Análisis Matemático para Exactas e Ingeniería (1^{er} parcial)

Gonzalo Ávila Alterach
http://gzaloprgm.com.ar
gonzaloavilaalterach@gmail.com

Mayo 2011

0.1. Inecuaciones

- Al multiplicar o dividir en ambos miembros por algo negativo, cambia el signo de la desigualdad
- Si queda una fracción comparada con 0, hay que dividirlo en dos casos de acuerdo a los signos. Ejemplo: $\frac{a}{b} > 0 \to (a > 0$ y $b > 0)$ o $(a < 0$ y $b < 0)$

0.2. Funciones

0.2.1. Definiciones

$f : X \to Y$

- Inyectividad: para cada $x \in X$ hay un $y \in Y$ distinto (no hay dos elementos de X con misma imagen)
- Sobreyectiva: cuando la imagen de f es igual a Y (cubre todo el espacio de llegada)
- Biyectividad: cuando es inyectiva y sobreyectiva
- f Tiene inversa si es biyectiva
- Una función puede ser biyectiva al cambiar el codominio

0.2.2. Análisis de Asíntota vertical

Analizar puntos fuera del dominio y los "bordes.^{en} caso que esté definida por partes

0.2.3. Análisis de Asíntota horizontal

Analizar $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

0.2.4. Análisis de Asíntota oblicua

Analizar $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)/x = M$ para hallar pendiente (si no da constante distinta de cero no existe) y hallar ordenada al origen mediante $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - Mx = B$. La asíntota oblicua tiene la forma $Y = Mx + B$

0.2.5. Continuidad

Para que f sea contínua en un punto x_0 tienen que darse las siguientes condiciones simultáneamente:

- Tiene que existir $f(x_0)$
- Tiene que existir $\lim_{x \to x_0} f(x)$ (mismos límites laterales)
- Los límites tienen que ser iguales a $f(x_0)$

Teoremas de Continuidad

- f y g continuas en $(a, b) \to f \pm g$ también continua en (a, b)
- f y g continuas en $(a, b) \to f * g$ también continua en (a, b)
- f y g continuas en (a, b) y $g \neq 0 \to \frac{f}{g}$ también continua en (a, b)
- f y g continuas en $(a, b) \to f \circ g$ también continua en (a, b)

Conservación del signo Si f es contínua en (a, b), con $x_0 \in (a, b)$, $f(x_0)$ tiene el mismo signo que $\lim_{x \to x_0} f(x)$

Teorema de Bolzano Si F es contínua en $[a, b]$ y el signo de $f(a) \neq$ al signo de $f(b)$, hay al menos una raíz en $[a, b]$

Teorema de los valores intermedios Generalización del teorema de Bolzano, f(x) contínua en $[a, b]$ toma todos los valores intemedios entre $f(a)$ y $f(b)$

0.3. Derivación

La derivada de una función es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en cierto punto. También puede verse como la rapidez de cambio de una función en el tiempo.

Cociente incremental $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$

Cociente incremental con h tendiendo a 0 es $f'(x_0)$, pendiente de la recta tangente al gráfico de f en x=x0

Si la derivada en un punto no existe, pasa alguna(s) de estas condiciones:

- La función no es contínua,
- la recta tangente es vertical o
- hay un punto anguloso (admite infinitas rectas tangentes)

Teorema de la derivada de la función inversa EN UN PUNTO $[f^{-1}]'(y_0) = 1/f'(x_0)$ Donde $y_0 = f(x_0)$

Derivadas sencillas

- $(senx)' = cosx$
- $(cosx)' = -senx$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $k' = 0$ (con k constante)
- $(log_a x)' = 1/x * lna$
- $(a^x)' = a^x * lna$

Reglas de derivación $(f \pm g)' = f' \pm g'$
$(f * g)' = f'g + fg'$
$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$
$(f \circ g)' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) * g(x)'$

Teorema de Fermat F derivable en (a,b), F contínua en [a,b]
Si F tiene un extremo en $x = x_0$ (con $x_0 \in (a; b)$), entonces $F'(x_0) = 0$

Puntos críticos: Candidatos a extremos Puntos en el dominio de F donde la derivada no exista o valga 0

Teorema del valor medio de Rolle F derivable en (a;b), F contínua en [a;b], F(a) = F(b)
Entonces existe algún c dentro de (a;b) tal que $Ff'(c) = 0$

Teorema del valor medio de Lagrange F derivable en (a;b), F contínua en [a;b]
Existe alguna punto c dentro de (a;b) tal que la recta tangente es paralela a la recta (a;f(a)) (b;f(b))

Por lo tanto, si la derivada de una función es estrictamente negativa, la función es estrictamente decreciente(mismo con positivo y creciente)

Interpretación física: "La velocidad media entre dos puntos (a;b) tiene que ser igual a la velocidad instantánea en alguno de los puntos en el intervalo"

Teorema del valor medio de Cauchy Es más complicado y no tiene mucho uso, pero sirve para demostrar L'Hopital

L'Hopital Si lim f(x)/g(x) da indeterminación 0/0 o inf/inf, es posible derivar y ver si existe el límite de f'(x)/g'(x).
Sí el límite existe, el original también existía y valía lo mismo. En cambio, si no existe, no dice nada.

Si hay un $0 * \infty$, es posible invertir alguno de los dos términos y así podér usar L'H

Concavidad negativa (con ramas hacia abajo) Concavidad positiva (convexa)
En un punto de inflexión cambia la concavidad (puede estar fuera del dominio de f).
El signo de la segunda derivada indica la concavidad.

Dada una función contínua, en un intervalo de monotonía estricta hay UNA o NINGUNA solución de f(x) = k. Uso: Decir cuantas soluciones tiene (por intervalo de monotonía - TVI + Límites de c/ borde de intervalo)

Teorema de Weierstrass: Una función contínua definida en un intervalo cerrado alcanza su mínimo y máximo absoluto en puntos del intervalo

Criterio de la segunda derivada: Sirve para analizar si un extremo local es mínimo o máximo, analizando el signo de la segunda derivada (es decir, la concavidad en ese punto)
Siendo x un punto en el que $f'(x) = 0$:
Si $f''(x)$ es positiva, x es un mínimo local
Si $f''(x)$ es negativa, x es un máximo local
Si $f''(x)$ es 0, no dice nada (puede ser máximo, mínimo o ninguno)

0.4. Límites

El álgebra de límites únicamente vale si los límites existen (es decir, si dan números REALES).
Si el límite no tiene incógnitas, es posible calcular una aproximación del límite con la calculadora (suele ser util para detectar errores).
Si los límites laterales coinciden, existe el límite puntual y vale eso.

0.4.1. Estrategias

División de polinomios: $0/0$ **y** ∞/∞ Factorizar ambos y simplificar raíces

División de polinomios y otras cosas: $0/0$ **y** ∞/∞ - Factorizar mayor grado en numerador y denominador

División de cosas con raices y sumas: $0/0$ **y** ∞/∞ - Racionalizar y simplificar cosas (recordar diferencias de cuadrados)

Juntar sumas y restas de fracciones para usar L'H: Tratar de que queden muchas sumas y pocas multiplicaciones (para derivar más facil)

Exponenciales difíciles $lim a^b = e^{lim(b*ln(a))}$
Calcular derivadas del estilo a^b, hacer ln de ambos lados, pasar potencia como multiplicacion y derivar de ambos lados

sen(x)/x tiende a 1 (si x tiende a 0) . Idem con el recíproco

$x^{1/x}$ **tiende a 1 (si x tiende a** ∞**)**

Cero por acotado . Especialmente útil cuando aparecen funciones trigonométricas acotadas en [-1,+1] (no la tangente)

1^∞**:** Pasar a forma $(1 + 1/a)^a = e$ (con a tendiendo a ∞). También vale otra forma: $(1 + a)^{1/a} = e$ (con a tendiendo a 0)

Propiedad del sandwich: Basicamente $a \leq b \leq c$ Entonces $\lim a \leq \lim b \leq \lim c$ (Limites tendiendo cierta variable al infinito)
Si $\lim a = \lim c$ entonces $\lim b = \lim a$
Para usar es necesario intuir límites, inventar otras dos funciones y probar la desigualdad.

0.5. Sucesiones

Notación "pctn": Cierta propiedad se verifica en una sucesión para todo n mayor a un número (por lo que también se cumple en el infinito)

Si una sucesión es estrictamente creciente, y está acotada superiormente, tiene límite (converge) y es el supremo. Monótonas = No oscilantes

Cota inferior: Un número es cota inferior de una sucesión si es menor o igual que todos los elementos de la misma.

Cota superior: Un número es cota superior de una sucesión si es mayor o igual que todos los elementos de la misma.

Principio de Arquímedes: Siempre hay un 1/n (con n entero) más chico que un real cualquiera mayor a 0.

Supremo: La menor de las cotas superiores. Si pertenece al conjunto, es el máximo.

Ínfimo: La mayor de las cotas inferiores. Si pertenece al conjunto, es el mínimo.

Subsucesiones: Si dos subsucesiones de una sucesión convergen a un número distinto, la sucesión original no tiene límite.

Forma recurrente: Definida en función a terminos anteriores, al estilo fibonacci (es más dificil de analizar límites)

Si es de términos positivos pctn es posible usar alguno de estos métodos:

0.5.1. DÁlembert (util si tiene factoriales)

$\lim_{n \to inf} (A_n + 1)/(A_n) = L$
Si $L < 1, A_n$ converge a 0
Si$L > 1, A_n$ diverge a $+\infty$
Si $L = 1$, no dice nada
Generalmente k^{n+1} se puede escribir como $k * k^n$

0.5.2. Cauchy (util si son exponenciales multiplicados)

$\lim_{n \to \infty} A_n^{1/n} = L$
Mismos casos que DÁlembert. Útil para probar que una exponencial le "gana.ª un polinomio.

0.5.3. DÁlembert implica Cauchy

Necesario para ver que $n!^{1/n}$ diverge
$\lim_{x \to x_0} f(x)$

0.6. Optimización

Consiste en hallar una función a la que se quiere encontrar máximo o mínimo (generalmente suele ser un volumen, superficie, costo, etc) y expresarla en función de una sola variable. Luego hay que hallar sus extremos absolutos, derivando, viendo los posibles extremos y devolver el extremo absoluto pedido.