北京大学数学科学学院期末试题

2012 - 2013 学年 第二学期

考试科目：复变函数　　考试时间：13 年 06 月 26 日

姓　名：＿＿＿＿＿＿　　学　号：＿＿＿＿＿＿

本试题共 九 道大题满分 100 分

1. (10) 是否存在 $\mathcal{C}$ 中的解析函数 $f(z)$ 使得它同时满足 $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ 和 $f(n) = n^2 (n = 1, 2, 3....)$? (简要说明原因)

2. (20) 试问下述函数能否在 $0 < |z| < +\infty$ 展成 Laurent 级数 (说明理由), 若能的话，求出该级数.

   (1) $\ln z$;

   (2) $ze^{\frac{1}{z^2}}$.

3. (10) 设 $z = z_0$ 是 $f(z)$ 本性奇点，$\phi(z)$ 是一个分式线性变换, 证明：若 $z=z_0$ 是 $\phi(f(z))$ 的孤立奇点, $z = z_0$ 是 $\phi(f(z))$ 的本性奇点.

4. (10) 求 $f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}$ 在孤立奇点 (包括 ∞) 处的留数.

5. (10) 设 $f_n(z) = z^n + n^2 z + 1$. 分别求 $f_4(z)$ 和 $f_7(z)$ 在 $|z| < 2$ 内的零点个数.

6. (10) 设单连通区域 D 的边界为实轴与以 $z = -i$ 为圆心半径为 1 的圆周所组成，求 D 到上半平面 H 的共形映射.

7. (15) (1) 叙述 Riemann 存在定理； (2) 设单连通区域 D 的边界多于一点且 $0 \in D$，证明存在唯一的 $r > 0$, 使得存在 D 到圆盘 $\Delta_r = \{z, |z| < r\}$ 满足 $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = 1$ 的共形映射 $f(z)$.

8. (10) 设 $f(z)$ 在复平面 $\mathcal{C}$ 上解析且非常数. 证明：对于 $\mathcal{C}$ 内的任意一个圆周 $\Gamma = \{z; |z - z_0| = r\}$, 其中 $z_0 \in \mathcal{C}, r > 0$, $f(\Gamma)$ 不能全部落在一条直线上.

9. (5) 设 $f(z)$ 在复平面 $\mathcal{C}$ 解析且不为多项式，再设 $a \in \mathcal{C}$ 使得 $f(z) - a$ 只有有限个零点. 证明：存在 $z_n \in \mathcal{C} (n = 1, 2, ...)$, 使得有 $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ 和 $\lim_{n\to\infty} (z_n)^n f(z_n) = a$.