**视觉定位与感知课程作业（第三次）**

（作业提交截止时间 2018 年 11 月 8 日晚 22:00 前，以邮件提交时间为准）

1. 验证定义了如下二元李括号(Lie bracket)运算的 3x3 反对称矩阵 $\{\Phi = x^{\wedge}\}$集合为李代数(权重 20%):

$$[\Phi_1, \Phi_2] = \Phi_1\Phi_2 - \Phi_2\Phi_1$$

2. 通过一个单位四元数$q = (q_w, q_x, q_y, q_z)^T$，我们可将一个三维向量$x \in \mathbb{R}^{3\times1}$通过如下计算公式进行旋转变换，

$$\tilde{x}' = q \otimes \tilde{x} \otimes q^*$$

其中$x'$ 为变换之后的三维向量，$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ 和 $\tilde{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix}$是三维向量所对应的四元数。证明以上变换是旋转变换，即$x' = Rx$，并推导旋转矩阵$R$的具体形式（权重 30%）。

3. 三个向量$(x_1, x_2, x_3)$经过某个旋转变换之后在新坐标系下的向量分别为$(y_1, y_2, y_3)$,给定变换前后的坐标如下（权重 50%），

| 变换前 | 变换后 |
|---|---|
| 0.620958643935308,0.573709764841198,<br>0.0520778902858696 | 0.353341242456951,0.758309088939370,-<br>0.132521433812302 |
| 0.931201384608250,0.728661681678271<br>0.737841653797590 | 0.809689665378325,1.05850603006065<br>0.407997305415215 |
| 0.0634045006928182,0.860440563038232<br>0 | 0.0810603278445445,0.887812124994074<br>0.907033557005372 |

（若使用 matlab，可从’xy.mat’直接导入数据）

编程使用 Gauss-Newton 法求解该旋转变换，并撰写简单报告，对实现过程进行描述，并分析不同初值对迭代次数和迭代结果的影响。

提示：

1. 总目标函数 ：

$$\min_R \sum_{i=1}^{3} (y_i - Rx_i)^2$$

2. 每一步的步长$\Delta\theta \in \mathbb{R}^{3\times1}$可通过优化如下目标函数获得：

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} (y_i - R\exp(\Delta\theta^{\wedge})\, x_i)^2,$$

$$\approx \textstyle\sum_{i=1}^{3} (y_i - R(I + [\Delta\theta]_\times) x_i)^2,$$

$$= \sum_{i=1}^{3} (y_i - Rx_i + [Rx_i]_\times \Delta\theta)^2 = \sum_{i=1}^{3} (z_i - J_i\Delta\theta)^2$$

3. 参数更新后 ($\mathrm{R} \leftarrow \mathrm{R} \boxplus \Delta\theta$,或$\mathrm{q} \leftarrow \mathrm{q} \boxplus \Delta\theta$) 要注意保证R的正交性或q的单位性。(一个$3 \times 3$的矩阵A最接近的旋转矩阵可由 svd 分解之后，将奇异值全设为 1 重新组合得到)。

$$\mathrm{A} = \mathrm{U\Sigma V}^T \rightarrow \mathrm{R} = \mathrm{UV}^T$$