

前言

近年来,作者为清华大学无线电电子学系以及有关专业的研究生、无线电子学系的本科高年级学生开设了“随机过程”课程,同时编写了这方面的参考教材。本书就是在此基础上编写而成的。

随机过程已广泛应用于许多领域中,如物理、生物、社会科学(管理、经济)以及工程科学技术中,并且在这些领域中显示出十分重要的作用。本书将着重讨论随机过程的基本研究方法,并介绍应用中常遇到的几种基本随机过程,对某些应用,尤其是在控制和电子技术中的应用作了相应的介绍

考虑到学生在学习本课程之前已学过概率论的基本内容,但又可能还不够深入和熟练,因此,本书在某些章节中,为了引出过程的概念对概率论的基本内容作一些讨论,如对多元随机变量、维正态分布的讨论又如在研究马尔可夫过程中不断地回顾概率论的基本内容,并在附录中加入了一段“特征函数”。

在学习本课程之前,学生一般已经掌握了对确定性函数(信号)的研究分析方法。本书采用平行于分析研究确定性函数〔信号〕时使用的方法,确立一套相应的对随机过程的研究分析方法,如随机分析、谱分析,又如把大家所熟知的傅氏变换用于研究宽平稳过程等等。

全书共分七章。第一章提出随机过程的两类基本分析方法

第一章概论

§1 随机过程

在自然界中事物的变化过程可以分为两大类。第一类具有确定形式的变化过程,或者说具有必然变化规律用数学语言来说,就是事物的变化过程可以用一个时间 t 的确定函数来描述。这类过程称为确定性过程。例如电容器通过电阻放电时,电容两端的电位差随时间的变化就是一个确定性函数。而另一类过程没有确定的变化形式,也就是说,每次对它的测量结果没有一个确定的变化规律,用数学语言来说,这类事物的变化过程不能用一个时间 t 的确定性函数来描述。如果对该事物的变化过程重复地独立地进行多次观察,则每次所得到的结果是不相同的。从另一角度来看,如果固定某一观测时刻 t ,事物在时刻 t 出现的状态是随机的。这类过程称为随机过程。

自然界有许多属于随机性质的过程,例如:

(1)在电话问题中,我们用 $\xi(t)$ 表示在时刻 t 前电话局接到的呼唤次数。如果固定 t ,则 $\xi(t)$ 显然是一个随机变量。但是 t 是可变参数,是一个连续变量,所以 $\xi(t)$ 又是一个过程。因此,这个问题所涉及的不仅是一个随机变量的问题,它既是随机的,又是一个过程。

(2)在波耳氢原子模型中,电子可以在允许的轨道之一上运动。我们用“ $\xi(t)=i$ ”表示“在 t 时刻电子是在第 i 条轨道上运动”的事件。电子可以从一条轨道跃迁到另一条轨道上(即从第 i 轨道跃迁到第 j 轨道),而跃迁到哪一条轨道上是随机的,跃迁到的时刻 t_1, t_2, \dots 也是随机的。因此经过 t 时间后,电子所处的轨道 $\xi(t)$ 是随机的。

(3)液面上质点的运动。观察液面上一个作布朗运动的质点 A 。若用 $\{\xi(t), \eta(t)\}$ 表示在时刻 t 该质点在液面上坐标位置,显然,当固定 t 时, $\{\xi(t), \eta(t)\}$ 是一对二维机变量。但是 t 是一个连续变量,因此 $\{\xi(t), \eta(t)\}$ 又是个过程。

以上三个例子都说明需要在事物的变化过程中研究它的状态。

我们用“随机过程”一词来表示依赖于一个变动参量的一族随机变量。

虽然随机过程不能用一个确定性的函数来描述,但是随机过程也是有规律的。我们的任务就是研究如何描述一个随过程,即研究随机过程的性质和规律。

先从三个例子开始,说明如何描述一个随机过程。

(1)伯努利过程

以掷硬币为例。设想每隔单位时间掷一次硬币,观察它出现的结果。如果出现正面,记其结果为1;如出现反面,其结果为0。一直抛掷下去,便可得到一无穷序列 $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$,则

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\} = \{x_n; n=1, 2, \dots; x_n=1 \text{ 或 } 0\}$$

因为每次抛掷的结果 x_n 是一个随机变量(1或0),所以无穷次抛掷的结果是一随机变量的无穷序列。称随机变量的序列为随机序列,也可称为随机过程。每次抛掷的结果与先后各次抛掷的结果是相互统计独立的,并且 x_n 出现0或1的概率与抛掷的时间 n 无关。设

$$P\{x_n=1\}=\text{第}n\text{次抛掷出现正面的概率}=p$$

$$P\{x_n=0\}=\text{第}n\text{次抛掷出现反面的概率}=q=1-p$$

其中 $P\{x_n=1\}=p$ 与 n 无关,且 $x_i, x_k (i \neq k)$ 是

相互统计独立的随机变量。称具有这种特性的随机过程为伯努利型随机过程。

有许多实际问题是可以用伯努利概率模型来描述的。如在数字通信中所传送的信号是脉冲信号,在某一时刻 t 可能

出现脉冲,也可能不出现脉冲,出现脉冲称为1,不出现脉冲称为0,则在 t 时刻信号的值 x_t 是一个随机变量,即 x_t 有二个状态,0或1。如果在 t_1, t_2, t_3, \dots 时观察信号,则所得结果是 $\{x_1, x_2, x_3, \dots\} = \{x_n; n=1, 2, 3, \dots; x_n=1 \text{ 或 } 0\}$ 。如果在 t 时刻出现1或0的概率和观察的时刻 t 无关,在 t_i 出现 x_i 与其他任何时刻 t_k 出现 x_k 是相互统计独立的,并设 $P\{x_k=1\}=p, P\{x_k=0\}=q=1-p$,则 p 与 k 无关,且 $x_i, x_k (i \neq k)$ 是相互统计独立的随机变量,这样形成的随机序列属于伯努利概型。

在伯努利概型的随机过程中,如果固定观测时刻 t ,则它的试验结果是属于二个样本点(0,1)所组成的样本空间 S_{x_i} ,如果在二个不同时刻 t_1, t_2 观测试验结果,则 x_1, x_2 可能出现的值为(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),其样本空间为 $S_{x_1} \times S_{x_2}$,样本点为 $2^2=4$ 个。 $\{x_1, x_2\}$ 是一个二维随机变量,或二维随机矢量。

同理,如果在 t_1, t_2, \dots, t_n 观察其所取的值 (x_1, x_2, \dots, x_n) ,便可得到一个 n 维随机矢量,其样本空间为 $S_{x_1} \times S_{x_2} \times \dots \times S_{x_n}$,在该样本空间中包括从(0,0,...,0)到(1,1,...,1)的 2^n 个样本点。

于是,如果在 t_1, t_2, \dots 观察其所取的值 x_1, x_2, \dots ,则可得到一个无穷维的随机矢量,其样本空间为

$$S_{x_1} \times S_{x_2} \times \dots \times S_{x_n} \times \dots$$

(2)正弦波过程

在振荡源的大批生产中抽出其中一台振荡器,它的输出波形为

$$x(t)=\nu \sin(\omega t+\psi)$$

其中 ν 为振幅, ω 为振荡角频率, $\omega=2\pi f, f$ 为振荡频率,为振荡的起始相角。出于生产中的不一致性,各振荡器的振幅和频率与额定的指标均有一定的允许偏差,各台的偏差是不一致的,也就是说, ν, ω 是随机变量,每一台

的 ν, ω 是样本空间 (V, Ω) 中的一个样本点,而且每次把振荡器接上电源,振荡的起始相角 ψ 也是随机的, ψ 也有一个样本空间 Φ 。因此每次对一台振荡器作试验,其输出电压的 ν, ω, ψ 是样本空间 (V, Ω, Φ) 中的一个点。当然,输出电压还是一个时间函数。不同的振荡器在各次试验中其输出电压的时间函数虽然均是正弦波,但因 ν, ω, ψ 为随机变量,不同台不同次的输出可能均不相同。如果固定一个观测时刻,观察各台振荡器在这一时刻的电压,由于 ν, ω, ψ 是随机变量,且

$$x(t)=\nu \sin(\omega t+\psi)$$

故 $x(t)$ 也是随机变量。在 t 时 $x(t)$ 的分布决定于 t 以及 ν, ω, ψ 的分布。

称 $x(t)=\nu\sin(\omega t+\psi)$ 为正弦波随机过程,在这个过程中, t 是一个参量,它可以取 $[0,\infty)$ 内的任意值。

(3) 如对晶体管的噪声电平进行测量,每隔单位时间(假定为1微秒)取一个样本,则可在时刻 $t=1,2,3,\dots,n,\dots$ 测得一族无穷可列维随机矢量 $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$ 一次测量的结果为样本空间的一个点,每次测试的结果可能各不相同。我们把每次测试的结果称为一个现实,或称为一个样本函数。另一方面,如果固定一个观测时刻,对噪声进行无穷次测量,则可得到该时刻噪声的分布。如银固定二个时刻,则测得该二个时刻噪声(二维随机变量)的二元分布。如果固定 n 个时刻,则可测得 n 个时刻噪声(n 维随机矢量)的 n 维分布。

从上述三个例子中看到有二种描述随机过程的方法:

(1) 固定时刻 t ,随机过程(在该时刻所取的值是一随机变量。对应每一个随机变量,有一概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) ,即 $\xi(t, \omega)=\xi(\omega, t)$ 是样本空间 $\omega \in \Omega$ 内的一个随机变量,可用分布函数 $F_t(x)=F(x; t)=P\{\xi(t, \omega) < x\}=P\{\xi_t(\omega, t) < x\}$ 来描述 $\xi(\omega, t)$ 。这是一维分布。这种描述只能说明在某一时刻 $\xi(\omega, t)$ 的分布,而不能描述不同时刻 $\xi(\omega, t)$ 的相互关系。为了描述随机过程 $\{\xi(t), t \in T\}$ 在不同时刻的相互关系,就要求用 n 维联合分布函数来描述 n 个不同时刻 t_1, t_2, \dots, t_n 。相对应的 n 个随机变量 $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$ 。

$$\begin{aligned} F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \dots, \xi(t_n) < x_n\} \end{aligned}$$

其中 n 是任意选定的, t_1, t_2, \dots, t_n 是 T 中的 n 个元素。

由于上式中 n 及 t_1, t_2, \dots, t_n 都是任意选定的,因此要求给的是一族有限维分布函数。可以看出,这一族有限维分布函数不仅刻划出了对应于每一个时刻 t 的随机变量 $\xi(t)$ 的统计规律性,而且也刻画出了不同时刻 t_i, t_k 的 $\xi(t_i), \xi(t_k)$ 间的关系。因此,随机过程 $\xi(t)$ 的统计规律性可由它的有限维分布函数族完整地描述出来。称这一有限维分布函数族为随机过程 $\{\xi(t), t \in T\}$ 的有限维分布函数族。

这里需要说明如下两点:

- ① 为了简便起见,往往把 $\{\xi(t), t\}$ 简写为 $\xi(t)$ 。
- ② 有时把随机过程 $\xi(t)$ 在 $t=t_k$ 所取的值 $x(t_k)$ 成为随机过程 $\xi(t)$ 在 $t=t_k$ 时的状态。

2) 对于特定的 $\omega k \in \Omega$,即对于一个特定的试验结果, $\xi^{(k)}(t)$ 是一个确定的样本函数,它可以理解为随机过程的一次实现。有时为了避免混淆第 k 个实现可用 $x_k(t)$ 表示之。由于 $x_k(t)$ 是一次实现,它可以通过测量而得到。例如在正弦波过程的一次试验中, ν, ω, ψ 均为一个确定的值,因此一次试验得到的现实为一正弦函数。

这两种描述方法是互为补充的。由于随机过程可以用一族有限维分布函数描述,因此可以利用研究随机矢量的方法研究随机过程。

概括上面述二种描述方法,可以对随机过程作一个概括的说明。

定义: 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间, T 是直线上的参数集(可列或不可列的),若对每一个 $t \in T, \xi(\omega, t)$ 是随机变量,则称 $\{\xi(\omega, t), t \in T\}$ 为该概率空间上的随机过程。

随机过程是一个统称,有时这一名词专指 T 是连续的情况。若 $\{t \in T\}$ 取离散值时称为随机序列(或时间序列)。把一次试验结果 $x_k(t), t \in T$,称为随机过程的一个实现或一个样本。

参数集 T 在许多实际问题中往往指的是时间参数,如上述的三个例子。但是也可以采用其他物理量如长度作为参数集。例如,考虑长度为 L 的棉条的横截面,若用 $A(x)$ 表示在 x 处的棉条横截面积,则对于固定的 $x, A(x)$ 是一随机变量。在 n 个不同距离 x_1, x_2, \dots, x_n 处对应的横截面积 $A(x_1), A(x_2), \dots, A(x_n)$ 组成一 n 维随机矢量,即 $A(x)$ 是个随机过程。

§2 随机过程的分类和举例

根据参数集 T 的性质,随机过程可分为两大类:

(1) 参数集 T 是一个可列集,如

$$T_1 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$T_2 = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

S_1 中的伯努利过程就是属于这一类的随机过程。称这类过程为离散参数随机过程或随机序列。

(2) 参数集 T 是一个不可列集,如

$$T_3 = \{t/t \geq 0\}, \quad T_4 = \{t/-\infty < t < \infty\}$$

这类过程称为连续参数随机过程。

另一方面也可以据 $\xi(t_k)$ 所取值(即状态)的特征,把随机过程分为两大类。(1)离散状态,即 $\xi(t_k)$ 所取的值是离散的(2)连续状态,即 $\xi(t_k)$ 所取的值在一个范围内是连续的。

所以随机过程可分为四大类:

(1) 离散参数离散型随机过程

这类过程的特点是参数集为离散的,同时固定 t_k 、 $\xi(t_k)$ 所取的值(状态)也是离散的。伯努利过程属于这一类。

例一、一维随机游动的研究。设有一质点在 x 轴上作随机游动,即在 $t=0$ 时质点属于 x 轴的原点 0 ,在 $t=1, 2, 3, \dots$ 时质点可以在 x 轴上正向或反向移动一个单位距离,作正向移动一个单位距离的概率为 p ,作反向移动一个单位距离的概率为 $q=1-p$ 。经时间 n ,质点偏离原点的距离为 k ,问处于 k 的概率如何?

解 设质点每次移动的距离为 ξ_i , ξ_i 可取 $+1$,也可取 -1 ,即

$$P\{\xi_i = +1\} = p$$

$$P\{\xi_i = -1\} = q = 1 - p$$

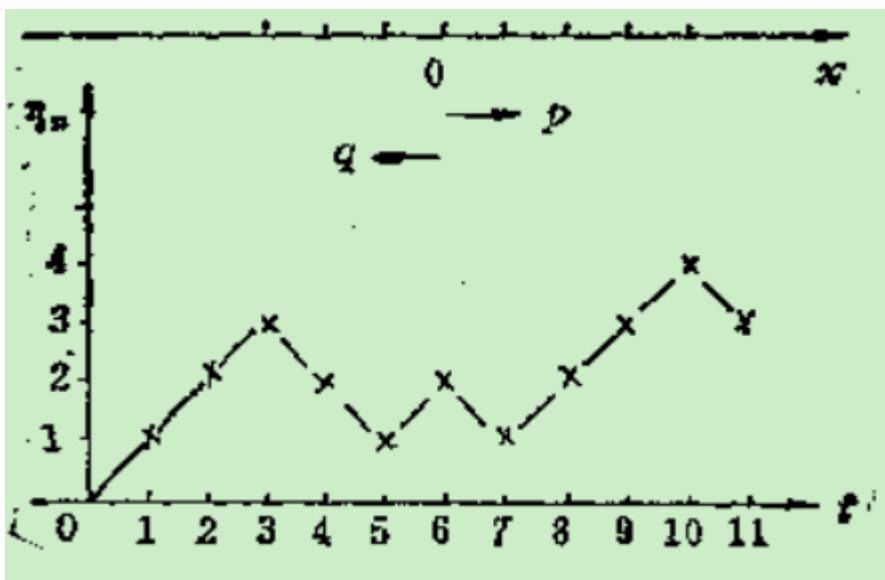


图1-1

设质点在 $t=n$ 时,偏离原点的距离为 η_n , η_n 也是一随机变量,于是

$$\eta_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad \text{而} \quad \eta_0 = 0$$

又设质点每次游动 t 与该质点所处的位置无关,当 $i \neq k$ 时 ξ_i 和 ξ_k 是相互统计独立的随机变量。图1-1画出了 η_n 的样本函数。

当 $n=1$ 时,质点可取的位置为 $\eta_1=1$ 或 $\eta_1=-1$,而

$$P\{\eta_1=1\}=P\{\xi_1=1\}=p$$

$$P\{\eta_1=-1\}=P\{\xi_1=-1\}=q=1-p$$

当 $n=2$ 时,质点可能取的位置为2,0,-2,而

$$P\{\eta_2=2\}=P\{\xi_1=1, \xi_2=1\}=P\{\xi_1=1\}P\{\xi_2=1\}=p^2$$

$$P\{\eta_2=0\}=P\{\xi_1=1, \xi_2=-1\}+P\{\xi_1=-1, \xi_2=1\}$$

$$=P\{\xi_1=1\}P\{\xi_2=-1\}+P\{\xi_1=-1\}P\{\xi_2=1\}=2pq$$

$$P\{\eta_2=-2\}=P\{\xi_1=-1, \xi_2=-1\}=P\{\xi_1=-1\}P\{\xi_2=-1\}=q^2$$

依此类推,当 $t=n$ 时,质点可能取的位置为 $n, n-2, n-4, \dots, -(n-4), -(n-2), -n$ 。

如果在 n 次游动中有 m 次质点正向移动,即有 m 次 $\xi_i=+1$,则有 $n-m$ 次质点做反向移动,即有 $n-m$ 次 $\xi_i=-1$ 。此时

$$\begin{aligned} \eta_n &= \sum_{i=1}^n \xi_i = m(+1) + (n-m)(-1) \\ &= 2m - n = k \quad \text{或} \quad m = \frac{n+k}{2} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} P\{\eta_n = k\} &= \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \\ &= \binom{n}{\frac{n+k}{2}} \cdot p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} \end{aligned}$$

上式中 m 是一正整数,则如 n 为奇数, k 也是奇数, $k < n$ 。如 n 为偶数, k 也是偶数, $k < n$ 。

(2)连续参数离散型随机过程

这类过程的特点是参数集 T 是连续的,而在某一时刻, $\xi(t_k)$ 所能取的值(即状态)是离散型的。

例二 设有一脉冲数字通信系统,它传送的信号是脉宽为 T_0 的脉冲信号,每隔 T_0 送出一个脉冲。脉冲幅度 $\xi(t)$ 是一个随机变量,它可取四个值(+2,+1,-1,-2),且取这四个值的概率是相等的,即

$$P\{\xi(t)=+2\}=P\{\xi(t)=+1\}=P\{\xi(t)=-1\}=P\{\xi(t)=-2\}=\frac{1}{4}$$

不同周期内脉冲幅度是相互统计独立的,脉冲的起始时间相对于原点($t=0$)的时间差 u 为均匀分布在 $(0, T_0)$ 内的随机变量。试求在两个时刻 t_1, t_2 该随机过程 $\xi(t)$ 所取值 $\xi(t_1), \xi(t_2)$ 的二维联合概率密度。

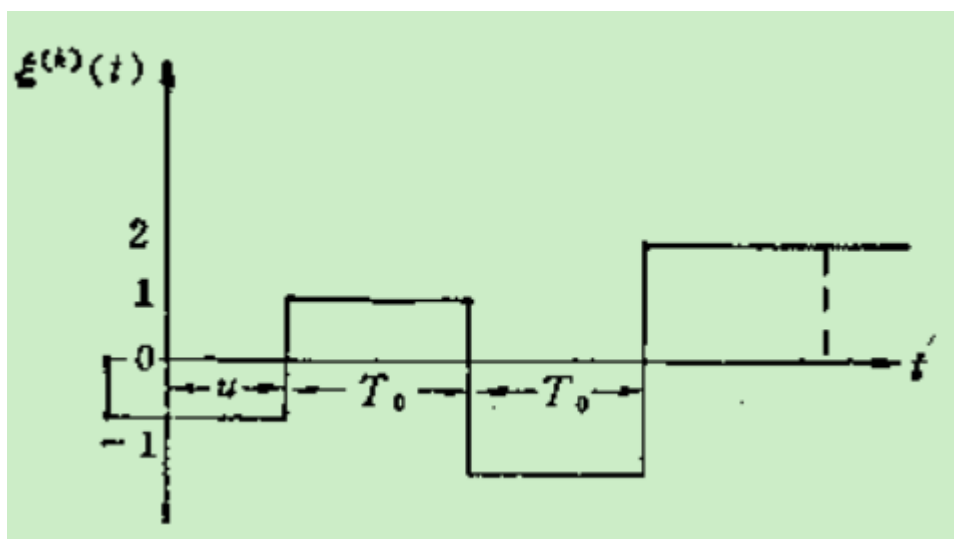


图1-2

解 图1-2给出了该脉冲数字宿号的典型样本函数图。

在时间轴上固定两个时刻 t_1 、 t_2 首先要研究的问题是 t_1 、 t_2 是否处在同一脉冲内。设事件 c 表示 t_1 、 t_2 间有不同周期的脉冲沿存在,即事件 c 表示 t_1 、 t_2 处在不同的脉冲周期内。它的逆事件 c^c 表示在 t_1 、 t_2 间没有不同周期的脉冲沿,即 t_1 、 t_2 处在同一脉冲周期内。

当 $|t_1 - t_2| > T_0$ 时,事件 c 为必然事件,因此

当 $|t_1 - t_2| > T_0$ 时, $P(c) = 1$ (1)

反之,当 $|t_1 - t_2| \leq T_0$ 时,事件 c 为不可能事件,即当

$|t_1 - t_2| \leq T_0$ 时, $P(c^c) = 1 - P(c) = 0$ (2)

当 $|t_1 - t_2| \leq T_0$ 时, t_1 、 t_2 有可能处在同一脉冲内,也有可能处于两个不同脉冲内。设 θ 为 t_1 所在的脉冲的起始时刻。由于脉冲的起始时间相对于原点($t=0$)的时间差 u 均匀分布于 $(0, T_0)$ 内,而且该信号为等脉宽的脉冲信号,脉宽均为 T_0 ,则 θ 也是均匀分布的随机变量, θ 可视为均匀分布于 $(t_1 - T_0, t_1)$ 内的随机变量。

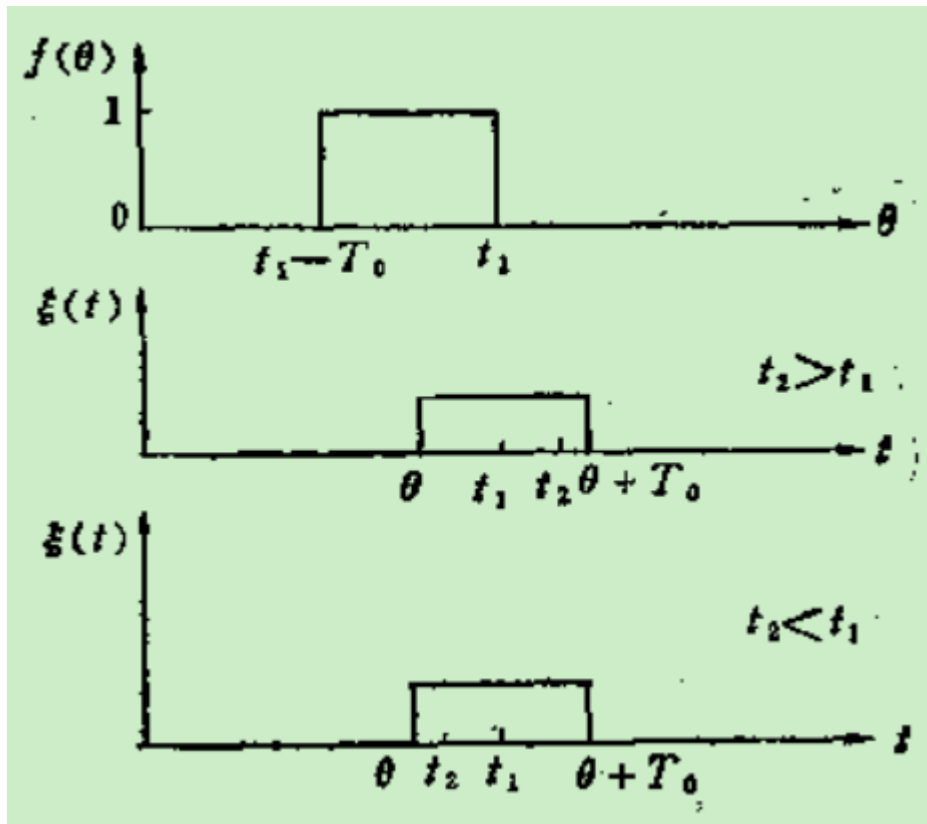


图1-3

图1-3画出了 θ 的概率密度和 t_1 、 t_2 、 θ 的关系图。如 $t_1 < t_2$, 则

$$\begin{aligned}
 P(c^c) &= P\{t_2 < \theta + T_0\} = P\{\theta > t_2 - T_0\} \\
 &= 1 - P\{\theta < t_2 - T_0\} = 1 - \frac{1}{T_0} \int_{t_1 - T_0}^{t_2 - T_0} d\theta \\
 &= 1 - \frac{t_2 - t_1}{T_0}
 \end{aligned}$$

如 $t_2 < t_1$, 则

$$\begin{aligned}
 P(c^c) &= P\{t_2 > \theta\} = \frac{1}{T_0} \int_{t_1 - T_0}^{t_2} d\theta \\
 &= 1 - \frac{t_1 - t_2}{T_0}
 \end{aligned}$$

因此

$$P(c^c) = 1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \quad (3)$$

$$P(c) = \frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \quad (4)$$

根据全概率公式知

$$f_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}}(x_1, x_2) = f_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}|c}(x_1, x_2|c) \cdot P\{c\} + f_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}|c^c}(x_1, x_2|c^c) P\{c^c\} \quad (5)$$

根据不同周期内脉冲幅度是相互统计独立的随机变量，于是

$$f_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}|c}(x_1, x_2|c) = \left[\sum_{i=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_1 - i) \right] \times \left[\sum_{k=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_2 - k) \right] \quad (6)$$

如果 t_1 、 t_2 处在同一周期内，则 $\xi(t_1)=\xi(t_2)$ ，这时

$$f_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}|c^c}(x_1, x_2|c^c) = \sum_{i=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_1 - i) \delta(x_2 - i) \quad (7)$$

把 (1)、(2)、(3)、(4) 及 (6)、(7) 代入 (5) 式得 $\xi(t_1)$ 、 $\xi(t_2)$ 的二维联合概率密度，即，当 $|t_1 - t_2| \leq T_0$ 时

$$\begin{aligned} f_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}}(x_1, x_2) &= \left[\sum_{i=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_1 - i) \right] \times \left[\sum_{k=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_2 - k) \right] \frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \\ &+ \left[\sum_{i=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_1 - i) \delta(x_2 - i) \right] \left(1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \right) \end{aligned}$$

当 $|t_1 - t_2| \geq T_0$ 时

$$f_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}}(x_1, x_2) = \left[\sum_{i=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_1 - i) \right] \times \left[\sum_{k=-2, -1, 1, 2} \frac{1}{4} \delta(x_2 - k) \right]$$

(3)连续参数连续型随机过程

这类过程的特点是参数集 T 是连续的，且在 t 时刻过程 $\xi(t)$ 所取值是连续型随机变量§1中讨论的正弦波过程和晶体管噪声均属于这类随机过程。

例三 有正弦波随机过程 $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$

$$\xi(t) = V \cos \omega t$$

其中 V 为常数， V 为在 $(0, 1)$ 内均匀分布的随机变量，即

$$f_V(V) = \begin{cases} 1 & (0 \leq V \leq 1) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

(1)画出 $\xi(t)$ 的样本函数；

(2) 求 $t=0, \frac{x}{4\omega}, \frac{3\pi}{4\omega}, \frac{\pi}{\omega}$ 时随机变量 $\xi(t_k)$ 的概率密度；

(3) 求 $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 时 ξ_t 的概率密度。

解 (1) 如果 $V=\frac{2}{3}$ ，则 $x(t)=\frac{2}{3}\cos\omega t$ 是一个确定性函数（见图1-4a）；如果 $V=0$ ，则 $x(t)=0$ （见图1-4b）；如果 $V=1$ ，则 $x(t)=\cos\omega t$ 是一个确定性函数（见图1-4c）。

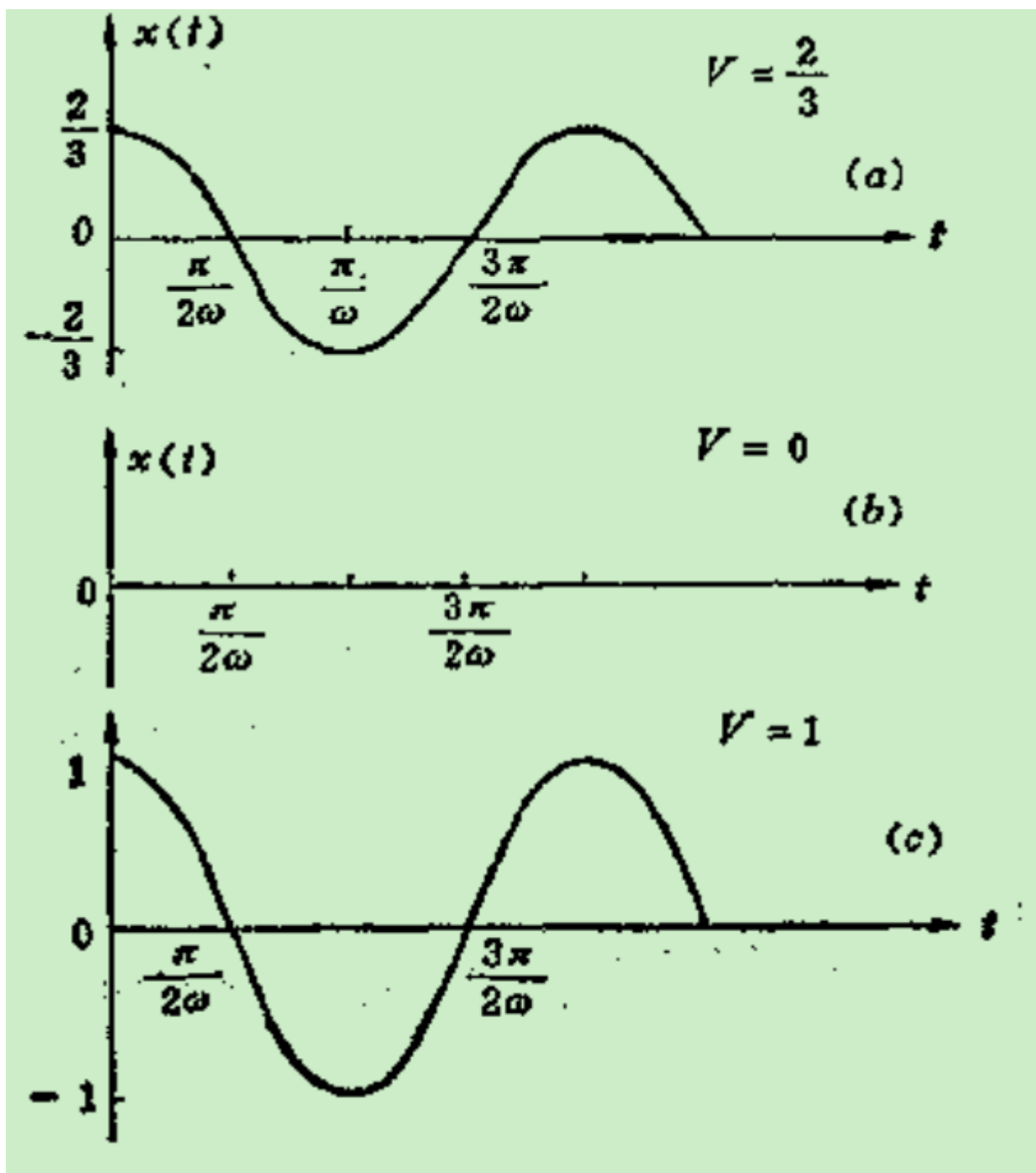


图1-4

(2) 当 $t=0$ 时, $\xi(0)=V$, 故 $\xi(0)$ 的概率密度就是 V 的概率密度函数 (见图1-5), 即

$$f_{\xi_0}(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{其他 } x \text{ 值}) \end{cases}$$

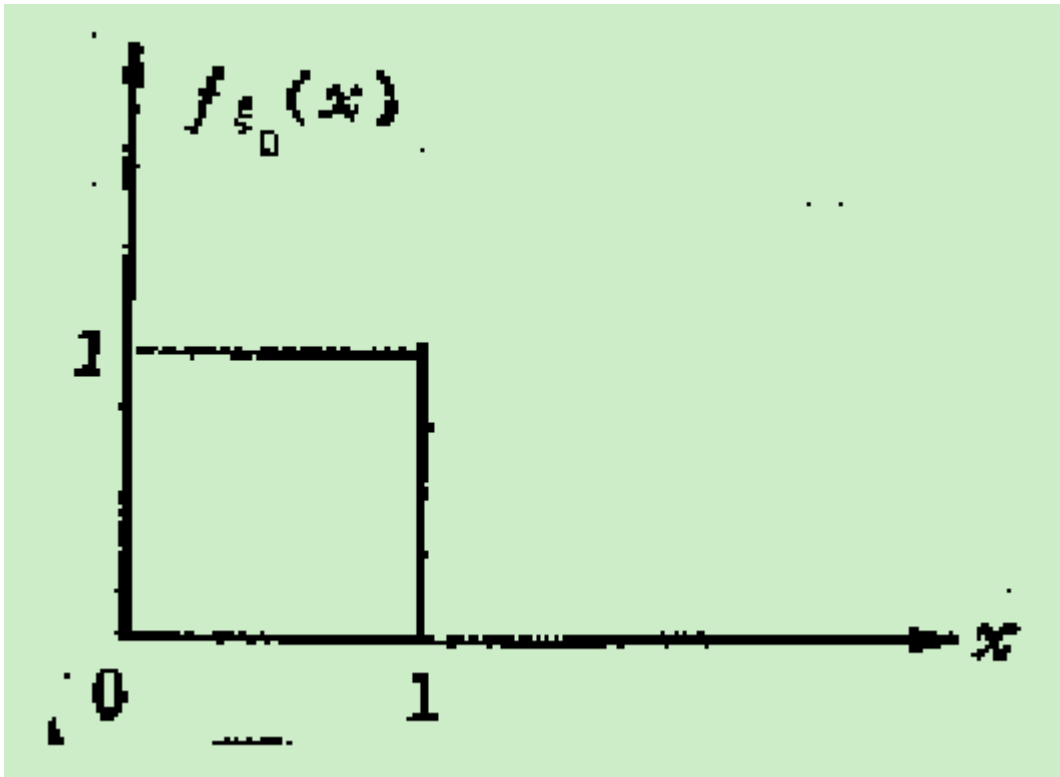


图1-5

当 $t_1 = \frac{\pi}{4\omega}$ 时, $\xi_{t_1} = x_1 = V \cos \omega \cdot \frac{x}{4\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}V$, 故

$$f_{\xi_{t_1}}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & (0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ 0 & (\text{其他 } x \text{ 值}) \end{cases} \quad (\text{见图 1-6})$$

当 $t_3 = \frac{3\pi}{4\omega}$ 时, $\xi_{t_3} = x_3 = V \cos \omega \frac{3\pi}{4\omega} = -\frac{1}{\sqrt{2}}V$, 故

$$f_{\xi_{t_3}}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & (-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0) \\ 0 & (\text{其他 } x \text{ 值}) \end{cases} \quad (\text{见图 1-7})$$

当 $t_4 = \frac{\pi}{\omega}$ 时, $\xi_{t_4} = x_1 = V \cos \omega \frac{\pi}{\omega} = -V$, 故

$$f_{\xi_{t_4}}(x) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq x \leq 0) \\ 0 & (\text{其他 } x \text{ 值}) \end{cases} \quad (\text{见图 1-8})$$

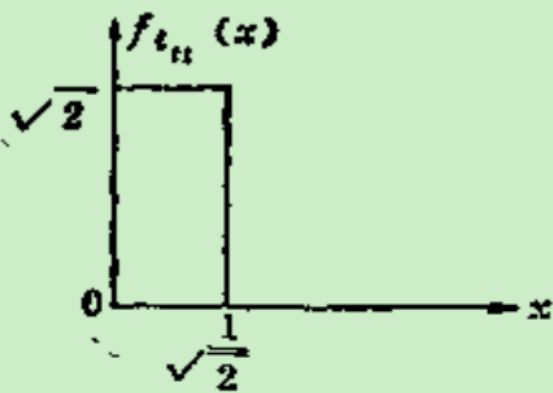


图 1-6

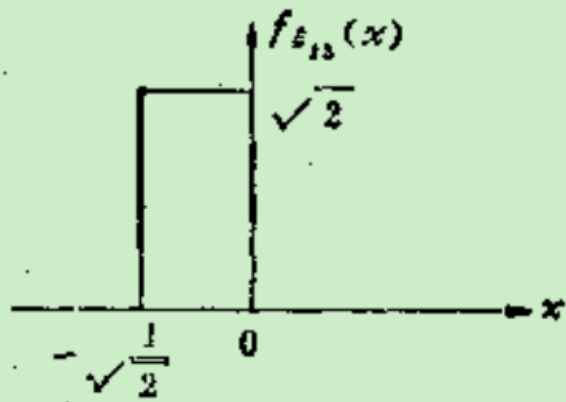


图 1-7

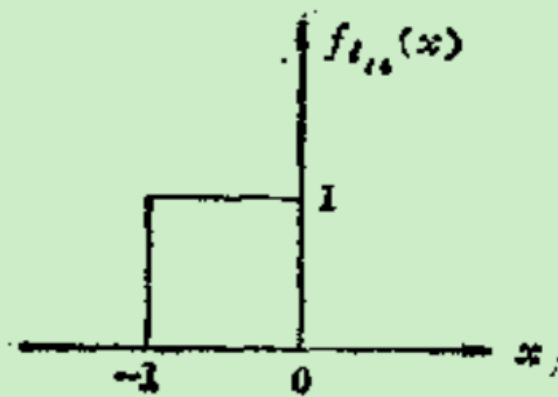


图 1-8

(3) 当 $t_2 = \frac{\pi}{2\omega}$ 时, $\xi_{t_2} = x_2 = V \cos \omega \frac{x}{2\omega} = 0$ 时, 不论 V 取何值, 均有 $\xi_{t_2} = 0$, 因此 $P(\xi_{t_2} = 0) = 1$, 或 ξ_{t_2} 的分布函数 $F_{\xi_{t_2}}(x) = u(x)$, 即 $F_{\xi_{t_2}}(x)$ 是在 $x=0$ 的单位阶跃函数 $F_{\xi_{t_2}}(x) = \delta(x)$ 。

例四 如果正弦波随机过程 $\xi(t)$ 取如下形式

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

其中振幅 A 取常数, 角频率 ω 取常数, 而相位 φ 是一个随机变量, 它均匀分布于 $(-\pi, \pi)$ 间, 即

$$f_{\varphi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & (-\pi \leq \varphi \leq \pi) \\ 0 & (\varphi \text{ 取其他值时}) \end{cases}$$

求在 t 时刻 $\xi(t)$ 的概率密度 $f_{\xi_t}(x)$ 。

解 当 t 为固定的某一时刻, $\xi(t)$ 和 φ 的关系式为

$$\xi(t) = \xi_t = A \cos(\omega t + \phi) \quad (-\pi \leq \phi \leq \pi)$$

或

$$\phi = \cos^{-1} \frac{\xi_t}{A} - \omega t \quad (-A \leq \xi_t \leq A)$$

图1-9画出了 $\xi(t)$ 和 ϕ 的关系曲线，所以

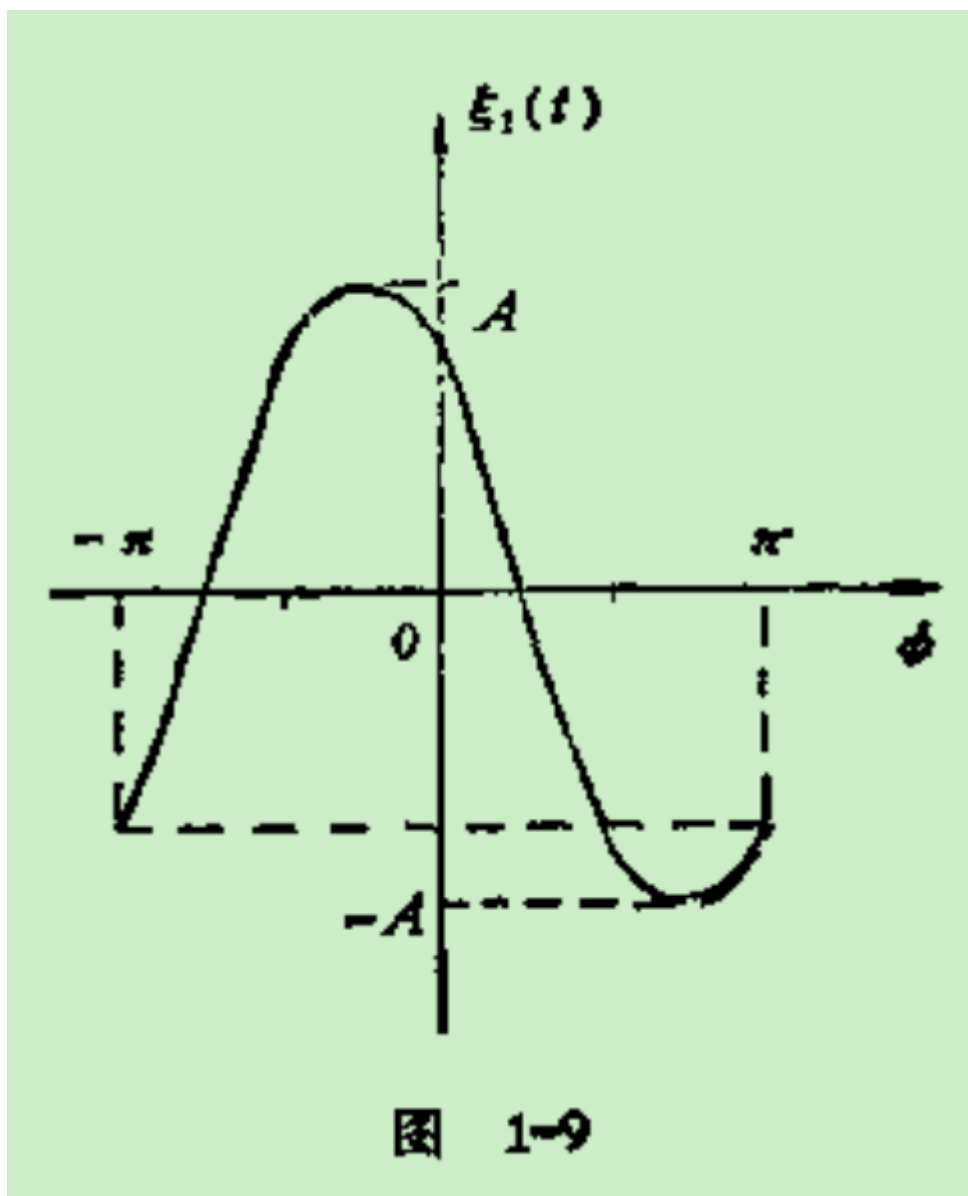


图 1-9

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\xi_1} &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\xi_t}{A}\right)^2}} \frac{1}{A} \\ &= -\left(A^2 - \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

根据随机变量的变换关系式可得

$$f_{\xi_t}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(A^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} & (-A \leq x \leq A) \\ 0 & (\text{其他 } x \text{ 值}) \end{cases}$$

该结果表明, 不论 t 取何值 $\xi(t)$ 的概率密度是相同的。具有这一特性的随机过程称为一级平稳随机过程。

(4) 离散参数连续性随机过程

这类过程具有离散参数集, 对于固定的 t_k , 过程所取值 $\xi(t_k)$ 是一连续分布的随机变量, 即状态是连续的。它又称为连续随机序列。

如果每个单位时间对晶体管噪声进行抽样, 所得到的是在 $t=..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$ 时的随机序列, 而这个序列的状态是连续的。它属于离散参数连续型随机过程。

不论随机过程属于那一类, 我们均需要找出它的统计特性, 才能讨论它的性质。所谓研究统计特性, 其中的一种方法就是求该过程的有限维分布函数族。下面再举一例来说明如何求随机过程的概率密度。

例五 设有某通信系统, 它的信号为脉冲信号, 脉宽为 T_0 。脉冲信号的周期也假定为 T_0 。如果脉冲幅度是随机的, 幅度服从正态分布 $N(0, \rho^2)$, 不同周期内的幅度 ξ_i 、 $\xi_k (i \neq k)$ 是相互统计独立的, 脉冲沿的位置也是随机的, 脉冲起始时间与 $t=0$ 的时间差 u 是均匀分布在 $(0, T_0)$ 内的随机变量。 u 和脉冲幅度间也是相互统计独立的(这种信号是脉冲幅度调制信号)。求在两个时刻 t_1 、 t_2 该随机过程 $\xi(t)$ 所取值 $\xi(t_1)$ 、 $\xi(t_2)$ 的二维联合概率密度。

解 图 1-10 给出了该脉冲信号的典型样本函数图。同例二, 在时间轴上固定两个时刻 t_1 、 t_2 。

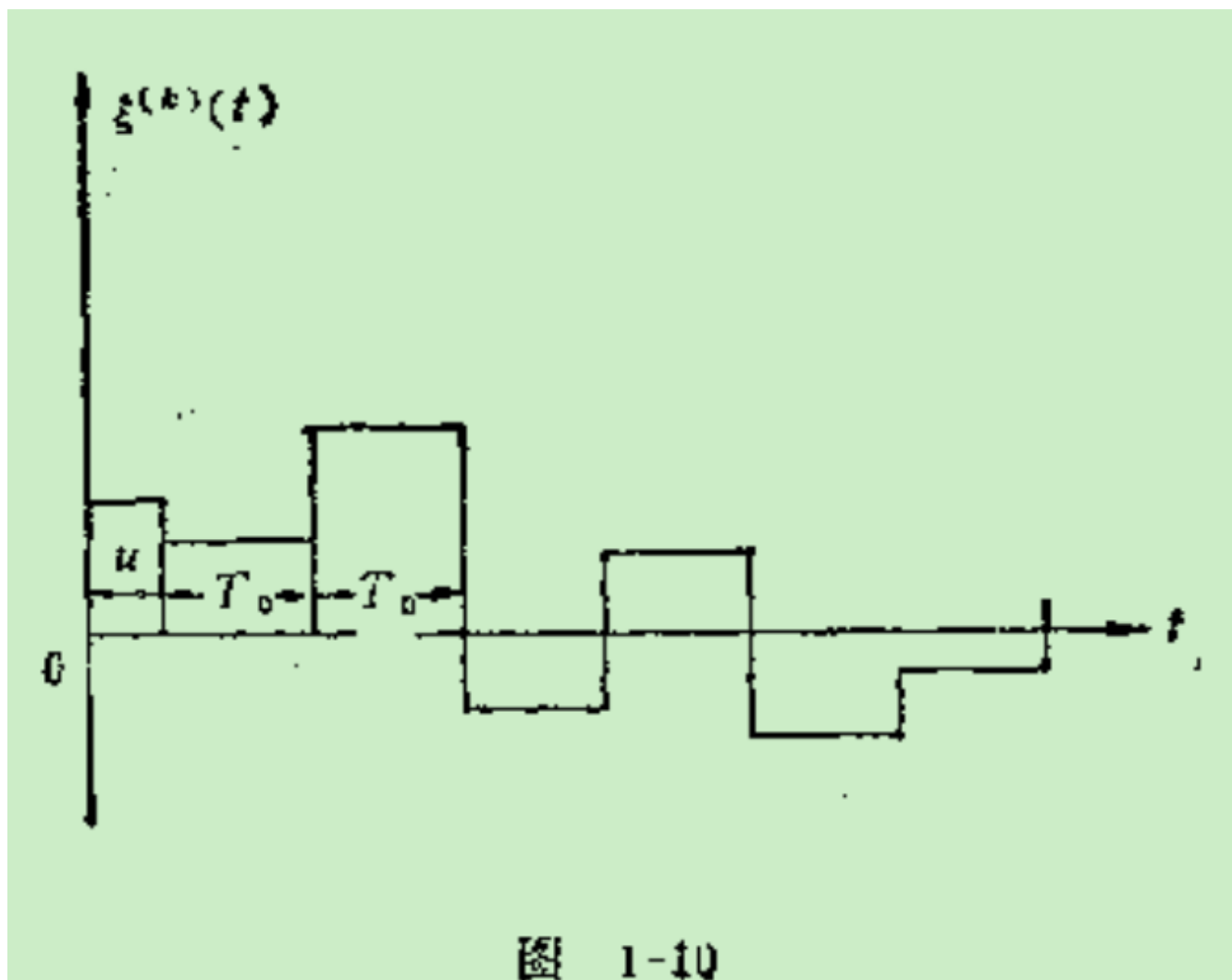


图 1-10

(a) 当 $|t_1 - t_2| > T_0$ 时, t_1 、 t_2 位于两个不同的周期内, ξ_{t_1} 、 ξ_{t_2} 是相互统计独立的, 故

$$f_{\xi_{t_1} \xi_{t_2}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}\right\}$$

(b) 当 $|t_1 - t_2| < T_0$ 时, t_1 、 t_2 位于两个不同的周期内的概率为

$$P(c) = \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}$$

t_1 、 t_2 位于相同的周期内的概率为

$$P(c^c) = 1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}$$

根据全概率公式可知

$$\begin{aligned} f_{\xi_{t_1} \xi_{t_2}}(x_1, x_2) &= f_{\xi_{t_1} \xi_{t_2}/c}(x_1, x_2/c) P(c) \\ &\quad + f_{\xi_{t_1} \xi_{t_2}/c^c}(x_1, x_2/c^c) P(c^c) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \frac{|t_1 - t_2|}{T_0} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right\} \delta(x_1 - x_2) \\ &\quad \left[1 - \frac{|t_1 - t_2|}{T_0}\right] \end{aligned}$$

因为当 t_1 、 t_2 处在同一脉冲周期时 ξ_{t_1} 、 ξ_{t_2} 取相同值,故上式的第二项出现 $\delta(t_1 - t_2)$ 函数。该式表明 ξ_{t_1} 、 ξ_{t_2} 的二维联合概率密度不是二维正态分布,虽然号 ξ_{t_1} 是正态分布, ξ_{t_2} 也是正态分布。

上面所讨论的分类方法是从参数集特征和状态的特征来区分不同的随机过程。但是还有其他的分类方法。可以从随机过程的不同性质进行分类,即有所谓马尔可夫过程,二阶矩过程,独立增量过程等等。关于这些将在以后各章中讨论。

§3 随机过程的数字特征

用随机过程的分布函数族可以完善地描述随机过程的统计特性。但是在实际应用中要确定随机过程的概率密度或分布函数族并加以分析往往比较困难,有时甚至不可能。因而像在研究随机变量的特性时引入随机变量的数字特征那样,在研究随机过程时也引入随机过程的基本数字特征。利用这些基本数字特征既能描述随机过程的重要特征,又便于进行运算和实际测量。

设 $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$ 是一随机过程,对于某一时刻 t_1 , $\xi(t_1)$ 为一个一维随机变量,它的分布函数为 $F_{\xi_{t_1}}(x)$ 概率密度为 $f_{\xi_{t_1}}(x)$,于是可得它的均值或数学期望为

$$\begin{aligned}
 \mu_{\xi}(t_1) &= E\{\xi(t_1)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi_{t_1}}(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x, t_1) dx
 \end{aligned}$$

$f_{\xi_{t_1}}(x)$ 一般说是与 t_1 有关的函数,为了明显起见,把 $f_{\xi_{t_1}}(x)$ 写成 $f_{\xi}(x, t_1)$,说明它是 t_1 的函数,因此它的数学期望值一般为 t_1 的函数。

注意, $E\{\xi(t)\}$ 是随机过程 $\xi(t)$ 的所有样本函数在参数 t 时函数值的平均,通常称这种平均为集平均,以区别于今后提出的时间平均的概念。

均值 $\mu_{\xi}(t)$ 表示了随机过程 $\xi(t)$ 在各个时刻的摆动中心。见图1-11。

找出随机变量 $\xi(t_1) = \xi_{t_1}$ 的二阶中心矩,并把它记为

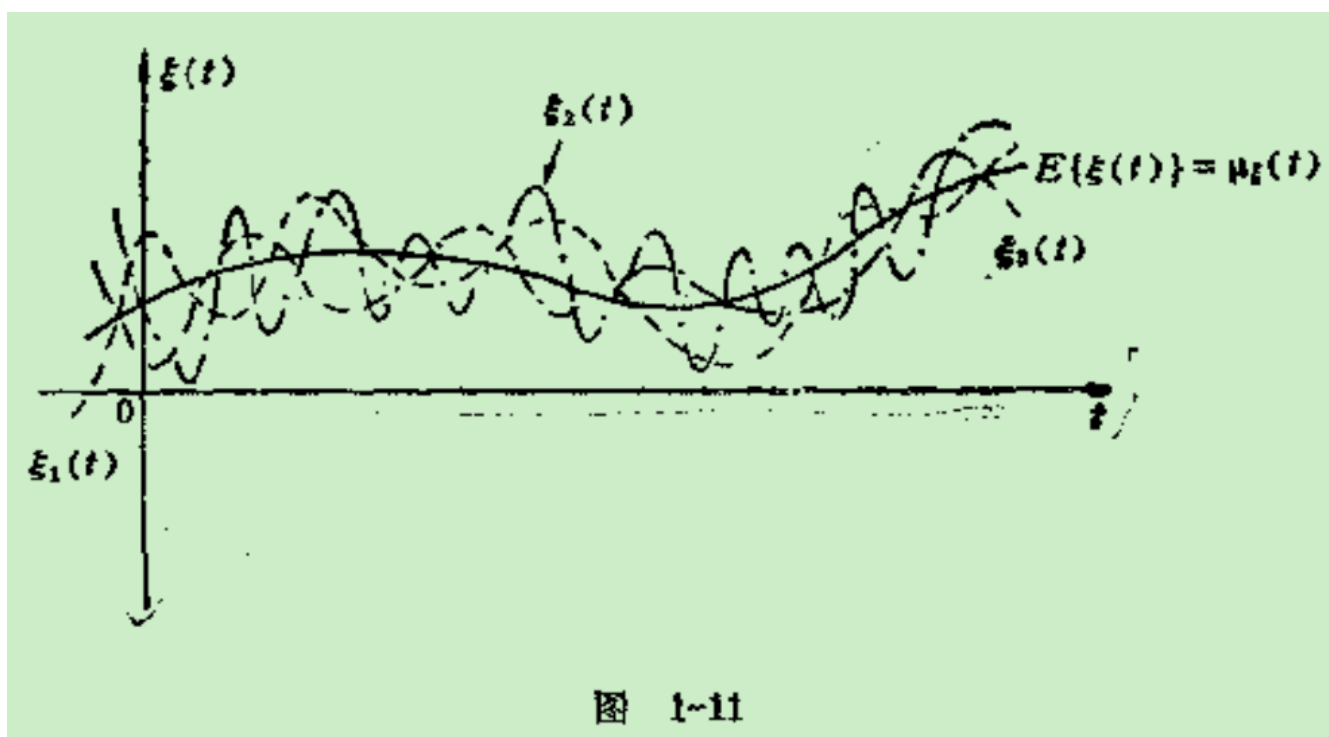


图 1-11

图 1-11

$$\begin{aligned}
 \delta_E^2(t_1) &= D\{\xi(t_1)\} = E\{[\xi(t_1) - \mu_{\xi}(t_1)]^2\} \\
 &= E\{[\xi(t_1)]^2\} - [E\{\xi(t_1)\}]^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu_{\xi}(t_1)]^2 f_{\xi_{t_1}}(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu_{\xi}(t_1)]^2 f_{\xi}(x, t_1) dx
 \end{aligned}$$

$\delta_E^2(t_1)$ 称为随机过程的方差。一般说它是 t_1 的函数。方差的平方根 $\delta_{\xi}(t_1)$ 称为随机过程 $\xi(t_1)$ 的均方根差或标准差,它表示随机过程 $\xi(t_1)$ 在时刻 t_1 对于均值 $\mu(t_1)$ 的偏离程度。

均值和方差是反映固定 t 时的统计特性,是重要的数字特征。

为了描绘在两个不同参数 t_1 、 t_2 时该随机过程状态之间的联系,要利用二元概率密度。设 $\xi(t_1)$ 和 $\xi(t_2)$ 是随机过程 $\xi(t)$ 在参数为 t_1 、 t_2 时的状态, $f_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 是相应的二维概率密度,于是可得它们的二阶混合原点矩

$$\begin{aligned} R_{\xi\xi}(t_1, t_2) &= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 t_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

在随机过程中称二阶混合原点矩为自相关函数或简称为相关函数。一般说它是参数 t_1 、 t_2 的函数,用 $R_{\xi\xi}(t_1, t_2)$ 表示之。在不致引起混淆的情况下简记为 $R_{\xi}(t_1, t_2)$ 。

类似地还可以写出 $\xi(t_1)$ 和 $\xi(t_2)$ 的二阶混合中心矩,并称为随机过程 $\xi(t)$ 的自协方差函数,简称为协方差函数,用 $C_{\xi\xi}(t_1, t_2)$ 表示,或记为 $C_{\xi}(t_1, t_2)$ 。

$$\begin{aligned} C_{\xi\xi}(t_1, t_2) &= E\{[\xi(t_1) - \mu_{\xi}(t_1)][\xi(t_2) - \mu_{\xi}(t_2)]\} \\ &= \int_{-\pi}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \mu_{\xi}(t_1)][x_2 - \mu_{\xi}(t_2)] \\ &\quad \times t_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \\ &= R_{\xi\xi}(t_1, t_2) - \mu_{\xi}(t_1)\mu_{\xi}(t_2) \\ &= \text{Cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) \end{aligned}$$

当 $t_1=t_2$ 时,

$$\sigma_{\xi}^2(t_1) = C_{\xi\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi\xi}(t_1, t_2) - [\mu_{\xi}(t_1)]^2$$

由此可知,方差可从协方差函数中导出。因此,上述诸数字特征中最主要的是数学期望值(或均值)和自相关函数(或自协方差函数)。从理论上说,仅仅研究随机过程的均值和自相关函数是不能代替对整个随机过程的研究的,但是它们确实描述了随机过程的主要统计特性,比有穷维分布函数族易于观测和参与运算,因而对于解决应用课题而言,它们往往能起到重要作用。因此,在随机过程理论中形成了以研究均值和相关函数为主要内容的一个分支,即相关理论。

研究随机过程有两条常见的途径。一条途径侧重于研究概率结构,比方说研究某时刻过程所取状态与以前另一些时刻的状态的联合分布函数或联合概率密度,又如研究某时刻状态的概率分布与前一些时刻状态的概率分布之间的关系。另一条途径则侧重于统计平均性质的研究,如研究随机过程的相关函数等。今后可以看到,前者用于对马尔科夫过程的研究,后者用于二阶距过程、平稳过程等的研究。

例一 设有正弦波过程

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

其中振幅 A 取常数,角频率 ω 取常数,相位 θ 是一个均匀分布于 $(-\pi, \pi)$ 间的随机变量,求 $\xi(t)$ 的均值和相关函数。

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad E\{\xi(t)\} &= \mu_{\xi}(t) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(\omega t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{A}{2\pi} \sin(\theta + \omega t) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{A}{2\pi} [\sin(\pi + \omega t) - \sin(-\pi + \omega t)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

即它的均值为常数(与参数 t 无关)。

$$\begin{aligned}
(2) \quad R_{\xi\xi}(t_1, t_2) &= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} A^2 \cos(\omega t_1 + \theta) \cos(\omega t_2 + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\
&= \frac{A^2}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\omega t_1 + \omega t_2 + 2\theta) \\
&\quad + \cos(\omega t_1 - \omega t_2)] d\theta \\
&= \frac{A^2}{2} \cos \omega(t_1 - t_2) = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau
\end{aligned}$$

式中 $\tau = t_1 - t_2$ ，它代表 t_1 和 t_2 的时间差。可以看出，该相关函数仅与时间差有关。

满足均值与 t 无关和相关函数仅仅是 $\tau = t_1 - t_2$ 的函数的随机过程称为宽平稳随机过程。

例二 设有随机电报信号，它的定义如下：

(1) 在任何时刻 t ， $\xi(t)$ 取值为 0 或 1，只有两种可能状态。设取值为 0 的概率为 $\frac{1}{2}$ ，取值为 1 的概率为 $\frac{1}{2}$ ，即 $P\{\xi(t) = 0\} = \frac{1}{2}$ ， $P\{\xi(t) = 1\} = \frac{1}{2}$

(2) 每个状态的持续时间是随机的，若在 T 时间内波形变化的次数 μ 服从泊松分布，即 $P\{\mu = k\} = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} (\lambda > 0, T > 0)$

其中 λ 代表单位时间内波形的平均变化次数。

(3) $\xi(t)$ 何值（即所处的状态）与随机变量 μ 是相互统计独立的。求随机电报信号 $\xi(t)$ 的均值和自相关函数。

解 图 1-12 给出了随机电报信号 $\xi(t)$ 的样本函数图。

(1) 均值

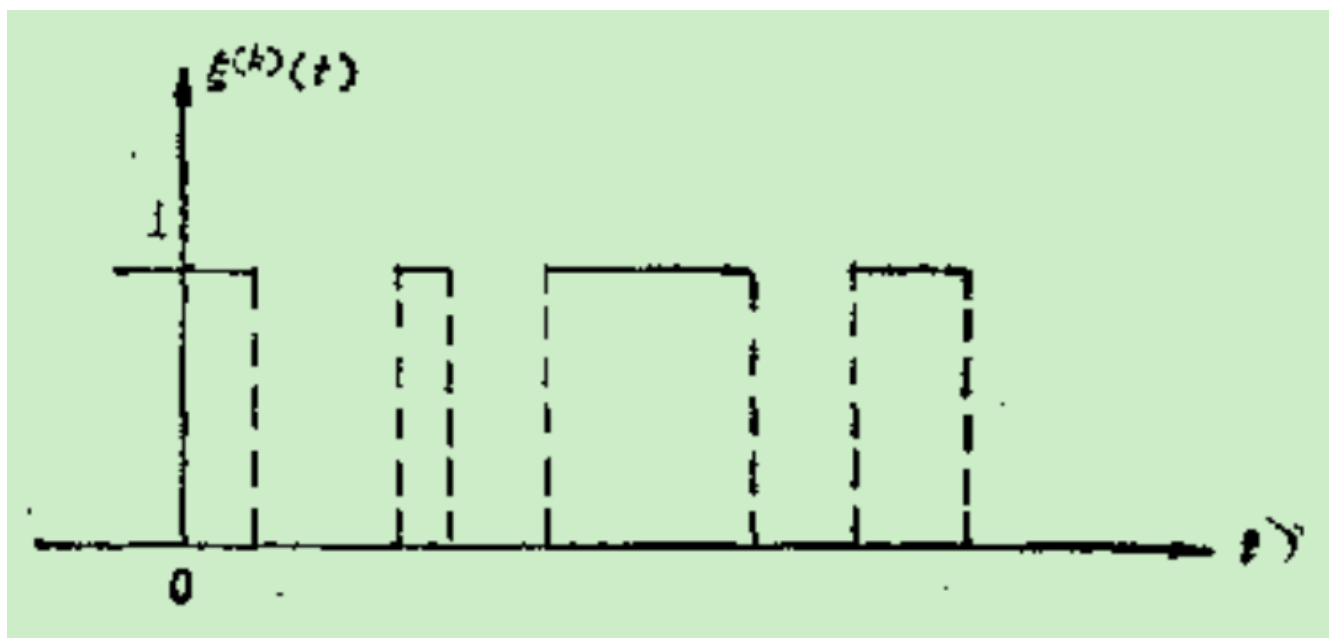


图 1-12

$$E\{\xi(t)\} = \mu_{\xi}(t) = 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

即对于所有的 t ，均值为常数。

(2) 相关函数 如果 $t_2 > t_1$

$$\begin{aligned}
R_{\xi\xi}(t_1, t_2) &= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} \\
&= 1 \times 1P\{\xi(t_1) = 1, \xi(t_2) = 1\} \\
&\quad + 1 \times 0P\{\xi(t_1) = 1, \xi(t_2) = 0\} \\
&\quad + 0 \times 1P\{\xi(t_1) = 0, \xi(t_2) = 1\} \\
&\quad + 0 \times 0P\{\xi(t_1) = 0, \xi(t_2) = 0\} \\
&= P\{\xi(t_1) = 1, \xi(t_2) = 1\}
\end{aligned}$$

下面求概率 $P\{\xi(t_1) = 1, \xi(t_2) = 1\}$

事件 $\{\xi(t_1) = 1, \xi(t_2) = 1\}$ 等效于事件 $\{\xi(t_1) = 1, \text{在 } t_2 - t_1 \text{ 时间内波形发生偶次变化}\}$, 即等效于事件 $\{\xi(t_1) = 1, \mu = \text{偶次}\}$,

故

$$\begin{aligned}
R_{\xi\xi}(t_1, t_2) &= P\{\xi(t_1) = 1, \mu = \text{偶次}\} \\
&= P\{\xi(t_1) = 1\} \{\mu = \text{偶次}\} \\
&= \frac{1}{2}P\{\mu = \text{偶次}\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=\text{偶次}} \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \right] \\
&= \frac{1}{4} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} [e^{\lambda(t_2 - t_1)} + e^{-\lambda(t_2 - t_1)}] \\
&= \frac{1}{4} [1 + e^{-2\lambda(t_2 - t_1)}]
\end{aligned}$$

同理, 如果 $t_1 > t_2$, 则也有

$$R_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \frac{1}{4} [1 + e^{-2\lambda(t_1 - t_2)}]$$

故

$$\begin{aligned}
R_{\xi\xi}(t_1, t_2) &= \frac{1}{4} [1 + e^{-2\lambda(t_1 - t_2)}] \\
C_{\xi\xi}(t_1, t_2) &= \text{Cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) \\
&= \frac{1}{4} e^{-2\lambda|t_1 - t_2|}
\end{aligned}$$

图1-13画出了 $\xi(t)$ 的相关函数图。

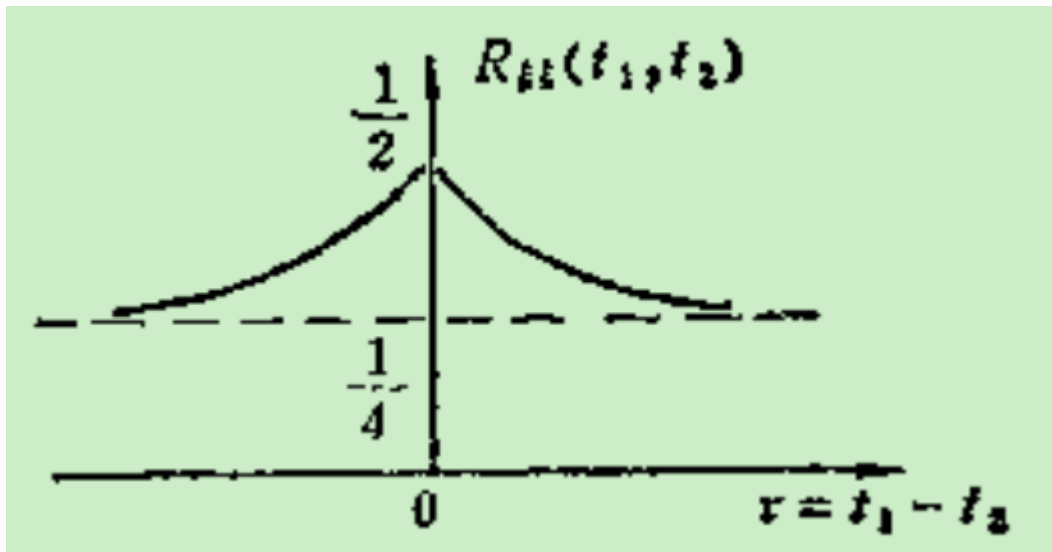


图 1-13

设时间差 $\tau = t_1 - t_2$, 则

$$R_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \frac{1}{4}[1 + e^{-2\lambda|\tau|}]$$

$$\text{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) = C_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$$

因为随机电报信号 $\xi(t)$ 的均值为常数, 相关函数仅为时间差的函数, 故随机电报信号是宽平稳随机过程。

§4 两个或两个以上随机过程的联合分布和数字特征

在实际问题中常遇到必须同时考虑两个或两个以上随机过程的情况, 如线性系统的输入有信号和噪声, 而两者均可能是随机的。又如有时要分析线性系统的输入随机过程和输出随机过程间的关系 (见图1-14), 在这种情况下, 不仅要研究各个随机过程的概率分布、概率密度或统计特性, 而且还必须研究几个随机过程的联合分布、联合概率密度或几个随机过程的联合统计特性。

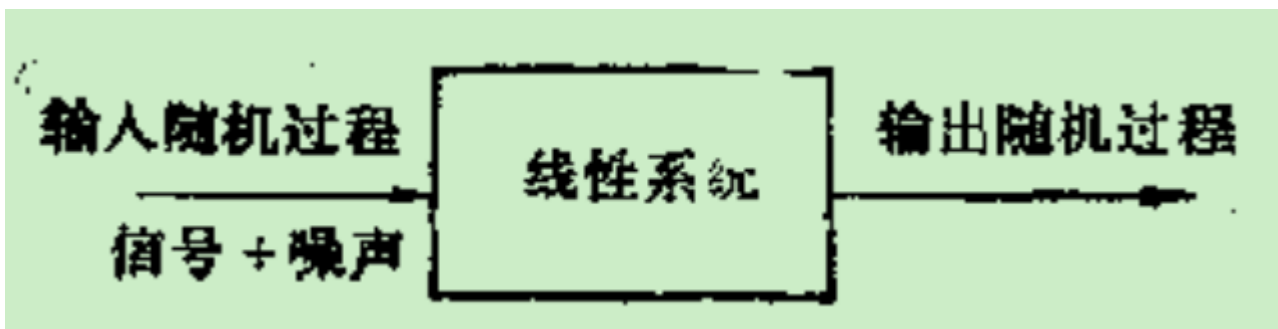


图 1-14

设有两个随机过程 $\{\xi(t), t \in T\}$ 和 $\{\eta(t), t \in T\}$, 它们具有同一个参数集 T , $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 和 $t'_1, t'_2, t'_3, \dots, t'_m$ 是参数集 T 内的任意两组实数, 则称 $n+m$ 维随机变量 $\{\xi(t_1), \xi(t_2), \xi(t_3), \dots, \xi(t_n); \eta(t_1), \eta(t_2), \eta(t_3), \dots, \eta(t_n)\}$ 的联合分布函数 $F_{n,m}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m) = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \dots, \xi(t_n) < x_n; \eta(t'_1) < y_1, \eta(t'_2) < y_2, \dots, \eta(t'_m) < y_m\}$

为随机过程 $\{\xi(t), t \in T\}$ 和 $\{\eta(t), t \in T\}$ 的 $n+m$ 维联合分布函数。相应的 $n+m$ 维联合概率密度记为

$$f_{n,m}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; \\ y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m)$$

如果对于任意正整数n和m任意数组 $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ 和 $t'_1, t'_2, t'_3, \dots, t'_m$ 联合分布函数或联合概率密度满足下列关系

$$F_{n,m}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; \\ y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \\ = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ F_m(y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m)$$

或

$$f_{n,m}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; \\ y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m) \\ = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ f_m(y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m)$$

则称随机过程 $\{\xi(t), t \in T\}$ 和 $\{\eta(t), t \in T\}$ 是相互统计独立的。

关于数字特征，除了 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 各自的数字特征外，在实际问题中感兴趣的是由随机过程 $\{\xi(t), t \in T\}$ 和 $\{\eta(t), t \in T\}$ 组成的二维联合分布函数（或概率密度）所确定的二阶混合原点矩或二阶混合中心矩。

如果对于所有的 t 都满足 $E\{\xi_t^2\} < +\infty$ 和 $E\{\eta_t^2\} < +\infty$ ，且设 t_1, t_2 是参数集 T 中的任意两个数，则 $\xi(t_1)$ 和 $\eta(t_1)$ 的二阶混合原点矩为

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy t_{\xi\eta}(x, y, t_1, t_2) dx dy$$

称 $R_{\xi\eta}(t_1, t_2)$ 为随机过程 $\{\xi(t), t \in T\}$ 和 $\{\eta(t), t \in T\}$ 的互相关函数。

$\xi(t_1)$ 和 $\eta(t_2)$ 的二阶混合中心矩为

$$C_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \text{Cov}(\xi(t_1), \eta(t_2)) \\ = E\{[\xi(t_1) - \mu_{\xi}(t_1)][\eta(t_2) - \mu_{\eta}(t_2)]\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_{\xi}(t_1))(y - \mu_{\eta}(t_2)) \\ \times t_{\xi\eta}(x, y; t_1, t_2) dx dy \\ = E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\} - \mu_{\xi}(t_1)\mu_{\eta}(t_2) \\ = R_{\xi\eta}(t_1, t_2) - \mu_{\xi}(t_1)\mu_{\eta}(t_2)$$

称 $\xi(t_1)$ 和 $\eta(t_2)$ 的二阶混合中心矩为随机过程 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的互协方差函数。

如果被研究的两个随机过程 $\{\xi(t), t \in T\}$ 和 $\{\eta(t), t \in T\}$ 对于任意的两个参量 t_1 和 t_2 都具有

$$C_{\xi\eta}(t_1, t_2) = 0$$

$$\text{或 } R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\} = \mu_{\xi}(t_1)\mu_{\eta}(t_2) \\ = E\{\xi(t_1)\}E\{\eta(t_2)\}$$

则称随机过程 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 是统计不相关或不相关的。

由此可以看到,如果两个随机过程是相互统计独立的,而且它们的二阶矩都存在,则它们必然是不相关的。然而我们不能由两个过程不相关来推断它们是统计独立的。但是对于正态过程,不相关性和相互统计独立性是完全一致的。

当同时考虑两个以上随机过程时,可以类似地引入它们的联合分布函数或联合概率密度以及两两之间的互相关函数或互协方差函数。

下面用例子来说明引入互相关函数的必要性。

设有一相加器,它的输入为 $\xi(t)$ 、 $\eta(t)$ 、 $\zeta(t)$ 三个随机过程,它的输出随机过程为 $W(t)$,于是

$$W(t) = \xi(t) + \eta(t) + \zeta(t)$$

现在来研究输出过程的均值和相关函数。

(1) 输出过程 $W(t)$ 的均值

$$\begin{aligned} u_w(t) &= E\{W(t)\} = E\{\xi(t) + \eta(t) + \zeta(t)\} \\ &= \mu_\xi(t) + \mu_\eta(t) + \mu_\zeta(t) \end{aligned}$$

此式表示输出过程的均值为各输入过程均值之和。

(2) 输出过程 $W(t)$ 的相关函数

$$\begin{aligned} R_{WW}(t_1, t_2) &= E\{[\xi(t_1) + \eta(t_1) + \zeta(t_1)] \\ &\quad \times [\xi(t_2) + \eta(t_2) + \zeta(t_2)]\} \\ &= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} + E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\} \\ &\quad + E\{\zeta(t_1)\zeta(t_2)\} + E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\} \\ &\quad + E\{\xi(t_1)\zeta(t_2)\} + E\{\eta(t_1)\xi(t_2)\} \\ &\quad + E\{\eta(t_1)\zeta(t_2)\} + E\{\zeta(t_1)\xi(t_2)\} \\ &\quad + E\{\zeta(t_1)\eta(t_2)\} \\ &= R_{\xi\xi}(t_1, t_2) + R_{\eta\eta}(t_1, t_2) \\ &\quad + R_{\zeta\zeta}(t_1, t_2) + R_{\xi\eta}(t_1, t_2) \\ &\quad + R_{\xi\zeta}(t_1, t_2) + R_{\eta\xi}(t_1, t_2) \\ &\quad + R_{\eta\zeta}(t_1, t_2) + R_{\zeta\xi}(t_1, t_2) \\ &\quad + R_{\zeta\eta}(t_1, t_2) \end{aligned}$$

此式说明,当研究随机过程的自相关函数时,必然会遇到各个随机过程间的互相关函数,因此必须给以定义。此式还说明,几个随机过程的自相关函数可以表示为各个随机过程的自相关函数及各对随机过程的互相关函数之和。

如果上述三个随机过程是互不相关的,且各自的均值都为零,则输出过程的均值 $\mu_W(t) = 0$,且

$$\begin{aligned} R_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= E\{\xi(t_1)\eta(t_2)\} = \mu_\xi(t_1)\mu_\eta(t_2) = 0 \\ R_{\eta\xi}(t_1, t_2) &= 0 \\ R_{\xi\zeta}(t_1, t_2) &= 0 \quad R_{\zeta\xi}(t_1, t_2) = 0 \\ R_{\eta\zeta}(t_1, t_2) &= 0 \quad R_{\zeta\eta}(t_1, t_2) = 0 \\ R_{WW}(t_1, t_2) &= R_{\xi\xi}(t_1, t_2) + R_{\eta\eta}(t_1, t_2) + R_{\zeta\zeta}(t_1, t_2) \end{aligned}$$

在这种情况下,如果 $t_1 = t_2$,则可得输出过程的方差

$$\begin{aligned}\sigma_W^2(t_1) &= R_{WW}(t_1, t_1) = R_{\xi\xi}(t_1, t_1) + R_{\eta\eta}(t_1, t_1) + R_{\zeta\zeta}(t_1, t_1) \\ &= \sigma_\xi^2(t_1) + \sigma_\eta^2(t_1) + \sigma_\zeta^2(t_1)\end{aligned}$$

由于在后面的讨论中常要遇到复随机过程,这里先引入复数值的随机变量。

定义 设 η 、 ζ 为同一概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的两个取实数值的随机变量,并设 $\xi = \eta + j\zeta$,则称 ξ 为该概率空间上的一个复随机变量。

如果 η 、 ζ 的一阶矩和二阶矩存在,则

$$\begin{aligned}E\xi &= E\eta + jE\zeta \\ D\xi &= E|\xi - E\xi|^2 = E\{(\xi - E\xi)\overline{(\xi - E\xi)}\} \\ &= E\{(\eta - E\eta)^2\} + E\{(\zeta - E\zeta)^2\}\end{aligned}$$

其中 $E\xi$ 定义为复随机变量 ξ 的均值, $D\xi$ 定义为复随机变量 ξ 的方差。方差值为一实数。实质上, ξ 是 η 、 ζ 所组成的二元随机变量。

由此可定义复随机过程如下:

定义 设 $\{\eta(t)\}$ 和 $\{\zeta(t)\}$ 是一对随机过程,并具有相同的参数, $\eta(t)$ 、 $\zeta(t)$ 具有相同的概率空间,则 $\xi(t) = \eta(t) + j\zeta(t)$ 称为复随机过程。

若 $\{\eta(t)\}$ 和 $\{\zeta(t)\}$ 的数学期望和二阶矩都存在,则定义

$$E\{\xi(t)\} = E\{\eta(t)\} + jE\{\zeta(t)\}$$

为 $\xi(t)$ 的均值函数,定义

$$\begin{aligned}E\left\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\right\} &= E\left\{[\eta(t_1) + j\zeta(t_1)]\overline{[\eta(t_2) + j\zeta(t_2)]}\right\} \\ &= R_{\xi\xi}(t_1, t_2)\end{aligned}$$

为复随机过程的相关函数。

例 设有复随机过程

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N \eta_k e^{j\omega_k t}$$

其中 $\eta_k (1 \leq k \leq N)$ 是相互统计独立的正态分布的随机变量 $N(0, \sigma_k^2)$,即 η_k 的均值 $(1 \leq k \leq N)$ 为零, η_k 的方差 $(1 \leq k \leq N)$ 为 σ_k^2 , ω_k 为常数。求 $\xi(t)$ 的均值和相关函数。

解 因

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N \eta_k e^{j\omega_k t} = \sum_{k=1}^N \eta_k \cos \omega_k t + j \sum_{k=1}^N \eta_k \sin \omega_k t$$

故

$$\begin{aligned}
E\{\xi(t)\} &= E\left\{\sum_{k=1}^N \eta_k \cos \omega_k t + j \sum_{k=1}^N \eta_k \sin \omega_k t\right\} = 0 \\
R_{\xi\xi}(t_1, t_2) &= E\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\} \\
&= E\left\{\left(\sum_{k=1}^N \eta_k e^{j\omega_k t_1}\right) \overline{\left(\sum_{i=1}^N \eta_i e^{j\omega_i t_2}\right)}\right\} \\
&= E\left\{\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \eta_k \eta_i e^{j\omega_k t_1 - j\omega_i t_2}\right\} = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 e^{j\omega_k(t_1 - t_2)} \\
&= \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 e^{j\omega_k \tau}
\end{aligned}$$

由于 $\xi(t)$ 的均值为零,相关函数是时间差 $\tau = t_1 - t_2$ 的函数,故 $\xi(t)$ 是一宽平稳随机过程。

习题

1. 某公共汽车站停放着两辆公共汽车A和B, 从 $t=1$ 秒开始,每隔1秒有一乘客到达车站。如果每一乘客以概率 $\frac{1}{2}$ 登上A车,以概率 $\frac{1}{2}$ 登上B车,各乘客登哪一辆车是相互统计独立的,并用 ξ_i 代表 $t=i$ 时乘客登上A车的状态,即乘客登上A车则 $\xi_i = 1$,乘客登上B车则 $\xi_i = 0$,则 $P\{\xi_i = 1\} = \frac{1}{2}, P\{\xi_i = 0\} = \frac{1}{2}$, 当 $t=n$ 时在A车上的乘客数为

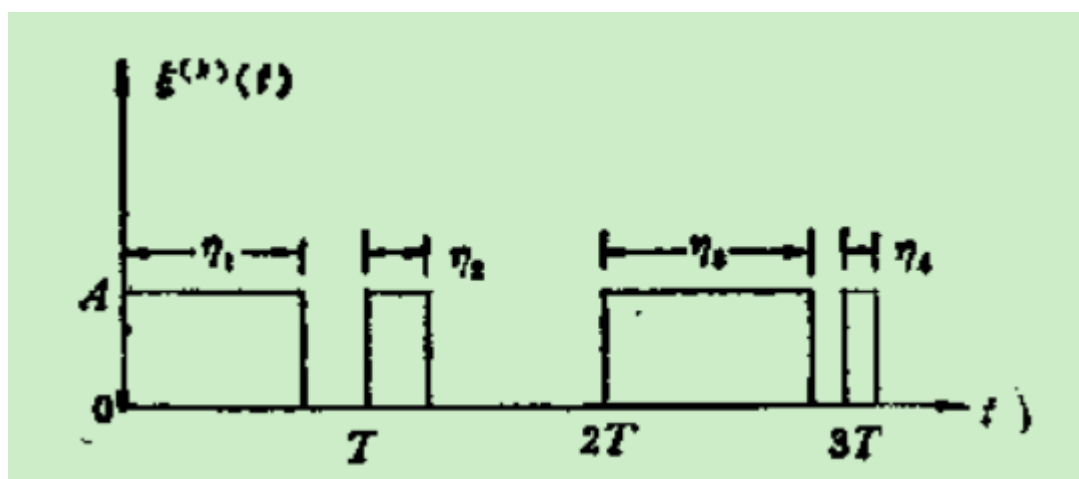
$$\eta_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

η_n 是一个二项式分布的计算过程。

(1) 求 η_n 的概率,即 $P\{\eta_n = k\} = ? k = 0, 1, 2, \dots, n;$

(2) 当公共汽车A上到达10个乘客时,A即开车(例如 $t=21$ 时 $\eta_{21} = 9$,且 $t=22$ 时又有一个乘客乘A车,则 $t=22$ 时A车出发),求A车的出发时间 n 的概率分布。

2. 设有一采用脉宽调制以传递信息的简单通信系统。脉冲的重覆周期为 T ,每一个周期传递一个值;脉冲宽度受到随机信息的调制,使每个脉冲的宽度均匀分布于 $(0, T)$ 内,而且不同周期的脉宽是相互统计独立的随机变量;脉冲的幅度为常数 A 。也就是说,这个通信系统传送的信号为随机脉宽等幅度的周期信号,它是一随机过程 $\xi(t)$ 。图题1-1画出了它的样本函数。试求 $\xi(t)$ 的一维概率密度 $f_{\xi_t}(x)$ 。

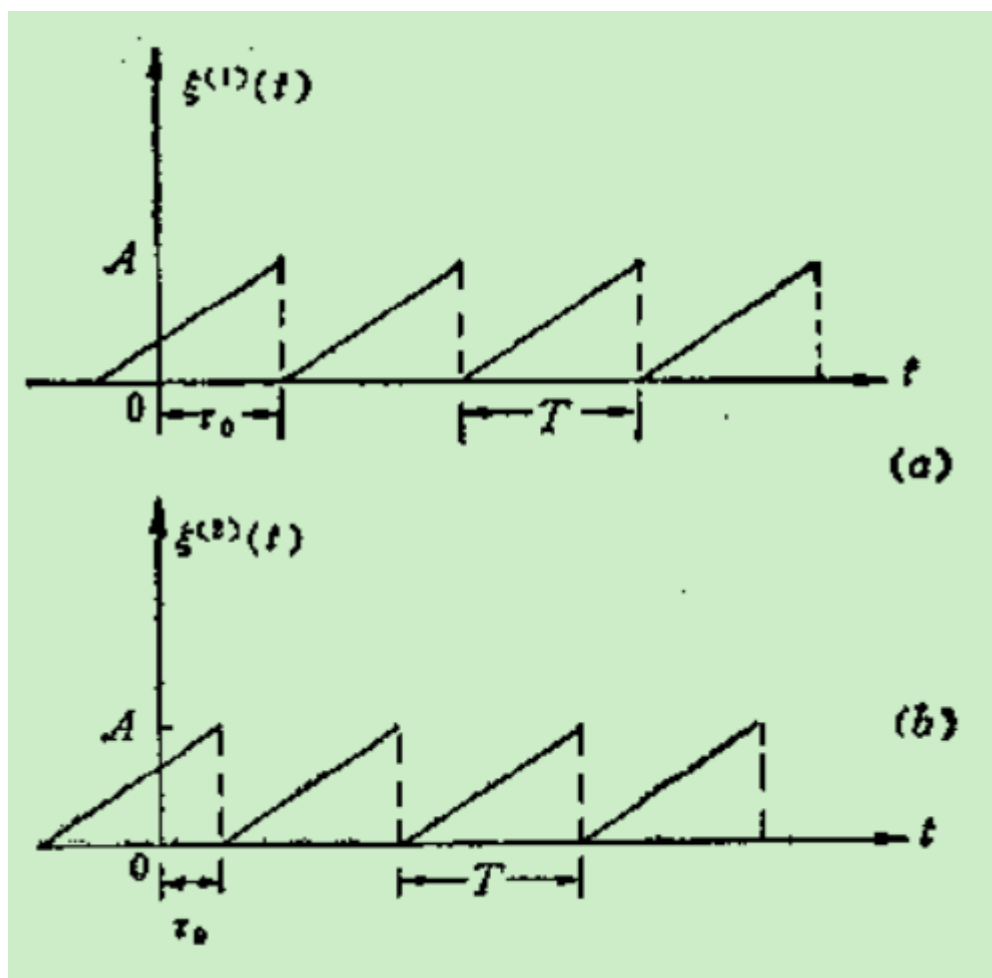


图题 1-2

3. 设有一随机过程 $\xi(t)$, 它的样本函数为周期性的锯齿波。图题1-3(a)、(b)画出了二个样本函数图。各样本函数具有同一形式的波形, 其区别仅在于锯齿波的起点位置不同。设在 $t=0$ 后的第一个零值点位于 τ_0 , τ_0 是一个随机变量, 它在 $(0, T)$ 内均匀分布, 即

$$f_{\tau_0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (\text{其他值}) \end{cases}$$

若锯齿波的幅度为 A , 求随机过程 $\xi(t)$ 的一维概率密度。



图题 1-3

4. 设有随机过程

$$\zeta(t) = \xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t \quad (-\infty < t < \infty)$$

其中 ω 为常数, 且 $\omega > 0$, ξ 和 η 是随机变量, 且相互统计独立, 它们的概率密度为

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$f_{\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} \quad (-\infty < y < \infty)$$

即 ξ 和 η 是正态分布 $N(0,1)$ 随机变量。若把 $\zeta(t)$ 写成 $\zeta(t) = V \sin(\omega t + \phi)$ 的形式,

(1) 求 $f_V(v)$ 、 $f_{\phi}(\phi)$ 及 $f_{V\phi}(v, \phi)$, 问 V 和 ϕ 是否统计独立

(2) 画出 $\zeta(t)$ 的典型样本函数;

(3) 求 $\zeta(t)$ 的一维概率密度 $f_{\zeta}(z)$

(4) 设有事件A, 其中c为常数, 求出现A事件的概率P(A)。

5. 求第4题所给出的随机过程 $\zeta(t)$ 的均值和自相关函数

6. 设有随机过程 $\xi(t)$, 并设x是一实数, 定义另一个随机过程 $\eta(t)$

$$\begin{cases} \eta(t) = 1 & (\xi(t) < x) \\ \eta(t) = 0 & (\xi(t) \geq x) \end{cases}$$

试证 $\eta(t)$ 的均值和自相关函数分别为随机过程 $\xi(t)$ 的一维和二维分布函数。

7. 设有随机过程 $\{\xi(t), -\infty < t < \infty\}$, $\xi(t) = \eta \cos t$, 其中 η 为均匀分布于(0, 1)间的随机变量, 即

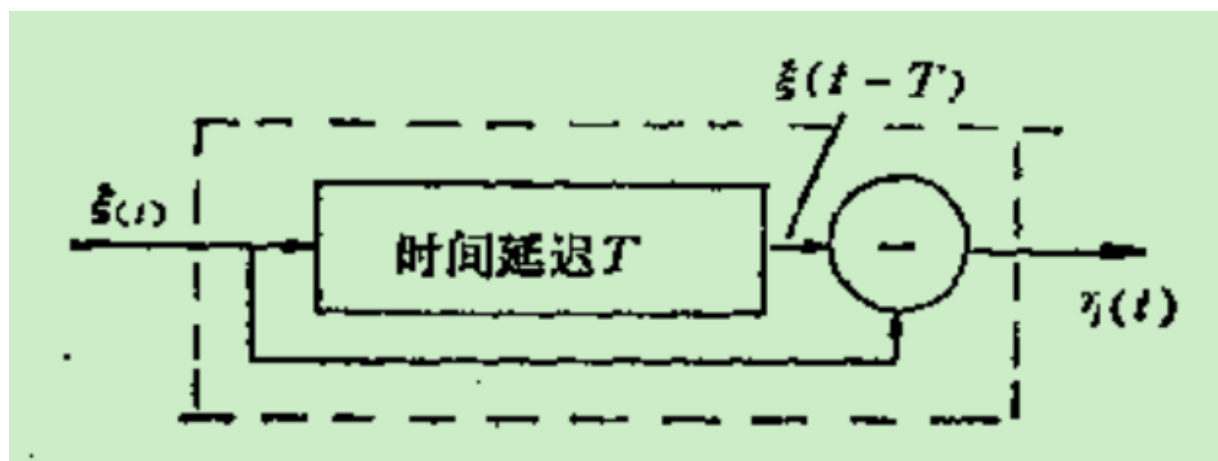
$$f_{\eta}(y) = \begin{cases} 1 & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (\text{其他 } y \text{ 值}) \end{cases}$$

试证:

$$(a) R_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \frac{1}{3} \cos t_1 \cos t_2$$

$$(b) C_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \frac{1}{12} \cos t_1 \cos t_2$$

8. 设有一随机过程 $\xi(t)$ 作为图题1-8所示的线性系统的输入, 系统的输出为 $\eta(t)$, 若 $\xi(t)$ 的相关函数为 $R_{\xi\xi}(t_1, t_2)$, 试求输出随机过程 $\eta(t)$ 的自相关函数 (用输入过程的相关函数表示)。



图题1-8

9. 设 $\xi(\omega, t)$ 是§3例二所定义的随机电报信号 (即任何时刻 $\xi(\omega, t)$ 以概率1/2取值0或1, 单位内时间波形平均变化次数为 λ_{ξ}), $\eta(\omega, t)$ 也是0、1随机电报信号, 它在单位时间内波形平均变化次数为 λ_{η} , 且 $\xi(\omega, t)$ 和 $\eta(\omega, t)$ 是相互统计独立的; 又设随机过程 $\zeta(\omega, t)$ 是 $\xi(\omega, t)$ 、 $\eta(\omega, t)$ 两随机信号之和, 即 $\zeta(\omega, t) = \xi(\omega, t) + \eta(\omega, t)$,

(1) 试画出 $\zeta(\omega, t)$ 的典型样本函数;

(2) 试求 $\zeta(\omega, t)$ 的一维概率密度;

(3) 设有两时刻 t_1 和 t_2 , 求 $\zeta(t_1)$ 和 $\zeta(t_2)$ 的二维联合概率密度。

10. 质点在直线上作随机游动, 即在 $t=1, 2, 3, \dots$ 时质点可以在x轴上往右或往左作一个单位距离的随机游动。若往右移动一个单位距离的概率为p, 往左移动一个单位距离的概率为q, 即 $P\{\xi_1 = +1\} = p$, $P\{\xi_1 = -1\} = q$, $p+q=1$, 且各次游动是相互统计独立的。经过n次游动, 质点所处的位置为

$$\eta_n = \eta(n) = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

(1) 求 $\eta(n)$ 的均值;

(2) 求 $\eta(n)$ 的相关函数和自协方差函数 $R_{\eta\eta}(n_1, n_2)$ 和 $C_{\eta\eta}(n_1, n_2)$ 。

11. 设有§2例二所定义的四电平随机调幅信号 $\xi(t)$ ，求它的自协方差函数。

12. 设有§2例五所定义的、幅度服从正态分布的随机调幅信号 $\xi(t)$ ，求它的自协方差函数。

第二章 马尔可夫过程（I）

——马尔科夫链

§1 马尔科夫过程的定义

（一）**定义** 设有一随机过程 $\{\xi(t), t \in T\}$, $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_m < t_{m+1} \in T$, 若在 $t_1, t_2, t_3, \cdots, t_m, t_{m+1}$ 对 $\xi(t)$ 观测得到相应的观测值 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m, x_{m+1}$ 满足条件

$$f_{t_{m+1}/t_1, t_2, \cdots, t_m}(x_{m+1}/x_1, x_2, \cdots, x_m) = f_{t_{m+1}}(x_{m+1}/x_m)$$

则称这类过程为具有马尔科夫性质的随机过程或马尔科夫过程。其中 $f_{t_{m+1}/t_1, t_2, \cdots, t_m}(x_{m+1}/x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 代表在 $\xi(t_1) = x_1, \xi(t_2) = x_2, \cdots, \xi(t_m) = x_m$ 的条件下，在 t_{m+1} 时 $\xi(t_{m+1})$ 取 x_{m+1} 值的条件概率密度。

上述定义中的条件是用概率密度形式表示的，该条件也可用概率形式表示，即

$$\begin{aligned} P\{\xi(t_{m+1}) \in A / \xi(t_1) = x_1, \xi(t_2) = x_2, \cdots, \xi(t_m) = x_m\} \\ = P\{\xi(t_{m+1}) \in A / \xi(t_m) = x_m\} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} P\{\xi(t_{m+1}) < x_{m+1} / \xi(t_1) = x_1, \xi(t_2) = x_2, \cdots, \xi(t_m) = x_m\} \\ = P\{\xi(t_{m+1}) < x_{m+1} / \xi(t_m) = x_m\} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} F_{\xi_{t_{m+1}}/\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \cdots, \xi_{t_m}}(x_{m+1}/x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ = F_{\xi_{t_{m+1}}/\xi_{t_m}}(x_{m+1}/x_m) \end{aligned}$$

如果把 t_m 看作“现在”，则因 $t_{m+1} > t_m$ ， t_{m+1} 就成为“将来”，而 $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ ，故 $t_1, t_2, \cdots, t_{m-1}$ 就成为“过去”。因而上述定义中的条件可表述为：在 t_m 时 $\xi(t_m)$ 取值为 x_m 的条件下， $\xi(t)$ “将来”的状态与“过去”的状态是无关的。也可以这样说： $\xi(t)$ 的“将来”只是通过“现在”与“过去”发生联系，一旦“现在”已经确定，“将来”与“过去”无关。也可以说：在已知 t_m 时过程所处状态 $\xi(t_m) = x_m$ 的条件下，时刻 t_m 以后过程将到达状态的情况与时刻 t_m 以前过程所处的状态无关。这个条件称为过程的无后效性或过程的马尔可夫性。

马尔可夫过程 $\xi(t)$ 的有穷维概率密度可以表示为

$$\begin{aligned} & f_{t_1, t_2, \cdots, t_m}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m) \\ &= f_{t_m/t_1, t_2, \cdots, t_{m-1}}(x_m/x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{m-1}) \\ &\times f_{t_1, t_2, \cdots, t_{m-1}}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{m-1}) \\ &= f_{t_m/t_{m-1}}(x_m/x_{m-1})f_{t_1, t_2, \cdots, t_{m-1}} \times (x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}) = \cdots \\ &= f_{t_m/t_{m-1}}(x_m/x_{m-1})f_{t_{m-1}/t_{m-2}}(x_{m-1}/x_{m-2}) \cdots \\ &\times f_{t_2/t_1}(x_2/x_1)f_{t_1}(x_1) \end{aligned}$$

该式表明 $\xi(t)$ 的 n 维概率密度等于一些条件概率密度与 t_1 时初始概率密度的乘积。这些条件概率密度称为转移概率密度。

马尔可夫过程 $\{\xi(t), t \in T\}$