

1. (15 分).

(a) 试估计所有互不同构且阶数为 n 的群的个数, 并说明为什么。

(b) 试确定所有互不同构且阶数为 n 的 abel 群的个数。

2. (10 分). 试确定对称群 S_5 中最高阶元素的阶数, 并推广你的结论。

3. (15 分). 设 p 是一个素数, l 为一个正整数, G 为一个 p^l 阶的有限群。试证 G 的非正规子群的个数被 p 整除。

4. (20 分). 证明

$$R = \frac{1}{2}(a + b\sqrt{-7}) : a, b \in \mathbb{Z}, a \text{ 和 } b \text{ 同奇偶}$$

是欧氏环。

5. (15 分). p 为一个素数, k 为一个正整数, 试证 p^k 个元素的有限域一定存在。

6. (25 分). 假设 α 是一个 n 次的代数数, β 是一个 m 次的代数数。

(a) $\alpha^3 + 3\alpha\beta + \beta^5$ 和 $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[5]{\beta}$ 分别是代数数还是超越数? 为什么?

(b) 如果其中有代数数, 试估计它(们)的次数并说明为什么?

(c) 试推广你关于 (6a) 和 (6b) 的结论。