# 공학기초수학 11주차 온라인 과제

소프트웨어학부 20213015 송규원

## 10.1절

**14-31** 다음 수열이 수렴하는지 발산하는지 판정하라. 수렴하면 극한을 구하라.

**25.** $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$ p.616 정리6을 이용하여 풀어라. $\Rightarrow$ 정리 6 : $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

이에 대한 증명 : 모든 자연수 $n$에 대하여

$-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ 이 성립한다.

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} (-|a_n|) = 0$ 이다.

수열의 극한의 대소관계에 의해

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.

$-1 \le \cos n \le 1$

$0 \le \cos^2 n \le 1$

$0 \le \dfrac{\cos^2 n}{2^n} \le \dfrac{1}{2^n}$ 이므로, 정리 6을 이용하면

$\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{2^n}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ 이고, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\cos^2 n}{2^n} = 0$

여기서 $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$ 은 수렴하고 그 극한은 0 이다.

## 10.3절

**2-5** 적분판정법을 이용해서 급수가 수렴하는지 혹은 발산하는지 판정하라.

**5.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ 적분판정법의 조건을 설명한 후 판정하여라.

적분 판정법

함수 $f$가 구간 $[1, \infty)$ 에서 연속,

양의 값을 갖는 감소함수, $a_n = f(n)$ 이라 하면 $\rightarrow$ ∴ 조건

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하기 위한 필요충분조건

$\Rightarrow$ 이상적분 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 가 수렴하는 것

함수 $f$가 구간 $[1, \infty)$ 에서

1) $f(x)$ 는 연속함수

2) $f(x) > 0$ , $f'(x) < 0$

3) $a_n = f(n)$

1) $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 가 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴

2) $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 가 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산

$f(n) = \dfrac{1}{n(\ln n)^3}$ 은 $f(n) > 0$, $f'(n) < 0$

$\ln n = t$

$\dfrac{1}{n} = \dfrac{dt}{dn}$ 이고, $n \to \infty$ 일 때 $t \to \infty$

$n \to 2$ 일 때 $t \to \ln 2$

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}\,dn$

$\displaystyle= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^3}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_{\ln 2}^{x} t^{-3}\,dt$

$\displaystyle= \lim_{x\to\infty} \left[ -\frac{1}{2t^2} \right]_{\ln 2}^{x}$

$\displaystyle= \lim_{x\to\infty} \left( -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2(\ln 2)^2} \right) = \frac{1}{2(\ln 2)^2}$ $\Rightarrow$ 수렴

∴ $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}\,dn$ 이 수렴하면

적분 판정법에 의해 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ 도 수렴한다.