I. Gyakorlat (2019.02.12)

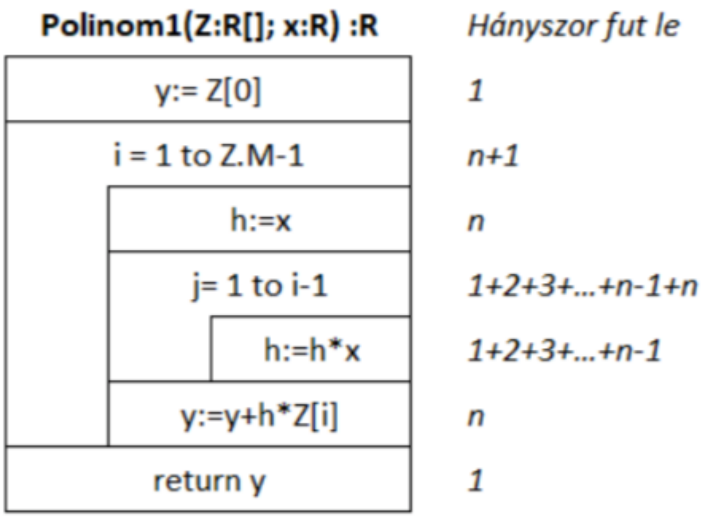
1. Polinom[1] helyettesítési értékének kiszámítása. Adott egy `n`-ed fokú polinom, határozzuk meg egy adott `x` helyen felvett értékét:

$$a_n * x^n + a_{n-1} * x^{n-1} + ... + a_1 * x + a_0$$

Tegyük fel, hogy nagyon sok polinomunk van és nagyon sok helyen kell kiszámítani az értékét, ezért törekedjünk arra, hogy minél hatékonyabb megoldást készítsünk.
A polinom együtthatóit egy 0-tól indexelt, n+1 méretű tömbben helyezzük el. (Megállapodás: ha a tömb neve „Z” vagy „Z”-re végződik, akkor 0-tól indexelünk.) A tömb mérete Z.M = n+1.
A megoldásoknál írjuk fel, hogy az egyes lépések hányszor hajtódnak végre. Vizsgáljuk meg a szorzások S(n) és az összeadások Ö(n) számát, a polinom fokszámának függvényében.

Feltehető, hogy az n≥0, azaz Z.M>0

Első megoldás, az összegzés tételéből származik:



S(n) = $\frac{n*(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$
Ö(n) = n

1 – olyan többtagú algebrai kifejezés, melyben csak számok és változók nem negatív egész kitevőjű hatványainak szorzata illetve összegei szerepelnek (Pl.: $q(x) = 2x^2 + 6x + 9$)

Második megoldás, x hatványait rekurzívan számoljuk a h változóban:
$x^i = x^{i-1} * x$, ha $i>0$, $x^0=1$

Rekurzív(Z:R[]; x:R) :R	*Hányszor fut le*
y:=Z[0] h:=1	*1*
i = 1 to Z.M-1	*n+1*
h:=h*x	*n*
y:=y+h*Z[i]	*n*
return y	*1*

$S(n) = 2n$
$Ö(n) = n$

Harmadik megoldás, a Horner séma:
$y = ((\ldots(a_n * x + a_{n-1}) * x + a_{n-2}) * x + \ldots + a_1) * x + a_0$

Horner(Z:R[]; x:R) :R	*Hányszor fut le*
y:=Z[Z.M-1]	*1*
i= Z.M-2 downto 0	*n+1*
y:=y*x+Z[i]	*n*
return y	*1*

$S(n) = n$
$Ö(n) = n$

A három megoldást szemléltetjük egy táblázatban a Θ aszimptotikus korlát segítségével. (Aszimptotikánál a konstans tagok és az alacsonyabb kitevőjű tagok elhagyhatók, ezért fog eltűnni a rekurzív megoldásnál a szorzatból a 2-es.) T(n) a futási időt jelöli.

	Polinom1	Rekurzív	Horner
S(*n*)	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
Ö(*n*)	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
T(n)	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$

2. **Buborék rendezés** (Elméletileg ez kellett, hogy legyen programozáson.) Készítsük el az alap algoritmust, majd a javított változatot (ez utóbbi szorgalmi HF). Elemezzük itt is, hogy a struktorgram egyes lépései hányszor hajtódnak végre. Nézzük meg az összehasonlítások Öh(n) és cserék Cs(n) számát. Cserék elemzésénél használjuk az mCs(n) (minimális cserék száma), MCs(n) (maximális cserék száma) illetve az ACs(n) (átlagos csere szám) jelöléseket. Átlagos csere számot nem kell pontosan kiszámolni, elég csak a „megérzés"-re támaszkodni.

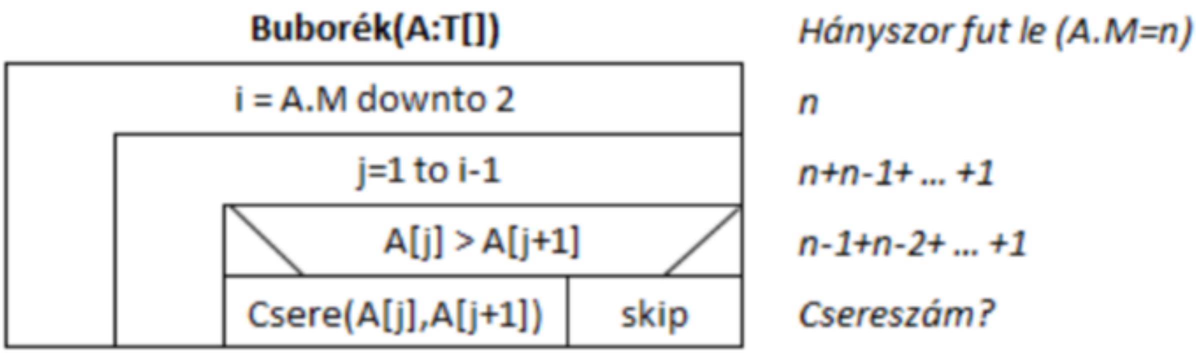
Buborék példa:

					Csere
3	5	2	4	1	0
3	5	2	4	1	1
3	2	5	4	1	1
3	2	4	5	1	1
3	2	4	1	5	*1. menet vége, 5 a helyén van*
3	2	4	1	5	1
2	3	4	1	5	0
2	3	4	1	5	1
2	3	1	4	5	*2. menet vége*
2	3	1	4	5	0
2	3	1	4	5	1
2	1	3	4	5	*3. menet vége*
2	1	3	4	5	1
1	2	3	4	5	*4. menet vége, rendezett a tömb*

Csere összesen: **7**

Összehaonlítás összesen: **10**

A rendező kulcsokat (és a hozzájuk tartozó adatokat) egy A nevű tömbben helyeztük el. A.M = n, a rendező kulcsok darabszáma.



Összehasonlítások száma Ö(n) = $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n*(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \Theta(n^2)$

Cserék számát hogyan tudjuk meghatározni?
A cserék száma a rendezendő adatsorban található inverziók számával egyenlő. Lásd a példában 7 inverzió van: 3,2 3,1 5,2 5,4 2,1 4,1
Ebből adódik, hogy mCs(n) = 0 (nincs inverzió, azaz növekvően rendezett a bemenet). MCs(n) = Ö(n) (minden összehasonlítást csere követ, azaz fordítottan rendezett a tömb). ACs(n) = $\frac{n*(n-1)}{4} = \Theta(n^2)$. Ezt nem kell pontosan levezetni az alábbi linken megtalálható dr. Fekete István jegyzetében

https://people.inf.elte.hu/fekete/algoritmusok_jegyzet/01_fejezet_Muveletigeny.pdf

Aszimptotika – egy görbének (lehet az függvény görbe is) végtelenbe vesző vége tetszőlegesen megközelít egy egyenest, de azt soha el nem éri, akkor a görbének ez a vége aszimptotikus tulajdonságú és az egyenes, amihez közelít a görbe aszimptotája.

Ω = aszimptotikus alsó korlát – adott *f(n)* függvényhez, akkor mondjuk, hogy $\Omega(g(n)) = f(n)$, ha létezik *c, n₀* állandó, hogy $n > 0$ esetén $0 \leq cg(n) \leq f(n)$

O = aszimptotikus alsó korlát - adott *f(n)* függvényhez, akkor mondjuk, hogy $O(g(n)) = f(n)$, ha létezik *c,* n_0 állandó, hogy $n > 0$ esetén $0 \leq f(n) \leq cg(n)$

Használjuk Ω és O a csere számokra: mCs(n) = 0, MCs(n) = $\Theta(n^2)$, azaz mCs(n) = $\Omega(1)$, MCs(n) = $O(n^2)$

Buborék rendezés javítási módszerei:

- figyelhetjük egy logikai változóval, hogy volt-e csere, ha nem volt akkor a külső ciklus álljon le
- megjegyezhetjük az utolsó csere helyét, ha ez u és u+1 indexen történt, akkor u+1-től már a tömb rendezett, a külső ciklus változót u-ra lehet csökkenteni. Legkedvezőbb és legrosszabb esetek: mÖ(n) = $\Theta(n)$, MÖ(n) = $\Theta(n^2)$. Futási idő: mT(n) = $\Theta(n)$, MT(n) = $\Theta(n^2)$.

Példa:

Javított buborék példa:

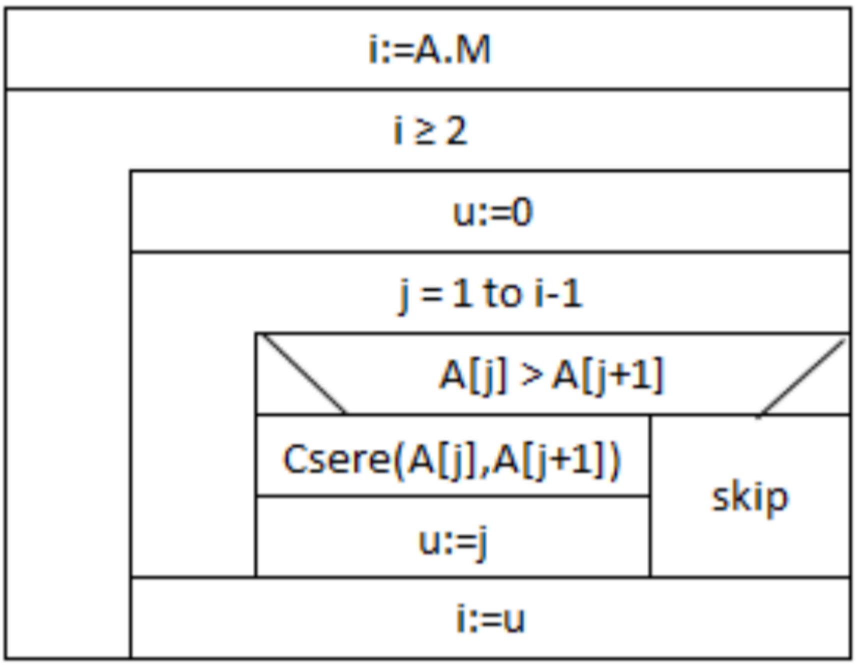
						Csere	
2	3	1	4	5		0	
2	3 ⇔	1	4	5		1	u=2
2	1	3	4	5		0	
2	1	3	4	5		0	
2	1	3	4	5	*1. menet vége 3,4,5 rendezett*		
2 ⇔	1	3	4	5		1	u=1
1	2	3	4	5	*kész*		

Csere összesen: 2

Összehaonlítás összesen: 5

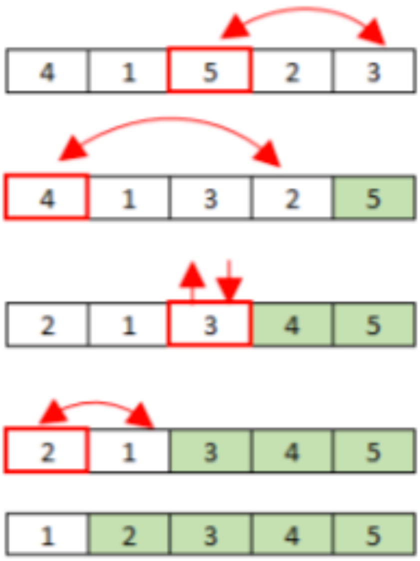
Struktogramja (házi feladat, később bekerül)

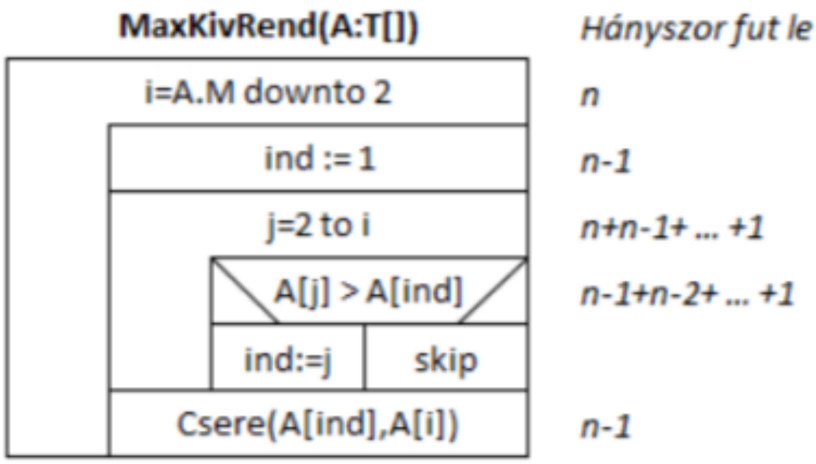
JavítottBuborék(A:T[])



3. Maximum kiválasztásos rendezés.

Maximum értéket azért nem használunk, mert rendezésnél mindig feltesszük, hogy nem csak a kulcs, hanem a kulcshoz tartozó rekord is tárolva van a tömbben, melynek mozgatása költséges lenne.

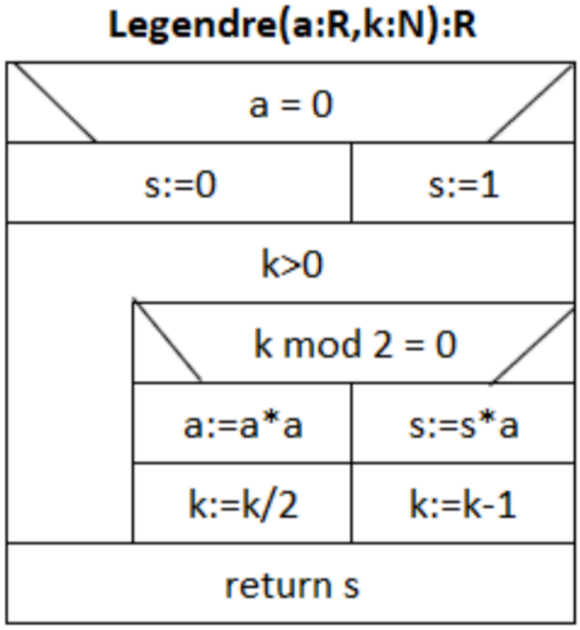




Házi feladatok

1. Legendre algoritmus. Az algoritmus az a^k hatványát számolja ki.

Struktogram házi feladat.



Útmutatás:

Érdemes lejátszani egy példán

Menet	a	s	k
Kezdés	3	1	11
1. k páratlan	3	3	10
2. k páros	3^2	3	5
3. k páratlan	3^2	3^3	4
4. k páros	3^4	3^3	2
5. k páros	3^8	3^3	1
6. k páratlan	3^8	3^{11}	0
k=0, vége az algoritmusnak, s –ben a megfelelő hatvány van			

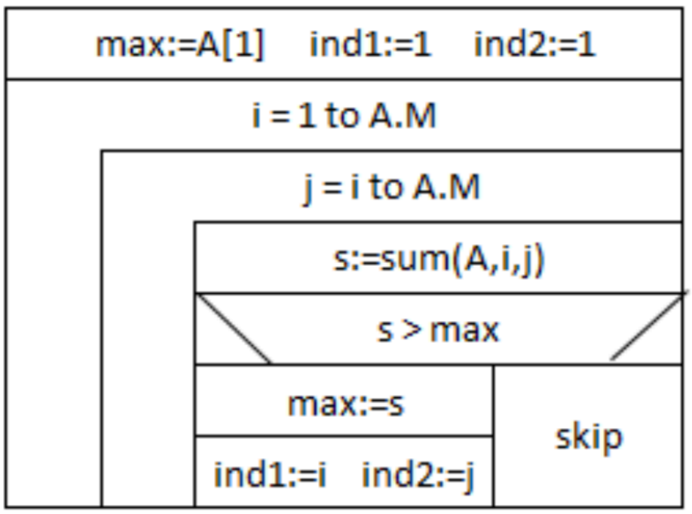
- legkedvezőbb eset, amikor a k 2 hatványa, ekkor a bináris alakja: 100..00, azaz a legutolsó menet kivételével mindig páros ágon fut az algoritmus, k mindig feleződik. A legutolsó menetben k=1 esetében egyszer fut le a páratlan ág. Ilyenkor a ciklus meneteinek száma: $T(k) = \log_2 k + 1$.
- legkedvezőtlenebb az az eset, amikor felváltva fut a páratlan, majd páros ágon. Ilyenkor 2 hatvány-1 alakú a k, aminek bináris alakja csupa 1-es: 111..11. Amikor a „k := k-1” ágon fut páros lesz a szám, majd kettővel osztva ismét páratlan, ilyenkor a ciklus meneteinek száma: $T(k) = 2*\lfloor\log_2 k\rfloor + 1$. (ha mindig osztunk 2-vel -> $\log_2$)

- Mivel ugyanazt a nagyságrendet kaptuk, azaz mT(k) = MT(k) = $\Theta(\log_2 k) = \Theta(\log k)$, így az általános eset is e kettő közé kell, hogy essen.
- egy kis kitérő: $\log_a n = \Theta \log_b n$ és fordítva, azaz ha $a,b > 1$, akkor a logaritmusok ugyanazt a nagyságrendet képviselik, így a logaritmus alapszáma elhanyagolható
- a k:=k/2 nem jelent osztást, ez csak a bitek shiftelését jobbra, így ez a Horner sémához hasonlóan egy nagyon hatékony algoritmus az egész kitevőjű hatványok kiszámításához.

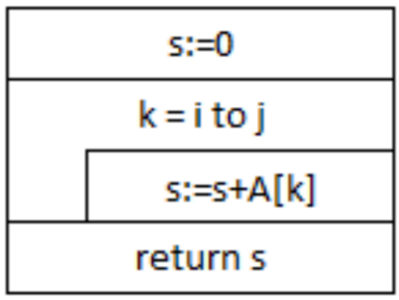
2. Adott egy n hosszú, egész számokat tartalmazó tömb. Keressük a tömb azon szakaszát, melynek összege a lehető legnagyobb. Legyen a tömb neve A és adjuk meg a két indexet: $1 \leq ind1 \leq ind2 \leq n$, melyre $\sum_{i=ind1}^{ind2} A[i]$ a maximális. 3 megoldás létezik: $\Theta(n^3)$, $\Theta(n^2)$, $\Theta(n)$.

Megoldások:

BruteForce(A:Z[])

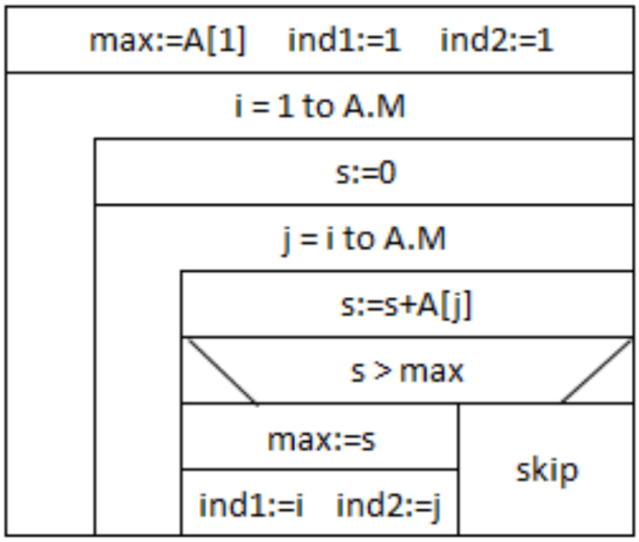


sum(A:Z[], i:N, j:N): Z



A két főciklus négyzetes műveletigényű (mintha egy négyzetes mátrix felső háromszögét járnánk be): $\Theta(n^2)$, a kiemelt összegző függvény pedig i-től j-ig előállítja a vektor elemeinek összegét, ami O(n), összességében tehát $\Theta(n^3)$

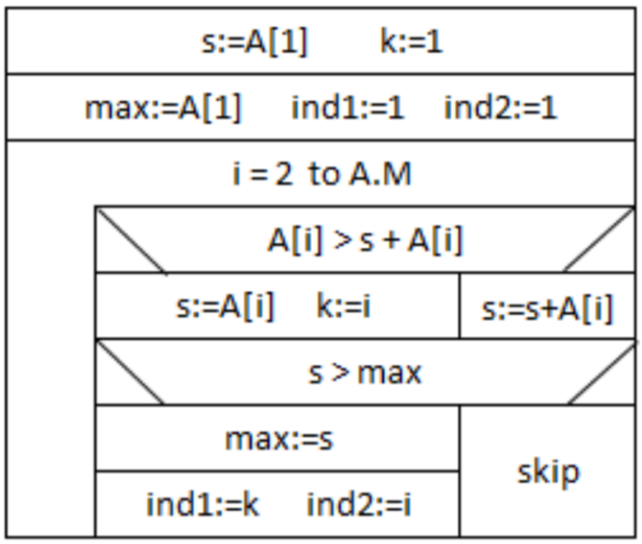
Négyzetes(A:Z[])



Ugyaúgy a „felső háromszöget" járjuk, be, de az összeg előállítását az előző összegből egy összeadással állítjuk elő (mint a hatványok számítása a polinomos feladatban), így a műveletigény $\Theta(n^2)$

A legügyesebb megoldás a lineáris:

Lineáris(A:Z[])



Illusztráció:

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	4	5	-3	-7	4	-1	2	3	-1	10
s	4	9	6	-1	4	3	5	8	7	17
k	1				5					
max	4	9								17
ind1	1	1								5
ind2	1	2								10

Egy adott *k* kezdőindextől (kezdetben 1-től) elkezdjük összeadni a tömbben lévő számokat. Mindig a következő (i-edik) elemmel növeljük az összeget. Ha az így kapott összeg nagyobb, mint az A[i], akkor megyünk tovább az összeg számolással. Amikor az összeg negatívvá válik (lásd példában 4. elem), akkor a következő körben s+A[i]<A[i] teljesül, így nem érdemes a részösszeget folytatni, egy új részösszeget kezdünk s-ben, és megjegyezzük az új kezdőindexet k-ban. Ha az adott körben s értéke nagyobb lesz, mint az eddigi részösszeg maximuma, akkor max-ot, és ind1, ind2 változókat is megfelelően átállítjuk.

Tulajdonképpen ez egy rekurzív függvényen végzett maximum keresés[2], ahol a rekurzív függvény értéke két komponensből áll, egy összegből (s), és egy kezdőindexből (k). A rekurzív függvény egyenlete pedig:

$$szum(1) = (A[1],1)$$

$$i > \text{ esetben: szum(i)} = \begin{cases} (A[i], i), ha\ A[i] > szum(i-1)_1 + A[i] \\ (szum(i-1)_1 + A[i], szum(i-1)_2), egyébként \end{cases}$$

A ciklusmag elsőként meghatározza a rekurzív függvény i-edik értékét, majd a maximum kiválasztás tétel ezeken keresi a maximumot.

---

2 – a megoldás dr.Gregorics Tibor Programozás kurzusán szerepelt: a rekurzív függvény kiszámolása iterációval progtétel kapcsán