

Nombres complexes et Géométrie

April 22, 2025

Dans le programme de :

Terminale Maths Expertes et Terminales STI2D

Prérequis :

Construction de l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, forme algébrique (opérations, propriétés, conjugué), forme trigonométrique (module, argument), suites numériques, transformations géométriques, trigonométrie.

Partie Historique

L'étude des équations polynomiales a longtemps été au cœur de l'algèbre. Des mathématiciens comme Tartaglia, Cardan, Bombelli, Descartes et Girard ont introduit les quantités complexes sous forme symbolique.

Plus tard, Gauss, Argand et Mourey ont établi un lien entre les nombres complexes et la géométrie, notamment en essayant de formaliser la notion de vecteurs. Ce lien a permis des avancées comme le calcul de $\cos(\pi/5)$, en relation avec la construction du pentagone régulier dans les *Éléments* d'Euclide. Klein, dans son programme d'Erlangen, a introduit une perspective géométrique à travers l'étude des similitudes directes du plan complexe.

Initialement développés pour des raisons internes aux mathématiques, les nombres complexes sont aujourd'hui des outils essentiels en physique (électricité) et en économie (cycles de croissance et de prix).

Représentation des nombres complexes

1 Forme algébrique

Propriété : Tout élément de \mathbb{C} s'écrit de manière unique sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- a est appelé **partie réelle** de z , on note $a = \operatorname{Re}(z)$.
- b est appelé **partie imaginaire** de z , on note $b = \operatorname{Im}(z)$.

Remarque :

- Si $a = 0$, on dit alors que z est **imaginaire pur**.
- Si $b = 0$, alors $z = a \in \mathbb{R}$, z est un **nombre réel**.

1.1 Exemples :

- Soit z_1 le nombre complexe tel que $z_1 = 5 - 4i$.
 - La partie réelle de z_1 : $\operatorname{Re}(z_1) = 5$.
 - La partie imaginaire de z_1 : $\operatorname{Im}(z_1) = -4$.
- Soit z_2 le nombre complexe tel que $z_2 = 3,79i$.
 - La partie réelle de z_2 : $\operatorname{Re}(z_2) = 0$.
 - La partie imaginaire de z_2 : $\operatorname{Im}(z_2) = 3,79$.
 - z_2 est **imaginaire pur**.

1.2 Définition :

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$, avec a et b deux nombres réels. Alors, le **conjugué** de z , noté \bar{z} , est le nombre complexe défini par

$$\bar{z} = a - ib.$$

1.3 Propriétés :

- $\overline{\bar{z}} = z$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
- $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- $|z|^2 = z\bar{z}$.

1.4 Exemple :

Soit z le nombre complexe tel que $z = 3 - 7i$.

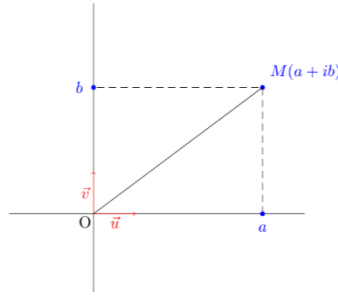
- Le conjugué de z est $\bar{z} = 3 + 7i$.

2 Forme trigonométrique

2.1 Définition :

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z (voir figure). On appelle **argument** de z toute mesure en radians de l'angle (\vec{u}, \widehat{OM}) , avec \vec{u} le vecteur unitaire de l'axe des réels positifs.

On le note $\arg(z)$. L'argument est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).



2.2 Remarques :

1. Si z est un réel, c'est-à-dire $z = a$:
 - si $a > 0$, alors $|z| = a$ et $\arg(z) = 0$.
 - si $a < 0$, alors $|z| = -a$ et $\arg(z) = \pi$.
2. Si z est un imaginaire pur, c'est-à-dire $z = ib$:
 - si $b > 0$, alors $|z| = b$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$.
 - si $b < 0$, alors $|z| = -b$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$.

2.3 Propriété : Module et argument de l'opposé et du conjugué

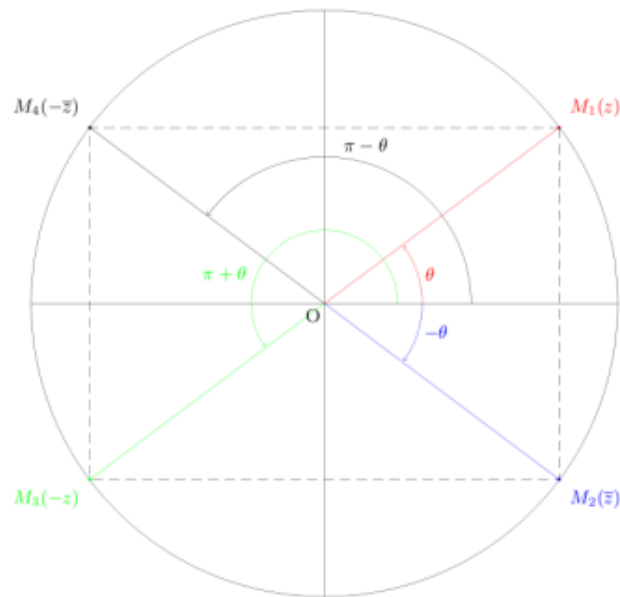


Figure 1: Module et argument de l'opposé et du conjugué

Soit z un complexe non nul et M_1 , M_2 , M_3 , et M_4 les points d'affixes respectives z , \bar{z} , $-z$ et $-\bar{z}$.

Comme on peut le remarquer sur la figure 1, on a les propriétés suivantes :

$$|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$$

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) [2\pi]$$

$$\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z) [2\pi]$$

3 Forme exponentielle

3.1 Fonction exponentielle complexe

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

- En utilisant les formules d'addition du cosinus et du sinus, on montre que, pour tous réels θ et θ' :

$$f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta').$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} f(\theta + \theta') &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \\ &= \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') + i(\cos(\theta) \sin(\theta') + \sin(\theta) \cos(\theta')) \\ &= (\cos(\theta) + i \sin(\theta))(\cos(\theta') + i \sin(\theta')) \\ &= f(\theta) \times f(\theta'). \end{aligned}$$

De plus, $f(0) = 1$.

- Par analogie avec la fonction exponentielle dans \mathbb{R} , on pose $f(\theta) = e^{i\theta}$, soit :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

- On a :

$$|e^{i\theta}| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(e^{i\theta}) = \theta [2\pi].$$

3.2 Exemple

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i.$$

3.3 Définition : Forme exponentielle d'un nombre complexe

Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la forme :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z) [2\pi].$$

Cette écriture est appelée **forme exponentielle** de z .

Réciproquement, si z est un nombre complexe tel que $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$.

3.4 Exemple

Soit $z = 1 + i$. On a :

$$|z| = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

Donc, la forme exponentielle de z est :

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

3.5 Exercice :

61 Sur la figure ci-dessous, à l'aide du codage, déterminer la forme trigonométrique des affixes des points A, B et C.

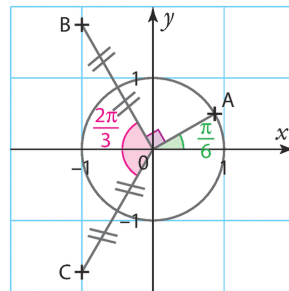


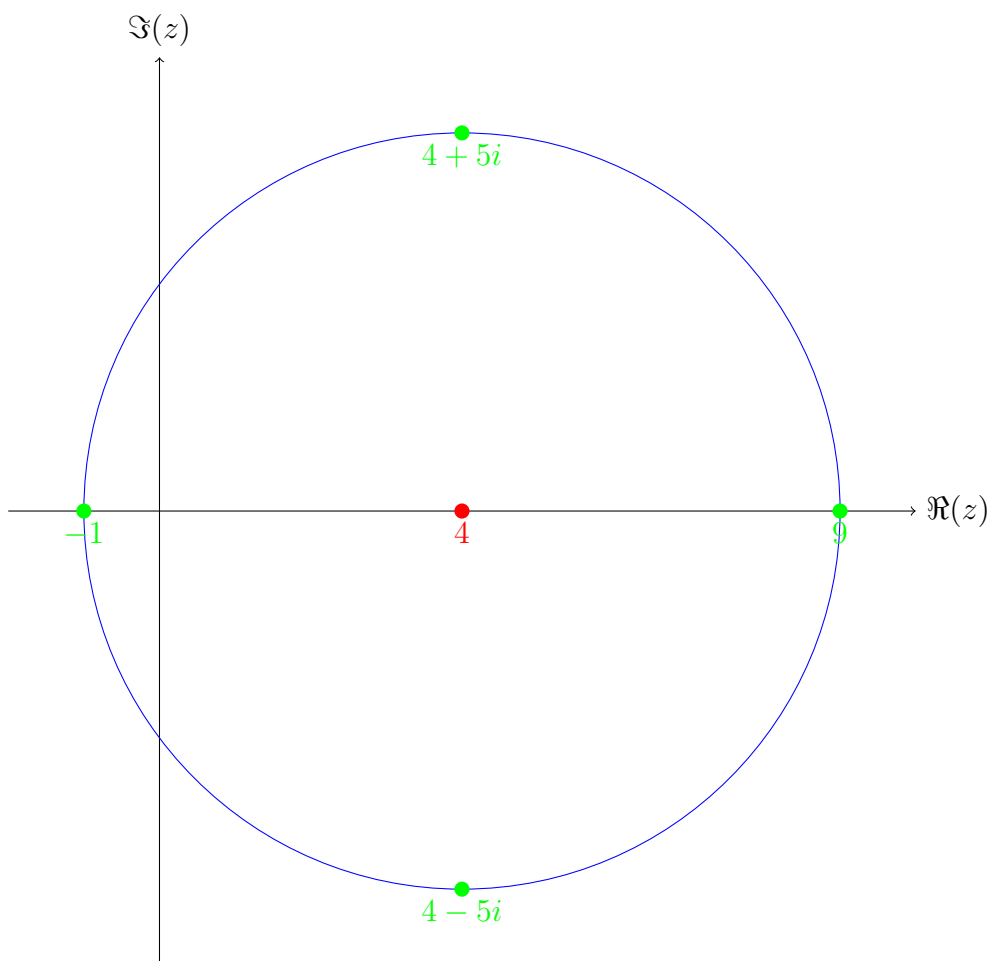
Figure 2: Exercice 1

Caractérisations d'ensembles de points

4 Cercles, distance à un point

- Déterminer l'ensemble des points z complexes tels que $|z - 4| = 5$.

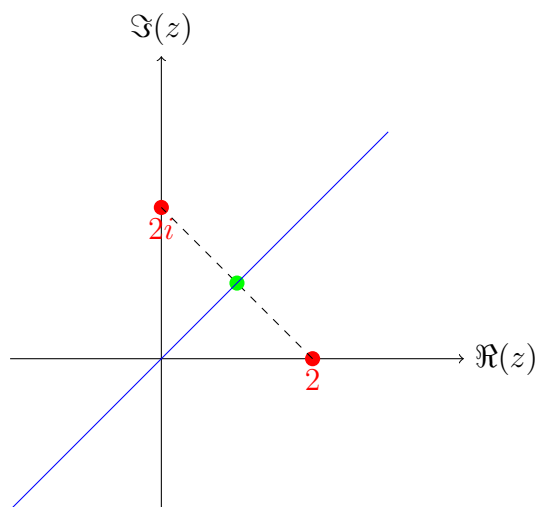
C'est l'ensemble des points z tels que la distance de z à 4 est égale à 5. C'est donc le cercle de centre 4 et de rayon 5.



5 Médiatrices

- Déterminer l'ensemble des points z complexes tels que $|z - 2| = |z - 2i|$.

C'est l'ensemble des points z tels que la distance de z à 2 est égale à la distance de z à $2i$.
C'est donc la médiatrice du segment suivant :



6 Utilisation des nombres complexes en géométrie

6.1 Formule de Moivre

Formule de Moivre : Pour tous réels r et θ et tout entier naturel n , on a : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
Que l'on peut également écrire : $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

6.2 Formule d'Euler :

Pour tout réel θ , on a : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

7 Racines n-ièmes de l'unité

7.1 Définition :

Les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$.

7.2 Propriété :

Les racines n-ièmes de l'unité sont les nombres complexes de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

7.3 Exemple :

Les racines 4-ièmes de l'unité sont les nombres complexes de la forme $e^{i\frac{k\pi}{2}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.