

# 拓扑学期末考试试题

包志强

2010年1月14日

## 1. 基本概念题(每题5分)

- (a) 叙述连通和道路连通的定义。
- (b) 验证 $\mathbb{E}^1$ 的子集紧致当且仅当是有界闭集。
- (c) 请指出Klein瓶的闭曲面分类, 并描述它的标准多边形表示。
- (d) 设 $\gamma: \mathbb{D}^2 \rightarrow X$ 连续, 定义 $a: [0, 1] \rightarrow X, a(t) = \gamma(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ . 请显式写出一个 $a$ 到点道路的定端同伦.
- (e) 写出同伦等价的定义, 验证同伦等价的空间基本群同构.
- (f) 考虑 $X = \mathbb{E}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . 构造一个流形为其万有复迭空间, 并描述其上相应的复迭变换.

## 2. 简单应用题(每题10分)

- (a) 设 $A, B$ 是度量空间中的两个紧致子集, 证明一定有 $x_0 \in A$ 及 $y_0 \in B$ , 使得任取 $x \in A, y \in B$ , 度量 $d(x, y) \geq d(x_0, y_0)$ .
- (b) 设可缩空间 $X$ 的子集 $A$ 是 $X$ 的收缩核, 证明 $A$ 也是可缩空间.
- (c) 设 $X$ 是一个三维流形,  $x_0 \in X$ , 证明 $X \setminus \{x_0\}$ 与 $X$ 的基本群同构.
- (d) 证明 $\mathbb{E}^2$ 的任何子集都不是闭曲面.
- (e) 证明一个空间的任意两个万有复迭空间必定同胚.

## 3. 综合证明题(每题10分)

- (a) 将三个正六边形的各边配对粘合成一个连通的可定向闭曲面. 它的亏格最大是多少? 请回答并说明理由.
- (b) 设复值连续函数  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{E}^2$  满足  $\gamma(1) = \gamma(0) + 2$ . 证明一定有  $u, v \in [0, 1]$  使得  $\gamma(u) = \gamma(v) + 1$ .