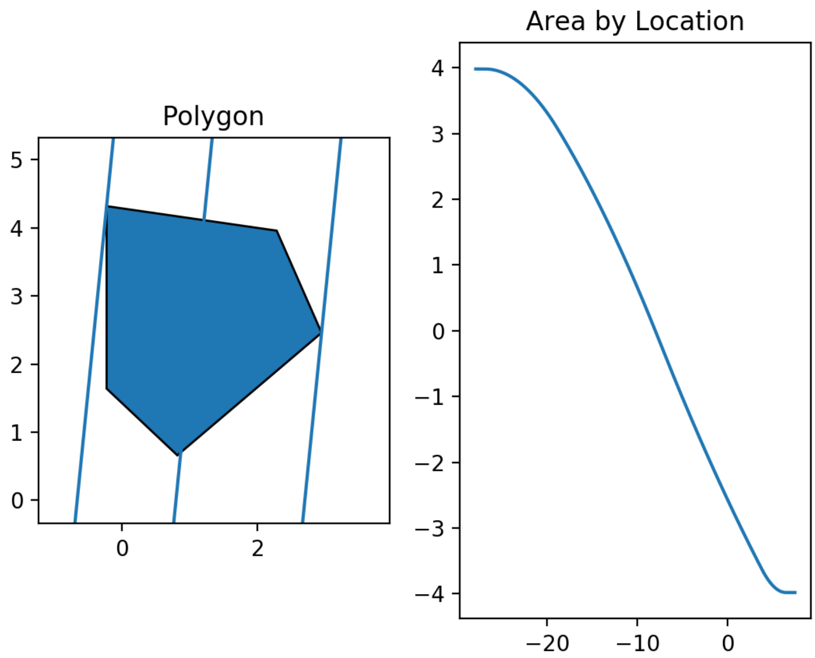
햄 샌드위치 정리는 삼차원의 물체에 대한 이야기인데, 삼차원을 계산하기 어려워 이차원에서만 고려하기로 했다. 이차원에서 햄 샌드위치 정리의 축소판은 팬케이크 정리라고 한다.

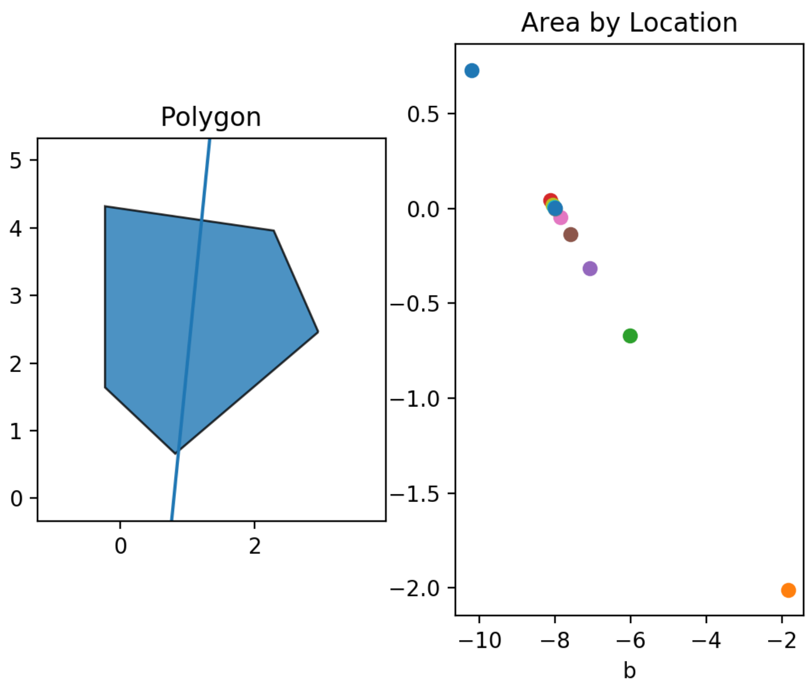
 먼저, 한 볼록다각형을 이등분하는 직선을 찾았다. 햄 샌드위치 정리의 증명 과정에서 처음 이등분할 때는 기울기를 고정하고 이등분하는 직선을 찾기 때문에 주어진 기울기의 이등분하는 직선을 찾는 함수를 만들었다. $y \geq ax+b$의 영역과 다각형이 겹치는 부분의 넓이를 구해서, 그 넓이를 $A_1(a,b)$라 하자. 다각형의 넓이를 S_0라 할 때, $a=10$일 때 b에 따른 $S(a,b) := A_1(a,b) - \frac{S_0}{2}$를 나타내면 다음과 같다.



직선이 다각형의 왼쪽 끝에 있을 때 $b=\alpha$, 오른쪽에 있을 때 $b=\beta$라 하면 $S(10,\alpha)=\frac{S_0}{2}$, $S(10,\beta)=-\frac{S_0}{2}$이고 그래프에서 함수가 연속인 것을 확인할 수 있으므로 사이값 정리에 의하여 $\exists b \in (\alpha,\beta)\ s.t.\ S(10,b)=0$ 이다. $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$라 할 때, $S(10,\gamma)>0$이면 $b\in(\gamma,\beta)$에 이등분하는 직선이 존재하고, $S(10,\gamma)<0$이면 $b\in(\alpha,\gamma)$에 이등분하는 직선이 존재한다. 0이면 그것이 이등분하는 직선이다. 이런 과정을 반복해서 $|S(10,b)|<0.001$인 직선을 구할 수 있다. 그래프에서 $b\approx-8$일 때 넓이가 이등분되는 것을 볼 수 있다.

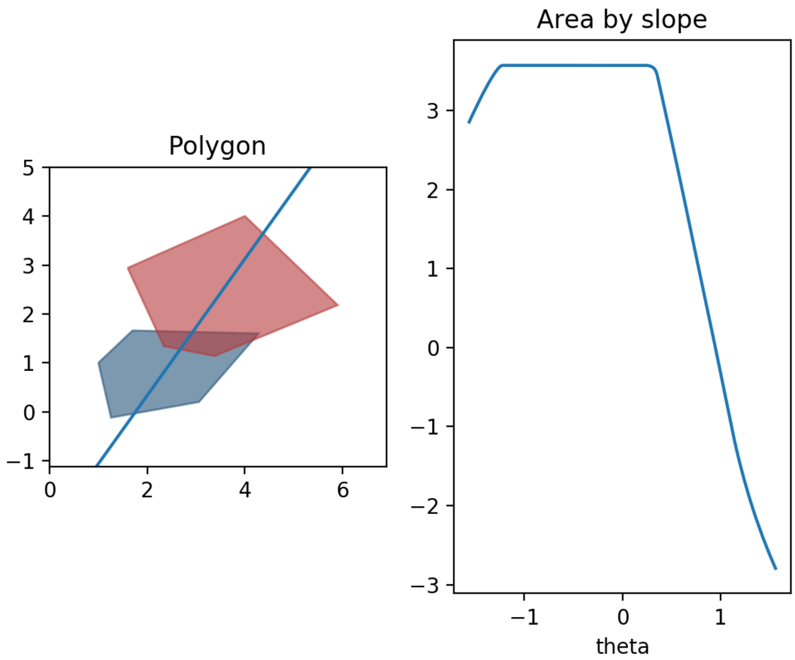
먼저 α,β를 구하기 위해서 다각형의 각 점이 직선과 떨어진 정도를 구한다. 점(x,y)가 직선과 떨어진 거리는 $\frac{|y-ax-b|}{\sqrt{1+a^2}}$이므로 $y-ax-b$로 떨어진 정도를 알 수 있다. 양수이면 직선 위 방향에, 음수이면 직선 아래 방향에 있다는 의미를 가진다. $S(a,b)=\frac{S_0}{2}$이면서 다각형에 가장 가까울 때 다각형의 꼭짓점과 반드시 만나게 되므로 꼭짓점 중 $y-ax$가 가장 큰 점을 지나는 직선과 $y-ax$가 가장 작은 점을 지나는 직선을 택하면 α,β를 구할 수 있다. 그 후

이등분하는 직선을 구하는 과정을 나타내면 다음과 같다.

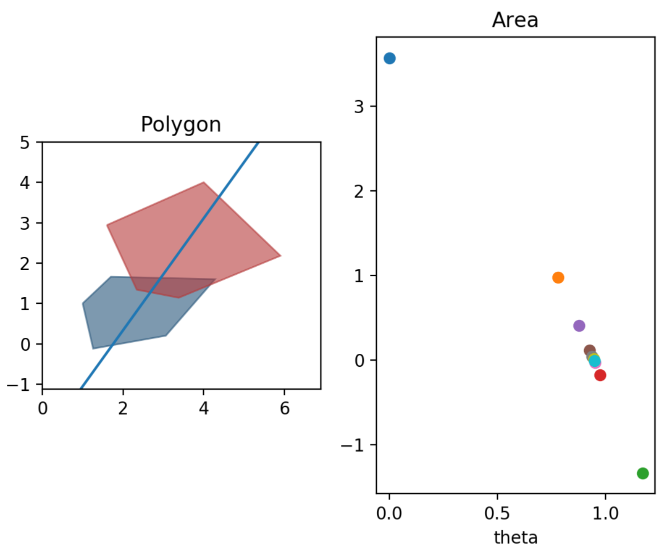


b가 -10, -1, -6, -8, ... 으로 변하면서 $S(10,b)-\frac{S_0}{2}$가 대체적으로 0에 가까워지는 것을 볼 수 있다. $S(10,b)-\frac{S_0}{2}$가 0.00034가 되는 지점에서 0.001보다 작아져서 결과를 출력하게 되고, 이 때 $b \approx 7.996$이다.

이제 볼록다각형 두 개의 넓이를 동시에 이등분하는 직선을 찾아보자. 햄 샌드위치 정리(또는 팬케이크 정리)의 증명 과정을 보면 우선 모든 $\theta \in [0°, 180°]$에 대하여 이 각도로 첫 번째 도형을 이등분하는 직선을 찾을 수 있다. 기울기가 $\tan(\theta - 90°)$이고 첫 번째 도형을 이등분하는 직선이 두 번째 도형을 자를 때 직선 위 방향에 있는 도형의 넓이의 비율을 $p(\theta)$라 하자. $p(0°)=\frac{1}{2}$이면 동시에 이등분하는 직선을 찾은 것이다. $p(0°)>\frac{1}{2}$이면 $p(180°)<\frac{1}{2}$이고 p는 연속이므로 사이값 정리에 의하여 이등분하는 직선을 찾을 수 있다. 기울기가 a이고 첫 번째 다각형의 넓이를 이등분하는 직선 위의 영역과 두 번째 다각형이 겹치는 부분의 넓이를 $A_2(a)$라 하자. $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 대한 $R(\theta) := A_2(\tan(\theta)) - S_2$를 나타내면 아래 그래프와 같다. 파란색이 첫 번째 다각형, 빨간색이 두 번째 다각형이다. $\theta \approx -\frac{\pi}{2}$일 때 $R(\theta) > 0$ 이고, $\theta \approx \frac{\pi}{2}$일 때 $R(\theta) < 0$이므로 사이값 정리에 의하여 $R(\theta) = 0$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$가 존재한다. 그래프에서 $\theta \approx 0.95 \approx 54°$인 지점에서 $R(\theta) \approx 0$인 것을 볼 수 있다. 이때 $R(\frac{\pi}{2}) \approx 0$ 또는 $R(-\frac{\pi}{2}) \approx 0$인 경우(y축에 거의 평행한 직선이 넓이를 동시에 이등분하는 경우)를 제외하면 사이값 정리로 이등분하는 직선을 구할 수 있다.



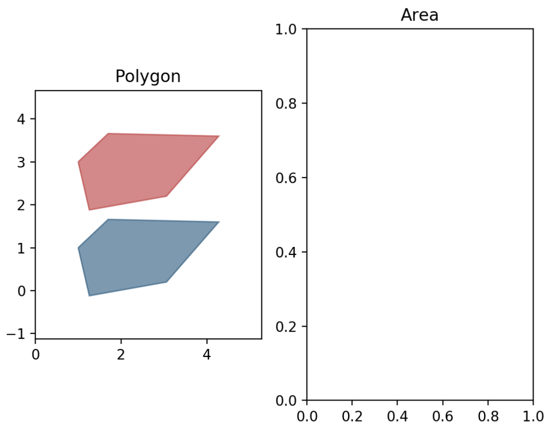
이제 한 개의 다각형을 이등분하는 방법에서 했던 것처럼 γ를 구하는 것을 반복하면 아래와 같다.

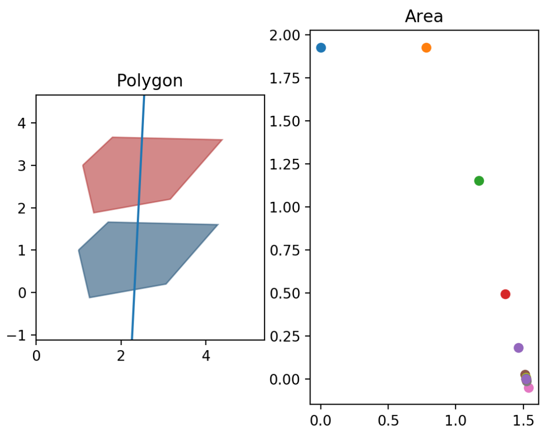


$\theta \approx 0.9465$일 때 $R(\theta) = 0.000369$로 0.001보다 작아지게 되어 이등분하는 직선을 찾는다.
허용 오차를 0.001 대신 0.0001로 해도 프로그램이 정상적으로 실행되었다. 필요한 만큼 오차를 지정할 수 있을 듯 하다.

y축에 거의 평행한 직선이 필요한 경우에 어떻게 되는지 보기 위해, 첫 번째 도형을 y축 방향으로 2만큼 평행이동한 경우와 x축 방향으로 0.1, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 경우를 실행해보았다.
y축 방향으로 2만큼 평행이동한 경우에는 이등분하는 직선을 찾지 못했고, x축 방향으로

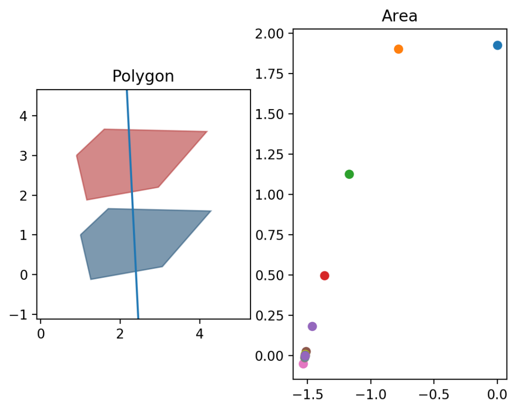
0.1만큼도 평행이동했을 때에는 찾을 수 있었다. x축 방향으로 -0.1만큼 이동했을 때도 찾을 수 있었다.
따라서 정말 특수한 경우를 제외하면 찾을 수 있고, 특수한 경우에도 $y=x$에 대칭해서 구한 뒤에 다시 대칭하면 구할 수 있다.

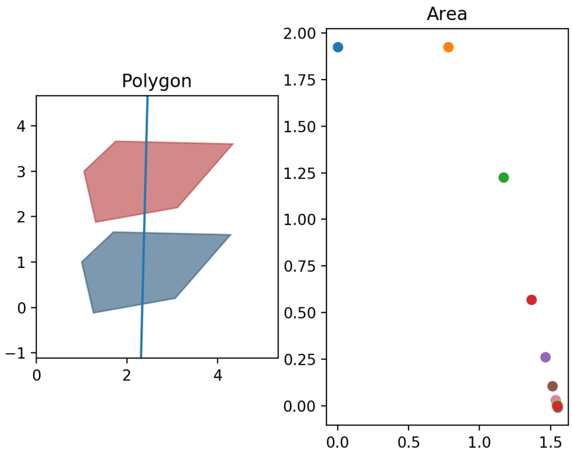




$(x,y) \to (x,y+2)$

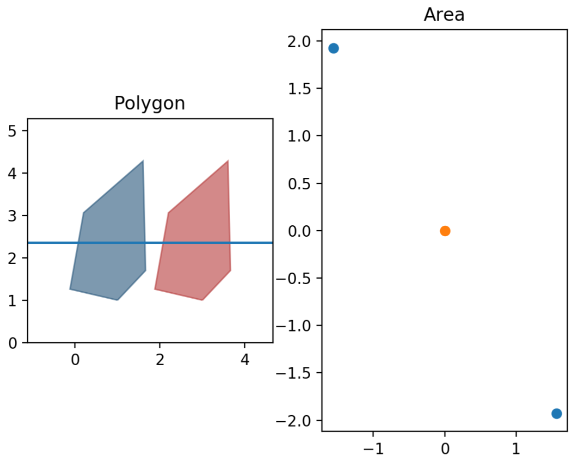
$(x,y) \to (x+0.1,y+2)$





$(x,y) \rightarrow (x-0.1, y+2)$ $(x,y) \rightarrow (x+0.05, y+2)$

위는 파란색 다각형을 평행이동한 빨간색 다각형이 있을 때, 두 다각형을 각각 0.0001 이내의 차이로 이등분하는 직선을 찾은(찾지 못한) 사진이다. 찾지 못한 경우에 $y=x$ 대칭을 해서 구하면 아래와 같다.



이렇게 구한다면 모든 경우에 두 볼록다각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선을 찾을 수 있다.

참고자료 : https://en.wikipedia.org/wiki/Ham_sandwich_theorem