Eötvös Loránd Tudományegyetem
Budapesti Corvinus Egyetem

Robusztus portfólióoptimalizálás bizonytalansággal

MSc szakdolgozat

Kratok Gyula

Biztosítási és pénzügyi matematika mesterszak
Kvantitatív pénzügyek szakirány

Témavezetők:
Pleibeisz Ambrus
Dr. Molnár-Sáska Gábor

Budapest, 2025

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőimnek Pleibeisz Ambrusnak és Molnár-Sáska Gábornak, az érdekes téma javaslatért, illetve hogy a későbbiekben is mindig készségesen válaszoltak a felmerülő kérdéseimre. Tanácsaikkal, szakértelmükkel emelték a dolgozat színvonalát.

Továbbá hálával tartozom a családomnak, a barátaimnak és a munkatársaimnak végtelen türelmükért, megértésükért és hogy a nehezebb pillanatokban tartották bennem a lelket. Nélkületek ez a dolgozat nem születhetett volna meg.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A különféle piaci szereplők, a portfóliójuk elkészítésekor egy célt tartanak a szemük előtt, hogy a befektetett tőkéjük, minél nagyobb hozammal megtérüljön. A befektetési univerzumot alkotó eszközök különféle statisztikai mutatói ismeretlenek, és a meghatározásuk matematikai, illetve közgazdasági kutatást igényel. A befektetési döntések középpontjában a kockázat és hozam közötti egyensúly megtalálása áll. A portfólióoptimalizálási tevékenység ennek az egyensúlynak a matematikai formalizálása, amely során a befektető preferenciáit figyelembe véve határozzuk meg az eszközök ideális súlyozását.

A portfólióoptimalizálás célja, hogy a befektető számára adott kockázati szint mellett a lehető legnagyobb hozamot biztosító, vagy adott hozamszint mellett a lehető legkisebb kockázatot jelentő portfóliót találja meg. A befektetések közötti diverzifikáció révén csökkenthető a portfólió egészének kockázata, miközben a várható hozam nem feltétlenül csökken. Ennek az elméleti és gyakorlati kérdéskörnek a tudományos megalapozása már az ötvenes években elkezdődött, és azóta is folyamatosan aktív kutatás tárgya.

A klasszikus *Markowitz*-féle **hozam-variancia portfólióelmélet** (*mean-variance*, MV) [1] az optimális portfólió keresése során a hozamok várható értékét és szórását előre ismertnek tekinti, nem véve figyelembe ezen értékek becslési hibáját, sem a modell eredendő pontatlanságából fakadó hibákat. Ezentúl ennek a modellezési eljárásnak a gyakorlatban kellemetlen hibái is vannak.

Elsősorban, ha valódi adatokon használjuk, a kapott portfóliónkban az eszközök optimális súlya a korlátok szélén fog az esetek nagy részében koncentrálódni, így további feltételeket szükséges az optimalizálónak beadni, hogy egy adott eszközből ne legyen több a portfóliónkban, mint amennyit ésszerűnek tartunk. Sok eszköz egyáltalán nem lesz jelen, csak néhány eszköz fog szerepelni a portfóliónkban [2]. A másik nagy probléma a Markowitz-féle módszerrel az, hogy a kapott portfóliók nem eléggé robusztusak. Ezt a problémát számos cikk tárgyalja többek között [2] és [3]. A hozamok valódi értékét, legyen a modellünk bármennyire is precíz, csak közelíteni tudjuk, és egy elvárható tulajdonság, hogy ha a portfóliónk hozamai csak kissé változnak, akkor a portfóliónk optimális összeállítása is csak egy kicsit változzon. A modern portfólióelméletet a dolgozat második fejezetében mutatom be részletesen.

A várható hozamok pontbecslése helyett léteznek módszertanok, melyek bemenetként valamilyen módon már tartalmazzák a statikus inputok (várható hozam, kovarianciamátrix) becslési hibáját. Ebben a dolgozatban két ilyen portfólióválasztási módszertant szeretnénk bemutatni.

Az első egy statisztikai módszertan, a **bayesi statisztika** köré építi a matematikai megalapozását. A bayesi statisztika egy olyan becslési eljárás, amelyben a felhasználó az előzetes (apriori) feltételezését bele tudja integrálni az eredménybe. A statisztikai, illetve matematikai alapokat a [4], illetve a [5] forrásokból ismertetem a harmadik fejezet elején, majd azon szükséges ismereteket, amelyek ennek a módszernek a dolgozatba való beemelését indokolttá teszi, a [6] cikkből hivatkozom. *Doron Avramov* és *Goufu Zhou* a cikkben különböző megközelítéseket mutat be, hogy hogyan tudnánk az előzetes információkat (prior) kihasználni, hogyan tudjuk használni a módszert, ha nincsenek ilyen információink (nem-informatív prior) és amikor vannak (informatív prior). A makrogazdasági környezet különböző változásaiból eredő információk beintegrálásával részletesebben a [7] tanulmányban foglalkoznak.

A bayesi megközelítések közül a későbbiekben kiemelt szerepet kap a *Fisher Black* és *Robert Litterman* által megalkotott módszer, amit róluk neveztek el [8] és ma is széleskörben alkalmazzák az iparban. A **Black-Litterman modell** lényege, hogy egy egyensúlyi modellből kinyert hozamokat és a saját nézeteinket ötvözi össze, hogy megkapjuk azokat a végső hozamokat, amelyekkel végül számolni fogunk. A technikai részleteket a [9] és a [10] cikkekből állítottam össze, a közgazdasági illetve más kvalitatívabb aspektusait, valamint a használatát a modellnek a [11] cikk kiválóan összefoglalja.

A várható hozamok pontbecslése helyetti intervallumbecslésével egy kockázati mértéket definiálunk az eszközöknek, amit **bizonytalanságnak** nevezünk. A dolgozat elsősorban ezt a megközelítést tárgyalja. Az elsődleges célja a módszernek, hogy a befektetők bele tudják kalkulálni a bizonytalanság kerülési természetüket a portfóliódöntésükbe. A variancia a piaci kockázat mérőszáma, és a modell egy része, míg a bizonytalanság maga a bemenetek és a modell hibájából eredő kockázat mérőszáma. A dolgozat negyedik fejezetében *Lorenzo Garlappi*, *Raman Uppal*, illetve

Tan Wang cikkének bizonyos fejezeteinek összefoglalása [12] történik. A szerzők ebben a cikkben a hozamok idősorai alapján egy bizonytalansági mértéket definiálnak, majd leírnak egy módszert, hogy ezt hogyan tudjuk a portfólióválasztásunkban kihasználni. Ezt a cikket nyugodtan tekinthetjük a fejezet törzsének, amelyből további különféle irányzatok felé lehet elindulni. A [13] cikk egy rugalmas, gyakorlatorientált portfólióoptimalizálási rendszert mutat be, amelyben különféle javításokkal (faktor kitettségek beépítése, likviditási megszorítás, hozambecslés zaj kalkuláció) növeli a kockázat-korrigált teljesítményt. A [14] tanulmányban különböző VaR és CVaR alapú kockázati mértékeken keresztül optimalizálnak, hogy stabilabbak legyenek a portfólió súlyok. A [15] tanulmány pedig egy kétlépcsős portfólióoptimalizálási eljárást ismertet. Az első lépésben egy integrált, dinamikus, slack-alapú adatburkoló analízis (DEA) modellt alkalmaznak a részvények hatékonyságának értékelésére és kiválasztására. A második lépésben egy robusztus, stabil és skálázott mean-variance-Entropic Value-at-Risk (EVaR) modellt alkalmaznak a kvalifikált részvények optimális súlyainak meghatározására.

A fent felsorolt cikkek mindegyike két lehetséges úton javítja fel az *mean-variance* optimalizálást: Vagy a hozamokat módosítja, transzformálja el (apriori hozamok, részvények score alapú értékelése), vagy az optimalizálandó célfüggvényt módosítja (bizonytalansági tag, CVaR optimalizálás).

Az elméleti háttér és a módszertan bemutatása után a szakdolgozatban leírt módszerekhez egy Pythonban megírt demonstrációt készítettem, valamint az implementált algoritmusokat valós piaci adatokon tesztelem és a különböző választási stratégiák szerint kapott eredményeket összehasonlítom.

A dolgozat további fejezeteiben elsőként a befektetési univerzumom bemutatása szerepel. Igyekeztem a különböző eszközöket mind más területről választani. Szerepelnek részvény- illetve kötvényindexek, valamint ezektől eltérő eszközök is. Fejlett illetve fejlődő piacok egyaránt jelen vannak, valamint a részvények mind különböző szektorokat reprezentálnak. Az adatok forrása a *Bloomberg*, a terminálhoz való hozzáférést a Budapesti Corvinus Egyetem biztosította, és az adatok leszedéséhez a [16] segédletet használtam.

Elsőként a Markowitz-féle optimalizálást implementáltam le, hogy legyen egy viszonyítási alapom a többi módszer eredményéhez. A bayesi eljárásokat a *Black-Litterman* modellen keresztül mutatom be, valamint a robusztus portfólióoptimalizálás során két megközelítést használok, az egyik esetben az egész portfólió hozamára definiálunk bizonytalanságot, a másik esetben pedig eszközönként. Az eredményeket különböző diagramokon és ábrákon mutatom be. Mindhárom esetben megkülönböztetem azt az esetet, amikor a rövidre eladás (*short selling*) engedélyezett és amikor nem az. Azt is ábrázolom, hogy mi történik a határportfólió görbével az egyes módszerekben.

A kódok, az adathalmaz, valamint a hivatkozott cikkek az alábbi linken érhetők el: https://github.com/gyusza46/master_thesis

2. Modern portfólióelmélet

A modern portfólióelmélet megalkotása *Harry Markowitz* nevéhez fűződik. Az azóta is talán legszignifikánsabbnak tartott 1952-es cikkében [1] elsőként javasolja, hogy az egyéni befektetők ne csak a hozamaik alapján osztályozzák a befektetési eszközöket, hanem egy szórás-várható hozam síkon gondolkodva vegyék figyelembe egyidejűleg az eszközhozamok kockázatát is. Ezúton, ha sikerül találnunk egy eszközt, ami kellőképpen negatívan korrelál a portfóliónk többi részével, egy lépésben növelhetjük a portfóliónk várható hozamát és csökkenthetjük a szórását.

A matematikai modell megalkotásához az első feltevésünk, hogy a befektetési eszközeink hozamai valószínűségi változók, és az eszközök nem függetlenek egymástól. A portfóliónk ezen eszközöknek lesz egy kiválasztott súlyvektora. A befektetési univerzumban megengedünk egy kockázatmentes eszközt, aminek fix r_f hozama van. A befektetési univerzumunkat Ω-val, az eszközök számát N-nel, valamint az árfolyamok idősorának hosszát T-vel jelöljük.

2.1. Definíció. *Az eszköz hozama $r_t\colon \Omega \to [-1, \infty)$ a befektetési eszköz értékmegváltozása adott periódus alatt*

$$r_t = \frac{P_t}{P_0} - 1$$

2.2. Definíció. *A portfólió az eszközök egy súlyvektora: $w \in [0,1]^{N+1}$, ahol*

$$\sum_{i=0}^{N} w_i = 1$$

Amennyiben a *short selling*, azaz rövidre eladás engedélyezett, a portfólióban szerepelhetnek negatív súlyok, vagyis az adott eszközt eladjuk. Elméletileg ezek a súlyok lehetnek tetszőlegesen alacsonyak, ha -1-nél kisebbek, az tőkeáttételes short pozíciót jelent. A valódi piacokon ezek a pozíciók erősen regularizálva vannak, és a portfólióoptimalizációban is érdemes bevezetni a -1-es alsó korlátot.

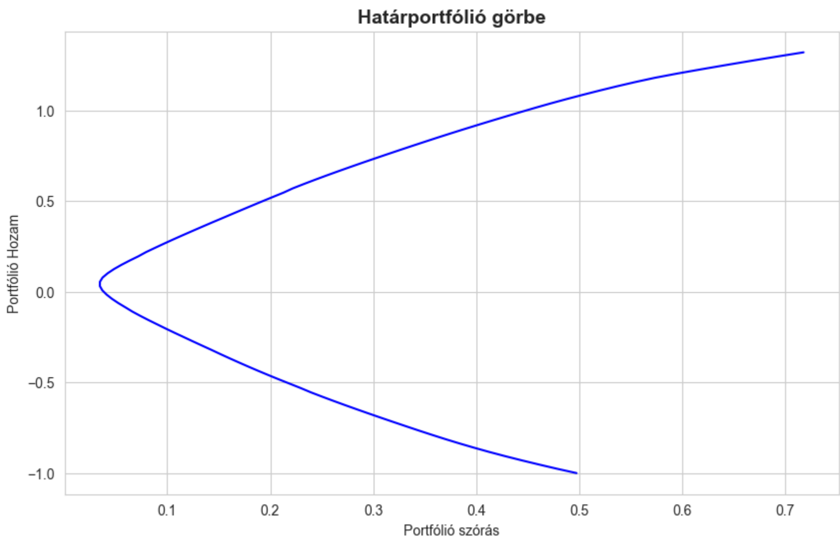
2.3. Definíció. *Egy eszköz kockázati prémiuma az, hogy mennyi hozamtöbbletet biztosít a kockázatmentes eszközhöz képest*

$$R_i = r_i - r_f$$

A Markowitz-féle portfólióvizsgálatban két statisztikai tulajdonság lesz releváns számunkra. Az eszközök *várható értéke* és a *kovarianciamátrixa.* A piaci szereplők célja, hogy minél nagyobb várható hozamot érjenek el minél kisebb kockázat mellett. Érdemes azt feltételeznünk, hogy a befektetők racionálisak olyan módon, hogy két azonos hozamú befektetési lehetőség közül a kisebb szórásút, vagyis a kevésbé kockázatost választják.

2.4. Definíció. *Azokat a portfóliókat, amelyeknél nincs azonos hozamú és alacsonyabb szórású portfólió,* ***határportfólióknak*** *nevezzük.*

Ezeket a portfóliókat egy szórás várható érték térben ábrázolva egy hiperbolaszerű görbét kapunk. Racionális döntéseket feltételezve, minden befektető ennek a görbének a felső részéről választja ki a saját portfólióját.



1. ábra. A határportfóliók összessége

Amennyiben lehetőségünk van egy kockázatmentes eszközbe is elhelyezni a pénzünket, a hiperbolát két félegyenes váltja fel, amelyek a kockázatmentes portfóliót reprezentáló kezdőpontból indulnak ki. A felső félegyenes neve tőkepiaci egyenes (*Capital Market Line*), és egy pontban érinti a határportfólió görbét, ezt érintési portfóliónak nevezzük. Ha a portfóliónkban megengedjük kockázatmentes eszköz szerepeltetését, akkor minden szereplő ebből és az érintési portfólióból súlyozza össze a számára optimális eredményt. Ezzel a portfólióválasztási kérdés valójában azzá válik, hogy mennyi súlyt akarunk rakni az érintési portfólióba. A későbbiekben nem engedjük meg a kockázatmentes eszköz szerepeltetését, az eszközök kockázati prémiumán végezzük az optimalizálást, mivel a mi fókuszunk a portfólió kockázatos részén van.

2.5. Definíció. *Az adott kockázat mellett maximális várható hozamot biztosító portfóliók összességét* ***hatékony*** *portfólióknak nevezzük.*

Minden befektető egy hatékony portfóliót fog választani a saját kockázati preferenciái szerint. Ezt a kockázati preferenciát sokféleképpen lehet kvantifikálni. A legegyszerűbb mód, ha azt mondjuk, hogy minden szereplő rendelkezik egy hasznossági függvénnyel, amelyben szerepel egy olyan paraméter, ami az ő kockázati étvágyát jellemzi. Erre egy konkrét megvalósítás a kvadratikus hasznossági függvény [6].

$$U(w) = E(R_w) - \frac{\gamma}{2} Var(R_w) = w^T \mu - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma w \tag{1}$$

A képletben μ és Σ az eszközhozamok várható értékét, illetve a kovarianciamátrixát jelölik. R_w az adott portfólió kockázati prémiuma. A γ egy befektetőfüggő paraméter, ami a szereplők kockázatkerülési arányát fejezi ki. Minél nagyobb γ értéke, annál jobban bünteti a magas kockázatú befektetések kiválasztását.

Ebben a keretrendszerben az optimális portfólió az, amelyik maximalizálja ezt a hasznossági függvényt, így az optimális portfólió kérdését egy feltételes szélsőértékkeresési feladattá alakítottuk. A befektetők egy bizonyos hasznossági szint (m) elérése mellett minimalizálni szeretnék a portfóliójuk kockázatát.

$$\min_w w^T \Sigma w \tag{2}$$

$$w^T \mu - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma w = m \tag{3}$$

Amennyiben a μ várható értéket és a Σ kovarianciamátrixot is adottnak tekintjük, a feladatnak ismert a megoldása [6]:

$$w^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \mu \tag{4}$$

ezt az (1) hasznossági függvénybe helyettesítve, a következő eredményt kapjuk:

$$U(w^*) = \frac{1}{2\gamma}\mu^T\Sigma^{-1}\mu \tag{5}$$

A valóságban ezeket a portfólióhozamokat, illetve kovarianciákat nem tudjuk pontosan meghatározni. Ellenben ahhoz, hogy ezt a keretrendszert használni tudjuk, először ezeket a mennyiségeket ismernünk kell. Becslést kell adnunk a hozamok várható értékére, valamint a kovarianciamátrixára, ez pedig magától értetődően becslési hibával, paraméter bizonytalansággal fog járni, a modell alapvető hibája mellett.

A legkézenfekvőbb módszer a paraméterek becslésére a klasszikus maximum likelihood módszerrel. Ezt használva a következő eredményeket kapjuk:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t \tag{6}$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \hat{\mu})(R_t - \hat{\mu})^T \tag{7}$$

Majd a becslés során az optimális portfólió súlyait is megkapjuk.

$$\hat{w}^{ML} = \frac{1}{\gamma}\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu} \tag{8}$$

Ezzel a kétlépcsős megoldással a modellezésünkben megjelenik a *paraméter bizonytalanság* problémája, mivel a becsült paramétereket használjuk, nem pedig a valódiakat. A Markowitz-i portfólióelmélet az ebből a problémából adódó kockázatot figyelmen kívül hagyja. A következő fejezetekben szeretnénk olyan becslési eljárásokat illetve modelleket készíteni, amelyek figyelembe veszik a modell és paraméter bizonytalanságból adódó pontatlanságokat.

3. Bayesi portfóliómodellezés

3.1. Bayesi statisztika

A klasszikus statisztikai paraméterbecslés eljárása a következő:
Az adataink egy paraméteres eloszláscsaládból származnak ($\theta \in \Theta$), amelynek paraméterterét ismerjük vagy sejtjük. Az eloszláscsalád egy adott tagja generálja a valódi adatokat, de a valódi eloszláshoz tartozó paraméter értéke ismeretlen. A pontos becsléséhez statisztikai eljárásokat alkalmazunk, például maximum likelihood (ML) vagy momentum módszert, és ezáltal egy becsült $\hat{\theta}$ értéket kapunk a paraméterre.

A következő lépésben a kapott becslést egy nullhipotézissel teszteljük. Ehhez egy tesztstatisztikát (T) számolunk, amely alapján kiértékeljük, mennyire összeegyeztethetőek az adatok a nullhipotézissel. A cél az, hogy eldöntsük: van-e elegendő bizonyíték az adatok alapján a nullhipotézis elutasítására.

A döntést kétféleképpen is megfogalmazhatjuk. Az egyik megközelítésben a tesztstatisztika abszolút értékét egy előre meghatározott kritikus értékkel (t_α) hasonlítjuk össze: ha $|T| > t_\alpha$, elutasítjuk a nullhipotézist. A másik megközelítés a p-érték kiszámítása, amely annak valószínűségét méri, hogy a nullhipotézis fennállása esetén legalább ilyen szélsőséges értéket kapjunk:

A p-érték kiszámítása a következőképpen történik:

$$p = P(|T| \geqslant t_0 \mid \theta = \hat{\theta})$$

Ha a p-érték kisebb, mint az előre rögzített szignifikanciaszint (α), akkor szintén elutasítjuk a nullhipotézist.

Ez a megközelítés sok problémakörben rendkívül hasznos. Regressziós modellekben nagyon hasonló módon döntünk változók szignifikanciájáról. A várható hozamok becslésénél nem elégedhetünk meg azzal, hogy melyik érték a legvalószínűbb, szükségünk van arra az információra is, hogy mekkora ez a valószínűség. A becsült paraméternek nem egy pontbecslését, hanem egy eloszlását szeretnénk megkapni.

A **bayesi statisztika** módot ad rá, hogy a valószínűségszámításból ismert Bayes-tételt (9) bevonjuk a statisztikai módszereinkbe. Ez a módszer lehetővé teszi, hogy a statisztikai becslésünkbe előzetes információkat beépítsünk, valamint később új adatok megszerzésével a kiértékelt eredményeket frissítsük.

A klasszikus megközelítésben egy esemény valószínűségére úgy gondolunk, mint a kísérlet ismételt elvégzésével az esemény bekövetkezésének *gyakorisága*, míg a bayesi megközelítés a valószínűséget úgy értelmezi, mint a rendelkezésre álló információk alapján az esemény bekövetkezésébe vetett *bizonyosság* mértéke. [5]

3.1. Tétel. *Legyen A illetve B események, ekkor:*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \tag{9}$$

A Bayes-tétel egy matematikai formulát ad nekünk, hogy hogyan változik meg egy esemény bekövetkezésének a valószínűsége, ha más, tőle nem független események bekövetkeznek. A bal oldalon szereplő feltételes valószínűségre gondolhatunk úgy, mint egyfajta posterior valószínűségre, míg a $P(A)$-ra, mint egy apriori valószínűségre.

A bayesi statisztikát az apriori információk teszik annyira effektív és erős módszerré. Ha meg akarod kérdőjelezni valakinek a becslését, csak kérdőjelezd meg az előzetes feltételezéseit. Ez ajtót nyithat diszkussziónak és szakértői véleményeket tud beleintegrálni a modellbe.

A Bayes-tétel statisztikába való behozatala ennél azért kicsivel mélyebb matematikai megfontolást igényel, ugyanis eloszlásokról szól.

3.1. Definíció. *A Bayes-i paraméterbecslés formulája:*

$$P(\theta|D) = \frac{P(D|\theta) \cdot P(\theta)}{P(D)} \tag{10}$$

ahol a tagok jelentése:

- $P(\theta|D)$ *: a **posterior eloszlás**, vagyis a paraméter eloszlása az adatok megfigyelése után.*
- $P(\theta)$ *: az **apriori eloszlás**, amely a θ paraméterről alkotott előzetes vélekedésünket fejezi ki, még az adat (D) figyelembevétele előtt.*
- $P(D|\theta)$ *: a **likelihood (valószínűségi függvény)**, amely megmutatja, hogy mekkora valószínűséggel figyelhetjük meg a D adatot, ha a modellben a paraméter értéke θ.*

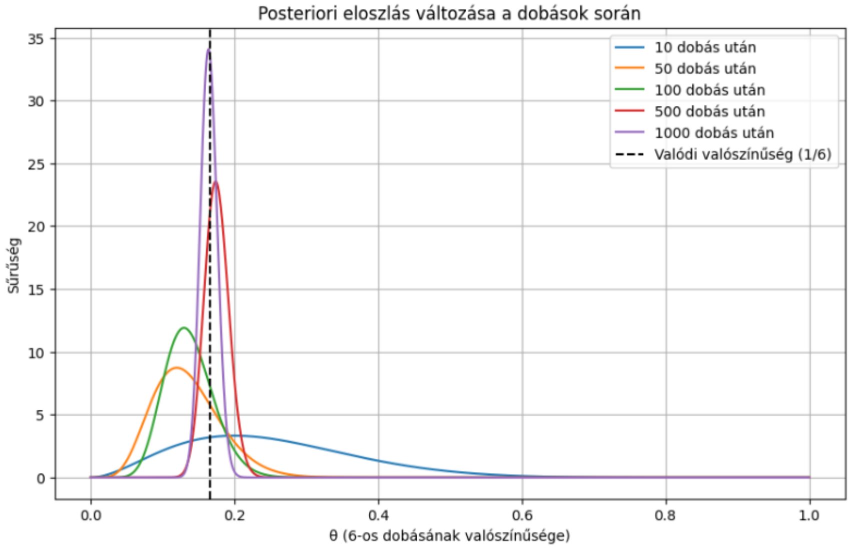
- *$P(D)$: az **eloszlás normalizáló tényezője (evidence)**, amely az adatok megfigyelésének teljes valószínűsége.*

Az utolsó tag azért felelős, hogy normalizálja a kapott eredményeket, vagyis, hogy a kapott posterior eloszlás valóban eloszlás legyen. A következőképpen számoljuk:

$$P(D) = \int_{\Theta} P(D|\theta)P(\theta)d\theta \tag{11}$$

Ezen a paramétertéren integrálni elsőnek bonyolultnak tűnhet, de miután megtettük, egy valószínűséget, vagyis egyetlen számot kapunk. Így a képlet ezen része csak egy konstansszorzóval változtatja meg a végeredményt. A likelihood és az apriori eloszlást általában sűrűségfüggvény formában szokták megadni, és így végül a posteriori sűrűségfüggvényt kapjuk meg a számolás végén. Így az integrált a gyakorlatban nem is kell kiszámolni, mivel ki tudjuk következtetni, ugyanis az értéke az a konstans, amivel a sűrűségfüggvény integrálja egy lesz.

Most pedig nézzünk egy konkrét esetet a bayesi paraméterbecslésnek egy alkalmazására. Kockadobással kísérletezünk és arra vagyunk kíváncsiak, hogy mekkora a hatos dobásnak a valószínűsége. Az eredmények úgy lettek szimulálva, hogy a helyes válasz az 1/6-od legyen. Vagyis szabályos kockával gurítunk. A likelihood függvényünk, binomiális eloszlás lesz, ugyanis ezzel lehet megmondani a hatos gurítások számát adott valószínűségek mellett. A kísérletben az apriori eloszlásunk *béta* eloszlás, melynek paraméterei kezdetben 1 és 1. A dobások számával nő az információ nagysága és a hatos dobások száma is, amelynek függvényében kiszámoljuk a posteriori sűrűségfüggvényünket, amely szintén egy béta eloszlást fog követni, amelyben a paraméterek a sikeres dobások száma plusz egy és a sikertelen dobások száma plusz egy. Maga a posteriori eloszlás levezetése pusztán technikai, akit érdekel a [17] cikkben megtekintheti. A következő ábra a posteriori sűrűségfüggvény fejlődését mutatja be:



2. ábra. A 6-os dobás valószínűségének változása a dobások növelésével.

Az ábrán jól látszik, ahogy a dobásszámot növeljük, úgy nő a megbizonyosodás mértéke is abban, hogy a kockadobásunk szabályos. Kezdetben a sűrűségfüggvényünk lapos, viszont ahogy növeljük a kísérletszámot, egyre jobban a valódi érték köré koncentrálódik az eloszlás. Egy csupán témájában eltérő, de matematikai hátterében teljesen azonos esettanulmányt jegyez le a [5] cikk, melyben a szerzők betegségek kimutatásáért felelős tesztek hatékonyságát vizsgálják.

Amennyiben az apriori és a posteriori eloszlásunk ugyanahhoz a parametrizált eloszláscsaládhoz tartozik, akkor **konjugált priorokról** beszélünk. A fenti példában az apriori és a posteriori eloszlásunk is béta eloszlás, míg a likelihood binomiális, ezt *Béta-binomiális* modellnek nevezzük. Ezekről a konjugált párokról a következő fejezetben részletesebben szó esik.

Az apriori nézeteinket mi határozzuk meg, viszont a likelihood, valamint a nevezőben szereplő normáló tag számolása, amennyiben nem használunk valamilyen heurisztikát vagy approximációt, meglehetősen hamar igen bonyolulttá és számításigényessé válhat. Ezen nehézségek egy lehetséges feloldása, ha megfontoltan választjuk ki az apriori eloszlásunkat, például a fent leírt béta-binomiális modellben, ha megtehetjük ezt. Egy másik lehetőség, ha az (11) integrált nem tudjuk analitikusan kiszámolni, akkor sztochasztikus mintavételezési módszerekkel, például Markov Chain Monte Carlo (MCMC) algoritmusokkal (pl. Metropolis-Hastings, Gibbs sampling) próbálunk mintát venni a posterior eloszlásból. Ezen algoritmusokat részleteiben a dolgozat nem tárgyalja.

3.2. Informatív és nem-informatív apriori eloszlások

Az előző fejezet a bayesi statisztika alapvető építőelemeit és felhasználási problémakörét tárgyalta. A fejezet végén a módszertant egy konkrét statisztikai paraméterbecslésre használtuk. Ez a fejezet a bayesi statisztikai módszertan portfólióválasztásba való bevonását, bevonási módszereit mutatja be.

Az előző fejezetben láttuk, hogy a paraméterbecslés végeredménye lényegében egy posteriori sűrűségfüggvény, amely megadja a paraméterünk eloszlását. A priorok (előzetes információk) segítségével beépítjük a korábbi tudásunkat, majd a megfigyelt adatokkal frissítjük ezt a tudást. Mivel a statisztikai becslésünk sikeressége ezektől az apriori információktól függ, így a módszer kicsit olyan, mint egy "kétélű penge". Egyrészt nagyon hasznos, hogy be tudjuk integrálni a szakértői véleményeket a módszertanunkba, másrészt ezeket a véleményeket néha nem lehet matematikailag megindokolni. Így kvalitatív módon nyúlunk bele a matematikai elemzésbe.

A továbbiakban is a feladatunk, hogy a (1) kvadratikus hasznossági függvényünk szerint maximalizáljuk a befektetői nyereséget. Ezt a következőképpen formularizáljuk [6]

$$\begin{aligned} w^{\text{Bayes}} &= \underset{w}{\operatorname{argmax}} \int_{R_{T+1}} \tilde{U}(w)\, p(R_{T+1}|\Phi_T)\, \mathrm{d}R_{T+1} \\ &= \underset{w}{\operatorname{argmax}} \int_{R_{T+1}} \int_{\mu} \int_{\Sigma} \tilde{U}(w)\, p(R_{T+1}, \mu, \Sigma|\Phi_T)\, \mathrm{d}\Sigma \mathrm{d}\mu \mathrm{d}R_{T+1} \end{aligned} \tag{12}$$

ahol $\tilde{U}(w)$ a várható hasznosság a $T+1$ időpontban, illetve Φ_T a T időpontig elérhető információ.

Mi a teendő akkor, ha nem rendelkezünk precíz szakértői véleményekkel? Ebben az esetben is használhatjuk ezt a becslési eljárást, csak a végső portfólió nem fog nagyban különbözni az első fejezetben leírt eredményektől.

3.2. Definíció. *Azt a prior-t, aminek az eloszlása egyenletes eloszlás a paramétertéren, nem-informatív priornak, vagy* ***diffúziós priornak*** *nevezzük.*

Az egyenletes eloszlás azt jelenti, hogy a becsült paraméter minden lehetséges értéket azonos eséllyel vesz fel az egész paramétertéren. A teljesség kedvéért itt fontos megjegyezni, hogy ez a definíció csak akkor értelmes, ha a paramétertér véges, ami a mi esetünkben automatikusan teljesül.

A diffúziós prior egy megvalósítása a következő sűrűségfüggvény:

$$p_o(\mu, \Sigma) \propto |\Sigma|^{-\frac{N+1}{2}} \tag{13}$$

A paraméterekre (mindkettőre) vonatkozó becslésünk a várható értéktől semleges. A kovarianciamátrix determinánsának a hatványa, amit egy skalárral megszorzunk, hogy valóban sűrűségfüggvény legyen. Azért választjuk a prior alakját, ennek mert így a sűrűség természetesen csökken a szórás Σ növekedésével, és az $N+1$ kitevő biztosítja, hogy az egész paramétertéren vett integrál véges maradjon. Ez a feltétel nem feltétlenül teljesülne, ha simán csak egy statikus konstanst választanánk.

Egy ismert eredmény [3], hogy a diffúziós priort használva az a posteriori eloszlásunk:

$$p(R_{T+1}|\Phi_T) \; \propto \; |\Sigma + (R_{T+1} - \hat{\mu})(R_{T+1} - \hat{\mu})^T/(T+1)|^{-T/2} \tag{14}$$

Ez nem más, mint egy többdimenziós t-eloszlás T-N szabadságfokkal. Az optimális portfólió súlyok:

$$w^* = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{T-N-2}{T+1}\right)\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu} \tag{15}$$

Ez az eredmény nagyon hasonlít a klasszikus Markowitz-féle súlyokhoz (4), csupán egy konstans szorzó különbözteti meg. Ez a konstans szorzó jelentősen kisebb, mint 1, ha N szignifikánsan nagyobb, mint T.

Intuitívan ez azt jelenti, hogy az eszközök kockázatosabbak a paraméterbizonytalanság miatt. Szóval amennyiben jelen van egy alacsonyabb kockázatú eszköz, (nem feltétlenül kockázatmentes, de persze lehet az is), akkor a bayesi módszerrel kisebb arányban fektetünk a portfólió kockázatosabb részébe. Megjegyzem, hogy bár az előző fejezetben, a feltételek között nem szerepel az, hogy a portfólió súlyok egyre összegződjenek, később az implementációban ez feltétel lesz.

Ez az eredmény nem igazolja a bayesi becslés bevezetését a portfólióválasztásunkba. Ha nincs plusz információnk a megfigyelhető adatokon kívül, ezt a módszert nem éri meg alkalmazni. Most nézzük meg az érme másik oldalát. Mi történik, ha konkrét elképzeléseink vannak különböző részvények hozamairól, vagyis informatív, az adatokból nem kiolvasható, többletinformációt tartalmazó priorunk van:

3.3. Definíció. *A* ***konjugált prior*** *egy olyan eloszlás, amelyet egy Bayes-i statisztikai modellben apriori eloszlásként használva, az a posteriori eloszlás is ugyanabban a paraméteres eloszláscsaládba fog tartozni.*

Ezekre láttunk már egy példát az előző fejezetben bemutatott béta-binomiális modellben. Most nézzük meg, hogy hogyan tudjuk ezt kihasználni a portfóliókban. Legyen:

$$\mu \mid \Sigma \sim N(\mu_0, \frac{1}{\tau}\Sigma) \tag{16}$$

$$\Sigma \sim IW(\Sigma_o, \nu_0) \tag{17}$$

A várható értékre az előzetes feltételes (a Σ-t ismertnek tekintjük) eloszlás normális μ_o középpel (amit mi adunk meg), és a $\frac{1}{\tau}\Sigma$-kovarianciamátrixszal, ahol τ egy zsugorító hiperparaméter.

A kovarianciamátrix apriori becslése egy inverz Wishart eloszlás, Σ_0 alapkovarianciával, és ν_o paraméterű szabadságfokkal. Ezt a priort választva az a posteriori eredmények legvalószínűbb paraméterei a következők:

$$\tilde{\mu} = \frac{\tau}{T+\tau}\mu_0 + \frac{T}{T+\tau}\hat{\mu} \tag{18}$$

A képletből könnyedén kiolvasható, hogy a végső érték a prior várható érték és a hozamok átlagának konvex kombinációja. A kovarianciamátrix pedig:

$$\tilde{\Sigma} = \frac{T+1}{T(\nu_0+N-1)}\left(\Sigma_0 + T\hat{\Sigma} + \frac{T\tau}{T+\tau}(\mu_0-\hat{\mu})(\mu_0-\hat{\mu})^T\right) \tag{19}$$

Ezúttal a végeredmény az apriori kovarianciák, az adatokból becsült $\hat{\Sigma}$ illetve a μ átlagtól való távolságának a súlyozott összege. A beágyazott priorok így végül egy normális eloszlásként manifesztálódva jelennek meg a folyamatban. A gazdasági irányvonalak beépítését bayesi priorokba részletesen a [7] cikk foglalkozik. Ezt az eljárást a [3] cikkben úgy említik, mint egy általánosított *Black-Litterman* modell [8]. A következő fejezetben erről lesz szó.

3.3. Black-Litterman modell

A *Black-Litterman* modell egy bayesi megközelítés az optimális portfólió-allokációk meghatározására [10]. A modell alapvető célja, hogy a saját nézeteinket beleillesszük a portfólióválasztási döntésünkbe. A Black-Litterman egy bayesi modell, de az apriori nézetek egymaguk nem elegendőek a modell inicializálásához. Szükséges egy egyensúlyi modell, vagy valamilyen alapmodell, amely szerint szintén kiszámoljuk a hozamokat. Ez a piaci modell lehet egy egyszerű *CAPM* [18] (*Capital asset pricing model*) vagy valami összetettebb többfaktoros modell is. Az a fontos, hogy legyen valami, amivel össze tudjuk vetni a nézeteinket. A modellhez szükséges megadni még egy paramétert bemenetként, egyfajta nézeteinkbe vetett konfidenciát. Összefoglalva a *Black-Litterman* modell valójában egy mód arra, hogy egy egyensúlyi modellt és a nézeteinket összeötvözzük. Minél biztosabbak vagyunk a nézeteink helyességébe, annál közelebb lesz a végeredményünk hozzájuk, míg minél bizonytalanabbak vagyunk, annál közelebb lesz az egyensúlyi modellhez.

Nem szükséges minden egyes eszközre valamilyen prior eredménnyel rendelkeznünk. Amennyiben csak egy eszközre tudunk előzetesen becslést megfogalmazni a kovarianciamátrixon keresztül, a tőle nem független eszközök portfólióban elhelyezkedő súlyára is hatással lesz.

Most kezdődjék a modell matematikai megalkotása. Az eszközök két hozambecslésére van szükségünk. A μ^e egyensúlyi hozamokat különböző módokon határozhatjuk meg, lehet a Markowitz modellel definiált **piaci portfólió**, vagyis.

$$\mu^e = \gamma \Sigma w_e, \tag{20}$$

ahol w_e a piaci portfólió súlyai, γ a kockázatkerülési paraméter. Ha a valóságban létezne tökéletes piaci portfólió, és ezt visszafejtenénk a Markowitz-modell inverzével, akkor megkapnánk a CAPM szerinti hozamokat. Ezért tekintjük ezeket jó priornak a Black-Litterman modellben.

A modell ezt a vektort nem tekinti kötelezően determinisztikusnak.

$$\mu = \mu^e + \epsilon^e, \quad \epsilon^e \sim N(0, \tau\Sigma) \tag{21}$$

Σ az eszközök kovarianciamátrixa τ egy paraméter, amely azt jelzi, mennyire bízunk az egyensúlyi modell által adott értékekben.

A nézeteinket tartalmazó vektor μ^v

$$P\mu = \mu^v + \epsilon^v, \quad \epsilon^v \sim N(0, \Omega) \tag{22}$$

A nézetek párosító mátrixa P (megmutatja, hogy a befektetői nézetek mely eszközöket érintik). Az ϵ itt is a reziduális vektor.

Black és Litterman a [8] cikkben leírja, hogy matematikailag hogyan tudjuk a két várható érték vektort összerakni egy formulába.

$$\tilde{\mu}^{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\mu^e + P^T\Omega^{-1}\mu^v] \tag{23}$$

$$\tilde{\Sigma}^{BL} = \Sigma + [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1} \tag{24}$$

Ezeket a frissített értékeket használva ugyanazt az optimalizálási problémát oldjuk meg, amit az előző fejezet végén megfogalmaztunk (2), (3). Valójában az effektív határgörbét transzformáltuk el azzal, hogy más hozamokat és kovarianciamátrixot határoztunk meg. Miután megkaptuk ezen értékeket, a további teendőnk megkapni az optimális allokációnkat. Ez ekvivalens azzal, amit az előző fejezetben csináltunk.

Összegezve, ez a megközelítés egy piaci egyensúlyon alapuló modellt és a saját nézeteinket tartalmazó hozamokat kovácsolja össze. A bayesi szemlélet a Black-Litterman modellben az információk frissítésében jelenik meg: az egyensúlyi várható hozamokat egy prior eloszlásként kezeljük, amelyet a befektetői nézetek (views) segítségével posterior eloszlássá frissítünk. Ez egy Bayes-tételen alapuló frissítés, ahol a piaci kapitalizációs súlyok által sugallt várható hozamokat kombináljuk a befektetői nézetekkel. Minél bizonytalanabbak vagyunk a saját nézeteinkben (minél nagyobb Ω) a modell eredménye annál közelebb lesz a piaci portfólióhoz, (vagyis az egyensúlyi modell optimumához).

4. Portfólióoptimalizálás bizonytalansággal

Ebben a fejezetben egy a bayesi megközelítéstől eltérő módszerrel szeretnénk megoldani a hozamok pontatlan becsléséből felmerülő paraméterbeli bizonytalanságot. A bayesi megoldásban a portfólió hozamokhoz egy apriori eloszlást rendeltünk, a modern portfólióelméletben viszont különböző eszközökről nagyon eltérő mennyiségű és minőségű információ áll rendelkezésünkre, és így több apriori feltételezéssel állhatunk elő a portfólió összeállításakor.

A bizonytalanság beépítése a portfóliónkba két lépésben fog történni. Elsőként az eszközök várható hozamára nem egy pontbecslést, hanem egy intervallumbecslést adunk. Az intervallum nagysága szimbolizálja azt, hogy az adott eszköz hozamát milyen bizonyossággal tekintjük ismertnek. Ez pedig a második lépésben, amikor a portfóliónk súlyait határozzuk meg, plusz megkötéseket fog rendelni magához az optimalizálandó egyenlőtlenségrendszerhez.

A bizonytalansággal modellezett hozamok lehetővé teszik, hogy a különböző befektetők a portfólióválasztásukba figyelembe vegyék a saját **bizonytalanságkerülési** tulajdonságaikat. Ez a megközelítés lehetővé teszi, hogy eszközönként és a portfólió egészének megfelelően is definiálni tudjuk a bizonytalansági feltételeket. A két megközelítés között van egy átmenet, amikor az eszközök egyes részhalmazaira írunk ki bizonytalansági megszorításokat. Ez különösen hasznos, akkor, ha valamilyen faktormodellekkel szeretnénk becsülni, meghatározni a hozamokat, és a faktorportfólióra más információk állnak rendelkezésünkre, mint a többi eszközre.

A fejezetben egy módszert is bemutatunk, amelyben nem csupán a hozamok becslésének bizonytalanságát, de a hozambecslő modellünk bizonytalanságát is beleépíthetjük a portfólióválasztásunkba. Többek között, ha a hozamainkat egy faktormodell segítségével állapítjuk meg, akkor a faktorok kiválasztása, valamint értékeinek helyes becslése számos kérdést vet fel a későbbiekben.

Az előzőekhez hasonló kvadratikus hasznossági függvényt szeretnénk maximalizálni, viszont a várható értékeket, nem pontbecsléseknek, hanem intervallumbecsléseknek tekintjük és azon belül a várható értékek minimumán optimalizálunk. Ez egy fajta kockázatkezelési megközelítés, hogy a potenciálisan bekövetkező legrosszabb esetekből a legjobb eredményeket hozzuk ki. A kétlépcsős optimalizálandó kifejezés a következőképpen néz ki:

$$\max_w \min_\mu \mu^T w - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma w \tag{25}$$

a megszorítások pedig

$$f(\mu, \tilde{\mu}, \Sigma) \leqslant \epsilon \tag{26}$$

$$w^T \mathbf{1} = 1 \tag{27}$$

Az f egy függvény, aminek segítségével a bizonytalanságot fejezzük ki, a relációs feltételt koordinátánként értjük, az ϵ pedig az a paraméter, amivel a befektetők egyénenként beépíthetik a bizonytalanságkerülési természetüket.

Az utolsó egyenlőség elengedhető, amennyiben egy kockázatmentes eszköz is jelen van a piacon. Ebben a fejezetben nagyban támaszkodok a [12] cikkre.

4.1. Bizonytalanság meghatározása eszközönként

Ebben a megközelítésben a fent említett f függvénynek (26) N komponense van, és azokat a következőképpen definiáljuk.

$$f_j(\mu, \tilde{\mu}, \Sigma) = \frac{(\mu_j - \tilde{\mu})^2}{\sigma_j^2 / T_j}, \quad j = 1, .., N \tag{28}$$

Itt $\tilde{\mu}_j$ a becsült várható értékek, T_j pedig a megfigyelések száma. A portfólió optimalizálásakor a hozzáadott megszorítások a következő alakban írhatóak fel:

$$\frac{(\tilde{\mu_j} - \mu_j)^2}{\sigma_j^2 / T_j} \leqslant \epsilon_j, \quad j = 1, .., N \tag{29}$$

Amennyiben a hozamokat normális eloszlással közelítjük, akkor az egyenlőtlenség bal oldalán lévő kifejezés is egy normális eloszlás négyzete. A felírásból tisztán látszik, hogy a bizonytalanság modellezésének az egyik módja, ha a várható értékek konfidenciaintervallumait adjuk meg.

$$P(\mu_1 \in I_1, ..., \mu_n \in I_N) = 1 - p \tag{30}$$

Itt p a szignifikanciaszintet, míg az I-k az intervallumokat jelölik. Az intervallum mérete attól függ, hogy mennyire vagyunk biztosak a becslésünkben, minél bizonytalanabbak vagyunk, annál szélesebb az intervallum. Így az optimalizáláshoz felírt egyenlőtlenségrendszert a becslésekbe vetett bizalmunk szerint kalibrálhatjuk.

A következő tétel a fent definiált max-min problémát egyszerűsíti le, és segít elmélyíteni a megértésünket ezzel a kétlépcsős optimalizálással kapcsolatban.

4.1. Tétel. *A max-min egyenlőtlenségrendszer (25)-ben ekvivalens a következő kifejezéssel*

$$\max_w \{w^T(\hat{\mu} - \mu^{adj}) - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma w\} \tag{31}$$

μ^{adj} *a bizonytalanság szerint korrigált várható érték és a következőképpen számoljuk:*

$$\mu^{adj} = \{sign(w_1)\frac{\sigma_1}{\sqrt{T}}\sqrt{\epsilon_1}, .., sign(w_N)\frac{\sigma_N}{\sqrt{T}}\sqrt{\epsilon_N}\} \tag{32}$$

Bizonyítás. Elsőként az f függvényt kell átrendeznünk, hogy a μ korlátait megkapjuk.

$$\hat{\mu}_j - \frac{\sqrt{\epsilon_j}}{\sqrt{T_j}}\sigma_j \leqslant \mu \leqslant \hat{\mu}_j + \frac{\sqrt{\epsilon_j}}{\sqrt{T_j}}\sigma_j$$

μ-ben mi minimalizálunk, így amennyiben az adott eszközt megvesszük, az alsó határt választjuk, amennyiben rövidre eladunk, akkor a felső határt választjuk. Ezt röviden úgy írhatjuk le, hogy $sign(w_j)$-vel megszorozzuk a korlátokat. Majd ezt visszaírva a minimax feladatba a következőt kapjuk:

$$\max_w \{w^T \hat{\mu} - \sum_{i=1}^{n} w_i sign(w_i) \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{T_i}}\sigma_i - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma w\}$$

Az első két elemet kiemelve a kívánt kifejezést kapjuk. □

A képletből kiolvasható, hogy a szórás nagysága növeli a korrekciós tagunkat, míg az idősor hossza csökkenti azt, tehát szórással nő a bizonytalanság, ha több adatunk van, azzal pedig csökken.

4.2. Portfólió bizonytalanság

Ebben a fejezetben most nem eszközről-eszközre definiálunk bizonytalansági korlátokat, hanem egyben a portfólió egészére. Ezúttal is feltételezzük, hogy a hozamokat egy normális eloszlással közelítjük, a várható érték becslése pedig a historikus átlag. A megszorításaink a következők:

$$f = \frac{T(T-N)}{(T-1)N}(\hat{\mu}-\mu)^T\Sigma(\hat{\mu}-\mu) \tag{33}$$

Ez egy χ^2 eloszlás N szabadságfokkal ([12]). Maga a megszorítás itt is:

$$\frac{T(T-N)}{(T-1)N}(\hat{\mu}-\mu)^T\Sigma(\hat{\mu}-\mu) \leqslant \epsilon \tag{34}$$

Vegyük észre, hogy míg az előbb N darab megszorításunk volt, úgy most csak egy van, így az ϵ választásakor közvetlen konfidenciaintervallumot is választunk.

$$P\left(\frac{T(T-N)}{(T-1)N}\cdot\big((\hat{\mu}-\mu)^T\Sigma(\hat{\mu}-\mu)\big) \leqslant \epsilon\right) = 1-p \tag{35}$$

Az előző esetben ismertetett tételhez (4.1) hasonlóan, a kétlépcsős minimax (25) optimalizálás problémája itt is valami egylépcsőssé fog alakulni. Ezt mondja ki a következő tétel, amelynek csak a főbb lépéseit ismertetem itt, a teljes részletes leírás a [12] cikk függelékében megtalálható.

4.2. Tétel. *A max-min egyenlőtlenségrendszer (25) ekvivalens a következővel:*

$$\max_w \left\{w^T\mu - \frac{\gamma}{2}w^T\Sigma w - \sqrt{\boldsymbol{\epsilon} w^T\Sigma w}\right\}, \qquad \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon\frac{(T-1)N}{T(T-N)} \tag{36}$$

az optimális portfólió súlyokra pedig zártképlet is levezethető:

$$w^* = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}\left(\frac{1}{1+\frac{\sqrt{\epsilon}}{\gamma\sigma_p^*}}\right)\left(\hat{\mu} - \frac{B-\gamma\left(1+\frac{\sqrt{\epsilon}}{\gamma\sigma_p^*}\right)}{A}\mathbf{1}_N\right) \tag{37}$$

$$A = \mathbf{1}_N^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}_N \quad \textit{és} \quad B = \hat{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}_N$$

P^* portfóliót, a bizonyítás során fogom definiálni.

Érdemes megemlíteni, hogy a gyakorlatban sokszor valamilyen praktikussági megfontolásból a célfüggvényben a két kovarianciamátrix nem egyezik meg. Ez egy heurisztika, hogy a szórást, illetve a bizonytalanságot komolyabban megkülönböztessük. A [12] cikkben a két Σ azonos.

Bizonyítás. A tétel bizonyításához elsőként a fenti kifejezés belső részét vizsgáljuk meg:

$$\min_{\mu} w^T \mu - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma w,$$
$$(\hat{\mu} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\hat{\mu} - \mu) \leqslant \epsilon$$

Lagrange-multiplikátora:

$$L(\mu, \lambda) = w^T \mu - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma w - \lambda(\epsilon - (\hat{\mu} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\hat{\mu} - \mu))$$

Az optimális megoldás megtalálása felírható, mint egy nyeregpontprobléma, vagyis keressük azt a (μ^*, λ^*) párt, amelyre a következő kifejezés felveszi a maximumot:

$$\min_{\mu} \max_{\lambda} L(\mu, \lambda)$$

A várható érték szerint deriválva azt kapjuk, hogy:

$$\mu^* = \hat{\mu} - \frac{1}{2\lambda} \Sigma w$$

Ezt visszahelyettesítve:

$$L(\mu^*, \lambda) = w^T \hat{\mu} - \left(\frac{1}{4\lambda} + \frac{\gamma}{2} \right) w^T \Sigma w - \lambda \epsilon$$

Ezt a kifejezést most λ-ban és w-ben is maximalizálni kell. Amennyiben deriválunk λ szerint és megoldjuk a kapott egyenletet, a következő eredményt kapjuk:

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{w^T \Sigma w}{\epsilon}}$$

Ezt visszahelyettesítve, visszakapjuk a tételben szereplő célfüggvényt:

$$\max_{w} w^T \hat{\mu} - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma w - \sqrt{\epsilon w^T \Sigma w}$$

A zárt képlet ennek a megoldásából következik:

$$L(w, \lambda) = w^T \hat{\mu} - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma w - \sqrt{\epsilon w^T \Sigma w} - \lambda(1 - w^T \mathbf{1}_N)$$

A továbbiakban bevezetjük a $\sigma_P = \sqrt{w^T \Sigma w}$ jelölést. A w szerint deriválva, majd kiegyenlítve nullával és átrendezve a következő egyenletnél kötünk ki:

$$w = \left(\frac{\sigma_P}{\sqrt{\epsilon} + \gamma \sigma_P} \right) \Sigma^{-1} (\hat{\mu} - \lambda \mathbf{1}_N)$$

Ha ezt a kifejezést megszorozzuk $\mathbf{1}_N$-nel egyet kapunk a megszorítás miatt. Ebből pedig kifejezhetjük λ-t.

$$\lambda = \frac{1}{A}\left(B - \frac{\sqrt{\epsilon} + \gamma\sigma_P}{\sigma_P}\right)$$

Ezt visszahelyettesítve:

$$w = \frac{\sigma_P}{\sqrt{\epsilon} + \gamma\sigma_P}\Sigma^{-1}\left(\hat{\mu} - \frac{1}{A}\left(B - \frac{\sqrt{\epsilon} + \gamma\sigma_P}{\sigma_P}\right)\mathbf{1}_N\right)$$

Ezzel a képlettel igazából már megkaptuk a zárt formulát, de a képletben szerepel az optimális portfólió szórása. Ezt viszont megkaphatjuk, ha mégegyszer kihasználjuk, hogy a súlyok egyre összegződnek. Megszorozzuk az egész kifejezést egy csupa egy összegző vektorral. Egy kis átalakítást követően az optimális portfólió w^* szórása, a következő negyedfokú egyenlet egyetlen pozitív valós megoldása, amit σ_P^*-gal jelölünk:

$$A\gamma^2\sigma_P^4 + 2A\gamma\sqrt{\epsilon}\sigma_P^3 + (A\epsilon - AC + B^2 - \gamma^2)\sigma_P^2 - 2\gamma\sqrt{\epsilon}\sigma_P - \epsilon = 0 \tag{38}$$

ahol

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{1}_N^\top\Sigma^{-1}\mathbf{1}_N, \\ B &= \hat{\mu}^\top\Sigma^{-1}\mathbf{1}_N, \\ C &= \hat{\mu}^\top\Sigma^{-1}\hat{\mu}. \end{aligned}$$

Mivel Σ pozitív definit, ezért a fenti egyenletnek mindig van legalább egy pozitív valós gyöke. Legyen σ_P^* az egyetlen pozitív valós megoldás. Ekkor az optimális portfólió súlyvektora:

$$w^* = \frac{\sigma_P^*}{\sqrt{\epsilon} + \gamma\sigma_P^*}\Sigma^{-1}\left(\hat{\mu} - \frac{1}{A}\left(B - \frac{\sqrt{\epsilon} + \gamma\sigma_P^*}{\sigma_P^*}\right)\mathbf{1}_N\right) \tag{39}$$

Ezt a kifejezést átrendezve visszakapjuk a tételben szereplő zárt formulát. □

A zárt képlet előnye, hogy az optimális portfólió súlyait gyorsan és hatékonyan tudjuk számolni. Másik előny, hogy a képletből matematikai, illetve közgazdasági intuíciókat olvashatunk ki a paraméterek változtatásával. Elsőként, ha az ϵ tart a nullába, azaz zéró bizonytalansággal számolunk, akkor visszakapjuk a *mean-variance* optimális portfóliót.

$$w^* = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}(\hat{\mu} - \frac{B-\gamma}{A}\mathbf{1}_N) = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}(\hat{\mu} - r_f\mathbf{1}_N)$$

Másodsorban, amikor maximális bizonytalansággal számolunk, vagyis $\epsilon \to \infty$ a minimális varianciájú portfóliót kapjuk.

$$w^* = \frac{1}{A}\Sigma^{-1}\mathbf{1}_N$$

Tehát ebben a megközelítésben a bizonytalanságunk beleintegrálása a portfólióválasztásba nem más, mint egy súlyozás a minimális varianciájú portfólió és a *mean-variance* optimalizálás szerinti optimális portfólió között.

4.3. Modellbizonytalanság

A hozamok becslésénél nem csupán statisztikai eszközöket használhatunk, mint a maximum likelihood vagy a Bayes módszer. A hozamok meghatározásához használhatunk közgazdasági modelleket, mint a $CAPM$ [18], ahol az eszközök hozamait a piaci portfólióval való együttmozgásuk határozza meg, vagy valamilyen összetettebb többfaktoros modellt.

Az előző két alfejezetben két olyan módszert ismertettünk, ahol a bizonytalanságot előbb eszközről-eszközre, illetve az egész portfólióra definiáltuk. A kettő között van egy köztes állapot, amikor a portfólió bizonyos részhalmazaira teszünk megszorításokat. Ez a köztes eset azért tárgyalásra érdemes, mert ez lesz a kulcsa annak, hogy modell bizonytalanságról beszéljünk.

Legyen $J_m = \{i_1, ...i_{N_m}\}$, $m = 1, .., M$, M darab részhalmaza $\{1, ..., N\}$ halmaznak. Ekkor f M dimenziós függvény.

$$f_m(\mu, \hat{\mu}, \Sigma) = \frac{T_m(T_m - N_m)}{(T_m - 1)N_m}(\hat{\mu}_{J_m} - \mu_{J_m})^T \Sigma_{J_m}^{-1}(\hat{\mu}_{J_m} - \mu_{J_m}) \tag{40}$$

A feltétel pedig a következővé változik:

$$\frac{T_m(T_m - N_m)}{(T_m - 1)N_m}(\hat{\mu}_{J_m} - \mu_{J_m})^T \Sigma_{J_m}^{-1}(\hat{\mu}_{J_m} - \mu_{J_m}) \leqslant \epsilon_m, \quad m = 1, .., M \tag{41}$$

Ezek a megszorítások megfelelnek a következő, valószínűségi állításnak:

$$P(X_1 \in I_1, ..., X_M \in I_M) = 1 - p \tag{42}$$

ahol X_m az a próbastatisztika, ami a (41) feltételek bal oldalán szerepel. Vegyük azt az esetet, amikor az indexhalmazok metszetei üresek, illetve a befektetőknek lehetőségük van kockázatmentes eszközbe fektetni. Ilyenkor érvényes a következő tétel [12]:

4.3. Tétel. *Legyen M darab nem metsző indexhalmaza az eszközöknek, és tegyük fel, hogy van egy f M dimenziós függvényünk, ami kifejezi a bizonytalansági feltevéseket. Ekkor, ha a befektetőnek hozzáférése van egy kockázatmentes eszközhöz, akkor az optimális portfóliót a következő egyenletrendszer megoldása adja:*

$$w_m = \max\left(1 - \frac{\sqrt{\boldsymbol{\epsilon_m}}}{\sqrt{g(w_{-m})^T \Sigma_m^{-1} g(w_{-m})}}, 0\right) \frac{1}{\gamma} \Sigma_m^{-1} g(w_{-m}) \tag{43}$$

$m = 1, .., M$*-ig ,ahol* $\boldsymbol{\epsilon_m} = \frac{(T_m-1)N_m}{T_m(T_m-N_m)}$ *és* w_{-m}*, pedig azon eszközök súlya, ami nem szerepel az* m*. indexhalmazban és*

$$g(w_{-m}) = \hat{\mu}_m - \gamma \Sigma_{m,-m} w_{-m}, \quad m = 1, .., M \tag{44}$$

ahol $\Sigma_{m,-m}$ *az* m*. halmazban és azon kívül szereplő eszközök kovarianciamátrixa.*

A két előző eset ennek a tételnek a speciális esete. Ha N darab indexhalmazunk van, vagyis $M = N$, akkor visszakapjuk az első esetet, ha pedig 1 darab indexhalmazunk van, akkor a másodikat. A tétel bizonyítása jelentősen összetettebb, mint az előző két esetben, és megtalálható a *Garlappi* [12] cikk függelékében.

A modellbizonytalanság tárgyalásához feltesszük, hogy a hozamainkat egy faktorportfólió generálja. Legyen N darab kockázatos eszközünk, valamint K darab faktorunk.

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_a \\ \mu_f \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{af} \\ \Sigma_{fa} & \Sigma_{ff} \end{pmatrix} \tag{45}$$

A kockázati prémiumokat a t időpontban mindig a következő egyenletek határozzák meg:

$$R_{at} = \alpha + \beta r_{ft} + u_t, \quad cov(u_t, u_t^T) = \Omega \tag{46}$$

Itt α egy Nx1 dimenziójú vektor, β a faktor kitettségek vektora és u_t pedig a reziduális, Ω kovarianciamátrixszal. r_{ft}-vel a faktorok hozamát jelöljük a t. időpontban (ennek a várható értéke μ_f). Ezeket behelyettesítve a fenti (45) képletekbe:

$$\mu = \begin{pmatrix} \alpha + \beta\mu_f \\ \mu_f \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \beta\Sigma_{ff}\beta^T + \Omega & \beta\Sigma_{ff} \\ \Sigma_{ff}\beta^T & \Sigma_{ff} \end{pmatrix} \tag{47}$$

Ezekre a paraméterekre a következő portfólióválasztási problémát írhatjuk fel:

$$\max_{w} \min_{\mu_a, \mu_f} w^T\mu - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma w \tag{48}$$

$$(\hat{\mu}_a - \mu_a)^T \Sigma_{aa}^{-1} (\hat{\mu}_a - \mu_a) \leqslant \epsilon_a \tag{49}$$

$$(\hat{\mu}_f - \mu_f)^T \Sigma_{ff}^{-1} (\hat{\mu}_f - \mu_f) \leqslant \epsilon_f \tag{50}$$

Ebben a felírásban kétféleképpen is beleintegráltuk a döntésünkbe a modellbizonytalanságot. Egyrészt a faktorok hozamait hibával becsüljük, így implicit módon is a magyarázó változók becslésén állítunk be bizonytalanságot. Másrészt a többi eszköz hozamán lévő korlátra (49) különböző értékeket adhatunk meg. Amennyiben $\epsilon_a = 0$, az azt jelenti, hogy teljesen megbízunk a faktorok segítségével megállapított hozamban, az érték növelésével pedig egyre nagyobb bizonytalanságot tudunk megállapítani. Így a rendszerünkbe közvetlen és közvetett módon is belerakhatjuk a modellbizonytalanságot.

4.4. CVaR optimalizálás

Még egy lényeges aspektusa ennek a módszernek a *CVaR* (*Conditional Value at Risk*) optimalizálással való kapcsolata. A *CVaR* egy koherens, alsóági kockázati mérőszám, amely az alábbi módon definiálható [19]:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \mathbb{E}[X \mid X \leqslant \mathrm{VaR}_\alpha(X)] \tag{51}$$

Ez tehát azt a várható veszteséget jelöli, amely akkor következik be, ha a kockázati kitettség a legrosszabb α százalékba esik, azaz ha a veszteség nagyobb, mint a $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ érték.

Tegyük fel, hogy a portfólió hozama normális eloszlást követ, vagyis a részvényárfolyamok lognormális eloszlást. Ebben az esetben a CVaR explicit képlete a következőképpen írható fel [19]:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(w) = -\mu_P + \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}\sigma_P \tag{52}$$

ahol $\mu_P = w^\top \mu$ a portfólió várható hozama, $\sigma_P = \sqrt{w^\top \Sigma w}$ a portfólió szórása, $\phi(\cdot)$ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye, $\Phi^{-1}(\cdot)$ pedig az inverz eloszlásfüggvénye.

Ez a CVaR-mennyiség tehát egy becsült veszteséget jelent a szélsőséges, de nem valószínű hozamokra vonatkozóan. A célunk ennek a veszteségnek a minimalizálása, ami ekvivalens a negatív CVaR maximalizálásával.

Az optimalizálási probléma így tehát:

$$\max_w \left\{ w^\top \mu - \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}\sqrt{w^\top \Sigma w} \right\} \tag{53}$$

Ez a célfüggvény különösen érdekes, mivel strukturálisan teljesen megegyezik a robusztus portfólióoptimalizálási irodalomban javasolt bizonytalansággal korrigált várható hozam maximalizálásával, ahol a szórásra egy ϵ konstans tag került. A hasonlóság alapján elmondható, hogy ez a fajta robusztus optimalizálás — a megfelelő paraméterválasztással — kvázi egy CVaR minimalizálással egyenértékű.

Ez természetes módon veti fel a kérdést, hogy érdemes-e más koherens kockázati mérőszámokat is hasonló módon beépíteni az optimalizálásba. A [15] tanulmány például egy kétlépcsős portfólióoptimalizálási eljárás második lépésében az *EVaR* (*Entropic Value at Risk*) mértéket alkalmazza, és ez alapján von le következtetéseket a portfóliók minőségéről. A dolgozatom ezen kockázati mérőszám vizsgálatát részleteiben már nem tárgyalja, de egy jövőbeli kutatási irány számára természetes folytatást jelenthet.

5. Adatok

A modellezési módszerek bemutatásához használt adatokat, a Budapesti Corvinus Egyetem által biztosított Bloomberg terminálból töltöttem le. A hozamok maximum likelihood becslését az elmúlt három év részvényárfolyamait használtam, 2025.02.28-val bezárólag napi adatokkal dolgoztam. A $CAPM$-hez pedig az elmúlt huszonöt év havi adatait használtam. Minden esetben loghozamokkal számoltam, amelyeket évesítettem, így a becsült értékek is minden esetben éves loghozamok.

Az eszközök kiválasztása során ügyeltem, hogy változatos és sokszínű befektetési univerzummal dolgozzak. Piaci indexeket és egyszerű részvényeket is kiválasztottam, amelyek mind különböző szektorokból származnak (technológia, pénzügy, egészségügy, energia, ipar). A piaci indexek között van az amerikai, az európai és a fejlődő országok piacát képviselő is. A részvényeken túl három kötvénypiacot követő indexet is kiválasztottam. Ezek rendkívül hasznosak, a kisebb szórásuk és a részvénypiacot jellemzően diverzifikáló hatásuk miatt is.

Minden eszköz árfolyama USD-ben van denominálva.

Eszköz neve	**Bloomberg azonosító**	**Várható hozam**	**Szórás**	**Eszköz típusa**
SP500	SPX Index	16.30%	12.86%	Amerikai részvényindex
MSCI World	MXWO Index	13.41%	11.26%	Globális részvényindex
MSCI MXEA	MXEA Index	5.60%	12.38%	Fejlett piaci ex-US részvényindex
MSCI EM	MXEF Index	1.86%	13.30%	Feltörekvő piaci részvényindex
Global agg bond	LEGATRUU Index	-1.64%	6.09%	Globális kötvényindex
US agg bond	LBUSTRUU Index	-0.05%	6.29%	Amerikai aggregált kötvényindex
US corp HY	H0A0 Index	5.98%	3.92%	Amerikai high yield kötvény
Gold	XAU Curncy	16.19%	14.20%	Nyersanyag, arany
DAX	DAX Index	16.61%	16.16%	Német részvényindex
MSFT	MSFT US Equity	19.18%	22.84%	Technológiai részvény
JP Morgan	JPM US Equity	26.92%	21.89%	Pénzügyi részvény
JNJ	JNJ US Equity	-7.76%	16.17%	Egészségügyi részvény
Siemens	SIE GY Equity	19.41%	27.45%	Ipari részvény
XOM	XOM US Equity	-2.16%	22.17%	Energiaipari részvény

1. táblázat. Befektetési eszközök és jellemzőik

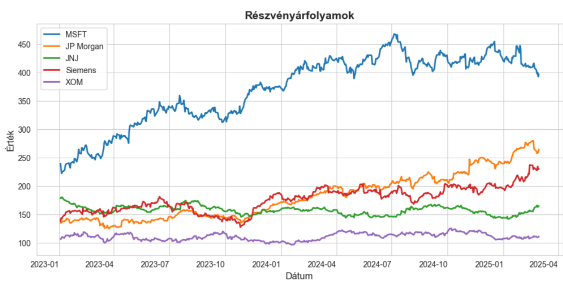
	SP500	MSCI World	MSCI MXEA	MSCI EM	Global agg bond	US agg bond	US corp HY	Gold	DAX	MSFT	JP Morgan	JNJ	Siemens	XOM
SP500	1.00	0.96	0.39	0.29	0.13	0.14	0.55	0.12	0.44	0.66	0.49	0.09	0.35	0.21
MSCI World	0.96	1.00	0.63	0.43	0.26	0.19	0.66	0.17	0.63	0.59	0.48	0.07	0.49	0.23
MSCI MXEA	0.39	0.63	1.00	0.62	0.47	0.25	0.64	0.21	0.83	0.16	0.20	0.03	0.64	0.15
MSCI EM	0.29	0.43	0.62	1.00	0.23	0.08	0.40	0.20	0.42	0.19	0.11	0.01	0.35	0.09
Global agg bond	0.13	0.26	0.47	0.23	1.00	0.86	0.59	0.38	0.42	0.04	-0.11	0.13	0.26	-0.07
US agg bond	0.14	0.19	0.25	0.08	0.86	1.00	0.54	0.37	0.23	0.04	-0.12	0.15	0.11	-0.08
US corp HY	0.55	0.66	0.64	0.40	0.59	0.54	1.00	0.16	0.59	0.29	0.25	0.10	0.42	0.16
Gold	0.12	0.17	0.21	0.20	0.38	0.37	0.16	1.00	0.19	0.08	-0.06	0.03	0.11	0.08
DAX	0.44	0.63	0.83	0.42	0.42	0.23	0.59	0.19	1.00	0.22	0.21	0.04	0.79	0.13
MSFT	0.66	0.59	0.16	0.19	0.04	0.04	0.29	0.08	0.22	1.00	0.12	-0.07	0.18	-0.10
JP Morgan	0.49	0.48	0.20	0.11	-0.11	-0.12	0.25	-0.06	0.21	0.12	1.00	0.19	0.19	0.32
JNJ	0.09	0.07	0.03	0.01	0.13	0.15	0.10	0.03	0.04	-0.07	0.19	1.00	-0.03	0.19
Siemens	0.35	0.49	0.64	0.35	0.26	0.11	0.42	0.11	0.79	0.18	0.19	-0.03	1.00	0.10
XOM	0.21	0.23	0.15	0.09	-0.07	-0.08	0.16	0.08	0.13	-0.10	0.32	0.19	0.10	1.00

2. táblázat. Eszközök korrelációs mátrixa

A táblázatban szereplő hozamok az eszközök kockázati prémiumát mutatják, ugyanis a portfólióimban nem szerepel kockázatmentes eszköz, így valamennyire indokolt, hogy a kockázatos részen szeretnénk megállapítani a portfóliónkat. A kockázatmentes eszköz hozamát, a három hónapos amerikai kincstárjegy hozammal közelítem. Ennek az értéke 4.2%.

A későbbiekben implementálom a Black–Litterman modellt, amelyben az egyensúlyi hozamokat a *CAPM* segítségével határozom meg. Ehhez azonban szükség van egy piaci portfólióra. Elméletben ez a piaci portfólió az univerzumban szereplő összes eszköz piaci kapitalizációval súlyozott átlaga. Mivel azonban a portfóliónk csupán néhány kiválasztott eszközből áll, ez a súlyozás nem lenne ésszerű. Ezért a piaci portfólió összetételét a következőképpen határoztam meg: 30% *SP 500*, 30% *MSCI World*, valamint 40% *US Aggregate Bond* index.

A szakdolgozathoz tartozó kódok és adatok az alábbi linken keresztül érhetőek el https://github.com/gyusza46/master_thesis



3. ábra. Részvényárfolyamok alakulása

6. Eredmények

A szakdolgozatom legfontosabb részének azt tartom, hogy az előző fejezetekben bemutatott módszereket, ne csak elméleti szinten ismertessem, hanem a leírtakat valódi piaci adatokon alkalmazzam.

Elsőként a klasszikus modern portfólióelméleti optimalizációs eljárást érdemes implementálni, hogy az eredményeket valamihez viszonyítani tudjam (rendelkezzek egy *benchmark* modellel). A bayesi módszerek összességét végül a *Black-Litterman* modellen keresztül mutatom be, míg a harmadik fejezetben ismertetett robusztus módszereknél a bizonytalanságot eszközönként és összportfólióként is implementálom.

Az eredményeim között megkülönböztetem azokat az eseteket, amikor a *short selling* engedélyezett és amikor nem engedélyezett. A kódban az optimális eredmények megállapításához a *scipy.optimize* csomagból a *minimize* eljárást használom [20]. Ez a függvény még csak az általános meghívása a minimalizálásra használt függvényeknek, a konkrét optimalizáló eljárást még ki kell választani. A *python* beépített *SLSQP* programját alkalmazom. Az *SLSQP* egy szekvenciális legkisebb négyzetes kvadratikus programozási (Sequential Least Squares Quadratic Programming, SLSQP) algoritmus, amelyet olyan optimalizálási problémákra terveztek, ahol egyenlőségi és egyenlőtlenségi feltételek is vannak. A módszer gradiens alapú, de automatikusan és numerikusan számolja azokat. Minden alkalommal, amikor a függvényt inicializálom, meg kell adni egy kiinduló pontot. Ez az én esetemben az egyenlő súlyú portfólió volt. Általánosságban az optimalizálás sikeressége függ a megadott kezdőponttól, de az én esetemben viszonylag kevés feltétel van, és így nem igazán áll fel annak az esélye, hogy egy lokális optimumban elakadunk.

Az optimalizálás az eszközök kockázati prémiumán fog történni. Nem szerepel kockázatos eszköz, így a portfóliók kockázatos részét kapjuk eredményként.

Mielőtt belekezdenénk az eredmények ismertetésébe, fontos egy kiemelt jelentőségű portfólió súlyait ismertetnünk. Ez persze a minimális varianciájú portfólió. A kockázatkerülési vagy a bizonytalanságkerülési természet növelésével ezt a portfóliót több alkalommal visszakapjuk a célfüggvények optimumaként.

A minimális varianciájú portfólió összetétele, ha *short selling* engedélyezett és amikor nem a következő:

	SP500	MSCI W	MXEA	EM	Gl. Bond	US Bond	HY	Gold	DAX	MSFT	JPM	JNJ	Siemens	XOM
Short selling engedélyezett	-0.022	-0.103	-0.093	0.040	0.111	-0.014	1.000	0.034	-0.034	0.020	0.021	0.023	0.003	0.014
Short selling tiltott	0.000	0.000	0.000	0.000	0.011	0.028	0.904	0.017	0.000	0.000	0.000	0.039	0.000	0.001

3. táblázat. Minimális varianciájú portfóliók súlyai

Az első esetben minden eszköz valamekkora részesedést vállal a portfólióban. A második esetben a portfólió a három kötvényindex és az arany összesúlyozásából tevődik össze. Legnagyobb súllyal a *High yield* kötvényindex szerepel mindkét esetben.

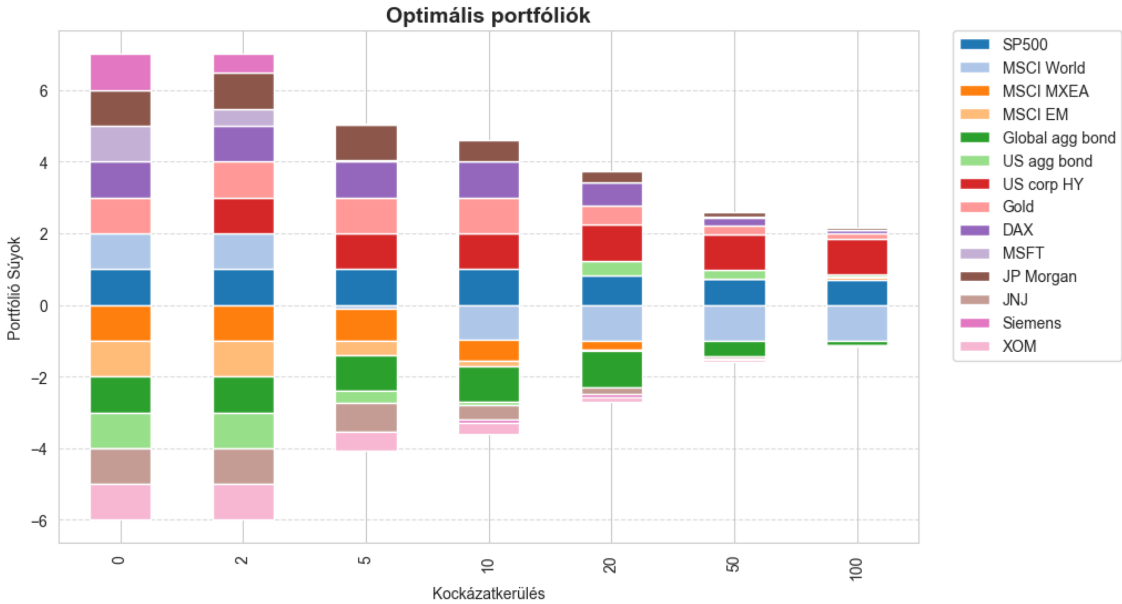
6.1. Klasszikus portfóliók

Ebben a fejezetben az implementáció során a Markowitz-i elmélet szerinti optimalizálást használom. Célfüggvénynek az (1) kvadratikus hasznossági függvényt használom. A feltételeim pedig a (3)-ban leírtak, valamint a portfólió súlyok egyre összegződése, amellett, hogy ezek a súlyok 0 és 1 között szerepeljenek (-1 és 1, ha *short selling* engedélyezett).

Ebben az esetben egy paraméter van a rendszerben, amivel a szereplők személyre tudják szabni a portfólióikat, a kockázatkerülési paraméter a γ.

A portfóliók összetételét oszlopdiagramként ábrázolom, amelyben a színek különböző eszközöket jelölnek. A dolgozatba csupán a legfontosabb ábrákat szúrtam be. A felhasznált ábrákon kívül más kimutatásokat is készítettem, amelyek a kódban megtalálhatóak.

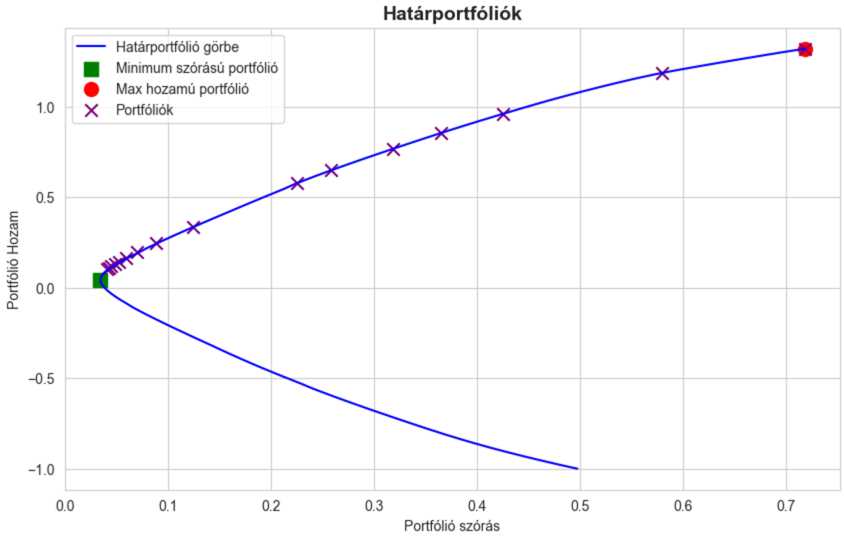
Nézzük az eredményeket, először abban az esetben, amikor a *short selling* engedélyezett.



4. ábra. Optimális portfóliók MV módszerrel short selling-gel

A portfóliókból azt olvassuk ki, hogy maximális nagyságú súlyokat helyezünk azokba az eszközökbe, amelyek az elmúlt időszakban jól szerepeltek, míg negatív irányban maximális súlyt a gyengén szereplőkbe. Ez az egyik legnagyobb probléma az optimalizációval, a súlyok a korlátok végpontjain helyezkednek el.

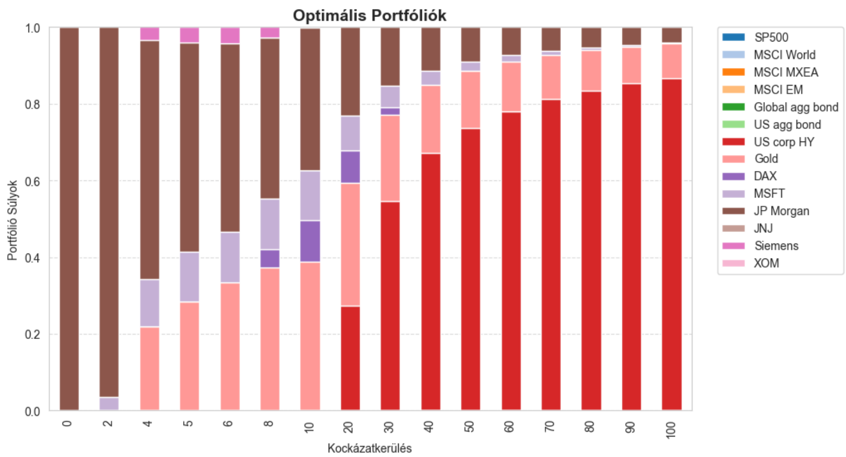
Az is szépen látszódik, hogy a kockázatkerülés növelésével, a portfóliók egyre közelebb kerülnek a minimális varianciájú portfólióhoz, amelyben legnagyobb súllyal a *Corporate High Yield* szerepel, ugyanis ennek volt az összes eszköz közül a legkisebb szórása. A határportfólió görbén így helyezkednek el a portfóliók. Minden kereszt egy kockázatkerülési arányhoz tartozó optimális portfóliót reprezentál.



5. ábra. Határportfóliók

A kód készítésekor sehol nem használtam azt, hogy elméletileg az effektív portfóliógörbe felső részéből fognak választani a szereplők. Így empirikusan is meggyőződhetünk arról, hogy ez igaz.

A következő eset, hogy megnézzük és összevessük az eredményeket azzal, amikor a negatív súlyok nem megengedettek.



6. ábra. Optimális portfóliók MV módszerrel *short selling* nélkül

A két végletet érdemes megvizsgálni. Amikor kinullázzuk a kockázatot, akkor automatikusan az egész portfólió a legnagyobb hozamú eszközbe megy, ami a *JP Morgan* részvény, a másik véglet, amikor a legalacsonyabb szórású eszköz kerül be a legnagyobb súllyal, ez a *High yield*. Valójában az utolsó portfólió összetétele szinte teljesen megegyezik a minimális szórású portfóliójával.

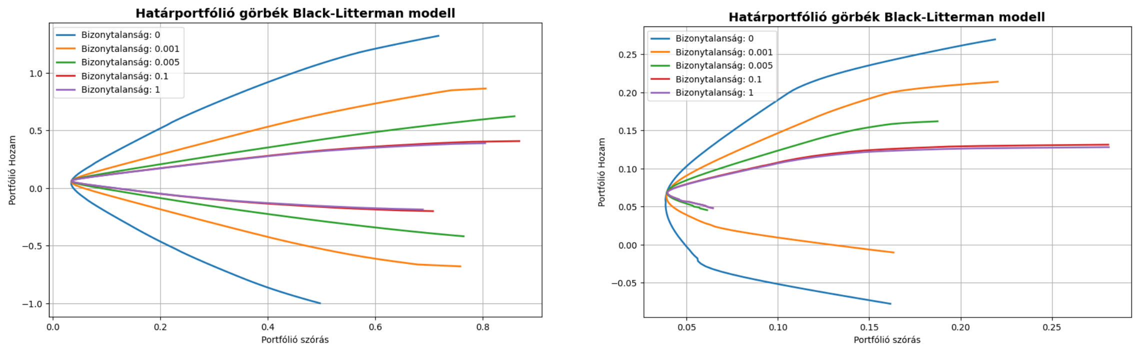
A 6. ábrán megállapíthatjuk a módszer másik nagy hátrányát, csupán néhány eszköz kerül kiválasztásra, így nem tud jelentős diverzifikációs hatás érvényesülni. A legjobb esetben is csak 5 darab eszközt választunk ki a 14-ből.

6.2. Black-Litterman portfóliók

A *Black-Litterman* modell részletesen a (3.3) fejezetben kerül bemutatásra, és az ott levezetett zárt képletek segítségével a piaci portfólió és a nézetek (*view*-k) megállapítása után, viszonylag könnyedén tudjuk implementálni, viszont rendelkezésünkre áll egy *python* könyvtár, amelynek a neve *PyPortfolioOpt*. Ebben a könyvtárban direkt portfólióoptimalizáláshoz használt függvények és kockázati modelleket lehet készíteni, inicializálni, kalibrálni, és persze optimalizálni. A könyvtár részletes dokumentációja itt érhető el [21].

A beépített *Black-Litterman* portfóliók optimalizálásához szükség van még egy paraméterre, ez pedig a becsült hozamainkban való bizalom mértéke. Ezen a paraméteren keresztül tudjuk befolyásolni a bizonytalanságunkat. Az apriori hozamokat egy $CAPM$ segítségével határoztuk meg. A piaci portfóliót az előző fejezetben leírtak szerint alkottuk meg.

A *Black-Litterman* egy skála, amelynek egyik vége az egyensúlyi modell által adott apriori hozamokkal kapott portfólió, a másik pedig a nézeteinkből számolt portfólió. Önmagában az optimalizálás és a célfüggvény nem változik meg, csak a bemenetként megadott hozamok. Az eddigi esetekhez hasonlóan az effektív portfóliók közül fogunk választani, csak ezek görbéjét transzformáljuk el.

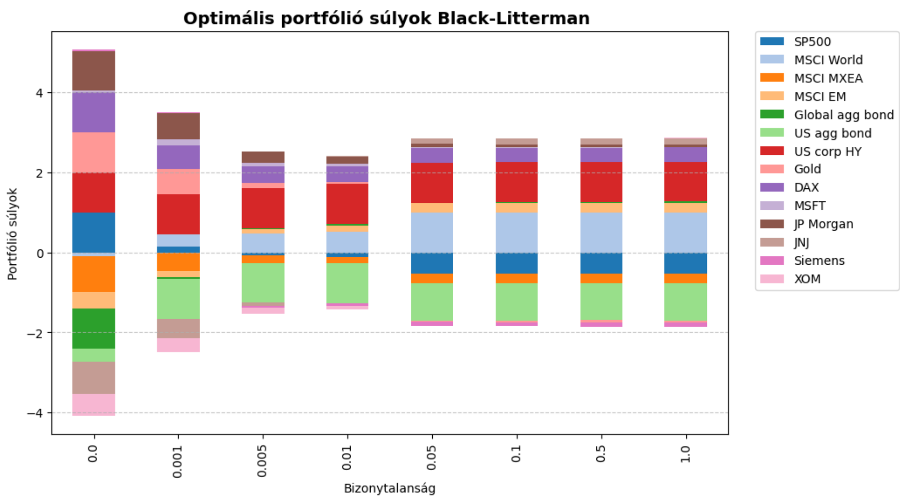


(a) *Short selling* engedélyezett (b) *Short selling* nélkül

7. ábra. Határportfólió görbék

Az (a) ábrán a *short selling* engedélyezett, míg a (b)-n nem. A modell inicializálásakor a bizonytalansági paraméter akkor maximális, ha $\Omega = 1$ és akkor minimális, ha $\Omega = 0$. A kettő között az átmenetek nem lineárisak, sokkal inkább logaritmikusak (de ez sem pontos), ezért vannak a bizonytalansági paraméterek annyira alacsonyra állítva. Ha nincs bizonytalanságunk, akkor visszakapjuk az eddigi határportfólió görbéinket, ha a bizonytalanságunk maximális, akkor a piaci portfólióval számolt hozamok görbéjét kapjuk.

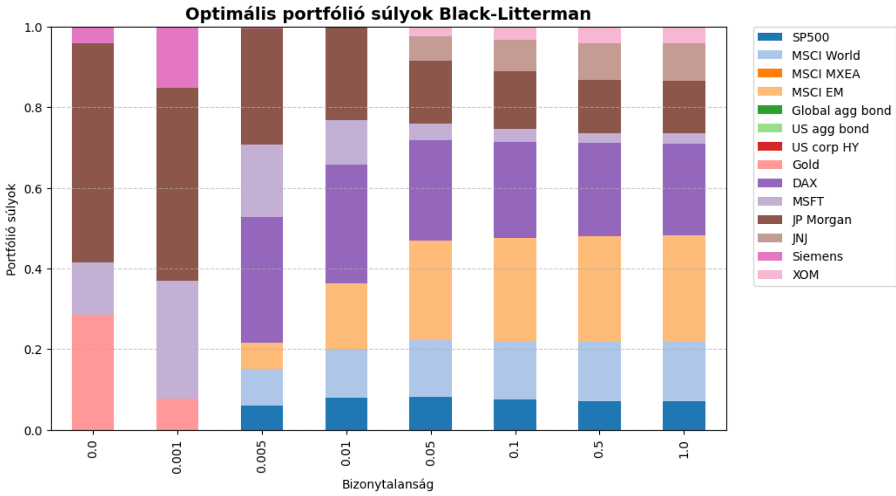
Nézzük a portfóliókat, különböző bizonytalanság mellett.



8. ábra. Optimális portfóliók BL módszerrel *short selling*

A kockázatkerülési paramétert itt minden esetben 5-re állítottuk be, így az első oszlopdiagramon, a 4 ábra ötös értékénél szereplő portfóliót láthatjuk újra. A bizonytalanságunk csökkenésével tart az egyensúlyi hozamok által implikált eredményhez.

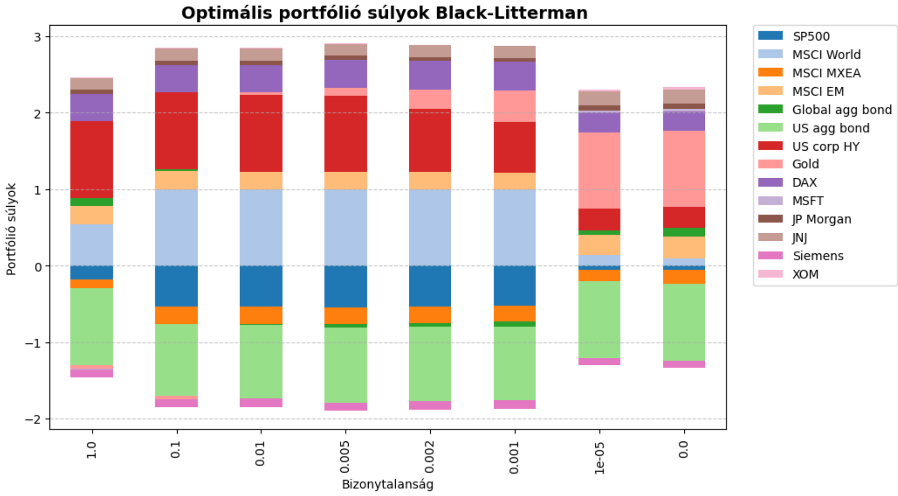
Nézzük, milyen eredményeket kapunk *short selling* nélkül.



9. ábra. Optimális portfóliók BL módszerrel *short selling* nélkül

Szemléletesen látszik, hogy a bizonytalanság változtatásával jelentősen változik a portfólió összetételünk. Az egyik nagy kritikája a hozam-variancia optimalizálásnak az, hogy csupán néhány eszközt választ ki, meglehetősen nagy súllyal. Ez a probléma valamiképpen, ha nem is megoldódott, de megoldhatóvá vált. Ebben a keretrendszerben az eredmény a mi nézeteinktől függ, és olyan nézeteket is meg tudunk adni, amelyek lecsökkentik az elsőként kapott kiemelkedő súlyokat.

A módszer egy nagy előnye az, hogy nem kötelező, hogy minden eszközre valamilyen alátámasztott szakértői view-val rendelkeznünk. A kovarianciamátrixon keresztül, akkor is, ha csak egy eszközre van vélekedésünk, az az összes eszköz hozamát befolyásolja. Az alábbi példában mesterségesen nyúltam bele a hozam-variancia optimalizálásba azzal, hogy az aranynak szélsőségesen nagy a *high yield* kötvényindexnek pedig alacsony hozamot adtam meg. Azért választottam ezt a két eszközt, mert viszonylag alacsonyan korrelálnak a portfólió többi részével, így a többi eszköz súlya nem változik szignifikánsan.



10. ábra. Arany és *High yield* hozamok változása

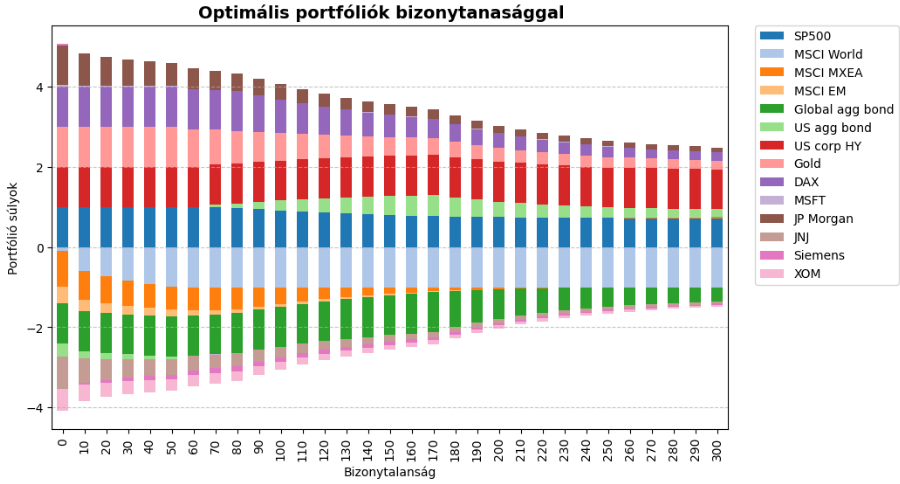
Az eredményeken világosan lekövethető, hogy a bizonytalanság csökkentésével hogyan jelenik meg az arany egyre nagyobb súllyal a portfóliónkban, míg a *High yield* lassan, de biztosan csökken.

6.3. Portfóliók bizonytalansággal

Elérkeztünk a szakdolgozat talán legfontosabb részéhez. A Garlappi, Uppal, Wang cikkben [12] látott módszereket implementáltam, ha a bizonytalanság eszközönként és portfólióként van definiálva.

A (4.1), és (4.2) tételekben leírtak szerint definiáltunk célfüggvényeket és ezeket használni is fogjuk. Az ϵ értéke a tételekben dinamikusan függ az idősorok hosszától (T) és az eszközök számától (N) is. Az én kódomban ezt a képletet nem használom. Az ϵ értéket egy konstansnak definiálom. Ennek csak kényelmi megfontolása van, mert az idősoraim viszonylag sok adatból állnak, így nagyon magas értéket kellett konstansként megadnom, hogy valódi változást észleljek az eredményeken. Ezzel csak annyit változtatok, hogy az ϵ értékeket átskálázom, tartalmilag nem változik semmi.

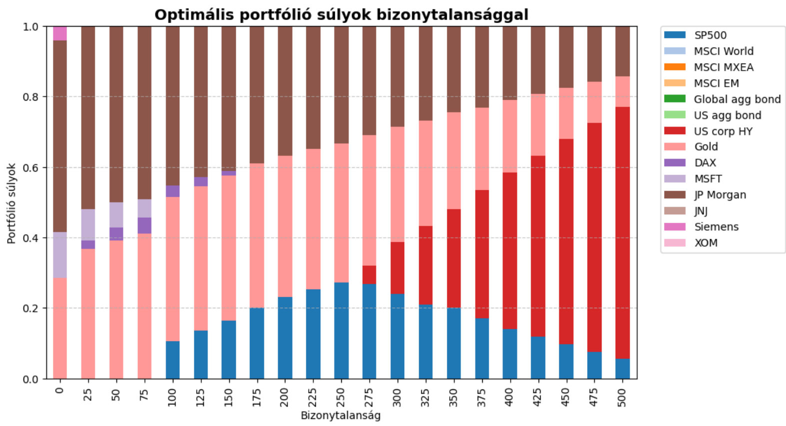
Nézzünk portfóliókat különböző ϵ értékek mellett, *short selling* engedélyezett:



11. ábra. Portfóliók bizonytalansággal *short selling* engedélyezett

Az első, amit megfigyelhetünk, ha összehasonlítjuk azokkal a portfóliókkal, amiket a 6.1 fejezetben kaptunk, hogy olyan nagyon nagy különbségek nem tapasztalhatók. A kockázatkerülési paramétert (γ) itt is 5-re rögzítettük. A sorban az első portfólió megegyezik a 4 ábra 5-ös értékénél látható összetétellel. Amit még fontos észrevennünk, hogy a portfóliók mérete a bizonytalanság növelésével csökken, ez azt jelenti, hogy ha a súlyok abszolút értékét összeadjuk, akkor egyre kisebb számokat kapunk. A bizonytalanság növelésével tartunk a minimális szórású portfólióba.

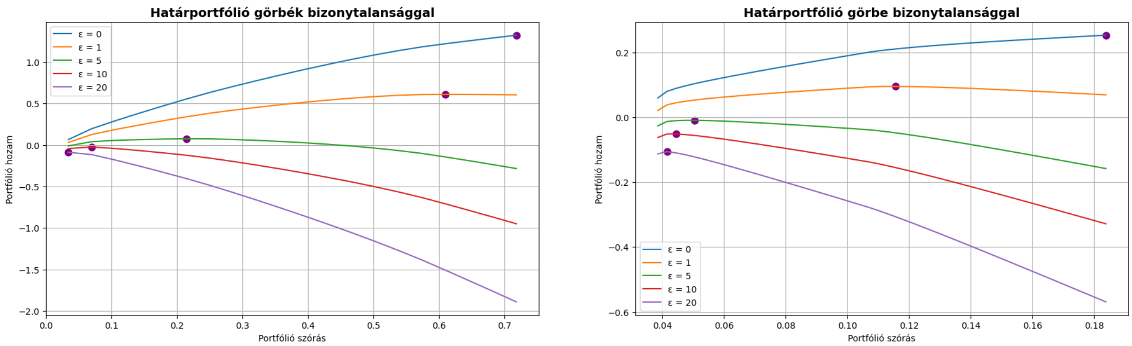
Nézzük a *short selling* mentes esetet.



12. ábra. Portfóliók bizonytalansággal *short selling* nem engedélyezett

Érdemes végiggondolni ebben az esetben is, hogy mi történik az effektív portfóliógörbékkel. Az előző fejezetekben úgy számoltuk a határportfóliókat, hogy egy adott elvárt hozamhoz minimalizáltuk a szórást, ezúttal adott kockázati szint mellett fogjuk maximalizálni a hozamot. A két optimalizálási folyamat végeredményeként ugyanazt a görbét kapjuk, azzal a megjegyzéssel, hogy a második esetben a görbének csak felső részén lévő hatékony portfóliókat tudjuk így előállítani. Ez nem igazán probléma, hiszen nekünk úgyis ezek a portfóliók fognak csak számítani később. Ezt részletesen az alábbi könyv [22] második fejezetében írják le, de a két feltételes szélsőértékkeresési feladat megoldásából is könnyedén kiolvasható.

A határgörbék különböző bizonytalanság mellett.

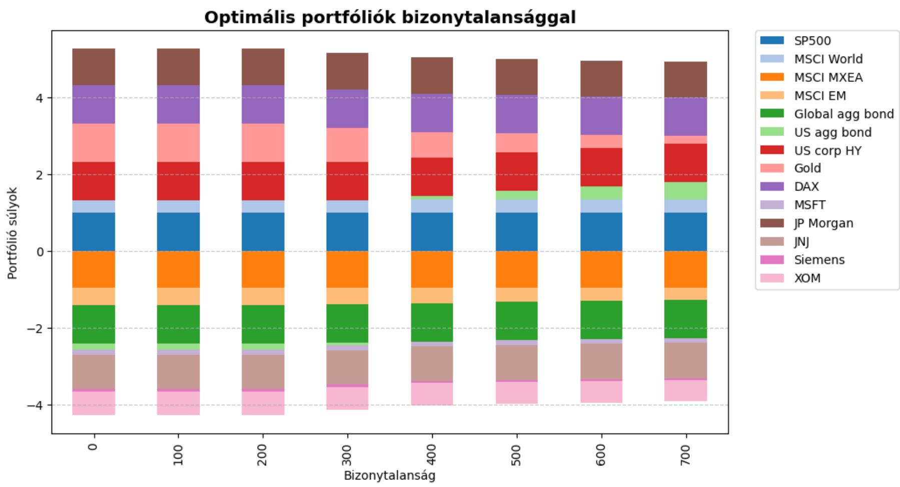


(a) *Short selling* engedélyezett (b) *Short selling* nélkül

13. ábra. Határportfólió görbék

Ezeken az ábrákon a görbék úgy jöttek létre, hogy adott szórás mellett maximaliztuk a bizonytalansággal korrigált hozamot, vagyis a (36) képlet maximalizálandó kifejezésében az első és a harmadik tag különbségét. A görbék azért kezdenek lekonyulni, mert a célfüggvény negatívan függ a szórástól, és a kockázatvállalás egy idő után nem kifizetődő a bizonytalanságkerülés miatt. A bizonytalanság úgy viselkedik, mint egy büntetőtag a hozamokon. Ez azt is jelenti, hogy a bizonytalanság növelésével a kockázatvállalási hajlandóságtól függetlenül egyre kisebb azon portfóliók halmaza, amit érdemes választani. A lila körrel kijelölt portfóliók a görbék maximumát jelölik, ebben a modellben ezen túl senki nem fog magának portfóliót választani. A bizonytalanság növelésével ez a pötty egyre jobban közeledik a minimális varianciájú portfólió felé. Ezeket a maximális hozamú portfóliókat, össze is köthetjük, és egy folytonos görbét kapunk, a minimális szórású és a maximális hozamú portfólió között. Ezt nevezhetjük bizonytalansági határgörbének is. Egy mondatban összefoglalva a lényeg, a *mean-variance* optimalizálással ellentétben itt nagyobb szórásvállalás mellett nem lesz kötelezően nagyobb a hasznosságunk is, mivel van egy plusz büntetőtag. Magas bizonytalanság kerülés mellet nem növelheted a portfólió kockázatot.

Az előző fejezethez hasonlóan ezúttal is lehetőségünk van arra, hogy csupán bizonyos eszközök súlyára hassunk. A racionális befektető két azonos hozamú eszköz közül azt választja, amelynek kisebb a bizonytalansága. Így amennyiben egy eszköznek folyamatosan nagyobb bizonytalanságot adunk meg, akkor az optimalizáláskor az egyre kevésbé lesz vonzó számára. A következő ábrán erre láthatunk egy megvalósítást.



14. ábra. Az arany súlyának szabályozása bizonytalansággal

Ezekben a portfóliókban az arany bizonytalanságát folyamatosan növeljük, így az folyamatosan egyre kisebb súllyal van jelen a portfóliónkban.

Az ok, amiért ilyen nagy ϵ értékek szerepelnek a vízszintes tengelyen, az az, hogy a 4.1 tétel (31) kifejezésében, ami az eszközönkénti bizonytalansággal korrigált érték, a szórás le van osztva az idősor hosszával is. Ezt a többi esetben, amikor a portfólió egészére definiáltunk bizonytalanságot felskáláztam, pont azért, hogy ne ilyen magas

ϵ értékekkel kelljen számolnunk.

6.3.1. Robusztusság vizsgálat

A portfóliók összetételének robusztussági vizsgálata több okból is indokolt. A szakirodalom a negyedik fejezetben leírt módszert robusztus portfólióoptimalizálási módszernek nevezi (többek között [22] tizedik fejezete). Mások a robusztusság jelzőt a CVaR-os optimalizálásra használják, vagy olyan esetekben, amikor az elv azonos, csak a kockázati mérőszám különbözik.

A robusztusság azért fontos, mivel, ahogy azt már több alkalommal is megtárgyaltuk, a valódi hozamokat nem ismerjük pontosan, csak hibával tudjuk becsülni őket. Ezért fontos, hogy ha a bemenetként használt hozamokat, ha csak egy kicsit változtatjuk, akkor maguk a portfóliók összetétele is csak egy kicsit változzon.

Ennek a teszteléséhez a becsült hozamokat megsokkolom. Ez azt jelenti, hogy az értékekhez hozzáadok egy nulla várható értékű alacsony szórású normális zajt. Ezt az értéket 0.02-re állítottam (2%). Ezer darab zajos mintát generáltam és mindet optimalizálom különböző bizonytalansági ϵ-ok mellett. A következő ábra néhány esetet mutat be.

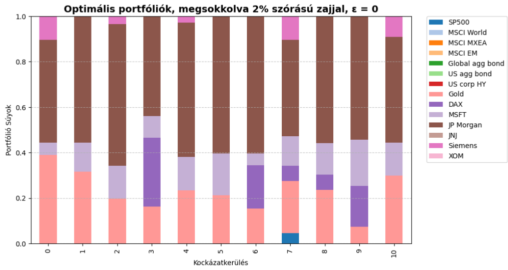
Az ábrákon az ϵ értékét növelem. Az első (a) ábra felel meg a *mean-variance* optimalizálásnak. Az ezer portfóliónak csak az első tíz esetét ábrázoltam. A következő lépés ennek a robusztusságnak a kvantifikálása. Erre a legegyszerűbb mód az, hogy veszem az eszközök portfólióba betöltött súlyát, és veszem ezen értékek szórását, majd az összes eszköz szórását kiátlagolom. Ez a szám minél közelebb van a nullához, annál stabilabbak a portfólióink.

Ezen mérőszám különböző értékei a 4. táblázatban szerepelnek.

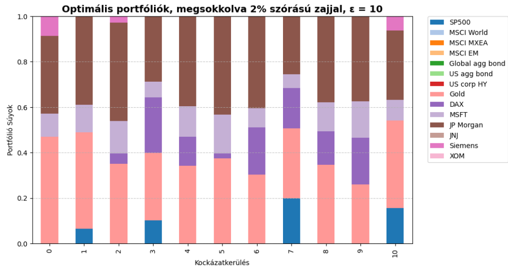
ϵ	0	10	100	200	300	400	500
Érték	0.0383	0.0363	0.0350	0.0172	0.0108	0.0081	0.0068

4. táblázat. A különböző ϵ értékekhez tartozó eredmények

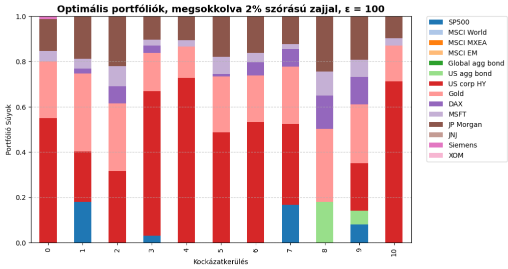
Jól látszik, hogy a bizonytalanság növelésével a mérőszám egyre kisebb lesz. Ez a módszertan azonban megkérdőjelezhető, ugyanis valójában azért lettek stabilabbak



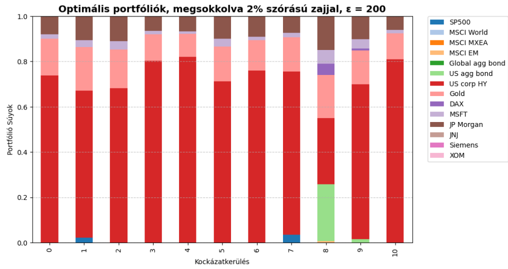
(a) $\epsilon = 0$



(b) $\epsilon = 10$



(c) $\epsilon = 100$



(d) $\epsilon = 200$

15. ábra. Portfóliók különböző bizonytalansággal

portfólióink, mert az effektív görbe egyre rövidebb szakaszán engedem optimalizálni a befektetőket, és ha kellően nagy számot választok, akkor már csak a minimális szórású portfólió közvetlen környezetéből választhatok.

Egy alternatív megközelítés az, amit feljebb is használtunk. Kiválasztunk egy kockázati szintet, és amellett akarjuk maximalizálni a portfólió hozamát. Ezt két módon kell megtennünk: első esetben a hozamot, második esetben a bizonytalansággal korrigált hozamot maximalizáljuk. Ez egy másik robusztussági mérőszámot is indítványoz, ugyanis a portfólió hozama ebben az esetben nem fix, és ennek az értéknek a szórása is egy ésszerű mérőszám.

Ez viszont, ha fix a szórás, akkor azt jelenti, hogy az egyik célfüggvény a másiknak a konstans eltoltja. Így ugyanazokat a portfóliókat válassza ki minden esetben. Erre a problémára létezik egy heurisztika, ami megoldást kínálhat. A bizonytalansági büntetőtag számolásakor más kovarianciamátrixot használunk, mint a szórás számolásakor. Ez esetben, ha ügyesen választjuk meg a második kovarianciamátrixot, akkor más eredményeket kapunk, amik robusztusabbak. Ezzel egy problémát megoldottunk, de egy új kérdést is kaptunk, mi legyen ez a második kovarianciamátrix. Az implementációm során megpróbálkoztam azzal, hogy a *CAPM* segítségével készítünk egy kovarianciamátrixot. Ez a mátrix a következőképpen áll elő:

$$\Sigma_{\text{CAPM}} = \beta\beta^\top \sigma_M^2 + D \tag{54}$$

$$D = \text{diag}(\sigma_{\epsilon_1}^2, \ldots, \sigma_{\epsilon_n}^2) \tag{55}$$

A béták szorzata a faktorszórással lényegében a szisztematikus kockázat, míg a D mátrix az idioszinkrotikus szórást tartalmazza. Utóbbit minden felhasználó maga állíthatja be.

Ezen mátrixot a bizonytalansági tagnál használva, először az összes eszköz hozamát megsokkoltam. Ebben az esetben nem sikerült robusztusabb eredményeket kapnom. A súlyok szórásának az átlaga megközelítőleg ugyanazt az eredményt adta mindkét alkalommal. Ám amikor csak az aranynak a hozamát sokkoltam meg, és megnéztem, hogy a kapott portfóliókban az arany súlyának mekkora a szórása, a második esetben szignifikánsan kisebb számot kaptam (körülbelül 20 százalékkal kisebb). Azért választottam az aranyat, mert egy kifejezetten alacsony béta értékkel rendelkezik, és nem igazán korrelál a portfólió többi részével, vagyis egy nagy bizonytalanságú eszközről van szó.

A kovarianciamátrix kiválasztására különféle heurisztikák léteznek, amelyek a felhasználó céljától is függnek, de ezek feltárása további kutatást igényel, amely nem része a dolgozatnak.

7. Összefoglalás

A Markowitz-i hozam-variancia optimalizálás utáni portfóliók empirikus tesztelésekor különböző problémákat figyelhetünk meg. Az egyik legnagyobb probléma, hogy az optimalizálás nem választ ki elég eszközt, és amiket kiválaszt, túl nagy súllyal teszi. Az inputokként megadott hozamokat kicsit megváltoztatva, teljesen más eredményeket kapunk. A portfóliók robusztusságának igénye egy teljesen természetes elvárás, mivel a hozamokat valójában nem ismerjük, csak hibával tudjuk becsülni.

Ezeket a problémákat próbáljuk megoldani két másik portfólióoptimalizálási eljárás felhasználásával. Az első módszer a bayesi statisztikai módszertanon alapul, apriori kvalitatív információkat építünk be a döntésünkbe. A módszertan konkrét implementálása a *Black-Litterman* modellen keresztül történik, amely egy egyensúlyi modellt és a nézeteinket keveri össze a bennük való bizonyosságunk mértékével.

A másik módszertan a robusztus portfólióoptimalizálás. Ebben az eljárásban a hozamokat nem pontbecsléseknek kezeljük, hanem konfidenciaintervallumot adunk meg, melyek nagysága a hozamok történelmi fluktuációjától függ. Ezen intervallumok minimumát használjuk bemenetként, és ezeken optimalizálunk a továbbiakban. A módszer szorosan kapcsolódik a CVaR optimalizáláshoz.

A szakdolgozatomban ezt a három módszert implementáltam és valódi piaci idősorokon teszteltem. Az eredmények kiértékelése a hatodik fejezetben látható. A kódok itt érhetők el: https://github.com/gyusza46/master_thesis

A szakdolgozat egy lehetséges folytatása más kockázati mérőszámok választása az optimalizáláshoz, többek között a [15] cikkben leírtak szerint két lépésben, elsőként egy score-t adni a különböző részvényeknek, majd ezeknek az EVaR-ján optimalizálni. Ezzel valójában a fenti két módszert egyesítjük, azzal, hogy a hozambecslésünket és az optimalizálást is egyszerre megváltoztatjuk. Egy másik lehetséges folytatás a robusztusság vizsgálatnál már említett második kovarianciamátrix létrehozása, hogy a bizonytalansági büntetőtag ne függjön a szórástól.

Hivatkozások

[1] Harry M. Markowitz. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.

[2] Petter N. Kolm, Reha Tütüncü, and Frank J. Fabozzi. 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2):356–371, 2014. 60 years following Harry Markowitz's contribution to portfolio theory and operations research.

[3] David Bauder, Taras Bodnar, Nestor Parolya, and Wolfgang Schmid. Bayesian mean–variance analysis: Optimal portfolio selection under parameter uncertainty. *Quantitative Finance*, 21(8):1293–1312, 2021.

[4] QuantStart. Bayesian statistics: A beginner's guide. `https://www.quantstart.com/articles/Bayesian-Statistics-A-Beginners-Guide/`, 2022. Accessed: 2025-01-29.

[5] Isabella Fornacon-Wood, Hitesh Mistry, Corinne Johnson-Hart, Corinne Faivre-Finn, James P. B. O'Connor, and Gareth J. Price. Understanding the differences between bayesian and frequentist statistics. *Statistical Methods in Medical Research*, 30(2):440–456, 2021.

[6] Doron Avramov and Guofu Zhou. Bayesian portfolio analysis. *Annual Review of Financial Economics*, 2:25–47, 2010.

[7] Jun Tu and Guofu Zhou. Incorporating economic objectives into bayesian priors: Portfolio choice under parameter uncertainty. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 45(2):459–482, 2010.

[8] Fischer Black and Robert Litterman. Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5):28–43, 1992.

[9] Thomas M. Idzorek. A step-by-step guide to the black-litterman model: Incorporating user-specified confidence levels. *Ibbotson Associates Research Paper*, pages 1–38, 2007.

[10] Richard O. Michaud, David N. Esch, and Robert O. Michaud. Deconstructing black-litterman: How to get the portfolio you already knew you wanted. *Journal of Investment Management*, 10(1):9–26, 2012.

[11] Guangliang He and Robert Litterman. The intuition behind black-litterman model portfolios. `https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3343042`, 1999. Goldman Sachs Asset Management White Paper.

[12] Lorenzo Garlappi, Raman Uppal, and Tan Wang. Portfolio selection with parameter and model uncertainty: A multi-prior approach. *Review of Financial Studies*, 20(1):385–426, 2007.

[13] Lasse Heje Pedersen, Abhilash Babu, and Ari Levine. Enhanced portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 77(2):45–64, 2021.

[14] Diana Roman, Kenneth Darby-Dowman, and Gautam Mitra. Mean-risk models using two risk measures: a multi-objective approach. *Quantitative Finance*, 7(4):435–454, 2007.

[15] Ebenezer Fiifi, Emire Atta Mills, and Siegfried Kafui Anyomi. A hybrid two-stage robustness approach to portfolio construction under uncertainty. *Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences*, 2022.

[16] Papers with Backtest. Guide to using the bloomberg terminal, 2023. Accessed: 2025-03-29.

[17] Romoflow. The beta-binomial model: An introduction to bayesian statistics, 2020.

[18] Eugene F. Fama and Kenneth R. French. The capital asset pricing model: Theory and evidence. *Journal of Economic Perspectives*, 18(3):25–46, 2004.

[19] Valentyn Khokhlov. Conditional value-at-risk for log-distributions. *European Journal of Business and Economics*, 13(2):5–9, 2018.

[20] SciPy Community. *scipy.optimize.minimize*, 2024.

[21] Robert T. Martin. *PyPortfolioOpt: Financial Portfolio Optimization in Python*, 2021.

[22] MOSEK. *Portfolio Optimization Cookbook*. MOSEK, release 1.6.0 edition, 2024.

[23] Edouard Berthe. Scenario-based portfolio optimization. `https://arxiv.org/abs/1602.05915`, 2016. arXiv preprint arXiv:1602.05915.

[24] Investopedia Staff. Beginner's guide to the bloomberg terminal, 2023. Accessed: 2025-02-14.

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke