

1. (12 分). 计算积分

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{y^5}{\sqrt[3]{1+x^7}} dx.$$

2. (12 分). 计算由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 和 $z = 2 - x^2$ 所围立体的体积。

3. (12 分). 对 $p > 0$, 试讨论

$$\iint_{R^2} \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + (x^2 + y^2)^p} dx dy$$

的敛散性。

4. (14 分). 计算积分

$$\iint_S \sin \frac{|x|}{1 + x^2 + y^2} dy dx + z^2 \sin x dz dx + z dx dy$$

其中 S 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $z \geq 0$ 的上侧。

5. (20 分).

(a) 试求

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{y}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \frac{1-x}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

其中 $\Gamma \in R^2$ 是一条不通过 $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$ 两个点的简单光滑闭曲线并取正向;

(b) 试问:

i. 在 $R^2 \setminus \{[0, 1]\}$;

ii. 在 $R^2 \setminus \{(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)\}$;

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{y}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \frac{1-x}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

是否与路径无关。

6. (10 分). 在 R^3 内求出 $u(x, y, z)$ 使得

$$du = (x^2 - 2x)dx + (y^2 - 3y^2)dy + (z^2 - 4z^3)dz.$$

7. (10 分). 设 $u = f(x, y)$ 在 $D = \{(x, y); 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ 连续, 试构造 D 内的一个区域 Ω , 使得 $(0, 0) \in \partial\Omega$ 并且 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ 收敛。

8. (10 分). 设 $f(x, y)$ 在 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 上可积. 证明: $\forall \varepsilon > 0$, 存在 D 上的连续函数 $g(x, y)$, 使得下式成立:

$$\iint_D |f(x, y) - g(x, y)| dx dy < \varepsilon.$$