Problem 1. 두번째 정의에서

좌변의 $ij = 1,1$ 일때

$$\frac{1}{4}(X_{11}+X_{12}+X_{21}+X_{22})\cdot Y_{11} -$$

우변에서 이 $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ 가 등장할 때 $(T^T(Y))_{ij} = \frac{1}{4}Y_{11}$ 이어야한다.
1번

다른 Y에 대해서도 $Y_{ij} \rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{4}Y_{ij} & \frac{1}{4}Y_{ij} \\ \frac{1}{4}Y_{ij} & \frac{1}{4}Y_{ij} \end{matrix}$ 로 바뀌어야 한다. (T에서 average pool 연산되는 영역만큼 다시 뿌려져야 함)

$$T^T(Y) = \begin{array}{c c} & \overbrace{\hphantom{Y_{11}\ Y_{11}\ Y_{12}\ Y_{12}\ \cdots\ Y_{1\frac{n}{2}}\ Y_{1\frac{n}{2}}}}^{n} \\ m & \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{11} & Y_{12} & Y_{12} & \cdots & Y_{1\frac{n}{2}} & Y_{1\frac{n}{2}} \\ Y_{11} & Y_{11} & Y_{12} & Y_{12} & & Y_{1\frac{n}{2}} & Y_{1\frac{n}{2}} \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ Y_{\frac{m}{2}1} & Y_{\frac{m}{2}1} & & & & Y_{\frac{m}{2}\frac{n}{2}} & Y_{\frac{m}{2}\frac{n}{2}} \\ Y_{\frac{m}{2}1} & Y_{\frac{m}{2}1} & & & & Y_{\frac{m}{2}\frac{n}{2}} & Y_{\frac{m}{2}\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \end{array}$$

Problem 2.

```
layer = nn.ConvTranspose2d(1, 1, r, stride=r, bias=False)
layer.weight.data = torch.ones(1,1,r,r)
```

in channel, out channel 모두 1이라 가정

P3. (a) $D_f(X\|Y) = \int f\left(\frac{p_X(x)}{p_Y(x)}\right) p_Y(x)\,dx$

$= E\left[f\left(\frac{p_X(x)}{p_Y(x)}\right)\right]$

jensen 부등식에 의해

$$E\left[f\left(\frac{p_X(x)}{p_Y(x)}\right)\right] \geq f\left(E\left[\frac{p_X(x)}{p_Y(x)}\right]\right) = f\left(\int \frac{p_X(x)}{p_Y(x)} \cdot p_Y(x)\,dx\right) = f(1) = 0$$

(b) $f = -\log t$ 라면

$D_f(X\|Y) = \int -\log\left(\frac{p_X(x)}{p_Y(x)}\right) \cdot p_Y(x)\,dx$

$= \int (\log p_Y(x) - \log p_X(x))\, p_Y(x)\,dx = D_{KL}(Y\|X)$

$f = t\log t$ 라면

$D_f(X\|Y) = \int \frac{p_X(x)}{p_Y(x)} \log \frac{p_X(x)}{p_Y(x)} \cdot p_Y(x)\,dx$

$= \int (\log p_X(x) - \log p_Y(x))\, p_X(x)\,dx = D_{KL}(X\|Y)$

P4

$P(G(U)\le t) = P(U \le F(t)) = F(t)$ 을 보이면 된다.

$(\rightarrow)$ $G(u)\le t$ 이면 $u \le F(t)$ 이다.

$G(u) = \inf\{x\in\mathbb{R} \mid u \le F(x)\}$ 이므로

$u \le F(G(u))$ 이고. F는 CDF이므로 non-decreasing.

$F(G(u)) \le F(t)$

$\therefore\ u \le F(G(u)) \le F(t)$

$(\leftarrow)$ $u \le F(t)$ 이면 $G(u)\le t$

$G(u) = \inf\{x\in\mathbb{R} \mid u \le F(x)\}$ 이므로 $G(u)\le t$

P5

$$Y = A^{-1}(X - b)$$

$$P_X(x) = P_Y(A^{-1}(x-b))\,\left|\det A^{-1}\right|$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left((x-b)^T (A^{-1})^T A^{-1}(x-b)\right)} \cdot \left|\det A^{-1}\right|$$

$$\Sigma^{-1} = (AA^T)^{-1} = (A^{-1})^T \cdot A^{-1} \cdot 1,$$

$$\left|\det A^{-1}\right| = \frac{1}{|\det A|} \cdot 2 \quad \sqrt{\det \Sigma} = \sqrt{(\det A)^2} = |\det A| \cdot 3$$

$$\therefore P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-b)^T \Sigma^{-1}(x-b)}$$

Problem 6

$2 \to \sigma(2)$

σ 가 1부터 n까지의 정수가 1번씩 사용된 list라고 하면 $\sigma^{-1} = \overbrace{[0, \cdots, 0]}^{n\text{개}}$ list로 initialize 한다

for $i = 1, \cdots, n$

$\sigma^{-1}[\sigma(i)] = i$

(1-based 문법)

을 해준다면 σ^{-1}이 구해진다.

Problem 7.

(a) $(P_\sigma x)_i = e_{\sigma(i)}^T x = x_{\sigma(i)}$

(b) $P_\sigma P_\sigma^T = \begin{bmatrix} e_{\sigma(1)}^T \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{bmatrix} = I \quad \left(\because e_{\sigma(i)}^T e_{\sigma(j)} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \right.$

$\therefore P_\sigma^T = P_\sigma^{-1}$

$P_{\sigma^{-1}}$은

$\sigma(i) = j$ 라 하면

$\sigma^{-1}(j) = i$ 이다.

즉, $(P_\sigma)_{ik} = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k \neq j \ (k = 1, 2, \cdots, j-1, j+1, \cdots n) \end{cases}$

$(P_{\sigma^{-1}})_{jl} = \begin{cases} 1 & l=i \\ 0 & l \neq i \ (l = 1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n) \end{cases}$

모든 i에 대해 이를 만족하므로

$P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^T$

(c) $P_\sigma P_\sigma^T = I$

$\det(P_\sigma) \cdot \det(P_\sigma^T) = 1$

$\therefore \det(P_\sigma) = 1 \text{ or } -1$

$\therefore |\det(P_\sigma)| = 1$