dacă unghiul  $\alpha$  este mic, lungimea arcului  $\widehat{CA}$  este aproximativ egală cu lungimea coardei  $CA$ , care în acest caz reprezintă abaterea  $x$  de la poziția de echilibru. În această aproximatie sectorul de cerc  $OCA$ , descris de firul pendulului de lungime  $l$ , se poate approxima cu un triunghi dreptunghic (fig. 5.5), din care avem  $\sin \alpha = CA/l = x/l$  și relația (5.8) capătă aspectul

$$G_t \approx -\frac{mg}{l} x. \quad (5.9)$$

Pentru valori mici ale unghiului  $\alpha$  **forța de revenire**  $G_t$  este o forță cvasielastica și sistemul efectuează oscilații armonice. Conform legii a doua a lui Newton, în proiecții pe direcția cercetată  $G_t = ma_t$ , după introducerea relației (5.9) și simplificarea cu  $m$ , se obține ecuația

$$a_t + \omega^2 x = 0, \quad (5.10)$$

unde

$$\omega^2 = g/l. \quad (5.11)$$

De menționat că ecuația (5.10) este valabilă numai pentru unghiuri mici ( $\alpha \leq 15^\circ$ ), cînd valoarea funcției „sinus” este aproximativ egală cu valoarea unghiului exprimată în radiani. Într-adevăr, dacă  $\alpha \leq 15^\circ$ , atunci deoseberea dintre valorile  $\alpha$  și  $\sin \alpha$  este mai mică decît 1%. Este evident că pentru unghiuri mai mari oscilațiile pendulului cercetat nu vor mai fi armonice, întrucît forța de revenire nu mai este cvasielastica.

S-a obținut un rezultat excepțional: **ecuația mișcării, atât în cazul pendulului elastic, cât și al celui gravitațional, este aceeași. Se deosebește numai constanta  $\omega$ , care depinde în fiecare caz de proprietățile sistemului oscilant studiat.** Aceasta înseamnă că abaterea de la poziția de echilibru în ambele cazuri se modifică în timp după aceeași lege, chiar dacă forțele care determină caracterul acestor mișcări au natură fizică diferită: la pendulul elastic – rezultanta forțelor elastică și de greutate, iar la cel gravitațional – rezultanta forțelor de greutate și de tensiune a firului.

Ecuația de forma (5.6) sau (5.10) este aparent foarte simplă, însă rezolvarea ei este destul de complicată și nu se încadrează în programa de liceu. Totodată, anume soluția ei, care reprezintă legea mișcării oscilatorii, ne va permite studiul detaliat al acestei mișcări. În cele ce urmează, vom căuta soluția ecuației oscilatorului liniar armonic, pornind de la rezultate experimentale.

### c. Legea mișcării oscilatorii armonice

Abaterea oscilatorului de la poziția de echilibru în funcție de timp (**legea mișcării oscilatorii**) poate fi studiată ușor cu ajutorul **oscilogramelor** obținute experimental. **Oscilograma** (de la lat. *oscillum* „oscilație” și gr. *gramma*, „scriere”) constituie reprezentarea grafică a legii mișcării oscilatorii. Cea mai simplă oscilogramă poate fi obținută dacă pe oscilator se fixează o mină de creion sau o penită, care

imprimă mișcarea lui pe o coală de hîrtie ce se deplasează cu viteză constantă (fig. 5.6). Se observă că atât în cazul pendulului elastic (fig. 5.6, a), cât și al celui gravitațional (fig. 5.6, b), oscilograma are unul și același aspect, care permite să presupunem că funcția ce descrie legea mișcării oscilatorii este „sinus” sau „cosinus”. Această presupunere se confirmă cu ajutorul următoarei experiențe, ce demonstrează legătura dintre mișcarea circulară uniformă și mișcarea oscilatorie.

Considerăm un disc de rază  $A$ , la marginea căruia, pe obadă, este fixată o tijă cu bila  $b$  la capăt (fig. 5.7). Cu ajutorul motorului  $M$  discul, împreună cu bila  $b$ , este pus într-o mișcare uniformă de rotație. Dacă această instalație se iluminează cu un fascicul de lumină din stînga, paralel discului, atunci pe ecranul  $E$  se observă mișcarea oscilatorie a proiecției (umbrei)  $p$  a bilei. În spațiul dintre disc și ecran plasăm un pendul gravitațional, care efectuează oscilații, avînd amplitudinea  $A$  egală cu raza discului, într-un plan paralel ecranului  $E$ , astfel încît ambele bile să intre proiectate pe acesta. Se poate găsi o astfel de viteză de rotație a discului, pentru care proiecțiile bilelor se suprapun, efectuînd pe ecran aceeași mișcare. Prin urmare, particularitățile mișcării oscilatorii pot fi studiate cu ajutorul mișcării proiecției unui oarecare punct al cercului pe unul din diametrele lui.

Admitem că punctul material  $M$  se mișcă uniform pe un cerc de rază  $A$  și efectuează o rotație completă în timpul  $t = T$ . În figura 5.8 cu  $M_1, M_2, \dots, M_7$  sunt notate pozițiile intermediare ale punctului material  $M$  în mișcarea sa de-a lungul cercului, iar cu  $M'_1, M'_2, \dots, M'_7$  – pozițiile intermediare ale proiecției coordonatei acestuia pe diametrul vertical în diferite intervale de timp. În calitate de origine a timpului se consideră momentul la care punctul material  $M$  se află pe diametrul orizontal. La un moment arbitrar de timp raza mobilă  $OM_1$  a cercului formează cu diametrul orizontal unghiul  $\varphi$  și din

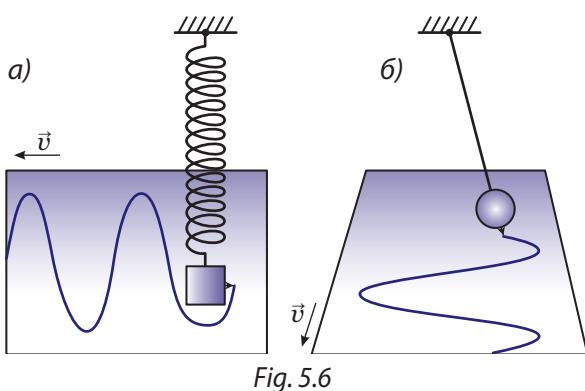


Fig. 5.6

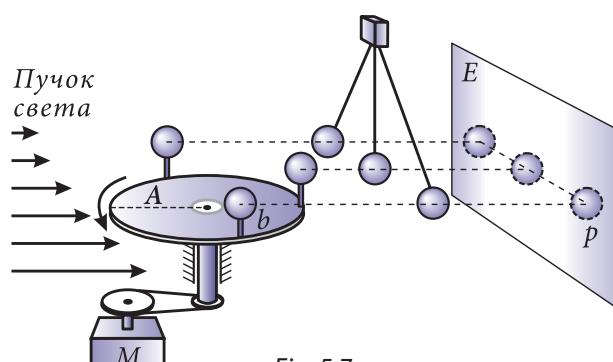


Fig. 5.7

triunghiul dreptunghic  $OP_1M_1$  (fig. 5.8) proiecția coordonatei punctului  $M_1$  pe diametrul vertical (pe ecranul  $E$ ) este

$$y = A \sin \varphi.$$

Unghiul  $\varphi$  este cu atât mai mare, cu cât durata timpului de la începutul mișcării și viteza de rotație sănt mai mari. În cazul mișcării circular uniforme, mărimea fizică ce caracterizează rapiditatea variației unghiului  $\varphi$  este numită **viteză unghiulară**, fiind definită prin relația

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (5.12)$$

Dacă punctul material  $M$  face o rotație completă, atunci  $\Delta\varphi = 2\pi$ ,  $\Delta t = T$  – perioada de rotație și din (5.12) se obține legătura dintre viteza unghiulară și perioada de rotație sau frecvență:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (5.13)$$

Mărimea fizică  $\omega$  are o cu totul altă semnificație în cazul mișcării oscilatorii pe care o efectuează proiecția coordonatei punctului material  $M$  sau oricare alt corp. Într-adevăr, în decursul mișcării oscilatorii corpurile se deplasează în jurul unei poziții fixe a echilibrului stabil și nu se mai poate vorbi despre mișcarea de rotație. După cum se observă din (5.13), în SI unitatea pentru  $\omega$  este  $s^{-1}$ , deci are semnificația unei frecvențe. Din această cauză în teoria oscilațiilor  $\omega$  este numită **frecvență ciclică** sau **pulsărie**. Dacă frecvența  $\nu$  arată cîte oscilații face corpul într-o secundă, atunci pulsăria  $\omega$  reprezintă numărul de oscilații efectuate de oscilator în decursul a  $(2\pi)s$ .

Deoarece în exemplul considerat (fig. 5.8) valorile unghiului și momentului de timp inițiale sănt nule, din (5.12) rezultă  $\varphi = \omega t$  și pentru coordonata proiecției punctului  $M_1$  obținem

$$y = A \sin \omega t. \quad (5.14)$$

Ecuația (5.14) caracterizează mișcarea proiecției punctului material  $M$  pe ecranul  $E$  și constituie legea mișcării oscilatorii a acestieia, reprezentată grafic în figura 5.8 prin dependența  $y(t)$ . Întrucît bila pendulului gravitațional și proiecția celei fixate pe disc (fig. 5.7) realizează una și aceeași mișcare, ecuația menționată reprezintă legea mișcării oscilatorii; prin urmare, constituie o soluție a ecuației oscilatorului liniar armonic (5.6). Funcțiile „sinus” și „cosinus” sănt numite armonice, deci legea mișcării oscilatorii este o lege armonică.

Oscilațiile descrise de ecuația (5.14) se deosebesc numai prin condițiile inițiale. De exemplu, dacă un pendul ce se află inițial în poziția de echilibru ( $x = 0$ ) este pus în mișcare sub acțiunea unei lovitură de scurtă durată, imprimându-i-se o viteză inițială în sensul pozitiv, atunci mișcarea lui va avea loc după legea  $x = A \sin \omega t$ , iar dacă același pendul la momentul inițial este eliberat din poziția de abatere maximă ( $x = A$ ), atunci legea mișcării este  $x = A \cos \omega t = A \sin (\omega t + \pi/2)$ .

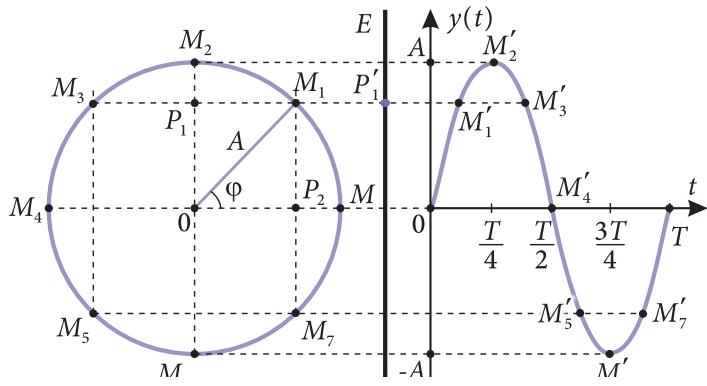


Fig. 5.8

Oscilatorul însă poate începe mișcarea și dintr-o poziție arbitrară situată între cele de echilibru sau de abatere maximă. În asemenea cazuri, la momentul  $t = 0$  argumentul funcției „sinus” sau „cosinus” este diferit de 0 sau  $\pi/2$  și ia valori arbitrate. Așadar, în funcție de condițiile inițiale, legea mișcării oscilatorului liniar armonic are aspectul

$$x = A \sin (\omega t + \varphi_0) \quad (5.15, a)$$

sau

$$x = A \cos (\omega t + \varphi_0), \quad (5.15, b)$$

unde  $\varphi_0$  se măsoară în *radiani* și poate lua valori atât pozitive și negative, cât și egale cu zero. Este evident că cele două relații pentru legea mișcării sunt absolut echivalente și se pot utiliza în egală măsură.

#### d. Caracteristicile momentane ale oscilațiilor armonice

Amplitudinea  $A$ , perioada  $T$  și frecvența  $v$ , introduse pentru descrierea mișcării oscilatorii, nu permit să spune în ce stare se află oscilatorul la momentul de timp dat și în care sens se mișcă. Pentru aceasta vom introduce niște mărimi noi ce caracterizează starea momentană a sistemului oscilant, utilizând în acest scop legea mișcării (5.15), obținută mai sus.

**Mărimea  $x$  ce caracterizează poziția oscilatorului la momentul de timp ales în raport cu starea de echilibru se numește elongație.**

Din (5.15) se observă că amplitudinea  $A$  este numeric egală cu valoarea maximă a elongației, adică

$$A = |x_{\max}|.$$

O altă caracteristică importantă a sistemului oscilant este **faza** oscilației.

**Argumentul funcției ce descrie oscilația și determină coordonata, viteza și alte mărimi ce caracterizează mișcarea oscilatorului la momentul dat al timpului se numește fază.**

$$\varphi = \omega t + \varphi_0,$$

unde  $\varphi_0$  este **faza inițială** a oscilației și corespunde elongației oscilatorului la momentul de timp  $t = 0$ .

Deoarece mișcarea oscilatorie este periodică, adică  $x(t + T) = x(t)$ , reiese că  $A \sin [\omega(t + T) + \varphi_0] = A \sin (\omega t + \varphi_0)$ . Funcțiile „sinus” sau „cosinus” au perioada  $2\pi$  și în intervalul de timp de la  $t$  pînă la  $t + T$  egal cu o perioadă, faza oscilației se modifică cu  $2\pi$ , adică  $\omega(t + T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi$  sau  $\omega T = 2\pi$ , de unde rezultă relația de legătură dintre perioada oscilației  $T$  și pulsația  $\omega$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Așadar, faza oscilației capătă aspectul

$$\varphi = 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0. \quad (5.16)$$

Din (5.16) se observă că faza oscilației depinde de timp, dar este independentă de scara aleasă pentru măsurarea lui, deoarece se exprimă prin timpul relativ  $t/T$ . Cu alte cuvinte, pentru fiecare sistem oscilant există un „etalon al timpului” propriu, egal cu perioada oscilațiilor. Fiecarui interval de timp exprimat în fracții de perioadă îi corespunde o valoare a fazei, exprimată în radiani, adică **faza reprezintă un echivalent unghiular al timpului**.

Faza permite să se facă deosebirea dintre două oscilații, care se produc cu aceeași perioadă și amplitudine.

Dacă pentru două oscilații se vor lua aceleași condiții initiale de măsurare a fazei, atunci deosebirea dintre ele se poate exprima prin **diferența de fază (defazajul)**  $\Delta\varphi$ . Din (5.16) se observă că două oscilații caracterizate de aceeași perioadă (frecvență) vor avea permanent același defazaj. În acest caz, două oscilații sunt în **concordanță de fază** sau **sincrone**, dacă  $\Delta\varphi = 0$ , și în **opozitie de fază** sau **asincrone**, dacă  $\Delta\varphi = \pi$ .

Starea momentană a oscilatorului se mai caracterizează prin **viteză și accelerație de oscilație**. Pentru obținerea legilor de variație a vitezei și accelerației în funcție de timp, vom utiliza reprezentarea schematică (fig. 5.9) a experimentului ilustrat în *figura 5.7*.

Punctul material  $M$  în mișcarea sa pe cerc este caracterizat de vectorii viteza  $\vec{v}_M$  și accelerația centripetă  $\vec{a}_M$  (fig. 5.9), ale căror module se exprimă conform relației (1.45) prin pulsătia  $\omega$  (amintim că raza cercului a fost notată cu  $A$ ). Este evident că proiecțiile vectorilor  $\vec{v}_M$  și  $\vec{a}_M$  pe axa de coordonate  $Oy$  (fig. 5.9) vor caracteriza, respectiv, viteza și accelerația de oscilație a proiecției  $M'$  a punctului material  $M$  și, totodată, a oscilatorului liniar armonic (în cazul experienței noastre – a pendulului gravitațional).

Din triunghiurile dreptunghice evidențiate în *figura 5.9*, pentru proiecțiile vectorilor  $\vec{v}_M$  și  $\vec{a}_M$  se obțin

$$v_y = v_M \cos \omega t = A\omega \cos \omega t,$$

$$a_y = -a_M \sin \omega t = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

Acstea relații reprezintă legile vitezei și accelerației de oscilație a unui oscilator liniar armonic într-un caz particular, cind faza inițială este nulă (la momentul  $t = 0$  punctul material se află în poziția  $M_0$ ). În cazul general, cind faza inițială este diferită de zero (punctul material  $M_0$  se află într-o poziție arbitrară de pe circumferință), legile respective au forma

$$v_y = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (5.17)$$

$$a_y = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (5.18)$$

Se observă că atât viteza, cât și accelerația de oscilație variază în timp ca și elongația (5.15, a) după o anumită lege armonică. Ca și elongația, ele sunt caracterizate de valori maxime sau de valori de amplitudine. Din (5.17) și (5.18) reiese că acestea se obțin, respectiv, cind  $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$  și  $\sin(\omega t + \varphi_0) = -1$ , adică

$$v_{y, \max} = A\omega, \text{ iar } a_{y, \max} = -A\omega^2.$$

### e.º Reprezentarea mișcării oscilatorii prin fazori

Cea mai frecvent întâlnită și utilizată reprezentare a oricărei mișcări, inclusiv a celei oscilatorii, este **reprezentarea grafică**. Se dau valori argumentului funcției care reprezintă legea mișcării și de fiecare dată se calculează valoarea ei. Rezultatele obținute se notează pe un grafic la o scară anumită, în scopul unei vizualizări optime a acestora.

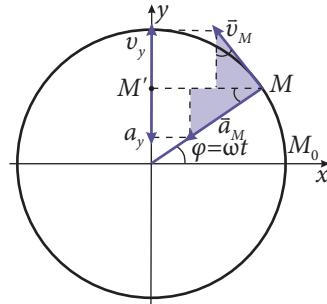


Fig. 5.9

O altă reprezentare mai neobișnuită, dar în anumite cazuri mult mai eficientă, o constituie **reprezentarea prin fazori**. Oscilația descrisă de ecuația (5.15) se asociază cu un vector rotitor  $\vec{A}$  în planul  $xOy$ , numit **fazor** și caracterizat de următoarele proprietăți: are modulul egal cu amplitudinea oscilației reprezentate; este orientat astfel, ca unghiul format cu o direcție aleasă arbitrar (de exemplu, axa  $Ox$ ) la orice moment de timp să fie egal cu faza inițială a oscilației (fig. 5.10). Deoarece unghiul dintre fazor și axa  $Ox$  crește liniar în timp, fazorul se rotește în planul  $xOy$  în sens trigonometric, având viteza unghiulară egală cu pulsăția  $\omega_0$  a oscilației reprezentate. Remarcăm coincidența proiecției vectorului  $\vec{A}$  pe una din axele  $Ox$  sau  $Oy$  cu ecuația pentru legea mișării, exprimată prin funcțiile „cosinus” sau „sinus”.

### f. Dependența pulsăției și perioadei oscilațiilor armonice libere de proprietățile sistemului

În par. 5.2, a, b s-a constatat că ecuația oscilatorului liniar armonic conține o constantă care depinde de proprietățile sistemului oscilant studiat. Din analiza dimensională a acestei constante rezultă că ea are semnificația pătratului pulsăției oscilațiilor. Într-adevăr, și în cazul pendulului elastic

$$[\omega^2] = \frac{[k]}{[m]} = \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \text{kg} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{kg}} = \frac{1}{\text{s}^2}$$

și al celui gravitațional

$$[\omega^2] = \frac{[g]}{[m]} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}} = \frac{1}{\text{s}^2}$$

se obține aceeași dimensiune:  $\text{s}^{-2}$ .

Mărimea  $\omega$  a fost numită **pulsăție** sau **frecvență proprie** a oscilatorului.

Așadar, frecvența proprie a pendulului elastic se exprimă prin relația

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (5.19)$$

care rezultă din (5.7), iar dacă introducem această relație în (5.13), atunci pentru perioada pendulului elastic se obține

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (5.20)$$

Perioada oscilațiilor este cu atât mai mică, cu cât coeficientul de elasticitate al resortului este mai mare și cu atât mai mare, cu cât masa corpului suspendat este mai mare. Un resort caracterizat de un coeficient de elasticitate mare imprimă corpului o accelerație mare, adică o variație mai rapidă a vitezei, iar în cazul unui corp de masă mai mare variația vitezei este mai lentă.

Pentru pendulul gravitațional (matematic) frecvența proprie se determină din relația (5.11):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (5.21)$$

iar perioada oscilațiilor este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.22)$$

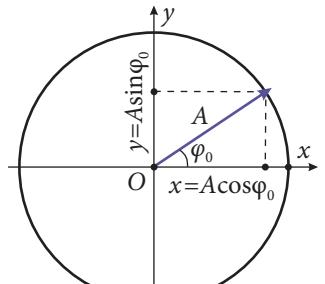


Fig. 5.10

La amplitudini mici perioada oscilațiilor pendulelor elastic și gravitațional nu depinde de valoarea acesteia. Pentru pendulul gravitațional acest fapt a fost stabilit pentru întâia dată în anul 1583 de către Galileo Galilei în urma observărilor asupra unui candelabru din catedrala de la Pisa. În baza acestei descoperiri, Galilei a propus utilizarea oscilațiilor pentru măsurarea intervalelor de timp și a emis ideea construirii primului ceas, care a fost confectionat mai tîrziu de către elevul său, Vincentzo Viviani (1622–1703). Însă construcția contemporană a ceasului cu pendul a fost realizată de către Christian Huygens în anul 1673, cînd acesta a stabilit pentru prima dată formula pentru perioada oscilațiilor pendulului gravitațional (5.22) și a verificat-o experimental.

### g. Energia oscilatorului liniar armonic

Să analizăm mișcarea oscilatorie din punct de vedere energetic. Oscilatorul scos din poziția de echilibru posedă energia potențială

$$E_p = \frac{kx^2}{2}, \quad (5.23)$$

unde  $x$  este elongația (amintim că ea are ca origine poziția de echilibru), iar  $k$  – coeficientul de elasticitate al resortului în cazul pendulului elastic sau coeficientul de proporționalitate din relația pentru forță cvasielastică de revenire în cazul altor oscilatori armonici. De exemplu, în cazul pendulului gravitațional de lungime  $l$ , abătut la înălțimea  $h$  față de poziția de echilibru, energia potențială este  $E_p = mgh$  și pentru oscilații mici (unghiul de abatere  $\varphi$  este mic) se aduce la forma (5.23), avînd valoarea coeficientului  $k = mg/l$ , care rezultă din (5.9).

În starea inițială, cînd  $x = A$ , sistemul oscilant posedă numai energie potențială:

$$E = E_p^{\max} = \frac{kA^2}{2}. \quad (5.24)$$

Rezultă că **energia totală este proporțională cu pătratul amplitudinii oscilațiilor**.

La deplasarea oscilatorului spre poziția de echilibru elongația se micșorează, iar viteza lui crește. Aceasta înseamnă că energia potențială a oscilatorului se micșorează, însă concomitent el va avea și energie cinetică:

$$E_c = \frac{mv_x^2}{2}, \quad (5.25)$$

care crește datorită măririi vitezei sale. Cînd oscilatorul ajunge în poziția de echilibru, unde  $x = 0$ , viteza este maximă, iar energia lui potențială devine egală cu zero și energia cinetică în această poziție trebuie să coincidă cu energia totală:

$$E_c^{\max} = \frac{mv_{x,\max}^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = E.$$

Din această relație reiese că viteza maximă a oscilatorului depinde de amplitudinea lui și are valoarea

$$v_{x,\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} A = \omega A. \quad (5.26)$$

Așadar, în decursul unui sfert de perioadă are loc o transformare completă a energiei potențiale în energie cinetică. Este evident că datorită periodicității mișcării oscilatorii în decursul unei perioade energia potențială se va transforma în energie cinetică și invers de patru ori.

Într-o stare intermediară, între poziția de echilibru și de abatere maximă de la aceasta, oscilatorul posedă atât energie potențială, cât și cinetică. Energia mecanică totală în această stare este dată de relația:

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{x,\max}^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv_x^2}{2}, \quad (5.27)$$

care exprimă legea conservării energiei mecanice a oscilatorului studiat.

În figura 5.11 este reprezentată dependența energiei potențiale (5.23) în funcție de elongație. Linia orizontală corespunde valorii determinate de energia totală a oscilatorului, iar distanța dintre această linie și curba energiei potențiale este egală cu energia cinetică, care devine egală cu zero în punctele extreme  $x = \pm A$ . Se observă că în poziția de echilibru ( $x = 0$ ) energia potențială este minimă. Deoarece forma acestei dependențe este asemănătoare cu o groapă, se spune că oscilatorul în stare de echilibru se află la fundul unei **gropi de potențial**. Dacă oscilatorul este scos din această stare și lăsat liber, atunci el tinde să revină la poziția de echilibru și începe mișcarea oscilatorie.

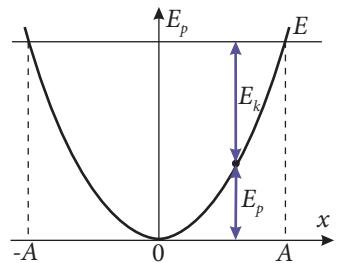


Fig. 5.11

## PROBLEME REZOLVATE

1. Un oscilator armonic liniar efectuează oscilații în conformitate cu legea

$$x = 0,02 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (m).}$$

Determinați amplitudinea, perioada și faza inițială a oscilațiilor. Care este poziția inițială din care începe mișcarea oscilatorie?

### REZOLVARE

**Se dă:**

$$x = 0,02 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (m)}$$

$$A - ?, T - ?, \varphi_0 - ?, x_0 - ?$$

Din comparația legii mișcării dată în condițiile problemei cu forma generală (5.15, a) rezultă

$$A = 0,02 \text{ m; } \varphi_0 = (\pi/6) \text{ rad} = 30^\circ; \omega = (\pi/3) \text{ s}^{-1}.$$

Perioada oscilațiilor este  $T = 2\pi/\omega = 6$  s. Poziția inițială a oscilatorului se determină din legea mișcării la momentul  $t = 0$ . Obținem  $x_0 = 0,02 \sin(\pi/6) = 0,01$  m.

2. La capătul unui resort este suspendat un corp mic cu masa de 0,5 kg, care produce o alungire de 0,025 m în starea de echilibru. Corpul este scos din această stare în direcția verticală și lăsat liber, resortul alungindu-se încă cu 0,01 m. Considerînd accelerarea gravitațională egală cu  $10 \text{ m/s}^2$  și neglijînd forțele de rezistență, determinați:

- perioada, frecvența și pulsația oscilațiilor;
- valoarea maximă a vitezei de oscilație și cea a forței ce acționează asupra corpului;
- legea mișcării oscilatorii;
- tempul în care corpul parcurge distanța de la  $A/2$  pînă la  $\sqrt{3}A/2$ , unde  $A$  este amplitudinea oscilațiilor;
- energiile cinetică, potențială și totală la momentul abaterii corpului de la poziția de echilibru cu  $x = \pm A/2$ .

## REZOLVARE

**Se dă:**

$$\begin{aligned} m &= 0,5 \text{ kg}, \\ x_0 &= 0,025 \text{ m}, \\ A &= 0,01 \text{ m}, \\ g &= 10 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

- a)  $T - ?$ ,  $v - ?$ ,  $\omega - ?$ ;
- b)  $v_m - ?$ ,  $F_m - ?$ ;
- c)  $x(t)$ ; d)  $\Delta t - ?$ ;
- e)  $E_c - ?$ ,  $E_p - ?$ ,  $E - ?$

a) Pentru determinarea perioadei pendulului elastic vom folosi expresia (5.20). Constanta de elasticitate se obține din condiția că resortul aflat în poziția de echilibru este deja alungit cu  $x_0$ , adică  $G = kx_0$ . Rezultă  $k = G/x_0 = mg/x_0$  și pentru perioadă avem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{x_0}{g}} = 0,314 \text{ s}.$$

Folosind relațiile (5.2) și (5.13) pentru frecvență și pulsație, obținem, respectiv:

$$v \approx 3,85 \text{ Hz} \quad \text{și} \quad \omega = 20 \text{ s}^{-1}.$$

- b) Valoarea maximă a vitezei se calculează folosind relația (5.26), în care  $\omega$  este frecvența proprie (pulsăția) calculată mai sus. Forța care acționează asupra corpului este maximă atunci cînd abaterea este maximă, adică egală cu amplitudinea. Astfel,

$$F_m = kA = mgA/x_0.$$

Introducînd valorile numerice, obținem

$$v_m = \omega A = 0,2 \text{ m/s}; F_m = 2 \text{ N}.$$

- c) Din condițiile problemei reiese că mișcarea oscilatorie începe din punctul de abatere maximă în jos, de aceea faza inițială  $\varphi_0$  este egală cu zero. Dacă orientăm axa  $Ox$  ca în figura 5.12, atunci la momentul  $t = 0$  elongația  $x = A$ . Rezultă că din cele două forme (5.15) ale legii mișcării trebuie să alegem (5.15, b), care satisfacă condițiile inițiale. Introducînd valorile numerice, avem

$$x(t) = 0,01 \cos 20t \text{ (m)}.$$

- d) La momentul de timp  $t_1$  elongația este  $x = A/2$  și din (5.15, b) obținem  $\cos \omega t_1 = 1/2$ , de unde

$$\omega t_1 = \pm \arccos(1/2) + 2n\pi = \pm\pi/3 + 2n\pi.$$

Analogic se obține și pentru momentul de timp  $t_2$ :  $\omega t_2 = \pm\pi/6 + 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Rezultă  $\omega\Delta t = \pm\pi/6$ . Este evident că dintre cele două soluții are sens fizic numai cea pozitivă. Așadar,  $\Delta t = \pi/(6\omega) \approx 0,026 \text{ s}$ .

- e) Energia totală a oscilatorului este proporțională cu pătratul amplitudinii și nu depinde de poziția lui. Astfel,  $E = kA^2/2 = mgA^2/(2x_0) = 10 \text{ mJ}$ . În poziția ce corespunde elongației  $x = \pm A/2$ , energia potențială este  $E_p = kx^2/2 = kA^2/8 = E/4 = 2,5 \text{ mJ}$ , iar cea cinetică:  $E_c = E - E_p = 3E/4 = 7,5 \text{ mJ}$ .

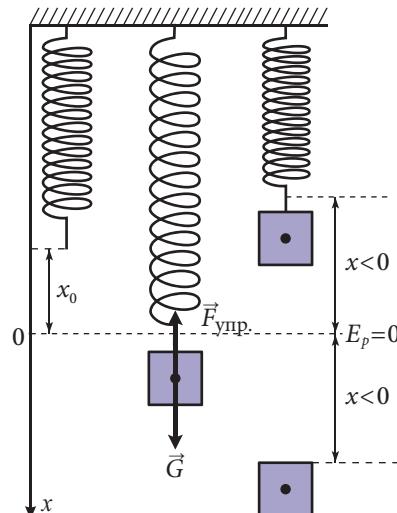


Fig. 5.12

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Descrieți modelul oscilatorului liniar armonic. Care sunt particularitățile lui? Propuneți exemple.
2. Ce reprezintă pendulul elastic? Dar cel gravitațional?
3. Care este forța de revenire în cazul pendulului gravitațional?
4. Ce reprezintă oscilograma? Descrieți modul de obținere a celei mai simple oscilograme.
5. Care este legătura dintre mișcarea uniformă de rotație a corpului pe un cerc și mișcarea oscilatorie?
6. Ce reprezintă pulsăția și cum se exprimă ea prin perioadă și frecvență?
7. Care sunt caracteristicile momentane ale oscilațiilor armonice?

8. Care este legea mișcării oscilatorii armonice? Explicați semnificația termenilor din această ecuație.
9. Ce reprezintă defazajul? Când două mișcări oscilatorii sunt în concordanță de fază? Dar în opoziție de fază? Propuneți exemple.
10. Care sunt legile vitezei și accelerării de oscilație a unui oscilator liniar armonic?
11. Ce reprezintă fazorul? Descrieți modul de reprezentare a oscilațiilor prin fazori.
12. Cum depind pulsația și perioada oscilațiilor armonice de proprietățile sistemului oscilant?
13. Care este energia totală a oscilatorului liniar armonic? În care poziții energia cinetică și cea potențială au valori egale cu cea totală?
14. Un corp cu masa de 1 kg este prins de capătul unui resort, al cărui coeficient de elasticitate este egal cu 10 N/m. La momentul  $t = 0$ , corpul se află la o distanță de 20 cm față de poziția de echilibru. Determinați amplitudinea, perioada și faza inițială a oscilațiilor produse. Scrieți legea  $x(t)$  a mișcării oscilatorii și reprezentați-o grafic.
15. Un corp de masă  $m$ , legat la capătul unui resort, oscilează cu frecvență  $v = 0,6$  Hz. Determinați masa acestui corp, dacă se cunoaște că la legarea încă a unui corp de masă  $m_1 = 500$  g sistemul obținut oscilează cu perioada  $T_1 = 2,5$  s.
16. Care trebuie să fie lungimea unui pendul gravitațional pentru ca perioada lui să fie egală cu 1 s?
17. Distanța dintre pozițiile extreme ale mișcării oscilatorii a unui pendul elastic este de 8 cm. Determinați perioada oscilațiilor pendulului, dacă viteza lui la momentul traversării poziției de echilibru este de 16 cm/s.
18. O viespe cu masa de 0,6 g a nimerit în plasa unui păianjen. Determinați constanta de elasticitate a plasei, dacă ea oscilează cu frecvență de  $\sqrt{10}$  Hz. Care va fi frecvența de oscilație a plasei, dacă în ea va nimeri o muscă cu masa de 0,15 g?

## 5.3° COMPUNEREA OSCILAȚIILOR COLINIARE

Deseori în practică se întâlnesc situații cînd un corp este supus acțiunii concomitențe a mai multor forțe, care, acționînd separat, ar provoca fiecare o mișcare oscilatorie individuală. În asemenea situații mișcarea oscilatorie rezultantă a corpului va fi mult mai complicată și, de regulă, nearmonică. În cele ce urmează vom analiza o situație mai simplă, cînd este valabil **principiul suprapunerii oscilațiilor mici**, care este o consecință directă a principiului suprapunerii forțelor (vezi par. 2.2, e):

**Elongația oscilației unui corp supus mai multor mișcări oscilatorii este egală cu suma algebraică a elongațiilor mișcărilor componente.**

Considerăm un caz particular, cînd mișările oscilatorii componente au loc pe aceeași direcție, adică sunt paralele, iar pulsațiiile fiind egale. Fie două oscilații descrise de ecuațiile

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}), \\x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}),\end{aligned}\tag{5.28}$$

unde  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  și  $\varphi_{01}$ ,  $\varphi_{02}$  sunt, respectiv, elongațiile, amplitudinile și fazele inițiale ale celor două oscilații componente. Dacă corpul participă simultan în cele două mișcări oscilatorii (5.28), atunci, conform principiului oscilațiilor mici, oscilația rezultantă are elongația

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi),\tag{5.29}$$

unde  $A$  și  $\varphi$  sunt amplitudinea și faza inițială ale oscilației rezultante, care trebuie determinate. Pentru aceasta vom aplica reprezentarea oscilațiilor prin fazori. Pe planul  $xOy$  se construiesc fazorii  $\vec{A}_1$  și  $\vec{A}_2$  cu originea comună în  $O$ , avînd modulele  $A_1$ ,  $A_2$  și fiind orientați

față de axa  $Ox$ , respectiv, sub unghiurile  $\varphi_{01}$  și  $\varphi_{02}$  (fig. 5.13). Atunci compunerea celor două oscilații este echivalentă cu adunarea vectorilor  $\vec{A}_1$  și  $\vec{A}_2$ , care se poate face aplicând regula paralelogramului (vezi par. 1.4, a)). Diagonala paralelogramului construit pe vectorii  $\vec{A}_1$  și  $\vec{A}_2$  este vectorul sumă  $\vec{A}$ , care pornește din aceeași origine comună  $O$ . El reprezintă, totodată, și fazorul  $\vec{A}$ , ce descrie oscilația rezultantă, iar unghiul  $\varphi$  dintre vectorul  $\vec{A}$  și axa orizontală – faza inițială a acesteia. Reprezentarea grafică obținută (fig. 5.13) este numită **diagramă fazorială**. Se observă că unghiul dintre fazori nu se modifică în timp, întrucât vitezele unghiulare ale fazorilor sunt egale.

Amplitudinea oscilației rezultante se obține folosind teorema cosinusurilor în triunghiul  $OPF$ . Într-adevăr, conform acestei teoreme  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \alpha$ . Din figura 5.13 se observă că  $\alpha = \pi - (\varphi_{02} - \varphi_{01})$ , iar folosind formulele de reducere, avem  $\cos [\pi - (\varphi_{02} - \varphi_{01})] = -\cos (\varphi_{02} - \varphi_{01})$ . Așadar,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_{02} - \varphi_{01}). \quad (5.30)$$

Faza inițială a oscilației rezultante se obține ușor din triunghiul dreptunghic  $ONF$ :  $\operatorname{tg} \varphi = NF/ON = (NQ + QF)/(OM + MN)$ . Din  $\Delta OMP$  și  $\Delta PQF$  avem  $OM = A_1 \cos \varphi_{01}$ ,  $NQ \equiv MP = A_1 \sin \varphi_{01}$ ,  $MN \equiv PQ = A_2 \cos \varphi_{02}$ ,  $QF = A_2 \sin \varphi_{02}$ .

Astfel

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (5.31)$$

De menționat că fazorul care reprezintă oscilația rezultantă se rotește împreună cu fazorii asociați oscilațiilor componente, cu una și aceeași viteză unghiulară  $\omega$ . Amplitudinea oscilației rezultante depinde la fiecare moment de timp de unghiul dintre fazorii celor două oscilații, care este egal cu defazajul  $\Delta\varphi$  dintre acestea:

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}.$$

Dacă oscilațiile componente sunt în concordanță de fază, atunci  $\Delta\varphi = 2k\pi$ , unde  $k \in \mathbb{N}$  și  $\cos (\pm 2k\pi) = \cos (2k\pi) = 1$  și din (5.30) reiese că amplitudinea oscilației rezultante  $A = A_1 + A_2$  este maximă. Dacă oscilațiile componente se vor produce în opoziție de fază ( $\Delta\varphi = \pm(2k + 1)\pi$ ,  $\cos [\pm(2k + 1)\pi] = -1$ ), amplitudinea  $A = |A_1 - A_2|$  este minimă.

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Care este esența principiului superpoziției micilor oscilații?
2. Cum se construiește o diagramă fazorială?
3. Cum depinde amplitudinea oscilației rezultante de defazajul oscilațiilor componente?
4. Un punct material execută o mișcare oscilatorie armonică, compusă din două oscilații ce se produc pe aceeași direcție, fiind descrise de ecuațiile:  $x_1 = 5 \sin (2\pi t + \pi/3)$  (cm) și  $x_2 = 3 \sin (2\pi t + 2\pi/3)$  (cm). Scrieți ecuația oscilației rezultante.
5. Un punct material participă la o mișcare oscilatorie, obținută prin suprapunerea a două oscilații de aceeași direcție:  $x_1 = \sin 2t$  (cm) și  $x_2 = 2 \cos 2t$  (cm). Determinați amplitudinea și faza inițială a oscilației rezultante.

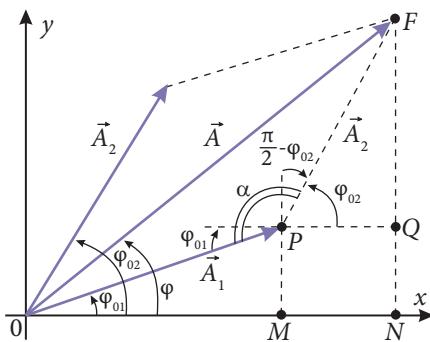


Fig. 5.13

## 5.4<sup>o</sup> OSCILAȚII AMORTIZATE ȘI FORȚATE. REZONANȚA

Oscilațiile proprii, studiate anterior, cînd forțele de rezistență nu s-au luat în considerare, prezintă o idealizare a oscilațiilor libere. În sistemele reale mișcarea întotdeauna are loc într-un mediu care opune o anumită rezistență și pentru îngingerea ei se consumă o parte din energia sistemului oscilant. Întrucînt energia oscilatorului este direct proporțională cu pătratul amplitudinii oscilațiilor, rezultă că odată cu diminuarea ei, se micșorează amplitudinea lor. Cu cât forțele de rezistență sunt mai mari, cu atât mai multă energie se consumă pentru îngingerea acestora și cu atât mai repede se va micșora amplitudinea oscilațiilor, ajungînd la un moment dat pînă la dispariția lor. În figura 5.14 sunt prezentate două oscilograme ale unui oscilator real, de exemplu, a unui pendul elastic, oscilațiile căruia se produc în aer (a) și în lichid (b). Se observă că în aer, unde forțele de rezistență sunt mici, există un interval anumit de timp, în decursul căruia oscilațiile pot fi considerate aproximativ armonice. De multe ori însă, în diferite sisteme oscilante, forțele de rezistență sunt semnificative, iar înlăturarea lor, chiar și parțială, este imposibilă. În asemenea situații (fig. 5.14, b) amplitudinea oscilațiilor se micșorează repede, adică energia oscilatorului este disipată în exterior și mișcarea oscilatorie se „stinge”.

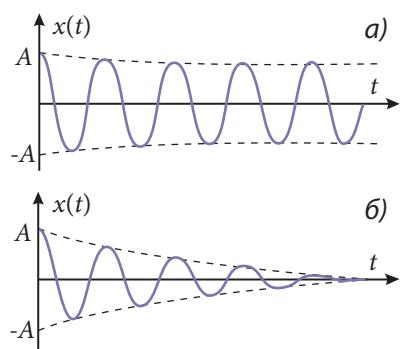


Fig. 5.14

### Oscilațiile a căror amplitudine se micșorează în timp, se numesc oscilații amortizate.

Sistemele oscilante studiate pînă acum erau acționate de o forță exterioară numai în scopul scoaterii lor din poziția de echilibru stabil, după care acțiunea ei înceta. În asemenea situații amplitudinea oscilațiilor permanent se micșora pînă la „stingerea” lor, adică pînă la disiparea completă a energiei transmise inițial. În practică însă deseori există situații, cînd forța exterioară acționează periodic, alimentînd continuu sistemul oscilant cu energie pentru menținerea aceleiași valori a amplitudinii oscilațiilor.

### Oscilațiile care se produc într-un sistem datorită acțiunii unei forțe periodice exterioare se numesc oscilații forțate.

Se constată experimental că amplitudinea oscilațiilor forțate este cu atât mai mare, cu cât frecvența forței exterioare este mai apropiată de frecvența proprie a sistemului.

### Fenomenul creșterii brusă a amplitudinii oscilațiilor forțate, cînd pulsăria forței exterioare ce acționează asupra sistemului oscilant se apropie de frecvența proprie a acestuia, se numește rezonanță.

Acest fenomen se poate explica mai simplu în baza analizei transferului de energie dintre exterior și sistemul oscilant. Este evident că fenomenul de rezonanță are loc atunci cînd există condiții favorabile pentru transferul energiei din exterior către sistem, adică în cazul în care acțiunea forței exterioare periodice se manifestă prin efectuarea

unui lucru mecanic pozitiv pe parcursul întregului ciclu al mișcării. Faptul acesta însă este posibil numai dacă forța exterioară acționează în concordanță de fază cu oscilațiile proprii ale sistemului, ceea ce se realizează cînd frecvența forței exterioare  $\Omega$  este egală cu cea proprie  $\omega$  a oscilatorului. Proiecția forței de rezistență și viteza oscilatorului au întotdeauna semne opuse. Din această cauză la rezonanță oscilațiile forței de rezistență sunt în opoziție de fază cu oscilațiile forței exterioare, deci lucru mecanic efectuat de fiecare dintre ele se compensează reciproc. În consecință, oscilatorul se accelerează numai pe seama forței cvasielastice din sistem și oscilațiile se produc cu frecvență proprie, care coincide cu pulsătia forței exterioare. Dacă  $\Omega \neq \omega$ , atunci pe unele porțiuni ale mișcării forța exterioară va efectua și lucru mecanic negativ, din care motiv amplitudinea oscilațiilor forțate se micșorează.

În figura 5.15 este prezentată dependența amplitudinii oscilațiilor forțate în funcție de pulsătia forței exterioare pentru diferite valori ale unui coeficient  $\beta$ , numit de amortizare, ce descrie forțele de rezistență din sistemul oscilant. Deoarece amplificarea acțiunii forțelor de rezistență conduce la creșterea lucrului mecanic al forței exterioare necesar pentru învingerea lor, amplitudinea de rezonanță se micșorează. Totodată, și pulsătia de rezonanță devine puțin mai mică decît frecvența proprie a sistemului oscilant.

Întrucît orice corp solid posedă proprietăți elastice, adică reprezintă un sistem oscilant caracterizat de o anumită frecvență proprie, fenomenul de rezonanță se poate manifesta în cele mai neobișnuite situații. Deseori din cauza rezonanței se pot prăbuși diferite construcții, se distrug mecanisme sau părți componente ale acestora etc. Pentru înlăturarea efectelor negative legate de rezonanță se iau măsuri speciale de evitare sau de micșorare a acțiunii fenomenului în cauză. În acest scop, se variază frecvența proprie a sistemului, pentru a evita coincidența cu pulsătia forței externe sau se majorează forțele de frecare din sistem, pentru micșorarea amplitudinii de rezonanță.

Fenomenul de rezonanță are o aplicare vastă în diferite domenii ale științei și tehnicii, mai ales în cazul oscilațiilor electromagnetice care vor fi studiate în clasa a 12-a. Acest fenomen stă la baza funcționării diferitor aparate și dispozitive în electronică și radiotehnică.

## ÎNTREBĂRI

1. Care oscilații se numesc amortizate?
2. Cum se explică micșorarea amplitudinii oscilațiilor din considerante energetice?
3. Care oscilații se numesc forțate?
4. Ce se numește rezonanță?
5. Cum se explică fenomenul de rezonanță în baza transferului de energie dintre exterior și sistemul oscilant?
6. Cum se manifestă amplificarea forțelor de rezistență asupra fenomenului de rezonanță?
7. Ce trebuie de întreprins pentru înlăturarea fenomenului de rezonanță, cînd acesta se manifestă dăunător?

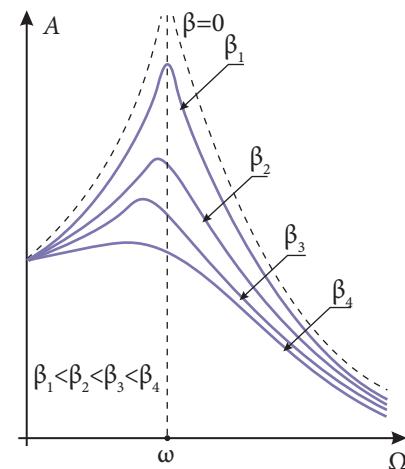


Fig. 5.15

## 5.5 PROPAGAREA MIȘCĂRII OSCILATORII. UNDE TRANSVERSALE ȘI UNDE LONGITUDINALE

Orice mediu solid, lichid sau gazos reprezintă în starea de echilibru o anumită amplasare a atomilor sau a moleculelor substanței în funcție de forțele de interacțiune dintre ele. O acțiune din exterior asupra unui punct din mediul dat se transmite de la o moleculă la alta prin intermediul forțelor intermoleculare, determinând o anumită deformare a acestui mediu. Dacă forța exterioară este mică, atunci deformația este elastică, adică moleculele revin la starea de echilibru sub acțiunea forțelor elastice. În acest caz atomii și moleculele pot fi considerate niște oscilatori liniari armonici legați între ei cu forțe de tip elastic. Acest model de substanță a fost numit **mediu elastic**, iar acțiunea exterioară asupra lui, prin care unul din oscilatori este scos din poziția de echilibru – **perturbație**. În *figura 5.16* este prezentat modelul unui mediu elastic unidimensional solid în care bilele reprezintă moleculele mediului, iar forțele elastice din resorturi substituie forțele intermoleculare ce acționează între ele.



Fig. 5.16

### I Propagarea perturbațiilor într-un mediu elastic se numește *undă elastică sau mecanică*.

În continuare vom analiza acțiunea perturbațiilor armonice (oscilațiilor sinusoidale) asupra mediilor elastice, a căror propagare va determina niște unde, de asemenea, armonice. În funcție de direcția în care se produce perturbația în raport cu direcția de propagare a ei, se deosebesc unde *transversale* și unde *longitudinale*.

### I Unda în care perturbația mediului se produce perpendicular pe direcția de propagare a ei se numește *undă transversală*.

Considerăm o coardă întinsă și excităm la un capăt o perturbație orientată perpendicular pe direcția ei. Dacă perturbația este o mișcare oscilatorie a capătului corzii cu perioada  $T$ , atunci de-a lungul ei se observă deplasarea oscilației inițiale, astfel încât fiecare porțiune a corzii efectuează una și aceeași mișcare oscilatorie, întârziată față de porțiunea precedență. Procesul de propagare a undelor transversale se explică ușor cu ajutorul modelului din *figura 5.16*. Într-adevăr, dacă prima bilă este deplasată transversal la o distanță oarecare de la poziția de echilibru, atunci ea, prin intermediul forțelor elastice, va antrena într-o mișcare similară și bila vecină, dar la o distanță mai mică, întârziată este reținută de următoarea. La rîndul ei, bila a două o antrenează în mișcare transversală pe a treia la o distanță și mai mică față de poziția de echilibru, procesul continuind pînă cînd forța elastică nu va mai fi în stare să depleteze următoarea bilă. După un sfert de perioadă, prima bilă începe mișcarea spre poziția de echilibru, iar a două mai continuă după inerție mișcarea de la această poziție pînă cînd atinge valoarea maximă, după care începe mișcarea în sens invers. Este evident că același comportament îl vor avea și celelalte bile.

Dacă perturbația inițială este întreținută, adică prima bilă efectuează o mișcare oscilato-

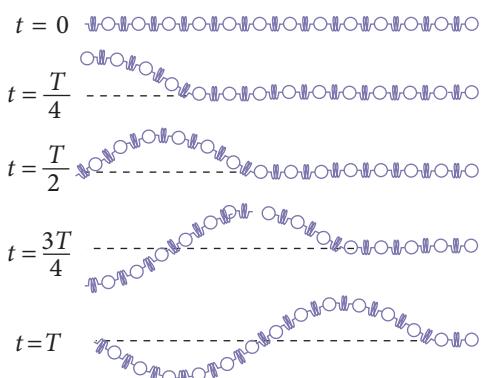


Fig. 5.17

rie cu perioada  $T$ , atunci procesul de antrenare în mișcare a următoarelor bile continuă aşa cum este indicat în *figura 5.17*.

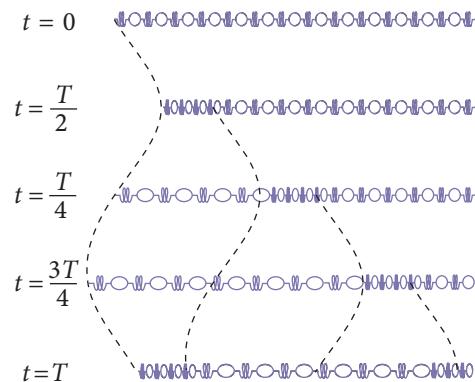
Undele elastice transversale se propagă numai în medii solide. Aceasta se datorează pozițiilor fixe ale particulelor din rețea cristalină și existenței forțelor de tip elastic între straturile ei. În lichide și gaze, datorită structurii lor interne, nu pot apărea forțe care ar restabili o deplasare transversală a particulelor. Din această cauză în mediile lichide și gazoase se propagă alt tip de unde, și anume: undele elastice longitudinale.

### **Unda în care perturbația mediului se produce colinar cu direcția de propagare a ei se numește *undă longitudinală*.**

Unda longitudinală se propagă și în mediile solide. Aceasta se observă foarte bine în cazul unui resort lung cu spirele echidistante în care se excită printr-o lovitură o perturbație de-a lungul lui. Drept rezultat al comprimării, se formează o îndesire de spire care se propagă de-a lungul resortului. Procesul de propagare a undei longitudinale se explică cu ajutorul același model din *figura 5.16*. Dacă perturbația longitudinală a primei bile constituie o oscilație armonică cu perioada  $T$ , atunci în cursul unei pătrimi de perioadă prima bilă ajunge în poziția maximă spre dreapta, antrenând în mișcare de același sens și alte bile, astfel formând o îndesire a lor. Cu cât perturbația este mai mare, cu atît mai multe bile vor fi antrenate în mișcare în acest timp. În următorul sfert de perioadă, cînd prima bilă începe mișcarea spre stînga, următoarea continuă după inerție mișcarea spre dreapta, pînă cînd ajunge la poziția de abatere maximă, după care își schimbă și ea sensul mișcării. Din cauza acestei întîrzieri de schimbare a sensului de mișcare, se formează o rărire a bilelor, însă, concomitent, îndesirea formată în primul sfert de perioadă se va transmite următoarelor bile. Astfel, propagarea undei longitudinale reprezintă „deplasarea” unei îndesiri, urmate de o rărire de puncte prin mediul solid, după cum este arătat în *figura 5.18*.

Procesul de propagare a undei elastice longitudinale în gaze este ilustrat în *figura 5.19*. La o mișcare bruscă a pistonului din cilindru, acesta modifică componenta vitezei moleculelor gazului, orientată de-a lungul cilindrului. Considerăm masele moleculelor aproximativ aceleași, iar ciocnirile absolut elastice și centrale (modelul gazului ideal). În urma interacțiunii, moleculele cu viteze relative mari se frînează brusc, datorită transmiterii impulsului lor moleculelor cu care se ciocnesc, iar acestea din urmă își măresc viteza relativă. Astfel, apare o regiune de gaz comprimat, urmată de alta cu gaz rarefiat care se deplasează de-a lungul cilindrului.

Din analiza efectuată mai sus a modului de propagare a undelor mecanice rezultă că ele reprezintă transmiterea mișcării oscilatorii altor puncte ale mediului cercetat. Întrucînt mișcarea oscilatorie este caracterizată de o energie proporțională cu pătratul amplitudinii oscilațiilor, atunci, odată cu transmiterea mișcării oscilatorii, se transmite și această energie. Astfel, unda este un purtător al energiei, însă trebuie menționat în



*Fig. 5.18*



*Fig. 5.19*

mod special că ea se transmite dintr-o regiune a mediului în altele fără transport de substanță. Aceasta este o proprietate foarte importantă a undelor, indiferent de natura lor.

Undele mai pot fi clasificate și după numărul de coordonate spațiale în raport cu care acestea se propagă. Undele ce se propagă de-a lungul corzilor și resorturilor sunt **unde unidimensionale sau liniare**, cele care se propagă la suprafața de separație dintre două medii – **unde bidimensionale sau superficiale**, iar undele sonore sau de lumină care se propagă radial de la o sursă punctiformă sunt **unde tridimensionale sau spațiale**. Este necesar de menționat că procesul de propagare a undelor superficiale și spațiale este mult mai complicat decât cel analizat mai sus.

Analiza procesului de propagare a undelor elastice permite formularea următoarelor concluzii importante:

**pentru inițierea și menținerea unei unde elastice este necesară existența unei surse de oscilații și a mediului elastic;**

**pentru propagarea perturbației de la sursă pînă într-un punct oarecare al mediului este necesar un anumit interval de timp, adică unda se propagă cu o viteză finită;**

**la propagarea oricărei unde energia primită prin excitarea perturbației se transferă de la un punct la altul al mediului fără transport de substanță.**

## ÎNTREBĂRI

1. Ce reprezintă modelul numit mediu elastic?
2. Ce se numește undă elastică? Cum se clasifică undele în funcție de direcția oscilațiilor în raport cu direcția de propagare a lor?
3. Care unde se numesc transversale? Aduceți exemple.
4. Explicați procesul de propagare a undelor transversale.
5. Ce se numește undă longitudinală? Dați exemple.
6. Explicați procesul de propagare a undelor longitudinale.
7. În care medii se pot propaga undele transversale? Dar longitudinale?
8. Cum se clasifică undele în funcție de numărul dimensiunilor după care ele se propagă?
9. De ce în procesul de propagare a undelor transferul de energie are loc fără transport de substanță?

## 5.6 CARACTERISTICILE MIȘCĂRII ONDULATORII. VITEZA DE PROPAGARE A UNDELOR

Considerăm o sursă de oscilații de la care ia naștere și se propagă în spațiu o undă. Cunoașteți că oscilațiile sunt caracterizate de o anumită fază, dependentă de timp, iar aceasta se transmite prin intermediul undei și celorlalte puncte ale spațiului. Rezultă că la diferite intervale de timp punctele spațiului, antrenate în mișcarea oscillatorie, vor avea faze diferite. Se observă însă că toate punctele pînă la care a ajuns unda la momentul de timp dat posedă aceeași fază.

**Locul geometric al punctelor pînă la care a ajuns unda la momentul de timp dat se numește *front de undă*.**

**Linia normală pe frontul de undă se numește *rază* și constituie direcția de propagare a undei.**

Toate punctele situate pe frontul de undă încep să oscileze la același moment. El separă în spațiu două zone distințe: zona antrenată deja în mișcare oscilatorie și cea în care procesul osculatoriu încă nu are loc.

Analiza procesului de propagare a undelor conduce la concluzia că există și alte puncte în afara celor de pe frontul de undă, caracterizate de aceeași fază a oscilațiilor.

### ■ Locul geometric al punctelor care oscilează în aceeași fază se numește suprafață de undă.

Din cele expuse mai sus, reiese că frontul de undă este de asemenea o suprafață de undă, însă cea mai avansată față de sursa de oscilații. La propagarea unei unde **există o infinitate de suprafețe de undă și întotdeauna numai un singur front de undă**.

Forma suprafeței de undă este diferită, în funcție de forma sursei de oscilații și de proprietățile mediului în care se propagă. În cazul particular al unui mediu omogen și izotrop, suprafețele de undă, deci și frontul de undă, au formă sferică, dacă sursa de oscilații este punctiformă sau sferică, și formă plană, dacă sursa de oscilații este o suprafață plană (fig. 5.20, a). În aceste cazuri se spune că în spațiu se propagă o **undă sferică** și, respectiv, o **undă plană**. Dacă se cercetează frontul de undă la o distanță mare de la sursa de oscilații, atunci, indiferent de aspectul sursei într-un mediu izotrop, forma lui poate fi aproximată cu una plană. După cum se observă din figura 5.20, b, la distanțe mari de la sursa de oscilații, în regiuni restrânse ale spațiului, undă sferică se poate approxima cu undă plană.

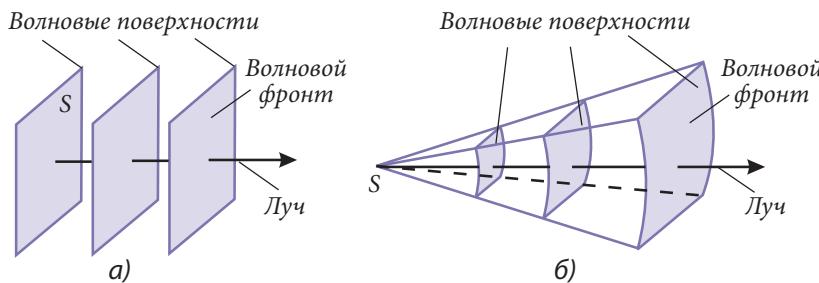


Fig. 5.20

Întrucât mișcarea ondulatorie este generată de cea oscilatorie, este evident că pentru descrierea cantitativă a undelor sunt valabile toate mărimile fizice utilizate la studiul oscilațiilor: amplitudinea, frecvența, pulsația, perioada, faza, faza inițială. Dacă sursa de oscilații este caracterizată de o frecvență constantă în timp, atunci, indiferent de proprietățile mediului elastic, toate punctele suprafețelor de undă vor avea aceeași frecvență și deci aceeași pulsație și perioadă. Din această cauză, se pot utiliza noțiunile de frecvență, pulsație și perioadă ale undei. Un alt comportament are amplitudinea de oscilație. Pentru o undă sferică aceasta se micșorează odată cu îndepărțarea de la sursa de oscilații. Cu cât distanța parcursă de frontul de undă este mai mare, cu atât energia ce revine unei particule din mediul elastic este mai mică, deoarece energia sursei se distribuie la un număr tot mai mare de particule ale mediului, antrenate în procesul osculatoriu. Energia sursei se va mai micșora și din cauza forțelor de rezistență, inevitabile într-un mediu real. Având în vedere că energia osculatorului este direct proporțională cu pătratul amplitudinii, devine clară și cauza micșorării amplitudinii.

În afară de mărimile fizice menționate, undă este caracterizată și de mărimi legate de propagarea ei. Acestea sunt **viteza de propagare** și **lungimea de undă**.

## Viteza de deplasare a frontului de undă se numește *viteză de propagare a undei*. Deoarece toate punctele frontului de undă au aceeași fază, ea este numită și *viteză de fază*.

Viteza de propagare a undei depinde de proprietățile mediului elastic și de tipul ei. Se pot demonstra teoretic și se verifică experimental următoarele relații pentru viteza de propagare a undelor unidimensionale transversale  $v_t$  și longitudinale  $v_l$  în mediile solide (corzi, tije etc.):

$$v_t = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \text{ și } v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (5.32)$$

unde  $F_T$  este forța de tensiune din coardă,  $\mu$  – masa unității de lungime a ei (densitatea liniară),  $E$  – modulul de elasticitate (modulul lui Young), iar  $\rho$  – densitatea volumică a mediului elastic.

Din analiza procesului de propagare a undelor, rezultă că perturbația inițială sub forma unei oscilații de perioadă  $T$  se deplasează în mediul elastic cu o anumită perioditate spațială. După fiecare interval de timp egal cu o perioadă, punctele mediului, situate pe două suprafete de undă consecutive, oscilează în concordanță de fază, adică cu un defazaj de  $2\pi$  rad. Dacă viteza de propagare a undei este constantă, după fiecare interval de timp  $T$  frontul de undă parcurge una și aceeași distanță:

$$\lambda = vT. \quad (5.33, a)$$

## Distanța minimă $\lambda$ dintre două suprafete de undă, ale căror puncte oscilează în concordanță de fază, se numește *lungime de undă*.

Dacă se exprimă perioada prin frecvență, atunci pentru lungimea de undă obținem

$$\lambda = \frac{v}{f}. \quad (5.33, b)$$

Așadar, lungimea de undă depinde de sursa de oscilații prin perioadă sau frecvență și de mediul în care se propagă unda, prin viteza.

### ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

1. Ce se numește front de undă și ce delimitizează el în spațiu?
2. Ce se numește suprafață de undă și prin ce se deosebește de frontul de undă?
3. Cum se poate identifica ce fel de undă (plană sau sferică) se propagă în spațiu, dacă se cunosc forma sursei de oscilații și proprietățile mediului? Când o undă sferică se poate approxima cu una plană?
4. Care sunt mărimile fizice utilizate pentru descrierea cantitativă a undelor?
5. Ce se numește viteza de fază și ce reprezintă ea?
6. De care parametri depinde viteza de propagare a undelor?
7. Ce se numește lungime de undă și care este relația de legătură cu viteza de propagare și perioada sau frecvența de oscilație a sursei?
8. Calculați viteza de propagare a undei longitudinale în cupru. Modulul de elasticitate și densitatea cuprului sunt, respectiv, 120 GPa și  $8\ 900\ kg/m^3$ .
9. Care trebuie să fie forța de întindere a unei coarde din alamă cu diametrul de 2 mm pentru ca o undă transversală să se propage prin ea cu viteza de 100 m/s? Densitatea alamei este egală cu  $8\ 500\ kg/m^3$ .
10. Distanța dintre două creste consecutive ale valurilor de pe un lac este de 70 cm. Cu ce viteză se propagă unda pe suprafața apei, dacă perioada de oscilație a unui obiect care plutește pe această suprafață este egală cu 1 s?

## 5.7° ECUAȚIA UNDEI PLANE

Să stabilim dependența dintre elongația  $y$  a particulelor unui mediu omogen și nedisipativ care participă într-un proces ondulatoriu și distanța  $x$  de la sursa de oscilații pentru orice moment de timp  $t$ . Pentru aceasta considerăm o sursă de oscilații armonice situată în punctul  $O$ , de la care se propagă pe direcția  $Ox$  o undă plană. La momentul inițial punctul cu coordonata  $x = 0$  oscilează după legea (5.15, a) în care, pentru simplitate, s-a luat faza inițială  $\varphi_0 = 0$  [mentionăm că spre deosebire de (5.15, a), aici elongația este notată prin litera  $y$ ]:

$$y_0 = A \sin \omega t. \quad (5.34)$$

Atunci toate particulele mediului vor fi antrenate tot într-o mișcare oscilatorie armonică (sinusoidală) cu aceeași pulsărie  $\omega$  și amplitudine  $A$ , dar cu faze diferite. Așadar, în acest caz unda plană are aspectul funcției sinusoidale prezentat în figura 5.21.

Analizăm starea de oscilație a unei particule  $P$  ce se află la distanța  $x$  de la sursa  $O$ . Dacă particula din  $O$  (sursa de oscilații) este în stare de oscilație timp de  $t$  secunde, atunci punctul  $P$  se află în această stare numai în decursul a  $(t - \Delta t)$  secunde, unde  $\Delta t$  este timpul după care punctul  $P$  va fi antrenat în mișcarea oscilatorie, adică timpul în care unda a parcurs distanța  $x$  (fig. 5.21). Elongația punctului  $P$  este dată tot de ecuația (5.34), dar cu altă fază

$$y_p = A \sin \omega(t - \Delta t).$$

Deoarece mediu în care se propagă unda este omogen și nedisipativ, atunci viteza ei rămîne constantă și  $\Delta t = x/v$ .

Astfel, obținem

$$y = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right). \quad (5.35, a)$$

Având în vedere relațiile  $\omega = 2\pi/T$  și  $\lambda = vT$ , ecuația (5.35, a) se mai scrie sub forma

$$y = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (5.35, b)$$

Ecuațiile (5.35, a) și (5.35, b) descriu procesul de propagare a undei plane și poartă numele de **ecuația undei plane** sau **ecuația undei progresive**.

Deseori această ecuație se mai scrie sub o altă formă, mult mai simplă:

$$y = A \sin (\omega t - kx), \quad (5.35, c)$$

unde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.36)$$

este numit **număr de undă** și arată de câte ori se cuprinde lungimea de undă  $\lambda$  pe o distanță de  $(2\pi)$  metri.

Relația

$$\varphi = \omega t - kx \quad (5.37)$$

sau cele corespunzătoare din (5.35, a) și (5.35, b) constituie faza undei plane. Ea descrie starea de oscilație a oricărei particule a mediului la orice moment de timp.

Ecuația undei plane demonstrează periodicitatea mișcării ondulatorii atât temporală, cât și spațială. Într-adevăr, pentru un punct dat al mediului ( $x$  fixat), după un timp  $\Delta t = mT$  ( $m$  este un număr întreg) argumentul funcției (5.35, b) se modifică cu  $2\pi m$ :

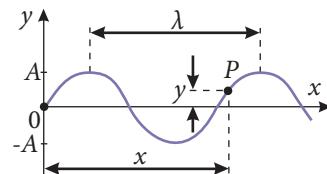


Fig. 5.21

$2\pi \left( \frac{t+mT}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + 2\pi m$ , însă funcția rămîne aceeași. Adică, după intervale de timp egale cu un număr întreg de perioade un punct oarecare al mediului va oscila în concordanță de fază cu sursa. La un moment de timp dat, funcția (5.35, b) rămîne aceeași pentru toate punctele situate la distanța  $\Delta x = m\lambda$ , deoarece și în acest caz argumentul ei se modifică tot cu  $2\pi m$ :

$$2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x+m\lambda}{\lambda} \right) = 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + 2\pi m.$$

Rezultă că la un moment arbitrar de timp punctele mediului, situate la distanțe multiple cu lungimea de undă  $\lambda$ , oscilează în concordanță de fază.

### PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Oscilațiile cu perioada  $T = 1$  s se propagă de-a lungul unei drepte cu viteza de  $40$  m/s. La distanța de  $25$  m de la punctul inițial, unde cu  $5$  s mai devreme a început mișcarea oscilatorie, elongația oscilațiilor este de  $2$  cm. Care este elongația și faza oscilației la același moment de timp, dar pentru un punct situat la distanța de  $30$  m față de cel inițial?

#### REZOLVARE

**Se dă:**

$T = 1$  s,  
 $v = 40$  m/s,  
 $t = 5$  s,  
 $x_1 = 25$  m,  
 $x_2 = 30$  m,  
 $y_1 = 0,02$  m  
 $y_2 = ?$ ,  $\varphi_2 = ?$

Conform ecuației undei plane (5.35, a), pentru cele două distanțe, avem

$$y_1 = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x_1}{v} \right) \text{ și } y_2 = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x_2}{v} \right).$$

Pentru determinarea elongației oscilațiilor în punctul situat la distanța  $x_2$  este necesar să cunoaștem amplitudinea și faza undei în acel loc.

$$A = y_1 / \sin [(2\pi/T)(t - x_1/v)] = 0,02 / \sin (35\pi/4) = 0,02\sqrt{2} \approx 0,03 \text{ m.}$$

Faza undei la distanța  $x_2$  de la sursa de oscilații la momentul de timp  $t$  reprezintă argumentul funcției „sinus” din ecuația pentru  $y_2$ , adică

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x_2}{v} \right) = \frac{17\pi}{2} \text{ rad}$$

și pentru elongația căutată avem  $y_2 = A \sin \varphi_2 = 0,03 \sin \frac{17\pi}{2} = 0,03$  m.

### ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

- Care este aspectul ecuației undei plane și legătura căror parametri o descrie ea?
- Ce se numește număr de undă și ce arată el?
- Prin ce se manifestă periodicitatea temporală și cea spațială a mișcării ondulatorii?
- Două puncte situate pe direcția de propagare a unei unde plane se află la distanțele de  $5$  m și  $10$  m de la sursa de oscilații. Care este diferența de fază a oscilațiilor din aceste puncte, dacă ele au perioada de  $0,05$  s și se propagă pe această direcție cu viteza de  $200$  m/s?
- Un punct material efectuează oscilații armonice după legea  $y_0 = 2 \sin 40\pi t$  (cm). Care este ecuația undei plane ce se propagă de la sursa de oscilații cu viteza de  $240$  m/s? Determinați faza și elongația unui punct situat la distanța  $x_1 = 5$  m de la sursa de oscilații la momentul de timp  $t = 0,2$  s.
- De la o sursă de oscilații cu amplitudinea de  $4$  cm și pulsația de  $(0,5\pi)$  s<sup>-1</sup> se propagă o undă care la momentul de timp  $t = 1$  s antrenează în mișcare oscilatorie un punct situat la distanța  $x = 10$  m de la aceasta. Determinați numărul de undă, dacă elongația acestui punct este de  $2$  cm.

## 5.8 PRINCIPIUL LUI HUYGENS

Forma frontului de undă la orice moment de timp coincide cu cea a sursei de oscilații numai în cazul mediilor omogene. Deseori însă este necesară construirea frontului de undă, în cazul mediilor cu neomogenități (paravane, orificii, suprafața de separație dintre două medii omogene etc.) în care se produc fenomene calitativ noi.

Metoda generală de construire a frontului de undă la un moment arbitrar de timp în baza celui cunoscut la momentul inițial a fost propusă de către fizicianul olandez Christian Huygens. Analizînd procesul de propagare a undelor, el a ajuns la concluzia că fiecare punct al mediului antrenat în mișcare oscillatorie reprezintă pentru punctele vecine o sursă nouă de oscilații, numită **sursă de unde secundare**. Astfel Huygens a formulat următorul principiu:

**Orice punct al mediului pînă la care a ajuns unda la momentul dat devine o sursă de unde sferice secundare, iar înfășurătoarea lor la un moment ulterior reprezintă noul front de undă.**

Aplicarea acestui principiu la construirea frontului de undă este ilustrată în figura 5.22. La momentul de timp  $t_0$  frontul de undă este  $F_0$ . Pentru a construi undele sferice secundare în jurul fiecărui punct de pe  $F_0$ , se trasează sfere de rază  $\Delta r = v\Delta t$ , unde  $v$  este viteza de propagare a undei, iar  $\Delta t = t - t_0$  reprezintă intervalul de timp în decursul căruia frontul de undă ajunge în poziția nouă. Construind înfășurătoarea undelor secundare (tangenta comună a tuturor sferelor de rază  $\Delta r$ ), obținem noul front de undă  $F$  (fig. 5.22).

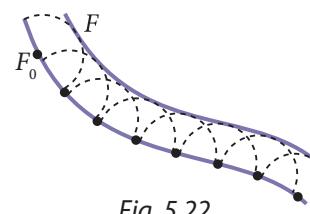


Fig. 5.22

### ÎNTREBĂRI

1. Ce reprezintă sursa de unde secundare?
2. Formulați principiul lui Huygens. Care este esența acestui principiu?
3. Explicați cum se utilizează principiul lui Huygens la construirea frontului unei unde arbitrate.

## 5.9 REFLEXIA ȘI REFRACȚIA UNDELOR

### a. Legile reflexiei și refracției

Modificarea direcției de propagare a undelor la întîlnirea suprafeței de separație dintre două medii cu proprietăți elastice diferite constituie esența fenomenelor de **reflexie** și **refracție**.

Considerăm o undă care se propagă spre suprafața de separație  $S$  dintre două medii, raza (direcția de propagare) a căreia formează un unghi  $i$  cu normala la suprafața  $S$  (fig. 5.23). Această undă este numită **undă incidentă** (caracterizată cu **raza incidentă**), iar unghiul  $i$  – **unghi de incidentă**.

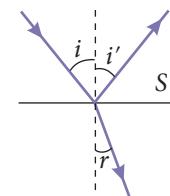


Fig. 5.23

**Fenomenul de reîntoarcere a undelor în mediul din care au venit cînd întîlnesc suprafața de separație a două medii se numește reflexie.**

Unda formată prin reflexie este numită **undă reflectată** (caracterizată cu **raza reflectată**), iar unghiul  $i'$  dintre raza reflectată și normala la această suprafață – **unghi de reflexie** (fig. 5.23).

### Fenomenul de modificare a direcției de propagare a unei unde la traversarea suprafeței de separație a două medii se numește *refracție*.

Unda care pătrunde în mediul al doilea este numită **undă refractată** (caracterizată cu **raza refractată**), iar unghiul  $r$  dintre această rază și normala la suprafața  $S$  – **unghi de refracție** (fig. 5.23).

La suprafața de separație dintre două medii cu proprietăți diferite aceste fenomene se produc simultan, însă există și situații cînd unul dintre ele devine predominant. Atât cercetările experimentale, cât și studiul teoretic al reflexiei și refracției au condus la evidențierea următoarelor legi:

#### Legile reflexiei

- **Raza incidentă, raza reflectată și normala în punctul de incidență se află în același plan.**
- **Unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență.**

$$\alpha i = \alpha i' \quad (5.38)$$

#### Legile refracției

- **Raza incidentă, raza refractată și normala în punctul de incidență se află în același plan.**
- **Raportul dintre sinusurile unghiurilor de incidență și de refrație este constant pentru două medii elastice date și egal cu raportul vitezelor respective ale undelor în aceste medii:**

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (5.39)$$

#### b.º Studiul reflexiei și refracției cu ajutorul principiului lui Huygens

Considerăm suprafața  $S$  de separație dintre două medii omogene și izotrope diferite 1 și 2, în care o undă plană se propagă cu vitezele  $v_1$  și, respectiv,  $v_2$  (fig. 5.24). La un moment dat  $t_1$  frontul de undă incident  $AB$  ajunge în poziția  $A_1B'$ , cînd primul punct al acestuia  $A_1$  se află pe suprafața de separație  $S$ . Din acest moment, în intervalul de timp de la  $t_1$  pînă la  $t_2$ , toate punctele frontului de undă vor atinge pe rînd suprafața de separație între punctele  $A_1$  și  $B_1$ .

Pentru a clarifica cum influențează această suprafață asupra propagării undei incidente, vom folosi principiul lui Huygens. Astfel, punctele de pe intervalul  $[A_1, B_1]$  se consideră surse de unde sferice secundare, ce se propagă în ambele medii, dar cu viteze diferite. La momentul de timp  $t_2$ , cînd ultimul punct al frontului de undă incident atinge suprafața de separație  $S$ , unda sferică secundară cu centrul în punctul  $A_1$  reprezintă deja o emisferă de rază  $A_1B'' = v_1\Delta t = B'B_1$ , situată în mediul 1 și altă emisferă de rază

$$A_1A' = v_2\Delta t = B'B_1 \cdot \frac{v_2}{v_1} \quad (5.40)$$

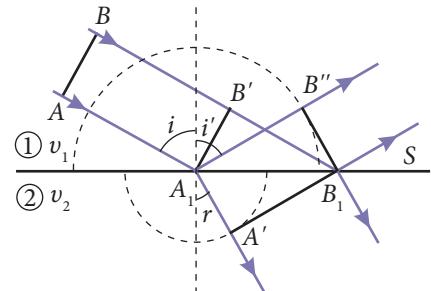


Fig. 5.24

– în mediul 2 (fig. 5.24). Dacă din punctul  $B_1$  trasăm tangente la emisferele menționate, atunci  $B_1B''$  este frontul de undă al undei reflectate, iar  $B_1A'$  – al undei refractate.

Analiza razelor incidente și reflectate ne permite să demonstrăm legile reflexiei, iar a celor incidente și refractate – legile refracției. Într-adevăr, deoarece  $\Delta A_1B'B_1 = \Delta A_1B''B_1$  sunt dreptunghice, au ipotenuza  $A_1B_1$  comună și catetele  $A_1B'' = B'B_1 = v_1\Delta t$ , rezultă că  $\propto B'A_1B_1 = \propto B''B_1A_1$ . Însă  $\propto B'A_1B_1 = \propto i$ , iar  $\propto B''B_1A_1 = \propto i'$  ca unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare, astfel, demonstrându-se legea reflexiei (5.38).

Observăm că în  $\Delta A_1B'B_1$  și  $\Delta A_1A'B_1$ ,  $\propto B'A_1B_1 = \propto i$  și  $\propto A_1B_1A' = \propto r$ , ca unghiuri cu laturile, respectiv, perpendiculare, iar  $A_1A' = A_1B_1 \sin r$  și  $B'B_1 = A_1B_1 \sin i$  (fig. 5.24). Introducind aceste relații în (5.40), obținem legea refracției (5.39).

### c.º Comportamentul fazelor undelor la reflexie

Dacă un mediu oarecare este caracterizat de o viteză de propagare a undelor mai mică decât prin altul, atunci se spune că primul mediu este **mai dens**, iar al doilea (în care viteza de propagare este mai mare) – **mai puțin dens**. Vom analiza comportamentul undei reflectate în aceste două situații.

Considerăm o undă care se propagă de-a lungul unei corzi întinse, fixate la unul din capete de un suport perfect rigid, astfel, modelând situația reflexiei pe un mediu mai dens. La momentul cînd perturbația undei (cu bucla în sus) ajunge la capătul fixat (fig. 5.25, a), ea începe să acționeze asupra suportului rigid cu o forță  $\vec{F}_c$  orientată în sus, încercînd să-l ridice. Conform legii a treia a lui Newton, suportul acționează și el asupra corzii cu o forță  $\vec{F}_s$  egală în modul cu  $\vec{F}_c$ , dar de sens opus. Această forță orientată în jos generează undă reflectată, a cărei perturbație se propagă înapoi de-a lungul corzii, avînd sensul opus (cu bucla în jos) sensului perturbației incidente. Cu alte cuvinte, perturbația reflectată își modifică fază cu  $180^\circ$  ( $\pi$  radiani). În consecință,

**la reflexia pe un mediu mai dens unda reflectată este defazată cu  $\pi$  radiani față de unda incidentă.**

Pentru modelarea unui mediu mai puțin dens se prinde capătul corzii de o culisă care poate aluneca fără frecări pe o tijă (fig. 5.25, b). În acest caz, aceeași perturbație (cu bucla în sus) ajungînd la culisă, acționează cu forța  $\vec{F}_c$  și o ridică fără restricții, imprimîndu-i o mișcare osculatorie. Aceasta, la rîndul său, generează undă reflectată care începe cu o perturbație, avînd același sens (tot cu bucla în sus) cu sensul perturbației incidente. Așadar,

**la reflexia pe un mediu mai puțin dens unda reflectată este în concordanță de fază cu unda incidentă.**

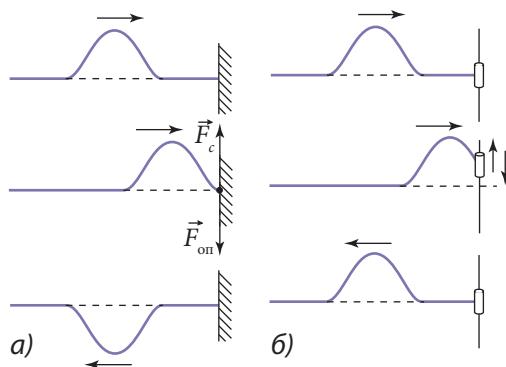


Fig. 5.25

## ÎNTREBĂRI

1. Care este esența fenomenelor de reflexie și refracție?
2. Ce se numește reflexie? Explicați ce reprezintă unghiurile de incidentă și reflexie.
3. Ce se numește refracție? Explicați ce reprezintă unghiul de refracție.
4. Care sunt legile reflexiei? Ilustrați aceste legi construind mersul razelor incidentă și reflectată.
5. Care sunt legile refracției? Ilustrați aceste legi construind mersul razelor incidentă și refractată.
- 6.<sup>a</sup> Demonstrați legile reflexiei și refracției cu ajutorul principiului lui Huygens.
- 7.<sup>b</sup> Care este defazajul dintre undele reflectată și incidentă la reflexia pe un mediu mai dens? Explicați cum apare acest defazaj.
- 8.<sup>c</sup> De ce la reflexia pe un mediu mai puțin dens undele reflectată și incidentă sunt în concordanță de fază?

## 5.10 DIFRACȚIA UNDELOR

Fenomenul de reflexie studiat în paragraful precedent are loc atunci când în calea propagării undelor există obstacole cu dimensiuni foarte mari. De multe ori însă undele întâlnesc în calea lor diferite obstacole cu dimensiuni mai mici (comparabile cu lungimea de undă). S-a constatat că modul de propagare a undelor depinde în mare măsură de corelația dintre lungimea de undă și dimensiunea obstacolului întâlnit. De exemplu, undele de pe suprafața unui lac (valurile) intr-o zi liniștită înconjoară un pilon și plutea undiței unui pescar, de parcă acestea nici nu ar exista și, în același timp, o barcă lasă o regiune de umbră în care undele nu pătrund. Evident, diametrul pilonului este aproximativ egal cu lungimea de undă (distanța dintre două creste ale valurilor), cel al plutei – mult mai mic, iar barca are dimensiuni mult mai mari decât lungimea de undă. Astfel, cînd dimensiunile obstacolului sunt mai mici sau comparabile cu lungimea de undă, are loc o deviere de la propagarea rectilinie a undelor.

### Fenomenul de pătrundere a undelor în regiunea de umbră a diferitor obstacole (de dimensiuni comparabile cu lungimea de undă) în urma devierii de la propagarea lor rectilinie se numește difracție.

Fenomenul de difracție a undelor de pe suprafața apei se evidențiază ușor cu ajutorul următoarei experiențe. Într-o cuvă cu apă se introduce un perete despărțitor, prevăzut cu o fântă. Dacă în compartimentul din stînga se excită o undă plană, atunci în funcție de dimensiunile fantei în compartimentul din dreapta apar două situații diferite, prezentate schematic în figura 5.26. Cînd lățimea fantei  $d$  este mai mică decât lungimea de undă  $\lambda$ , se observă pătrunderea undei în regiunea de umbră (fig. 5.26, a), iar dacă  $d \gg \lambda$ , profilul undei practic nu se schimbă, denaturîndu-se puțin în apropierea regiunii de umbră (fig. 5.26, b).

Explicarea din punct de vedere calitativ a pătrunderii undelor în regiunea de umbră este posibilă cu ajutorul principiului lui Huygens. Conform acestui principiu, toate punctele

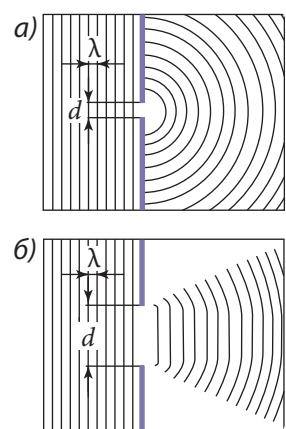


Fig. 5.26

frontului de undă, ajunse pe planul fantei, devin surse de unde sferice secundare ce se propagă în mediul din spatele obstacolului (fantei). Din figura 5.26 se observă că frontul de undă pătrunde cu atât mai mult în regiunea de umbră, cu cât dimensiunea fantei este mai mică în raport cu lungimea de undă.

## ÎNTREBĂRI

1. Ce se numește difracție a undelor?
2. Ce condiții trebuie îndeplinite pentru a observa fenomenul de difracție?
3. Cum se explică fenomenul de difracție cu ajutorul principiului lui Huygens?

### 5.11 INTERFERENȚA UNDELOR

#### a. Studiul calitativ al interferenței undelor

Să analizăm acum particularitățile propagării concomitente a mai multor unde prin unul și același mediu. Este evident că în asemenea situații vor exista regiuni ale mediului în care undele se suprapun. Întrucât unda reprezintă o mișcare oscilatorie ce se propagă în spațiu, în regiunile menționate fiecare punct al mediului este antrenat în această mișcare de către perturbațiile tuturor undelor ajunse la el. Rezultă că **elongația unui punct oarecare al mediului la un moment dat reprezintă suma vectorială a elongațiilor provenite de la fiecare undă aparte**. Mai mult ca atât, experiențele arată că în cazul elongațiilor nu prea mari, adică **în cazul undelor armonice, ele se propagă independent una de alta**. Aceste afirmații constituie **principiul superpoziției undelor** care de fapt este o consecință a **principiului independenței acțiunii forțelor**, studiat la mecanică (vezi par. 2.2, d).

Dacă în mediul elastic se propagă unde cu pulsații diferite, atunci oscilațiile punctelor din regiunea de suprapunere a lor nu sunt armonice. În fiecare punct al mediului diferența de fază a oscilațiilor punctelor vecine este diferită la diferite momente de timp și din această cauză oscilațiile rezultante nu au o amplitudine stabilă. Rezultatul suprapunerii undelor depinde de corelația dintre fazele, pulsațiile și amplitudinile lor. Un interes practic deosebit reprezintă cazul suprapunerii undelor de aceeași pulsație și caracterizate de o diferență de fază constantă în timp.

**Sursele de unde, ale căror oscilații se produc cu aceeași pulsație și mențin pe durata întregului proces oscilatoriu o diferență de fază constantă, se numesc surse coerente, iar undele produse de aceste surse – unde coerente.**

La suprapunerea undelor coerente se obține o configurație stabilă a punctelor mediului, unele din ele oscilând cu amplitudine mare, iar altele – cu amplitudine mică.

**Fenomenul de amplificare sau de atenuare reciprocă a amplitudinii oscilațiilor rezultante în diferite puncte ale mediului în urma suprapunerii undelor coerente se numește interferență. Regiunea mediului unde se produce interferență este numită cimp de interferență, iar aspectul acestuia – tablou de interferență.**

Să analizăm procesul de formare a tabloului de interferență a undelor de pe suprafața apei. Pentru aceasta pe o tijă se fixează la o anumită distanță unul de altul două ace. Dacă aducem tija în stare de vibrație cu o pulsărie oarecare, atunci cele două ace, lovind suprafața apei dintr-o cuvă, produc două unde coerente. În figura 5.27 sunt reprezentate schematic suprafetele de undă după intervale de timp egale cu jumătate de perioadă și tabloul de interferență obținut în acest caz. Punctele  $S_1$  și  $S_2$  corespund locurilor de pe suprafața apei, unde lovesc acele. Suprafetele de undă desenate cu cercuri întregi corespund crestelor, iar cele cu cercuri întrerupte – adânciturilor de pe suprafața apei. Astfel, în punctele A sau B, unde se întâlnesc două creste sau, respectiv, două adâncuri, are loc amplificarea amplitudinii de oscilație, obținându-se o creastă mai înaltă sau o adâncitură mai mare (**maxim de interferență**), iar în punctul C, unde se întâlnesc o creastă cu o adâncitură, are loc micșorarea amplitudinii de oscilație (**minim de interferență**). Întrucât energia undelor este proporțională cu pătratul amplitudinii lor, rezultă că **la interferență are loc redistribuirea energiei undelor în punctele de maxim**. Din figură se mai observă că toate punctele în care se întâlnesc crestele (adâncurile) sunt în concordanță de fază, iar diferența dintre drumurile parcuse de fiecare undă de la sursele  $S_1$  și  $S_2$  pînă la punctul dat este egală cu un număr întreg de lungimi de undă  $\lambda$  (un număr par de semilungimi de undă). Punctele în care se întâlnesc o creastă cu o adâncitură sunt în opozitie de fază, iar diferența de drum constituie un număr impar de semilungimi de undă. Așadar,

**punctele cîmpului de interferență pentru care diferența de drum este un număr par de semilungimi de undă oscilează cu amplitudine maximă, iar cele pentru care diferența de drum este un număr impar de semilungimi de undă oscilează cu amplitudine minimă.**

Astfel, condiția de maxim de interferență este

$$\Delta x = \pm 2m \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad (5.41)$$

iar cea de minim de interferență –

$$\Delta x = \pm (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad (5.42)$$

unde  $m$  este un număr întreg și reprezintă ordinul maximului sau minimului. De exemplu,  $m = 0$  evidențiază pe tabloul de interferență maximul central sau minimele de ordinul 1, situate simetric de o parte și de alta a maximului central la distanțele  $\lambda/2$  și  $-\lambda/2$ .

## b.º Studiul cantitativ al interferenței undelor

Considerăm sursele coerente  $S_1$  și  $S_2$  de la care se propagă două unde plane descrise de ecuații de forma (5.35, c)

$$y_1 = A_1 \sin (\omega t - kx_1)$$

și

$$y_2 = A_2 \sin (\omega t - kx_2),$$

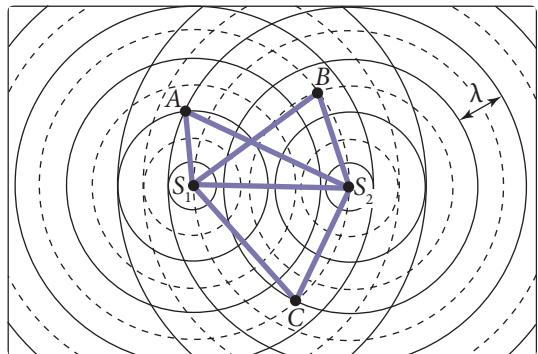


Fig. 5.27

unde  $x_1$  și  $x_2$  sunt distanțele de la un punct oarecare  $P$  din cîmpul de interferență pînă la sursele respective (fig. 5.28), iar  $k$  este numărul de undă (5.36).

Punctul  $P$  este antrenat în mișcare oscilatorie de fiecare undă în parte și, încrucișat oscilațiile ajunse la acesta sunt coliniare, mișcarea lui prezintă rezultatul compunerii acestor oscilații. Amplitudinea oscilației rezultante este dată de relația (5.30) din care avem

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi}, \quad (5.43)$$

unde  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega t - kx_2 - \omega t + kx_1 = k(x_1 - x_2) = k\Delta x$  este diferența de fază a undelor, iar distanța  $\Delta x$  este numită **diferență de drum**. Luînd în considerare (5.36), se obține relația de interdependență dintre diferența de fază și diferența de drum a undelor coerente:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x. \quad (5.44)$$

De la compunerea oscilațiilor cunoașteți că amplitudinea oscilației rezultante este maximă atunci când diferența de fază este un număr par de  $\pi$  radiani, adică

$$\Delta\varphi_{\max} = \pm 2m \cdot \pi. \quad (5.45, a)$$

și minimă, când diferența de fază este un număr impar de  $\pi$  radiani, adică

$$\Delta\varphi_{\min} = \pm(2m + 1) \cdot \pi. \quad (5.46, a)$$

Este evident că (5.45, a) și (5.46, a) sunt și condițiile pentru maxim și, respectiv, minim de interferență, exprimate prin diferența de fază. Dacă însă utilizăm relația (5.44), atunci se obțin aceleași condiții, dar exprimate prin diferența de drum

$$\Delta x_{\max} = \pm 2m \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (5.45, b)$$

și, respectiv:

$$\Delta x_{\min} = \pm (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}. \quad (5.46, b)$$

Observăm că aceste condiții confirmă rezultatele (5.41) și (5.42), obținute din analiza calitativă a fenomenului cercetat. În relațiile (5.45)–(5.46)  $m \in \mathbb{N}$  este, totodată, și ordinul maximului sau minimului de interferență.

Zonele în care toate punctele sunt caracterizate de același rezultat al interferenței (maxim sau minim) se numesc **franje de interferență**. Astfel, un tablou de interferență reprezintă o succesiune de **franje de amplitudine maximă** și **franje de amplitudine minimă**.

Așadar, condițiile maximelor și minimelor de interferență pot fi formulate în modul următor:

**Punctele cîmpului de interferență pentru care diferența de drum (diferența de fază) constituie un număr par de semilungimi de undă (de  $\pi$  radiani), reprezintă maxime de interferență, iar pentru care ea constituie un număr impar de semilungimi de undă (de  $\pi$  radiani) – minime de interferență.**

## ÎNTREBĂRI ȘI PROBLEME

- Care este esența principiului superpoziției undelor?
- Care surse de oscilații se numesc coerente? Ce reprezintă undele coerente?
- Ce se numește interferență? Explicați procesul de formare a tabloului de interferență.
- Ce reprezintă diferența de drum?

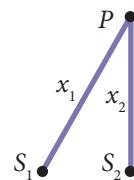


Fig. 5.28

5. În care condiții un punct al cîmpului de interferență va oscila cu amplitudine maximă? Dar cu amplitudine minimă?
6. Care sunt condițiile pentru maximele și minimele de interferență formulate prin: a) diferența de drum; b) diferența de fază?
7. Două surse coerente oscilează cu frecvența  $v = 1$  Hz, iar undele generate de ele se propagă pe suprafața apei cu viteza de 1,5 m/s. Determinați pentru ce valoare minimă a diferenței de drum pe suprafața apei se va observa: a) amplificarea undelor; b) atenuarea undelor.
8. De la două surse coerente care oscilează cu perioada  $T = 0,5$  s se propagă într-un mediu oarecare două unde cu vitezele de 1 km/s. Determinați pentru ce valori ale diferenței de drum, în regiunea de suprapunere a undelor, se vor observa maximul și minimul de interferență de ordinul doi.
9. De la două surse coerente aflate la distanța  $d = 2$  m una de alta se propagă într-un mediu elastic unde cu viteza de 340 m/s. La distanța  $L = 4$  m de la mijlocul dintre surse perpendicular pe segmentul care le unește a fost înregistrat un maxim de interferență, iar următorul – la distanța  $\Delta l = 1,5$  m de la acesta pe linia paralelă cu cea pe care se află sursele. Care este frecvența de oscilație a surselor?

## 5.12° UNDE SONORE

### a. Clasificarea undelor sonore

Undele mecanice longitudinale care se propagă în medii elastice și produc senzații auditive se numesc **unde sonore** sau **sunete**, iar sursele unor astfel de unde reprezintă **vibrării sonore**.

Undele sonore ajung la urechea noastră, propagându-se de obicei prin aer, însă ele se pot propaga atât în lichide, cât și în solide. Cercetările experimentale și teoretice au arătat că viteza de propagare a undelor sonore prin lichide și solide este mult mai mare decât în gaze. De exemplu, viteza sunetului în aer la condiții normale este de 330 m/s, în apă – de 1 500 m/s, iar în oțel – de 5 500 m/s. Însă nu orice vibrație poate produce senzația de sunet. S-a constatat că urechea unui om este sensibilă la undele mecanice caracterizate cu frecvențe situate în diapazonul de aproximativ 16–20 000 Hz. Acest diapazon are un caracter convențional. El nu depinde de proprietățile undelor sonore, ci numai de calitățile urechii umane și poate varia de la o persoană la alta și odată cu vîrstă. Deja la o vîrstă medie omul nu mai poate recepta sunete cu frecvențe mai mari decât 12–14 kHz. Există însă animale care pot recepta vibrări cu frecvențe atât mai mici decât 16 Hz, cât și mai mari de 20 kHz. De exemplu, meduzele pot recepta sunete cu frecvențe mai mici de 16 Hz, cînele – pînă la 40 kHz, iar liliacii și delfinii – cu frecvențe de peste 100 kHz. Astfel, în funcție de frecvența vibrărilor elastice, acestea se clasifică în modul următor:

- vibrări cu frecvențe  $v < 16$  Hz, numite **infrasunete**;
- cu frecvențe  $16 \text{ Hz} \leq v \leq 20$  kHz – numite **sunete**;
- cu frecvențe  $v > 20$  kHz, numite **ultrasunete**.

### b. Calitățile sunetului

Sunetele se deosebesc între ele prin intermediul anumitor particularități numite **calitățile sunetului**. Acestea sunt **intensitatea**, **înălțimea** și **timbrul** sunetului.

**Intensitatea sunetului se măsoară cu energia transportată de unda sonoră într-o unitate de timp printr-o unitate de suprafață, așezată perpendicular pe direcția de propagare și are unitatea de măsură în Sistemul Internațional W/m<sup>2</sup>.**

Frecvența și intensitatea sunt două caracteristici independente ale undelor sonore. Cu alte cuvinte, la una și aceeași frecvență pot exista **sunete slabe** și **sunete puternice**, sau invers, pot exista sunete de frecvență joasă și de frecvență înaltă, dar având aceeași intensitate. Urechea umană este sensibilă pentru intensități caracterizate cu valori cuprinse într-un interval foarte mare. Cel mai puternic sunet pe care îl poate receptiona urechea noastră are o intensitate de aproximativ  $10^{12}$  ori mai mare decât a celui mai slab sunet perceptibil. Limita inferioară a intensității sunetului sub care urechea omului nu mai percep vibrațiile sonore este numită **prag inferior de audibilitate**, iar cea superioară, deasupra căreia sunetul produce senzație dureroasă – **prag superior de audibilitate**.

Un sunet se poate caracteriza cu valoarea relativă a intensității lui  $I$  în raport cu intensitatea unui sunet de referință, care în practică se ia cea de la pragul inferior de audibilitate –  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ . Întrucât domeniul de audibilitate este foarte larg, pentru compararea sunetelor s-a dovedit a fi foarte comodă utilizarea scării logaritmice. Astfel, se introduce mărimea fizică  $\beta$  numită **nivel sonor** și definită cu relația

$$\beta = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (5.47)$$

Unitatea de măsură a nivelului sonor este **bellul** cu simbolul **B** și a fost numită astfel în cinstea inventatorului telefonului Alexander Graham Bell (1847–1922). Din (5.47) se observă că un sunet cu nivelul sonor de 1B (un bell) are intensitatea de 10 ori mai mare decât a pragului inferior de audibilitate. Bellul este o unitate destul de mare și de aceea în practică pentru măsurarea nivelului sonor se folosește o unitate mai mică: **decibell** cu simbolul **dB** ( $1 \text{ B} = 10 \text{ dB}$ ).

### Calitatea unui sunet de a fi mai jos (grav) sau mai înalt (ascuțit) se numește *înălțime*.

În funcție de frecvență, sunetul este cu atât mai ascuțit, cu cât frecvența lui este mai mare. La vibrația unui corp nepunctiform întotdeauna se propagă sunete complexe care conțin mai multe frecvențe. Sunetul cu cea mai mică frecvență  $v_f$  pe care îl produce un corp este numit **sunet fundamental**, iar cele cu frecvență  $v = m \cdot v_f$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) – **armonici superioare**.

### Calitatea prin care se deosebesc două sunete care au aceeași intensitate și frecvență fundamentală, dar emise de surse diferite se numește *timbrul sunetului*.

Timbrul unui sunet depinde de intensitatea, înălțimea și numărul armonicilor superioare care însotesc sunetul fundamental. Rezultă că deosebirea sunetelor prin timbrul lor se datorează complexității acestora. Cu cât sunetul conține mai multe armonici, cu atât el este mai plăcut, mai armonios pentru auz.

Din punctul de vedere al calităților sunetelor și al senzațiilor produse de ele asupra urechii omului, acestea pot fi clasificate în modul următor:

- sunetele de intensitate mare și de scurtă durată, numite **detonații**. Astfel de sunete sunt foarte neplăcute pentru auz, producind adesea și senzații de durere;

- sunetele obținute în urma unor oscilații cu amplitudine variabilă în timp, dar fără niciun fel de periodicitate, sînt numite **zgomote**;
- sunetele periodice, indiferent de gradul lor de complexitate, sînt numite **sunete muzicale**. Ele provoacă o senzație plăcută pentru auz, dacă, bineînțeles, au intensitatea sub pragul superior de audibilitate.

## ÎNTREBĂRI

1. Care unde se numesc sonore?
2. Care este diapazonul undelor sonore?
3. Care este clasificarea undelor sonore în funcție de frecvența vibrațiilor elastice?
4. Ce reprezintă intensitatea sunetului și care sînt unitățile ei de măsură în SI?
5. Ce reprezintă pragul inferior (superior) de audibilitate?
6. Cum se definește mărimea fizică numită nivel sonor și care este unitatea ei de măsură în SI?
7. Ce se numește înălțime a sunetului? Ce reprezintă sunetul fundamental și armonicele lui superioare?
8. Ce se numește timbrul sunetului?
9. Cum se clasifică sunetele din punctul de vedere al calității lor și al senzațiilor auditive produse de acestea?

## 5.13° UNDE SEISMICE

Unul dintre cele mai distrugătoare și încăpătătoare fenomene naturale de pe Pămînt îl constituie **cutremurul (seismul)**. Seismele reprezintă niște mișcări brusă, relativ localizate și de scurtă durată, care produc zguduiri și oscilații ale scoarței terestre, ce se propagă prin intermediul undelor.

**Undele elastice care se propagă în interiorul și la suprafața Pămîntului se numesc *unde seismice*.**

De cele mai multe ori cutremurele durează doar cîteva secunde, însă au fost înregistrate de asemenea cutremure cu durată de aproximativ un minut și chiar mai mult. De exemplu, cutremurul din Alaska (24 ianuarie 1964) a durat peste 7 minute. Energia elastică eliberată la un cutremur catastrofal este enormă. Conform calculelor estimative, aceasta ajunge pînă la aproximativ  $10^{18}$  J (pentru comparație – energia solară absorbită de suprafața Pămîntului timp de un an este de aproximativ  $10^{24}$  J). Este evident că și prejudiciile în urma unui asemenea cutremur sunt enorme, deoarece la cele produse în mod direct se mai adaugă și distrugerile cauzate de efectele secundare: incendii, explozii, alunecări de teren și multe altele. Cele mai dezastruoase cutremure înregistrate în secolul al XX-lea, care s-au soldat cu cel mai mare număr de victime, au avut loc în China în anii 1920 (180 de mii), 1927 (200 de mii), 1976 (255 de mii) și în Japonia în anul 1923 (143 de mii).

Cauza nemijlocită a cutremurelor o constituie deformarea scoarței terestre (de alungire, comprimare, forfecare etc.), care provoacă tensiuni mecanice enorme în rocile Pămîntului. Atunci cînd acestea „înving” rezistența de rupere a rocilor, are loc eliberarea bruscă a energiei acumulate și se produce cutremurul. Regiunea în care este eliberată

energia se numește **focar** sau **hipocentru** și, în majoritatea cazurilor, se află la adâncimi cuprinse între 1 și 700 km. Locul aflat pe suprafața Pământului deasupra focarului este numit **epicentru**. S-a constatat că distrugerile sănt mai mari în zona epicentrului, cînd focarul se află la adâncime mică. Dacă focarul se află la adâncimi mari, cutremurul se manifestă violent nu numai în regiunea epicentrului, dar și la distanțe mari de acesta.

Care este natura forțelor ce generează asemenea deformații? Există mai multe ipoteze cu privire la originea acestora, însă majoritatea cercetătorilor susțin ipoteza despre **mișcarea plăcilor tectonice**.

În general, cutremurele se pot produce în orice regiune a scoarței terestre, însă ele sănt mai frecvente în regiunile apropiate de marginile plăcilor tectonice care se mai numesc **falii de transformare** sau **linii de refracție**.

Energia eliberată în focarul unui cutremur se propagă în toate direcțiile prin intermediul undelor seismice. Există două tipuri principale de unde seismice: **unde de volum**, care se propagă în interiorul Pământului, și **unde de suprafață**, care se propagă la suprafața scoarței terestre.

Undele de volum, la rîndul lor, se divizează în: **unde primare (P)** și **unde secundare (S)**. Deplasarea undelor P se realizează prin comprimări și dilatari succesive ale mediului pe direcția de propagare a lor, adică sănt unde longitudinale și se transmit atât prin medii solide (litosferă), cât și lichide (manta și nucleu). S-a constatat că undele P întotdeauna ajung la suprafață mai repede (au viteza mai mare) decît undele S, însă ultimele transferă mai multă energie și deci au o forță de distrugere mai mare. Astfel, înregistrarea undelor P ar putea fi un avertisment al primejdiei distrugerilor, dar intervalul de timp pînă la sosirea undelor S este prea mic (de ordinul secundelor sau maxim a zecilor de secunde) pentru a fi prevenită populația. Undele S se deplasează prin oscilații ale particulelor mediului, perpendiculare pe direcția de propagare a lor, adică sănt transversale și se transmit numai prin medii solide (litosferă).

Undele de suprafață se formează la reflexia repetată și suprapunerea undelor P și S în litosferă, fiind de 4 tipuri. Trei dintre ele sănt unde transversale și se numesc **unde Rayleigh**, iar a patra este longitudinală, fiind numită **undă Love**.

Viteza undelor seismice depinde de densitatea rocilor prin care se propagă. Undele P au viteze, în medie, de 7 km/s, ce sănt de aproximativ de 1,7 ori mai mari decît ale undelor S. Viteza undelor de suprafață este mai mică decît a celor de volum și constituie aproximativ 3 km/s.

Pentru înregistrarea undelor seismice în timpul unui cutremur se folosesc instrumente foarte sensibile, numite **seismografe**.

Pentru descrierea efectelor de distrugere și compararea cutremurelor, în prezent se utilizează două tipuri de scări: **scara intensității** și **scara magnitudinii**. Conform scării intensității, fiecărui cutremur i se atribuie un număr, ce caracterizează consecințele lui într-un anumit loc, dependent de distanța față de epicentru și particularitățile solului, numit **intensitate macroseismică (I)**. Întrucît pentru unul și același cutremur în diferite localități intensitatea macroseismică este diferită, caracteristica lui energetică este determinată de cea mai mare intensitate înregistrată. Scara internațională a intensităților, folosită în prezent de majoritatea țărilor, are 12 grade și se numește **scara intensității**.

**seismice Mercalli.** Fiecare grad al acestei scări conține o descriere foarte detaliată a efectelor cutremurului, observate la suprafața Pământului.

O altă scară, frecvent utilizată pentru stabilirea mărimei cutremurelor, folosind numai înregistrările instrumentale, este cea propusă de **Charles Richter**. El a definit magnitudinea  $M$  a unui cutremur ca logaritmul în baza 10 a amplitudinii maxime a undei seismice, înregistrate cu un seismograf standard, aflat la distanța de 100 km de la epicentrul lui. Aceasta înseamnă că creșterea magnitudinii cu o unitate corespunde creșterii amplitudinii maxime a undei seismice de 10 ori.

Între scările Mercalli și Richter nu există o corelație exactă. Ele pot fi doar comparate în cazul unei localități concrete. În tabelul de mai jos este prezentată scara intensității seismice Mercalli, expusă într-o formă prescurtată.

Inten- sitatea ( $I$ )	Efectele cutremurului după scara Mercalli
1	Microseisme înregistrate numai cu seismografe.
2	Este sesizat numai de foarte puțini oameni, aflați în stare de repaus, mai ales, de la etajele superioare ale clădirilor.
3	Vibrări simțite în încăperi, îndeosebi, la etajele superioare, însă foarte mulți oameni nu le atribuie unui cutremur.
4	În timpul zilei este simțit de majoritatea celor din încăperi. În timpul noptii unii se trezesc din somn. Vesela sună ușor.
5	Este simțit de aproape toată populația. Se pot răsturna obiectele mici sau mobila instabilă. Oscilează lustrele.
6	Este simțit de toată populația, unii de spaimă fug din case. Se deplasează mobila, în unele locuri cade tencuiala.
7	Toți se însărcină, părăsesc încăperile. Se răstoarnă diferite obiecte, apar fisuri ușoare sau puternice în perete în funcție de duritatea lor.
8	Spaimă generală și panică. Se prăbușesc coșurile de pe clădiri. Peretii se fisurează. Construcțiile mai slabe se deteriorează. Se deplasează mobila grea. Se modifică nivelul apei din fântâni.
9	Panică generală. Clădirile mai slabe se dărâmă, iar cele durabile suferă avarii considerabile. Apar crăpături în suprafața solului. Se rup conductele subterane.
10	Majoritatea clădirilor sunt distruse din temelie sau avariate considerabil. Crăpături multiple în scoarța terestră. Apa din râuri și lacuri este aruncată peste maluri.
11	Catastrofă. Se distrug clădirile, digurile, căile de transport, au loc alunecări de teren și devieri ale unor ape curgătoare.
12	Modificarea reliefului. Pe suprafața Pământului se formează unde. Nu rezistă, practic, nicio construcție. Se modifică cursul apelor, apar lacuri noi.

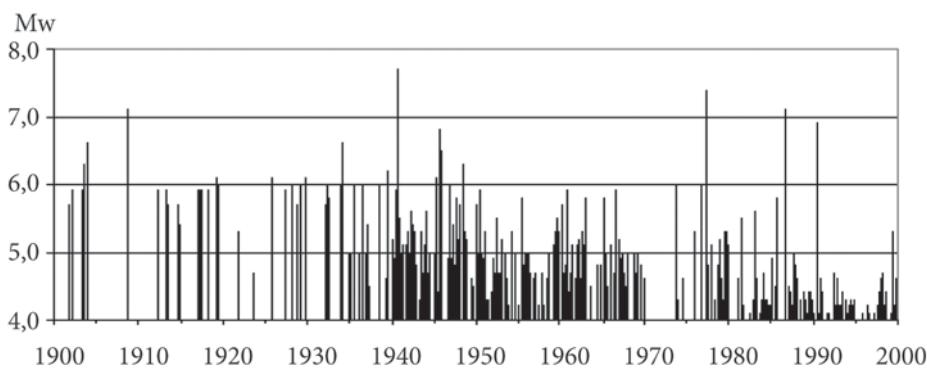


Fig. 5.29

Cutremurile care se resimt în Republica Moldova au epicentrul în regiunea Vrancea din România. Acestea se datorează coliziunii dintre Placa Eurasiacă și Subplăcile Intra-alpină și Moesică, mai exact, subducției Plăcii Eurasiatice. După cum se observă din diagrama prezentată în figura 5.29, unde sunt indicate numai cutremurile de magnitudine  $M > 4$  care au avut loc în secolul trecut, regiunea Vrancea are o activitate seismică destul de mare. De menționat că în această perioadă cutremurile cu magnitudinea  $M > 7$  s-au repetat la un interval de aproximativ 35 de ani.

Cea mai importantă problemă a seismologilor este, fără îndoială, cercetarea posibilităților de prezicere a cutremurilor. Însă în prezent asemenea posibilități încă nu există. Nimeni nu poate spune cu exactitate unde, în ce an și în ce zi va avea loc un cutremur cu consecințe grave pentru oameni.

## ÎNTRĂBĂRI

1. Ce se numesc unde seismice?
2. Ce reprezintă focalul unui cutremur? Dar epicentrul?
3. Care sunt mecanismele de formare a cutremurilor?
4. Ce reprezintă falia de transformare?
5. Care sunt tipurile de unde seismice? Caracterizați-le.
6. Care sunt scările pentru descrierea și compararea cutremurilor, utilizate în prezent? Prin ce se deosebesc ele?



# LUCRĂRI DE LABORATOR

## NOȚIUNI ELEMENTARE DESPRE CALCULUL ERORILOR

### a. Măsurări și erori

Procesul de măsurare a unei mărimi fizice constă în compararea acesteia cu o mărime de aceeași natură aleasă convențional în calitate de unitate. Rezultatul măsurării este valoarea numerică a mărimii măsurate, care arată de câte ori este cuprinsă unitatea ei în mărimea fizică respectivă. Măsurând masa unui corp cu unitatea **kilogram**, se obține  $m = 2 \text{ kg}$ , adică unitatea de 1 kg este cuprinsă în masa acestui corp de două ori.

Măsurările mărimilor fizice sunt de două tipuri: **directe** și **indirecte**. Dacă mărimea fizică este independentă, ea se compară direct cu unitatea corespunzătoare și măsurarea este numită directă. De exemplu, distanța se măsoară cu metrul-etalon, timpul – cu cronometrul, temperatura – cu termometrul etc. Cînd mărimea fizică este dependentă de alte mărimi, adică se exprimă prin acestea, ea se calculează cu ajutorul unei relații în care se introduc rezultatele măsurărilor directe ale anumitor mărimi independente. Pentru determinarea energiei cinetice a unui corp în mișcare mai întâi se măsoară direct masa și viteza corpului (cu vitezometrul), apoi, conform relației  $E_c = mv^2/2$ , se calculează energia cinetică.

Valorile numerice obținute prin măsurarea mărimilor fizice întotdeauna sunt afectate de **erori**. Sursele de erori sunt diverse, principalele fiind cauzate de imperfecțiunea metodelor de măsurare, sensibilitatea limitată a aparatelor de măsură; influența mediului înconjurător (temperatura, presiunea, umiditatea, cîmpurile electrice și magnetice etc.), calitățile și deprinderile experimentatorului și.a. Astfel, în orice măsurare se obține doar o valoare aproximativă a mărimii fizice măsurate, care nu coincide cu cea adevărată (exactă). Abaterea rezultatelor măsurărilor de la valoarea adevărată este caracterizată cantitativ de **erorile de măsurare**.

După caracterul lor, erorile de măsurare pot fi clasificate în **accidentale** (întîmplătoare), **sistematice** și **grave**.

**Erorile accidentale** variază imprevizibil de la o măsurare la alta, au un caracter aleatoriu și pot avea atît valori pozitive, cît și negative. Existența acestor erori este determinată de un ansamblu de cauze greu de sesizat, care, practic, nu pot fi înlăturate. De exemplu, măsurarea repetată a timpului de mișcare a unui vehicul pe un drum arbitrar

este influențată de acțiunea mereu diferită a vîntului, iar rezultatele obținute întotdeauna se deosebesc puțin. Din cauza fluctuațiilor din rețeaua de alimentare, la măsurarea repetată a intensității curentului electric de fiecare dată se obțin valori diferite, chiar dacă metoda, aparatul de măsură și condițiile mediului înconjurător rămân aceleași.

**Erorile sistematice** sunt determinate de anumite defecte ale aparatelor de măsură și de imperfecțiunea metodelor aplicate. Pe parcursul măsurărilor repetitive aceste erori sunt aceleași ca valoare numerică și ca semn. De exemplu, cîntărirea unui corp cu o balanță cu brațele inegale cauzează o eroare sistematică constantă (**eroare instrumentală**); dacă la aplicarea metodei pendulului matematic la măsurarea accelerării gravitaționale nu se ține seama de forțele de frecare și de rezistența aerului, rezultatul este afectat de o oarecare eroare permanentă (**eroare de metodă**). În cazul în care la începutul experimentului se înregistrează surse de erori sistematice, ele pot fi înălțurate fie prin înlocuirea aparatelor cu defecte și a metodei aplicate, fie prin introducerea unor corecții la rezultatele obținute.

**Erorile grave** sunt, de obicei, cauzate de neatenția experimentatorului în timpul citirii unei valori de pe scara aparatului de măsură sau de o modificare bruscă și de scurtă durată a condițiilor în care se realizează experimentul. În majoritatea cazurilor, din șirul de valori obținute în urma măsurărilor, cele afectate de erori grave se deosebesc foarte mult de alte tipuri de erori și trebuie înălțurate repetind măsurarea.

Din caracteristica celor trei tipuri de erori rezultă că valoarea mărimii fizice măsurate nu poate fi determinată exact, ci numai cu o oarecare precizie. Presupunând că erorile sistematice și cele grave au fost eliminate, vom estima erorile accidentale comise la măsurarea unei mărimi fizice.

## b. Erorile măsurărilor directe

Să analizăm mai întîi cazul măsurărilor directe. Admitem că se realizează  $N$  măsurări ale mărimii fizice  $X$ , obținîndu-se valorile aproximative  $X_1, X_2, \dots, X_N$ .

Mărimea

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

reprezintă media aritmetică a măsurărilor individuale și este cea mai apropiată de valoarea adevărată.

**Modulul diferenței dintre valoarea medie  $\bar{X}$  și cea individuală  $X_i$  este numit eroare absolută a măsurării individuale**

$$\Delta X_i = |\bar{X} - X_i| \quad (1)$$

**și are unitatea mărimii măsurate.**

Eroarea medie  $\Delta\bar{X}$  care afectează mărimea fizică  $X$  este determinată de media aritmetică a erorilor (1)

$$\Delta\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta X_i \quad (2)$$

și este numită **eroare absolută medie**. Rezultatul măsurării se scrie sub forma

$$X = \bar{X} \pm \Delta\bar{X}. \quad (3)$$

Aceasta înseamnă că valoarea adevărată a mărimii fizice măsurate  $X$  se află în intervalul

$$\bar{X} - \Delta\bar{X} \leq X \leq \bar{X} + \Delta\bar{X}.$$

Eroarea absolută însă nu caracterizează deplin calitatea măsurării. Presupunem că două lungimi diferite sătăcătoare cu aceeași eroare absolută egală cu 0,01 m. Atunci pentru o lungime de cîțiva metri eroarea comisă este satisfăcătoare, iar pentru alta de ordinul centimetrilor este foarte mare. Astfel, pentru a judeca despre precizia măsurării, se introduce noțiunea de eroare relativă:

### Raportul dintre eroarea absolută medie și valoarea medie a mărimii fizice măsurate se numește eroare relativă

$$\epsilon = \frac{\Delta \bar{X}}{\bar{X}}. \quad (4)$$

Ea arată ce parte din valoarea mărimii fizice măsurate constituie eroarea absolută medie și deseori este numită **precizie**. Eroarea relativă este o mărime adimensională și, de obicei, se exprimă în procente.

### c. Erorile măsurărilor indirecte

Măsurările mărimilor fizice de cele mai multe ori sătăcătoare sunt indirecte. Rezultatul măsurării se obține cu ajutorul unei relații ce exprimă dependența funcțională a mărimii fizice studiate de alte mărimi măsurate direct. Este evident că și eroarea mărimii fizice respective trebuie calculată cu ajutorul aceleiași dependențe funcționale. Aducem cîteva exemple de calcul al erorilor, dependența funcțională corespunzătoare reprezentând o sumă (diferență), produs sau cît a două mărimi fizice  $A$  și  $B$  măsurate direct cu erorile absolute medii  $\Delta \bar{A}$  și  $\Delta \bar{B}$ .

1. Dacă  $X = A \pm B$ , atunci  $\bar{X} \pm \Delta \bar{X} = (\bar{A} \pm \Delta \bar{A}) \pm (\bar{B} \pm \Delta \bar{B})$  sau  $\bar{X} \pm \Delta \bar{X} = (\bar{A} \pm \bar{B}) \pm \Delta \bar{A} \pm \Delta \bar{B}$ , unde  $\bar{X} = \bar{A} \pm \bar{B}$  este valoarea medie a mărimii fizice  $X$  măsurată indirect, iar

$$\pm \Delta \bar{X} = \pm \Delta \bar{A} \pm \Delta \bar{B} \quad (5)$$

rezintă eroarea absolută medie a acestei mărimi.

Din (5) se observă că sătăcătoare sunt mai multe combinații de semn ale erorilor  $\Delta \bar{A}$  și  $\Delta \bar{B}$ : a)  $\Delta \bar{A} + \Delta \bar{B}$ ; b)  $\Delta \bar{A} - \Delta \bar{B}$ ; c)  $-\Delta \bar{A} + \Delta \bar{B}$  și d)  $-\Delta \bar{A} - \Delta \bar{B}$ . Deoarece nu există garanții că măsurările vor da astfel de rezultate încât erorile lor să se compenseze reciproc [cazurile b) și c)], întotdeauna se ia cea mai nefavorabilă situație, cînd ele au același semn, adică se acumulează [cazurile a) și d)].

Așadar, eroarea absolută a unei mărimi fizice  $X$  exprimată prin suma (diferență) mărimilor  $A$  și  $B$  măsurate direct este

$$\Delta \bar{X} = \Delta \bar{A} + \Delta \bar{B}, \quad (6)$$

iar cea relativă

$$\epsilon = \frac{\Delta \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\Delta \bar{A} + \Delta \bar{B}}{\bar{A} \pm \bar{B}}. \quad (7)$$

### Eroarea absolută a unei mărimi fizice exprimate prin suma sau diferență altor mărimi fizice independente ce se măsoară direct este egală cu suma erorilor absolute ale acestora.

2. Dacă  $X = A \cdot B$ , atunci  $\bar{X} \pm \Delta \bar{X} = (\bar{A} \pm \Delta \bar{A}) \cdot (\bar{B} \pm \Delta \bar{B}) = \bar{A} \cdot \bar{B} \pm \bar{A} \cdot \Delta \bar{B} \pm \bar{B} \cdot \Delta \bar{A} \pm \Delta \bar{A} \cdot \Delta \bar{B}$ , de unde  $\bar{X} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ ,  $\pm \Delta \bar{X} = \pm \bar{A} \cdot \Delta \bar{B} \pm \bar{B} \cdot \Delta \bar{A} \pm \Delta \bar{A} \cdot \Delta \bar{B}$ .

Considerînd cea mai nefavorabilă situație, cînd erorile se acumulează, și neglijînd produsul  $\Delta\bar{A} \cdot \Delta\bar{B}$  ca fiind mic în comparație cu ceilalți termeni, obținem

$$\Delta\bar{X} = \bar{A} \cdot \Delta\bar{B} \pm \bar{B} \cdot \Delta\bar{A}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\bar{A}}{\bar{A}} + \frac{\Delta\bar{B}}{\bar{B}} = \varepsilon_A + \varepsilon_B. \quad (9)$$

3. Dacă  $X = \frac{A}{B}$ , atunci

$$\bar{X} \pm \Delta\bar{X} = \frac{\bar{A} \pm \Delta\bar{A}}{\bar{B} \pm \Delta\bar{B}} = \frac{(\bar{A} \pm \Delta\bar{A}) \cdot (\bar{B} \mp \Delta\bar{B})}{(\bar{B} \pm \Delta\bar{B}) \cdot (\bar{B} \mp \Delta\bar{B})} = \frac{\bar{A} \cdot \bar{B} \pm \bar{B} \cdot \Delta\bar{A} \pm \bar{A} \cdot \Delta\bar{B} - \Delta\bar{A} \cdot \Delta\bar{B}}{\bar{B}^2 - (\Delta\bar{B})^2}.$$

Făcînd aceleasi aproximări ca în cazul precedent și luînd în considerare că  $\bar{X} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}}$ , obținem

$$\Delta\bar{X} = \frac{\bar{A} \cdot \Delta\bar{B} + \bar{B} \cdot \Delta\bar{A}}{\bar{B}^2}, \quad (10)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\bar{A}}{\bar{A}} + \frac{\Delta\bar{B}}{\bar{B}} = \varepsilon_A + \varepsilon_B. \quad (11)$$

Astfel,

**Dacă mărimea fizică măsurată indirect se exprimă printr-un produs sau cît al mai multor variabile independente, atunci eroarea ei relativă este egală cu suma erorilor relative ale variabilelor măsurate direct.**

Mărimea fizică măsurată indirect poate fi dependentă funcțional de cele măsurate direct, exprimată și prin operații matematice mai complicate. În tabelul de mai jos se dă formulele de calcul al erorilor absolută și relativă, corespunzătoare diferitor operații matematice.

Nr. crt	Operația matematică	Eroarea	
		absolută	relativă
1.	$A \pm B$	$\Delta A + \Delta B$	$\frac{\Delta A + \Delta B}{A \pm B}$
2.	$A \cdot B$	$A\Delta B + B\Delta A$	$\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} = \varepsilon_A + \varepsilon_B$
3.	$\frac{A}{B}$	$\frac{A\Delta B + B\Delta A}{B^2}$	$\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} = \varepsilon_A + \varepsilon_B$
4.	$A^n$	$nA^{n-1} \Delta A$	$n \frac{\Delta A}{A} = n\varepsilon_A$
5.	$\sqrt[n]{A}$	$\frac{1}{n} A^{\frac{1}{n}-1} \Delta A$	$\frac{1}{n} \frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{n} \varepsilon_A$
6.	$\frac{1}{A} \pm \frac{1}{B}$	$\frac{\Delta A}{A^2} + \frac{\Delta B}{B^2}$	$\frac{B^2 \Delta A + A^2 \Delta B}{AB(B \pm A)} = \frac{1}{B \pm A} (B\varepsilon_A + A\varepsilon_B)$
7.	$\sin A$	$\cos A \cdot \Delta A$	$\operatorname{ctg} A \cdot \Delta A$
8.	$\cos A$	$\sin A \cdot \Delta A$	$\operatorname{tg} A \cdot \Delta A$
9.	$\operatorname{tg} A$	$\frac{\Delta A}{\cos^2 A}$	$\frac{2\Delta A}{\sin 2A}$

Nr. crt	Operația matematică	Eroarea	
		absolută	relativă
10.	$\operatorname{ctg} A$	$\frac{\Delta A}{\sin^2 A}$	$\frac{2\Delta A}{\sin 2A}$
11.	$\lg A$	$\ln 10 \cdot \frac{\Delta A}{A}$	$\frac{\ln 10}{\lg A} \cdot \frac{\Delta A}{A}$
12.	$\ln A$	$\frac{\Delta A}{A}$	$\frac{1}{\ln A} \cdot \frac{\Delta A}{A}$

Acest tabel se utilizează numai după aducerea dependenței funcționale cercetate la forma cea mai simplă. De exemplu, dependența  $X = \frac{A+B}{A}$  mai întâi se aduce la forma  $X = 1 + \frac{B}{A}$  și numai după aceasta se determină erorile absolută și relativă cu ajutorul tabelului menționat.

#### d. Eroarea unei singure măsurări

Deseori suntem nevoiți să efectuăm o singură măsurare. În asemenea situații, eroarea măsurării trebuie să fie egală cu cea a aparatului de măsură folosit (este indicată pe aparat sau în pașaportul tehnic). Dacă precizia aparatului nu este indicată, atunci eroarea absolută trebuie apreciată. De obicei, ea nu depășește jumătate din cea mai mică diviziune a scalei aparatului utilizat. De exemplu, măsurările făcute cu o riglă milimetrică au eroarea absolută de 0,5 mm. Dacă în calcule sănt folosite constante universale, atunci eroarea lor absolută se consideră egală cu jumătate din rangul ultimei cifre semnificative păstrate. De exemplu, dacă  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , atunci  $\Delta g = 0,05 \text{ m/s}^2$ , iar dacă  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , eroarea absolută este  $\Delta g = 0,005 \text{ m/s}^2$ .

Se consideră semnificative toate cifrele în afara de zerourile aflate în stînga numărului. Astfel, numerele 0,0271 și 310 au cîte 3 cifre semnificative.

La prelucrarea datelor experimentale obținute în urma măsurărilor se efectuează diferite calcule. Deseori se consideră eronat că numărul mare de zecimale păstrate mărește precizia rezultatului măsurării. Să analizăm următorul exemplu. Admitem că pentru determinarea volumului  $V$  al unui corp paralelipipedic cu laturile  $a$ ,  $b$  și  $c$  s-au efectuat măsurări cu o riglă centimetrică, obținîndu-se următoarele rezultate:  $a = 25,5 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$  și  $c = 1,5 \text{ cm}$ . Să calculăm eroarea relativă a rezultatului (precizia) considerînd eroarea absolută a rglei egală cu 0,5 cm (jumătate din valoarea celei mai mici diviziuni). Deoarece volumul corpului  $V = a \cdot b \cdot c$  se exprimă printr-un produs de mărimi independente, eroarea relativă este

$$\varepsilon_V = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

și numeric obținem  $\varepsilon_V = \frac{0,5}{25,5} + \frac{0,5}{10} + \frac{0,5}{1,5} \approx 0,02 + 0,05 + 0,33 \approx 0,4$ ;  $\varepsilon_V = 40\%$ .

Menționăm că din cele 40% ale preciziei rezultatului, 33% revin celei mai imprecise măsurări ale laturii  $c$ , 5% – ale laturii  $b$  și numai 2% – ale laturii  $a$ . Evident că pentru a mări precizia rezultatului, este nevoie să mărim precizia măsurării, adică a laturii  $c$ . Utilizînd în acest scop o riglă milimetrică (eroarea absolută a rglei este

0,5 mm), obținem un rezultat al măsurării mai exact,  $c = 1,3$  cm. Acum precizia rezultatului este

$$\varepsilon_V = \frac{0,5}{25,5} + \frac{0,5}{10} + \frac{0,05}{1,3} \approx 0,02 + 0,05 + 0,04 \approx 0,11; \varepsilon_V = 11\%.$$

Astfel, precizia rezultatului s-a mărit aproximativ de 4 ori și dacă dorim ca el să fie mai exact, este necesar să mărim precizia măsurărilor tuturor laturilor, utilizând, de exemplu, un şubler. Așadar,

**Precizia măsurărilor indirecte poate fi mărită doar prin mărirea preciziei măsurărilor directe, iar păstrarea unui număr mare de zecimale duce numai la complicarea inutilă a calculelor.**

Din exemplul considerat mai rezultă și modul de scriere a rezultatului final. Prezentarea acestuia, de pildă, sub forma  $V = (3,315 \pm 0,4) \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$  este absurdă. Într-adevăr, ținând seama de faptul că eroarea absolută conține o singură zecimală, ultimele două cifre ale numărului 3,315 nu au nicio însemnatate. Folosind regulile de rotunjire cunoscute din matematică, obținem rezultatul înscris sub forma corectă  $V = (3,3 \pm 0,4) \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ .

**Rezultatul final trebuie să conțină același număr de zecimale ca eroarea absolută. În calculele intermediare se păstrează o zecimală în plus pentru efectuarea rotunjirilor.**

## e. Prelucrarea grafică a datelor experimentale

Deseori în procesul prelucrării datelor experimentale se utilizează metoda reprezentării lor prin grafice. Această metodă oferă posibilitatea vizualizării dependenței cercetate și stabilirii caracteristicilor acesteia. Pentru reprezentarea grafică a dependenței studiate, de obicei, se folosește sistemul de coordonate rectangulare. Pe axa absciselor se depun valorile mărimii independente (date de experimentator), iar pe axa ordonatelor – valorile mărimii măsurate. Pentru reprezentarea acestor valori se alege o anumită scară, astfel încât cea mai mică valoare care se poate citi pe grafic să nu fie mai mică decât mărimea erorii absolute a măsurărilor, dar nici mult mai mare decât aceasta. Originea coordonatelor nu trebuie neapărat să coincidă cu valorile nule ale mărimilor reprezentate. Ea se alege pornind de la condiția utilizării complete a întregii suprafețe atribuite graficului. Diviziunile indicate pe fiecare axă de coordonate trebuie reprezentate echidistant, iar la capătul lor se scriu nu numai simbolurile mărimilor fizice, ci și unitățile lor cu multiplii sau submultiplii eventuali (fig. 1).

Fiecare punct experimental trebuie marcat vizibil pe grafic folosind în acest scop diferite semne distincte (cerculeț, cruciuliță, triunghi etc.). Apoi se trasează o curbă continuă, care să treacă prin cât mai multe puncte experimentale, lăsând de o parte și de alta ale ei un număr cât mai mic de puncte depărtate aproximativ egal de la curbă (fig. 1).

O caracteristică importantă a dependenței liniare în cazul reprezentării datelor prin grafice este **panta** curbei experimentale sau unghiul de înclinare al acesteia. Din figura 1,

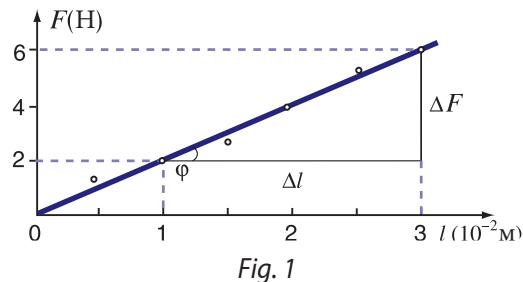


Fig. 1

care reprezintă dependența forței de elasticitate a unui resort în funcție de alungirea lui, se observă că panta dreptei ce descrie această dependență coincide cu constanta de elasticitate:

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta F}{\Delta l}.$$

Această metodă se va folosi în *Lucrarea de laborator nr. 2* pentru a determina constanta de elasticitate a unui corp cu proprietăți elastice.

## ÎNTREBĂRI

1. Care măsurări sunt directe și prin ce se deosebesc ele de cele indirecte?
2. Care sunt principalele surse de erori? Cum sunt clasificate erorile?
3. Ce se numește eroare absolută și ce reprezintă ea?
4. Ce se numește eroare relativă și care este semnificația ei?
5. Cu ce sunt egale eroarea absolută a unei sume (sau a unei diferențe) și eroarea relativă a unui produs (sau a unui cît) în cazul măsurărilor indirecte?
6. Cum poate fi mărită precizia măsurărilor indirecte?
7. Cum trebuie să fie prezentat rezultatul final al unei măsurări?
8. Cum se trasează o curbă experimentală în cazul reprezentării grafice a rezultatelor măsurării?

## LUCRAREA DE LABORATOR nr.1

### STUDIUL MIȘCĂRII RECTILINII UNIFORM ACCELERATE A UNUI CORP

**Scopul lucrării:** Studiul experimental al mișcării uniform accelerate și determinarea accelerării unui corp.

**Aparate și materiale necesare:** un cronometru (de preferat electronic); o panglică cu diviziuni centimetrice sau milimetrice (ruletă); un uluc metalic; un stativ cu clește; o bilă metalică; un cilindru metalic.

#### Considerații teoretice

Mișcarea uniform accelerată a unui corp este descrisă de ecuația (1.25).

Montajul experimental (fig. 2) realizat în această lucrare de laborator permite măsurarea distanței parcuse de o bilă metalică în mișcare uniform accelerată fără viteză inițială și a timpului de mișcare. În baza acestor măsurări se determină accelerația bilei cu ajutorul relației  $a = \frac{2s}{t^2}$ , care rezultă din (1.25) cînd  $v_0 = 0$ .



Fig. 2

## MODUL DE LUCRU:

- Realizați montajul experimental după cum este arătat în *figura 2*. Unghiul de înclinare a ulucului trebuie să fie mic ( $h \approx 3 \div 4$  cm la 1 m de lungime a ulucului).
- Simultan cu declanșarea cronometrului eliberați bila ținută într-un anumit punct la capătul superior al ulucului. Închideți cronometrul în momentul cînd se aude sunetul produs la ciocnirea bilei cu cilindrul plasat la capătul inferior al ulucului și citiți indicația lui.
- Măsurați distanța parcursă de bilă.
- Repetați de 4-5 ori măsurările descrise în punctele 2 și 3 pentru diferite distanțe, trecînd de fiecare dată rezultatele obținute în tabelul de mai jos:

Nr. crt	$t$ (s)	$s$ (m)	$a$ (m/s <sup>2</sup> )	$\Delta a$ (m/s <sup>2</sup> )
1.				
2.				
:				
Valoarea medie				

- Calculați erorile absolută și relativă ale valorii accelerării determinate experimental.
- Prezentați rezultatul final sub forma

$$a = (\bar{a} \pm \Delta \bar{a}) \text{ m/s}^2; \quad \varepsilon = \dots \%$$

- Expuneți concluziile referitor la rezultatele obținute.

## ÎNTREBĂRI

- De ce unghiul de înclinare a ulucului prin care se mișcă bila trebuie să fie mic?
- Care este rolul cilindrului metalic așezat la capătul inferior al ulucului?
- Cum se modifică accelerarea bilei metalice în funcție de timpul de mișcare a ei?
- Care este sursa principală de erori în experiența efectuată?

## LUCRAREA DE LABORATOR NR. 2°

### DETERMINAREA CONSTANTEI DE ELASTICITATE A UNUI CORP CU PROPRIETĂȚI ELASTICE

**Scopul lucrării:** Verificarea legii lui Hooke și determinarea constantei de elasticitate.

**Aparate și materiale necesare:** o riglă milimetrică (ruletă); un stativ cu două clește; un resort (sau un fir elastic); un set de mase marcate.

#### Considerații teoretice

În montajul experimental (*fig. 3*) al acestei lucrări de laborator este utilizat resortul unui dinamometru. Corpul



*Fig. 3*

suspendat la capătul de jos al resortului (firului elastic) acționează asupra lui cu o forță deformatoare egală cu ponderea (greutatea)  $P = mg$ . Întrucât în stare de echilibru forța de elasticitate este egală în modul și de sens opus cu ponderea, din (2.27) obținem

$$P = F_{el} \text{ sau } mg = k\Delta l, \text{ de unde } k = \frac{mg}{\Delta l}.$$

### MODUL DE LUCRU:

- Realizați montajul experimental din *figura 3*, astfel încît acul dinamometrului în stare nedeformată să coincidă cu indicația „0” de pe rigla milimetrică.
- Suspendați o masă marcată la capătul liber al resortului și notați pe rigla milimetrică alungirea  $\Delta l$  produsă.
- Repetați experiența de 5-6 ori adăugînd de fiecare dată noi mase marcate. Introduceți datele experimentale obținute în tabelul de mai jos:

Nr. crt	$m$ ( $10^{-3}$ kg)	$\Delta l$ ( $10^{-3}$ m)	$k$ (N/m)	$\Delta k$ (N/m)
1.	50			
2.	100			
⋮	⋮			
6.	300			
Valoarea medie				

- Construiți graficul dependenței  $F_{el} = mg$  în funcție de alungirea resortului  $\Delta l$  și determinați constanta de elasticitate calculând panta dreptei obținute. Comparați rezultatul cu valoarea medie căpătată anterior.
- Calculați erorile absolută și relativă comise la măsurarea constantei de elasticitate.
- Prezentați rezultatul final sub forma:

$$k = (\bar{k} \pm \Delta \bar{k}) \frac{N}{m}; \varepsilon = ... \%$$

- Trageți concluziile referitor la rezultatele obținute.

### ÎNTREBĂRI

- De ce la capătul liber al resortului dinamometrului școlar nu se pot suspenda greutăți cu masă mare?
- Explicați cum trebuie să fie forma dependenței forței elastice în funcție de alungirea resortului.

## LUCRAREA DE LABORATOR NR. 3

### DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE FRECARE LA ALUNECARE

**Scopul lucrării:** Studiul fenomenului frecării și determinarea coeficientului de frecare la alunecare prin metoda planului înclinat.

**Aparate și materiale necesare:** un tribometru (în lipsa tribometrului se ia o scindură de aproximativ  $80 \div 100$  cm lungime); un stativ cu un clește; o panglică cu diviziuni centimetrice (ruletă); un corp paralelipipedic; un set de mase marcate.

### Considerații teoretice

Dacă un corp alunecă uniform pe un plan înclinat, atunci coeficientul de frecare se exprimă prin tangenta unghiului de înclinare a planului (par. 2.6):  $\mu = \operatorname{tg} \varphi_f$ .

Din figura 4, care reprezintă montajul experimental al acestei lucrări de laborator, se observă că  $\operatorname{tg} \varphi_f = \frac{h}{l}$ .

Așadar, dacă se asigură o alunecare uniformă a corpului, atunci coeficientul de frecare la alunecare se determină prin măsurarea bazei  $l$  și a înălțimii  $h$  ale planului înclinat:  $\mu = \frac{h}{l}$ .

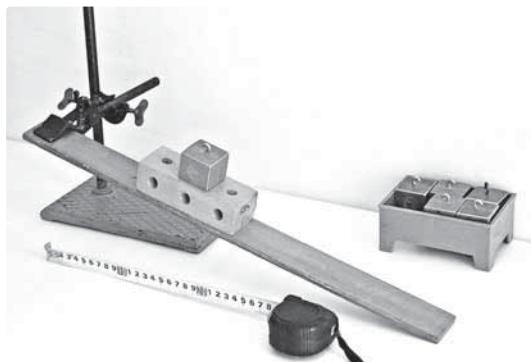


Fig. 4

### MODUL DE LUCRU:

1. Așezați corpul paralelipipedic pe scindură și, ridicînd-o încet de la un capăt, găsiți poziția ei (unghiul  $\varphi_f$ ) din care în urma unor ciocănituri ușoare corpul începe să alunecă uniform.
2. În această poziție fixați scindura în cleștele stativului și verificați încă o dată dacă corpul alunecă uniform.
3. Măsurați înălțimea  $h$  și baza  $l$  ale planului înclinat obținut și treceți rezultatele în tabelul de mai jos:

Nr. crt	$h$ (cm)	$l$ (cm)	$\mu$
1.			
2.			
:			
Valoarea medie			

4. Reluați de 2-3 ori procedeele de lucru descrise la punctele 1–3, adăugînd pe corpul paralelipipedic câte un corp cu masa de 100 g.
5. Calculați valoarea medie  $\bar{\mu}$  a coeficientului de frecare.
6. Estimați erorile absolută și relativă ale coeficientului de frecare la alunecare folosind următoarele relații:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \bar{\mu}}{\bar{\mu}} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta l}{l}, \quad \Delta \bar{\mu} = \varepsilon \cdot \bar{\mu}.$$

7. Prezentați rezultatul final sub forma  $\mu = \bar{\mu} \pm \Delta \bar{\mu}; \varepsilon = \dots\%$ .
8. Trageți concluziile referitor la rezultatele obținute.

## ÎNTREBĂRI

1. Care este esența metodei planului înclinat pentru determinarea coeficientului de frecare la alunecare?
2. De ce este necesar să se ciocănească ușor pe scindură cînd se determină poziția pentru care corpul alunecă uniform?
3. Propuneți o altă metodă de determinare a coeficientului de frecare la alunecare și încercați să o realizați.

## LUCRAREA DE LABORATOR NR. 4

### STUDIUL PENDULULUI ELASTIC

**Scopul lucrării:** Determinarea experimentală a perioadei proprii în cazul oscilațiilor unui pendul elastic.

**Aparate și materiale necesare:** stativ cu două clește, resort, set de mase marcate, riglă milimetrică, cronometru (de exemplu, de la un telefon mobil) sau ceasornic cu secundar.

#### Considerații teoretice

Perioada oscilațiilor proprii  $T_0$  a pendulului elastic este determinată de relația (5.18). Se observă că ea este direct proporțională cu masa sistemului oscilator  $m$  și invers proporțională cu constanta de elasticitate  $k$ . Pentru unul și același resort de masă neglijabilă perioada proprie este cu atât mai mare, cu cât masa corpului suspendat este mai mare.

Determinarea perioadei se poate realiza în două moduri: fie cu ajutorul relației (5.18), stabilind mai întâi constanta de elasticitate  $k$ , fie măsurînd intervalul de timp  $t$ , în care se produc un număr  $N$  de oscilații complete, adică

$$T = \frac{t}{N}. \quad (12)$$

Constanta de elasticitate  $k$  se determină din condiția de echilibru a corpului de masă  $m$  atîrnat la capătul resortului, adică  $mg = kx$ , de unde rezultă  $k = mg/x$ . Introducînd această relație în (5.18), obținem

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}, \quad (13)$$

unde  $x$  este alungirea resortului cînd corpul suspendat se află în echilibru.

#### MODUL DE LUCRU:

1. Realizați montajul experimental din figura 5, avînd grijă ca indicația „0” de pe rigla milimetrică să coincidă cu capătul resortului în starea nedeformată.
2. Atîrnăți la capătul liber al resortului o masă marcată și, după stabilirea poziției de echilibru, citiți pe rigla milimetrică alungirea  $x$  a acestuia.
3. Scoateți pendulul elastic din poziția de echilibru, deplasîndu-l cu 2–3 cm și măsurați cu cronometrul intervalul de timp  $t$ , în care se produc  $N$  oscilații armonice, adică oscilații de aproximativ aceeași amplitudine.
4. Repetați încă de 1-2 ori măsurările descrise în punctele 2



Fig. 5

și 3, adăugînd de fiecare dată noi mase marcate.

5. Calculați perioada oscilațiilor proprii a pendulului elastic, folosind relațiile (12) și (13). Introduceți rezultatele măsurărilor și determinările în tabelul de mai jos:

Nr. crt	$m$ (kg)	$x$ (m)	$T_0$ (s)	$\Delta T_0$ (s)	$N$	$t$ (s)	$T$ (s)	$\Delta T$ (s)
1.								
2.								
3.								

6. Estimați erorile (absolută și relativă) ale determinării perioadei proprii în cele două cazuri, folosind relațiile

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta g}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x}{x}, \quad \Delta T_0 = \varepsilon_1 \cdot T_0;$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta t}{t}, \quad \Delta T = \varepsilon_2 \cdot T.$$

7. Prezentați rezultatul final sub forma

$$T_0 = (T_0 \pm \Delta T_0)s, \quad \varepsilon_1 = \dots\%;$$
$$T = (T \pm \Delta T)s, \quad \varepsilon_2 = \dots\%.$$

8. Comparați valorile perioadei oscilațiilor proprii obținute prin cele două metode și faceți concluzii referitor la rezultatele măsurărilor.

## ÎNTREBĂRI

1. Ce reprezintă oscilațiile armonice? Care este legea mișcării oscillatorii a pendulului elastic?
2. De care parametri depinde frecvența proprie a pendulului elastic?
3. Cum se explică faptul că frecvența proprie nu depinde de amplitudinea oscilațiilor?

# RĂSPUNSURI LA PROBLEME

## **Capitolul 1. Cinematica**

### **Pag. 15–16**

- 10.** 3 m, 17 m;  
**11.** 2 km, 0,8 km;  
**12.** 1 m, 1,57 m, **13.** 118,6 m.

### **Pag. 20**

- 8.** 0; **9.** 4 unități,  $60^\circ$  cu axa Ox și  $30^\circ$  cu axa Oy;  
**10.**  $2\sqrt{5}$  unități, 10 unități.

### **Pag. 23**

- 6.** 12,5 m/s; **7.** 90 s;  
**8.**  $x = 8 - 1,5 t$ ; **9.** 4 s, 8 m și 12 m.

### **Pag. 26**

- 4.** 16 m/s; **5.** 5,4 m/s; **6.** 80 s; **7.** 45 s; **8.** 0,5 m/s; **9.** 3,16 m/s; 20 m, 63,2 m.

### **Pag. 36–37**

- 14.** 27 m/s; **15.** 4 m/s; **16.** 0,5 h;  
**17.**  $-0,2 \text{ m/s}^2$ , în sens contrar vitezei;  
**18.** 12 m/s;  
**19.** 5 m, 5 m, 13 m;  
**20.** 10 s; **21.** 45 m; **22.** 2 m/s, 8 m/s;  
**23.** 176,4 m, 58,8 m/s;  
**24.** De două ori, după 3 s (la urcare) și după 7 s (la coborîre); **25.** 53,9 m, 44,1 m; **26.** 6 s, 53,9 m/s;  
**27.** 2,5 s.

### **Pag. 41**

- 8.** 18,84 m/s; **9.** 0,6 s; **10.** 465,2 m/s;  
**11.** 0,25 m; **12.**  $v_{\text{sec}}/v_{\text{min}} = 20$ ; **13.**  $2,4 \text{ m/s}^2$ ;  
**14.** 1,6 m/s $^2$ ;  
**15.** 3,3 rad/s; **16.** 3 rad/s; **17.** 8 rad/s, 0,4 m.

### **Pag. 44**

- 4.** 81,63 m; **5.** 24 m/s, 2,12 s, 22,04 m, 25,44 m; **6.** 19,80 m/s;  
**7.** 15,04 m, 10,26 m/s;  $\approx 13^\circ$  sub orizontală; **8.** 35,41 m, 4,73 s, 163,85 m.

## **Capitolul 2. Principiile dinamicii. Forțele naturii**

### **Pag. 54**

- 12.** 0,6 kg; **13.** 7 kg; **14.** 1,125 kg;  
**15.** 4,8 m/s<sup>2</sup>; **16.** 1,2 kg; **17.** 2 m/s<sup>2</sup>.

### **Pag. 56**

- 3.** 25 N; **4.** Nu, forța de întindere a firului este egală cu 10 N.

### **Pag. 62–63**

- 10.**  $5,97 \cdot 10^{24}$  kg; **11.**  $2 \cdot 10^{30}$  kg;  
**12.**  $3,8 \cdot 10^8$  m; **13.** 0,03 m/s<sup>2</sup>; **14.** 3,6 km/s; **15.** 8.

### **Pag. 67**

- 6.** 7,5 cm; **7.** 1 000 N/m; **8.** a) 120 N/m, b) 500 N/m;  
**9.** 1,3 mm; **10.** 120 GPa; **11.** 2,5 m/s<sup>2</sup>; **12.** 1 m/s.

### **Pag. 72**

- 10.** Da; **11.** 0,6; **12.** 5 m/s; **13.** 0,02 m; **14.** 0,5.

### **Pag. 76–77**

- 1.** 0,75 m/s<sup>2</sup>; **2.** 3,1 m/s<sup>2</sup>; **3.** 1,9 m/s<sup>2</sup>; **4.** 40,5 N, 1,08 m; **5.** 1,2 N, 5,1 N.

## **Capitolul 3. Elemente de statică**

### **Pag. 84**

- 6.**  $30^\circ$ , 1 018,4 N; **7.** 980 N;  
**8.** 24,0 N, 4,8 N.

### **Pag. 87**

- 7.** 0,7 m; **8.** 127,3 N, 147 N; **9.** 1,82 m, 264,6 N; **10.**  $14^\circ$ .

### **Pag. 91**

- 4.** Cu 0,2 spre capătul opus; **5.** La 5,37 cm de la punctul de tangentă al sferelor spre centrul sferei din cupru; **6.** Luînd axa  $x$  în direcția  $AE$  și axa  $y$  în direcția  $AB$  cu originea în  $A$ , coordonatele centrului de greutate săint:  $x_c = 14,09$  cm,  $y_c = 5,45$  cm; **7.**  $\approx 71^\circ 30'$ .

## **Capitolul 4. Impulsul mecanic. Lucrul și energia mecanică**

### **Pag. 95**

- 5.** Impulsul primului cărucior este mai mare de 1,5 ori; **6.** 2,7 m/s;  
**7.**  $0,6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; **0.**  $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; **0,85**  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ ; **0,6**  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ ;  
**8.**  $9\,000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ ; **9.** 2,5 s.

### **Pag. 101**

- 5.** 0,8 m/s; **6.** 4,5 m/s; **7.** 0,05 m/s;  
**8.** 8 m/s,  $53^\circ$ ; **9.**  $2,77 \cdot 10^5$  kg.

### **Pag. 103**

- 4.** 4 m; **5.**  $2,8 \cdot 10^{35}$  kg · m<sup>2</sup>/s; **6.** S-a mărit de 9 ori.

### **Pag. 107–108**

- 6.** 28 N; **7.** 727 J; **8.**  $30^\circ$ ; **9.** 2,5 m/s<sup>2</sup>; **10.** 0,3; **11.** 150 W; **12.** 40 m/s; **13.**  $30^\circ$ .

### **Pag. 111**

- 7.** 0,08 kg; **8.** De circa 1,5 ori; **9.** 40 J;  
**10.** 0,256 kg; **11.** 14 N; **12.** 60 kJ, 100 kJ;

**13.** În scîndura a treia.

**Pag. 116**

**6.** Energia potențială a bilei de oțel este mai mare de 2,89 ori decît a celei din aluminiu; **7.** 80 m; **8.** 1 000 J; **9.** 4,5 kJ.

**Pag. 118**

**5.** 10 J; **6.** 1,5 J; **7.** 0,32 J; **8.** 3,3 J.

**Pag. 120**

**4.**  $L_{1231} = -F_f(l_1 + l_2 + \sqrt{l_1^2 + l_2^2})$ ,  $S_{12341} = -2F_f(l_1 + l_2)$ ; **5.** La viteză mai mare lucrul mecanic al forței de rezistență (pe același traseu) este mai mare în modul decît la viteză mai mică. Înind seama că lucrurile forței de rezistență sunt negative, lucrul ei la viteză mare este mai mic decît la o viteză mică.

**Pag. 126**

**6.** 20 m; **7.** 15 m/s; **8.** 5,24 m/s, 1,92 m/s; **9.** 1,1 m/s; **10.** 0,5 m; **11.** 1,225 J; **12.**  $(m_1 + m_2)\frac{m_2 v_2^2}{2m_1}$ ; **13.** 45 J, 5 J; **14.** -78,25 J; **15.** 1,76 N, 9,42 m/s.

**Capitolul 5. Oscilații și unde mecanice**

**Pag. 130**

**7.** 8 cm; **8.** 3 s; **9.** 2 Hz.

**Pag. 140–141**

**14.** 0,2 m; 0,628 s;  $\pi/2$ ;  $x(t) = 0,2 \sin(10t + \pi/2)$  (m); **15.** 0,4 kg; **16.** 0,25 m; **17.** 1,57 s; **18.** 0,24 N/m; 6,4 Hz.

**Pag. 142**

**4.**  $x = 7 \sin(2\pi t + 1,43)$  (cm); **5.** 2,24 cm; 1,11 rad.

**Pag. 149**

**8.** 3,67 km/s; **9.** 267 N; **10.** 0,7 m/s.

**Pag. 151**

**4.**  $\pi$  (rad); **5.**  $y = 2 \sin(40\pi t - \frac{\pi}{6}x)$  (cm);  $\frac{43\pi}{6}$  (rad); -1 cm; **6.**  $\pi/30$  ( $m^{-1}$ ).

**Pag. 158–159**

**7.** a) 1,5 m; b) 0,75 m; **8.** maxim – 1 000 m; minim – 1 250 m; **9.** 495,7 Hz.

**Acest manual este proprietatea Ministerului Educației al Republicii Moldova.**

---

<b>Liceul</b> _____				
Anul de folosire	Numele de familie și prenumele elevului	Anul școlar	<b>Aspectul manualului</b>	
			<b>la primire</b>	<b>la restituire</b>
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

- Dirigintele trebuie să controleze dacă numele elevului este scris corect.
- Elevul nu trebuie să facă niciun fel de însemnări pe pagini.
- Aspectul manualului (la primire și la restituire) se va aprecia folosind termenii: *nou, bun, satisfăcător, nesatisfăcător*.