수치해석 중간고사 2차 - 소프트웨어학부 2021301__ 송규원

1. 비례 조정 부분 피벗팅을 사용한 가우스 소거법을 다음 행렬에 적용하고 중간과정의 행렬을 나타내시오.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

인덱스 벡터 $l = [1, 2, 3, 4]$ 라고 가정하자.

비례 조정 벡터 $s = [3, 3, 6, 6]$

1단계) $\{ |a_{l_i,1}| / s_{l_i} \ . \ i = 1, 2, 3, 4 \} = \{ \frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{3}{6}, \frac{0}{6} \}$

$j = 3$, 피벗 방정식 3행

새로운 인덱스 벡터 $l = [3, 2, 1, 4]$

$l_1 \leftarrow l_1 - \frac{1}{3} l_3$ 을 한 결과,
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

2단계) $\{ |a_{l_i,2}| / s_{l_i} \ . \ i = 2, 3, 4 \} = \{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{6} \}$

$j = 1$, 피벗 방정식 1행

새로운 인덱스 벡터 $l = [3, 1, 2, 4]$

$l_2 \leftarrow l_2 - l_1$
$l_4 \leftarrow l_4 - 2l_1$ 을 한 결과,
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

2. 다음 선형 연립방정식을 비례 조정 부분 피벗팅을 사용한 가우스 소거법을 적용하고, 중간 단계를 보이고, 각 단계에서의 인덱스 벡터를 쓰시오.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 \qquad - 3x_4 &= 4 \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ 3x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

인덱스 벡터 $\ell = [1, 2, 3, 4]$

비례 척도 벡터 $s = [3, 1, 1, 3]$

1단계) $\{ |a_{\ell_i,1}| / s_{\ell_i} \, . \, i = 1, 2, 3, 4 \} = \{ \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{3}{3} \}$

$j = 2$, 피벗 방정식 2행

새로운 인덱스 벡터 $\ell = [2, 1, 3, 4]$

$\ell_1 \leftarrow \ell_1 + \ell_2$
$\ell_4 \leftarrow \ell_4 - 3\ell_2$ 을 한 결과, $\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2단계) $\{ |a_{\ell_i,2}| / s_{\ell_i} \, . \, i = 2, 3, 4 \} = \{ \frac{1}{3}, \frac{1}{1}, \frac{0}{3} \}$

$j = 3$, 피벗 방정식 3행

새로운 인덱스 벡터 $\ell = [2, 3, 1, 4]$

$\ell_1 \leftarrow \ell_1 - \ell_3$ 을 한 결과, $\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3단계) $\{ |a_{\ell_i,3}| / s_{\ell_i} \, . \, i = 3, 4 \}$

$j = 1$, 피벗 방정식 1행

⇒ 인덱스 벡터에 아무런 영향을 주지 않는다.

즉, $\ell = [2, 3, 1, 4]$

$\ell_4 \leftarrow \ell_4 + \ell_1$ 을 한 결과, $\longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

∴ 인덱스 벡터의 성분들을 마지막부터 첫 번째까지 거꾸로 읽음으로써 역대입 + 해 구하기

ℓ_4) $-2x_4 = 2$, $x_4 = -1$

ℓ_1) $2x_3 - 1 \times (-1) = 1$, $x_3 = 0$

ℓ_3) $x_2 - 1 \times (0) - 1 \times (-1) = 3$, $x_2 = 2$

ℓ_2) $x_1 + 1 \times (0) + 1 \times (-1) = 0$, $x_1 = 1$

⇒ 따라서 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$ 이다.

3. 이분법에서 처음 시작 구간이 $[a_0, b_0]$ 에서 이분법을 10단계 시행한 후 다음이 성립함을 보이시오, 또한 근의 근삿값이 소수점 이하 6자리(반올림)까지 정확하기 위해 필요한 반복 단계의 횟수를 구하시오.

$$\left|\frac{1}{2}(a_{10}+b_{10})-\frac{1}{2}(a_9+b_9)\right| = 2^{-11}(b_0-a_0)$$

$C_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ 하고 두면,

위 식을 통해 $|C_{10}-C_9| = 2^{-11}(b_0-a_0)$ 가 성립한다.

구간 $[a_0, b_0]$ 에서 $f(a_n)\cdot f(C_n) < 0$ 이 성립한다면

$a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = C_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ 이고,

$$C_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} = \frac{a_{n+1}+\frac{a_n+b_n}{2}}{2} = \frac{a_n+b_n}{2} + \frac{a_n-b_n}{4} = C_n + \frac{a_n-b_n}{4}$$

$\Rightarrow C_{n+1}-C_n = \frac{a_n-b_n}{4}$, $|C_{n+1}-C_n| = \frac{b_n-a_n}{4}$ 인데,

단계를 거칠 때마다 구간의 너비가 $\frac{1}{2}$씩 줄어들기 때문에

$|C_{n+1}-C_n| = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{b_0-a_0}{2^2} = \frac{b_0-a_0}{2^{n+2}}$ 이다

$\Rightarrow n=9$ 일 때

$$|C_{10}-C_9| = \frac{b_0-a_0}{2^{11}} = \left|\frac{1}{2}(a_{10}+b_{10})-\frac{1}{2}(a_9+b_9)\right| = 2^{-11}(b_0-a_0)$$

소수점 이하 6자리까지 정확하기 위해서 $\epsilon < 10^{-6}$ 이고,

오차 ϵ 의 최댓값에 절댓값을 취한 결과는 $\frac{|b_0-a_0|}{2^n}$ 인데,

$b_0-a_0 = 1$ 이기 때문에 $\frac{1}{2^n} < 10^{-6}$ 이다.

여기에 $\log_2$ 를 취해주면 $-n < -6\cdot\log_2 10$, $n > 6\cdot\log_2 10$

$\log_2 10 = 3.321928\cdots$ 이므로 $n > 19.931568\cdots$ 이 성립한다.

$\therefore$ 20단계