量子力学 A 期末考试

说明：答题一律写在答题纸上，写在此页上无效。

1. (20 分) 定义 $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ 和 $L_\pm = L_x \pm iL_y$。
   (a) 求对易子 $[L^2, L_\pm]$ 和 $[L_z, L_\pm]$。
   (b) 求 $L_\pm$ 作用在球谐函数 $Y_l^m(\theta,\phi)$ 上的结果。
   (c) 在 $l = 1$ 的子空间内，求 L_x 的矩阵形式（在 L_z 表象下，即以 $\{Y_1^1, Y_1^0, Y_1^{-1}\}$ 为基矢）。
   (d) 在 $l = 1$ 的子空间内，求 L_x 的本征值和本征矢量（在 L_z 表象下的列矢形式）。

2. (30 分) 不考虑自旋。设氢原子中的电子处于由归一化波函数 $\psi(\vec{r})$ 表示的态，其中

$$\psi(\vec{r}) = A\left[\psi_{100}(\vec{r}) + 2\psi_{210}(\vec{r}) + 2\psi_{211}(\vec{r})\right].$$

   (a) 求归一化常数 A（设为正实数）。
   (b) 求测量能量的可能结果和相应的概率。
   (c) 求测量 L^2 的可能结果和相应的概率。
   (d) 求测量 L_z 的可能结果和相应的概率。
   (e) 求测量 L_x 的可能结果和相应的概率。
   (f) 若测得 $L_z = \hbar$，求其后 x 的期待值。

3. (10 分) 考虑一个在二维平面上运动的粒子被势场 $V(\vec{r})$ 散射。
   (a) 写出定态 Schrödinger 方程，假设在 r 很大时势场可以忽略，在极坐标下分离变量并求解角度部分方程。
   (b) 求 r 非常大时径向方程的解。设入射波为 e^{ikx}，写出 r 非常大时包含散射波的完整波函数。(提示：令 $u(r) = \sqrt{r}R(r)$，忽略方程中被 $1/\sqrt{r}$ 压低的项。)

4. (20 分) 一个宽度为 a 的一维无限深方势阱中放入两个自旋为零的全同粒子。
   (a) 求体系基态和第一激发态的能量和波函数。
   (b) 若加入微扰势 $V(x_1, x_2) = -aV_0\,\delta(x_1 - x_2)$，求基态和第一激发态能量的一级修正。
   (c) 若 $t < 0$ 时没有微扰势，体系处于基态。$t = 0$ 时加入微扰势 $V(x_1, x_2) = \lambda(x_1 - x_2)^2$，并在 $t = T$ 时去掉微扰势。利用一级微扰理论估算 $t = T$ 时体系跃迁到第一激发态的概率。

5. (20) 两个自旋 1/2 的非全同粒子组成的体系处于均匀磁场中，以磁场方向为 z 轴，不考虑空间运动，设体系自旋部分的哈密顿算符为

$$\hat{H} = -\frac{a}{\hbar}\hat{S}_{1z} - \frac{a}{\hbar}\hat{S}_{2z} + \frac{b}{\hbar^2}\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2,$$

其中 a 和 b 为正实数且 $b \ll a$。
   (a) 若 $b = 0$，求体系的能级。
   (b) 将 b 项作为微扰，求一级近似下体系各能级的修正。
   (c) 严格求解 $b \neq 0$ 时体系的能级，并与一级微扰近似的结果做比较。
   (d) 若体系处于 $b \neq 0$ 时的第一激发态，求测量 $S_z = S_{1z} + S_{2z}$ 的可能结果和相应的概率。