# Nombres complexes et Géométrie

April 21, 2025

## Dans le programme de :

**Terminale Maths Expertes et Terminales STI2D**

### Prérequis :

Construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, forme algébrique (opérations, propriétés, conjugué), forme trigonométrique (module, argument), suites numériques, transformations géométriques, trigonométrie.

## Représentation des nombres complexes

## 1 Forme algébrique

**Propriété :** Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- $a$ est appelé **partie réelle** de $z$, on note $a = \mathrm{Re}(z)$.
- $b$ est appelé **partie imaginaire** de $z$, on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

**Remarque :**

- Si $a = 0$, on dit alors que $z$ est **imaginaire pur**.
- Si $b = 0$, alors $z = a \in \mathbb{R}$, $z$ est un **nombre réel**.

### 1.1 Exemples :

- Soit $z_1$ le nombre complexe tel que $z_1 = 5 - 4i$.
  - La partie réelle de $z_1$: $\mathrm{Re}(z_1) = 5$.
  - La partie imaginaire de $z_1$: $\mathrm{Im}(z_1) = -4$.
- Soit $z_2$ le nombre complexe tel que $z_2 = 3,79i$.
  - La partie réelle de $z_2$: $\mathrm{Re}(z_2) = 0$.
  - La partie imaginaire de $z_2$: $\mathrm{Im}(z_2) = 3,79$.
  - $z_2$ est **imaginaire pur**.

### 1.2 Définition :

Soit $z$ un nombre complexe tel que $z = a + ib$, avec $a$ et $b$ deux nombres réels. Alors, le **conjugué** de $z$, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe défini par

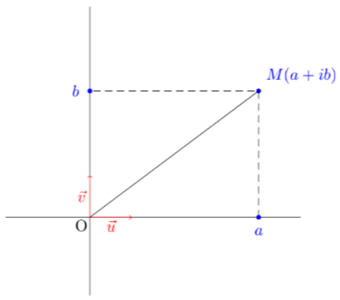
$$\overline{z} = a - ib.$$

### 1.3 Exemple :

Soit $z$ le nombre complexe tel que $z = 3 - 7i$.

- Le conjugué de $z$ est $\overline{z} = 3 + 7i$.

## 2 Forme trigonométrique




### 2.1 Définition :

Soit $z$ un nombre complexe non nul et $M$ le point d'affixe $z$ (voir figure). On appelle **argument** de $z$ toute mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{OM}})$, avec $\vec{u}$ le vecteur unitaire de l'axe des réels positifs.

On le note $\arg(z)$. L'argument est défini **à** $2k\pi$ **près** $(k \in \mathbb{Z})$.

### 2.2 Remarques :

1. Si $z$ est un réel, c'est-à-dire $z = a$ :
   - si $a > 0$, alors $|z| = a$ et $\arg(z) = 0$.
   - si $a < 0$, alors $|z| = -a$ et $\arg(z) = \pi$.
2. Si $z$ est un imaginaire pur, c'est-à-dire $z = ib$ :
   - si $b > 0$, alors $|z| = b$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$.
   - si $b < 0$, alors $|z| = -b$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$.

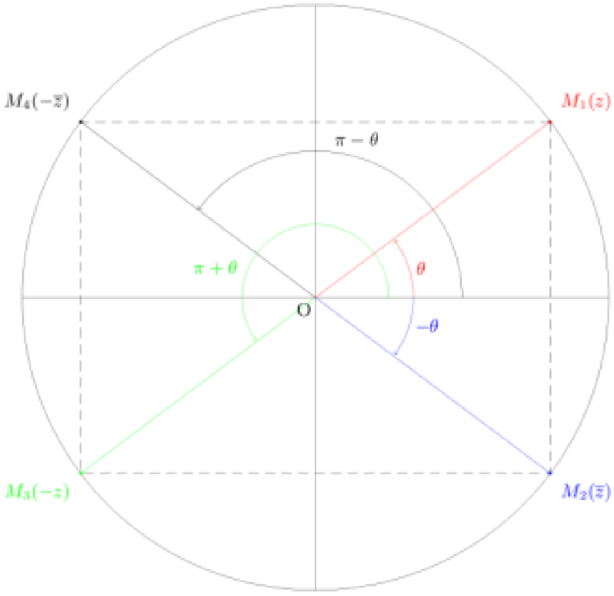



Figure 1: Module et argument de l'opposé et du conjugué

### 2.3 Propriété : Module et argument de l'opposé et du conjugué

Soit $z$ un complexe non nul et $M_1$, $M_2$, $M_3$, et $M_4$ les points d'affixes respectives $z$, $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$.

Comme on peut le remarquer sur la figure **??**, on a les propriétés suivantes :

$$|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$$

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$$

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$$

$$\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z)\ [2\pi]$$

## 3 Forme exponentielle

### 3.1 Théorème : Fonction exponentielle complexe

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

- En utilisant les formules d'addition du cosinus et du sinus, on montre que, pour tous réels $\theta$ et $\theta'$ :
$$f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta').$$

  En effet, on a :

$$
\begin{aligned}
f(\theta+\theta') &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\\
&= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta'))\\
&= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))\\
&= f(\theta)\times f(\theta').
\end{aligned}
$$

De plus, $f(0) = 1$.

- Par analogie avec la fonction exponentielle dans $\mathbb{R}$, on pose $f(\theta) = e^{i\theta}$, soit :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

- On a :

$$|e^{i\theta}| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(e^{i\theta}) = \theta\ [2\pi].$$

### 3.2 Exemple

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i.$$

### 3.3 Définition : Forme exponentielle d'un nombre complexe

Tout nombre complexe $z$ non nul s'écrit sous la forme :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z)\ [2\pi].$$

Cette écriture est appelée **forme exponentielle** de $z$.

Réciproquement, si $z$ est un nombre complexe tel que $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$.

### 3.4 Exemple

Soit $z = 1 + i$. On a :

$$|z| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

Donc, la forme exponentielle de $z$ est :

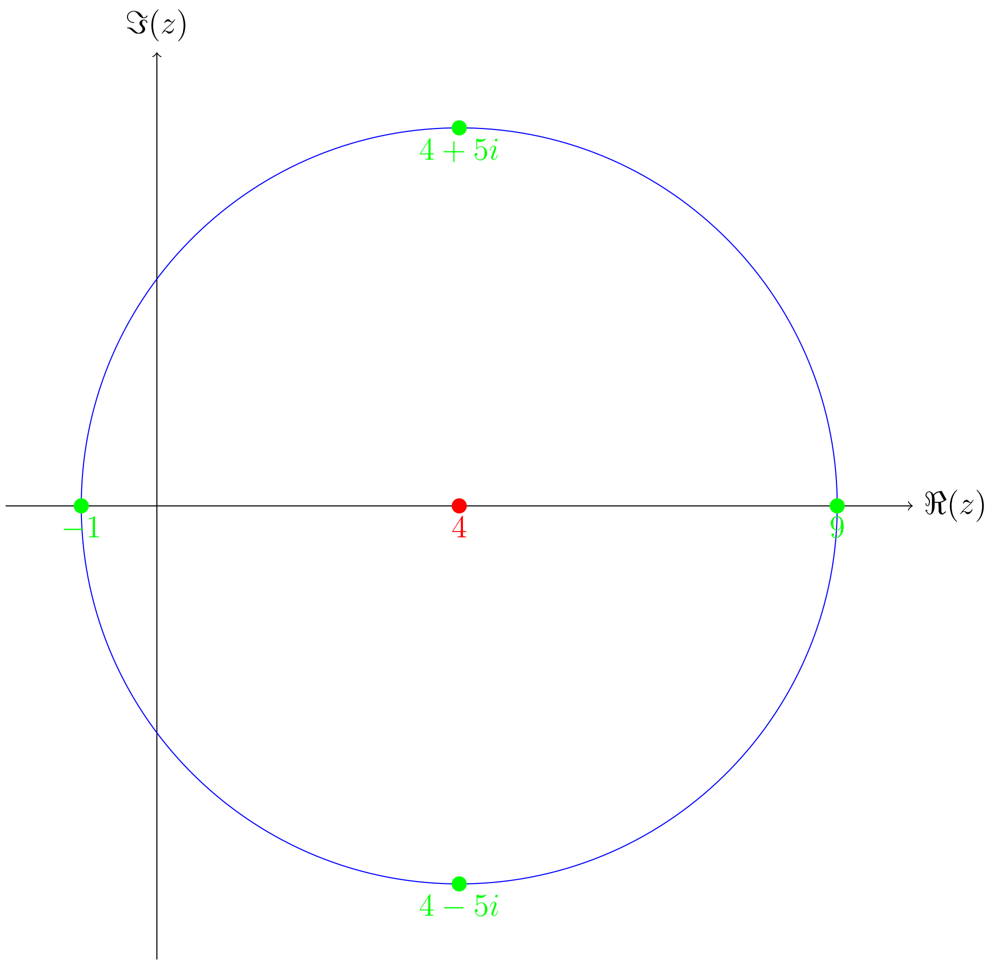
$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

# Caractérisations d'ensembles de points

## 4 Cercles, distance à un point

- Déterminer l'ensemble des points z complexes tels que $|z-4| = 5$.

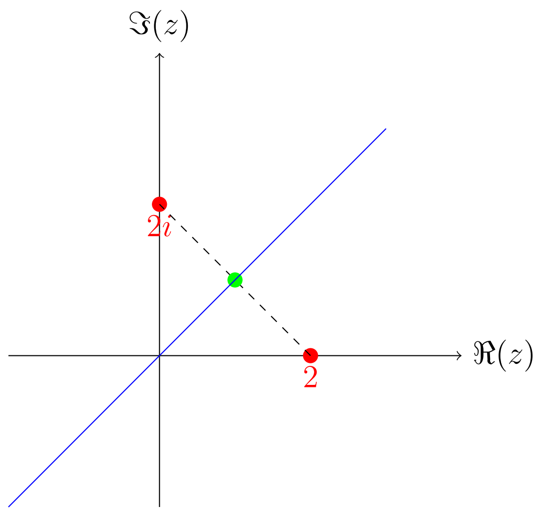
C'est l'ensemble des points z tels que la distance de z à 4 est égale à 5. C'est donc le cercle de centre 4 et de rayon 5.




## 5 Médiatrices

- Déterminer l'ensemble des points z complexes tels que $|z-2| = |z-2i|$.

C'est l'ensemble des points z tels que la distance de z à 2 est égale à la distance de z à $2i$.
C'est donc la médiatrice du segment suivant :



# 6 Utilisation des nombres complexes en géométrie

## 6.1 Formule de Moivre

**Formule de Moivre :** Pour tous réels $r$ et $\theta$ et tout entier naturel $n$, on a : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Que l'on peut également écrire : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

## 6.2 Formule d'Euler :

Pour tout réel $\theta$, on a : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

# 7 Racines n-ièmes de l'unité

## 7.1 Définition :

Les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$.

## 7.2 Propriété :

Les racines n-ièmes de l'unité sont les nombres complexes de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

## 7.3 Exemple :

Les racines 4-ièmes de l'unité sont les nombres complexes de la forme $e^{i\frac{k\pi}{2}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.