과제 #01, 20243015 풍규원

Exercise Set 1.1

1) a. $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$

⇒ linear equation

b. $x_1 + 3x_2 + x_1x_3 = 2$

⇒ x_1x_3의 차수가 1이 아니므로 not linear equation

c. $x_1 = -7x_2 + 3x_3$

$x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0$

⇒ linear equation

d. $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$

⇒ x_1의 차수가 1이 아니므로 not linear equation

e. $x_1^{\frac{3}{5}} - 2x_2 + x_3 = 4$

⇒ x_1의 차수가 1이 아니므로 not linear equation

f. $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 = 7^{\frac{1}{3}}$

⇒ linear equation

7) a. $-2x_1 = 6$
$3x_1 = 8$
$9x_1 = -3$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

b. $6x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$
$5x_2 - x_3 = 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c. $2x_2 - 3x_4 + x_5 = 0$
$-3x_1 - x_2 + x_3 = -1$
$6x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 6$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

9) $2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1$
$x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$
$3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 1$

ⓐ $(3, 1, 1)$
$2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 1 = 1$
$3 - 3 + 1 = 1$
$9 - 5 - 3 = 1$

~~b~~. $(3, -1, 1)$
$2 \cdot 3 - 4(-1) - 1 = 9 \neq 1$
$3 - 3(-1) + 1 = 7 \neq 1$
$9 - 5(-1) - 3 = 11 \neq 1$

~~c~~. $(13, 5, 2)$
$2 \cdot 13 - 4 \cdot 5 - 2 = 4 \neq 1$
$13 - 3 \cdot 5 + 2 = 0 \neq 1$
$3 \cdot 13 - 5 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 8 \neq 1$

ⓓ $(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, 2)$
$\frac{13}{2} \cdot 2 - 4 \cdot \frac{5}{2} - 2 = 1$
$\frac{13}{2} - 3 \cdot \frac{5}{2} + 2 = 1$
$3 \cdot \frac{13}{2} - 5 \cdot \frac{5}{2} - 3 \cdot 2 = 1$

ⓔ $(17, 7, 5)$
$2 \cdot 17 - 4 \cdot 7 - 5 = 1$
$17 - 3 \cdot 7 + 5 = 1$
$3 \cdot 17 - 5 \cdot 7 - 15 = 1$

∴ a, d, e are solutions
b, c are not solutions.

ข้อ 7 a. $2x - 2y = 1$

$6x - 6y = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

① $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2x - 2y = 1$

$y = t$, $2x = 1 + 2t$

$x = \frac{1}{2} + t$

b. $x_1 + 2x_2 - x_3 = -4$

$3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -12$

$-x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & -3 & -12 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

① $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

② $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = -4$

$x_2 = s$, $x_3 = t$

$x_1 = -4 - 2s + t$

Exercise Set 1.2

3) a. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

계수 rank : 3
확대 rank : 3 → consistent

$z = 5$,

$y + 2 \cdot 5 = 2$, $y = -8$

$x - 3(-8) + 4 \cdot 5 = 0$,

$x = -34$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

계수 rank : 3
확대 rank : 3 → consistent

$z + w = 2$, $w = t$, $z = 2 - t$

$y + 4(2-t) - 9t = 3$

$y = -5 + 13t$

$x + 8(2-t) - 5t = 6$

$x = -10 + 13t$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

계수 rank : 3
확대 rank : 3 → consistent

$x_5 = 0$, $x_5 = t$

$x_4 + 3t = 9$, $x_4 = 9 - 3t$

$x_3 + 9 - 3t + 6t = 5$,

$x_3 = -4 - 3t$

$x_2 = 4$,

$x_1 + 3 \cdot 4 - 2(-4 - 3t) - 8t = -3$

$x_1 = -11 - 3 \cdot 4 + 2t$

d. 계수 rank : 2
확대 rank : 3 → inconsistent

∴ No solution

4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

① $r_2 \leftarrow r_2 + r_1$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & -1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 3 & -1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

② $r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

③ $r_3 \leftarrow r_3 - 5r_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$x_3 = 2$

$x_2 - 5 \cdot 2 = -9$, $x_2 = 1$

$x_1 + 1 + 2 \cdot 2 = 8$, $x_1 = 3$

7) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

① $r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

$w = 3$, $z = t$

$y - 2t = 0$,

$y = 2t$

② $r_3 \leftarrow r_3 + r_1$

$x - 2t + 2t - 3 = -1$

$x = -1 + 3$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

③ $r_4 \leftarrow r_4 - 3r_1$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

④ $r_4 \leftarrow r_4 - 3r_2$, $r_3 \leftarrow r_3 - r_2$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9기 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

↳ 5번에서 도출된 forward Elimination 결과

① $r_2 \leftarrow r_2 + 5r_3$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

② $r_1 \leftarrow r_1 - 2r_3$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

③ $r_1 \leftarrow r_1 - r_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\therefore x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

↳ 9번에서 도출된 forward Elimination 결과.

11기 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

① $r_1 \leftarrow r_1 + r_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$w = h$, $z = t$

$y - 2z = 0 \Rightarrow y - 2t = 0$, $y = 2t$

$x - w = -1 \Rightarrow x - h = -1$, $x = -1 + h$

12기 a. $\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$

⇒ 좌·우변 rank 값이 3으로 같아서 consistent, 구하려는 미지수의 개수, 주어진 식의 개수, rank 값이 모두 3으로 같으므로 unique solution.

b. $\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

⇒ 좌·우변 rank 값이 2로 consistent 하지만, 구하려는 미지수와 주어진 식의 개수는 제각각이 의미있는 식의 개수는 그래 많이므로 infinitely many solution.

c. $\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

⇒ 좌변 rank 값 2, 우변 rank 값 3으로 inconsistent

마지막 행에서 해를 보면 $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$을 만족하지 않음.

d. $\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 \end{bmatrix}$

⇒ 주어진 정보로 좌·우변 rank 값을 판단하기 어려우며 마지막 행에 * 라이도 아닌 수가 ~~올~~ 주어지지 않을 수 없으므로 consistent / inconsistent를 판단할 수 없음.