几何学期中考试参考答案和评分标准

考试日期：2010 **年** 11 **月** 20 **日。考试时间**：2 **小时**。

1，2 **题为计算题，可只写答案。若答案错但有计算过程，可给过程分。**

题 1 (40 分）过空间直角坐标系的原点 O，求出满足以下条件的平面或直线方程。每小题 8 分。

1) 作平面 Σ_1，使其垂直于平面 $z=0$ 并过 $(1,1,1)$ 点。

2) 作平面 Σ_2，使其过直线

$$\ell:\begin{cases} x+y+z+1=0, \\ 2x-y+z+2=0. \end{cases}$$

3) 作平面 Σ_3，使其与直线 $l:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+11}{1}=\dfrac{z+111}{-3}$ 和 $l':\dfrac{x-9}{1}=\dfrac{y-99}{-5}=\dfrac{z-999}{4}$ 平行。

4) 作平面 Σ_4，使其到点 $(2010,11,20)$ 的距离尽量大（即达到最大值）。

5) 作直线 l_5，使其与直线 $(x,y,z)=(1,0,t)$（t 为参数）垂直且两者距离尽量大（达到可能的最大值）。要求写出 l_5 的标准方程（即点斜式或参数式）。

• 解：由于过原点，平面方程中常数项为 0。其它系数可同差一常数倍。注意各小题中，所求平面或直线根据几何条件都是唯一确定的。以下除开最后方程，只在几处提示关键。1) $x-y=0$。2) $3y+z=0$（共轴平面系）。3) $x+y+z=0$（只需取法向量与两直线的方向向量同时垂直）。4) $2010x+11y+20z=0$（同上一小题，数字只是障眼法）。5) $(x,y,z)=(0,s,0)$（s 为参数）。

• 评分标准：*每小题 8 分。若无过程而结果错则全扣，若有过程且基本正确，则根据错误性质酌情扣 2-4 分。*

题 2 (10 分）给定平面直角坐标系，直线 l 的方程为 $x+y=1$。写出关于 l 的反射变换的坐标变换公式。

• 解：过平面上任一点 (x,y) 作 l 垂线，参数方程为 $(x,y)-t(1,1)$，参数为 t。当 $t=(x+y-1)/2$ 时恰在 l 上，故为垂足。再延长一倍得反射对称点，故为 $x',y')=(-y+1,-x+1)$。也可以用设出镜像点坐标并解方程的办法，或用矩阵（坐标变换）的标准方法，写出对应的线性变换将 $e_1=(0,1)$ 映为 $-e_2=(0,-1)$，e_2 映为 $-e_1$，$(0,0)$ 映为 $(1,1)$，即得变换公式。

• 评分标准：*结果错误但过程基本正确，则根据错误性质酌情扣 2-4 分。*

题 3 (10 分）设 l,l' 是同一平面上的两条不同直线，$\phi:l\to l'$ 为等距映射。证明：任取 $p\in l$，取其与 $\phi(p)\in l'$ 连线的中点，这些中点要么共线，要么是同一个定点。

• 证：设 l 过 a，单位方向向量为 v，在 ϕ 作用下分别映到 a' 和 v'，参数均取为 t，则一般 $p=a+tv$ 映到 $a'+tv'$，中点坐标为 $(a+a')/2+t(v+v')/2$，显然为直线方程，唯一例外是 $v=-v'$ 时，轨迹为一点。此题大部分人的做法都不必要的复杂，用了过多的分类讨论或平面几何。*注意中点轨迹所在直线方*

向与 l, l' 成相等角度，恰是 $l \to l'$ 的某一滑反射的滑动轴线。另外稍加留意就会发现，命题结论可推广到空间两直线间的仿射映射（保单比）。

• 评分标准：

题 4 (20 分)
1)（10 分）平面上给定椭圆 Γ 和椭圆外一点 A，过 A 作 Γ 的两条切线，切点为 B, C，BC 中点为 D。试证明 A, D 及椭圆中心 O 三点共线。
2)（10 分）椭圆 Γ 的所有外切平行四边形中，面积的最小值是多少？什么时候达到？

• 证：第 1 小题可取椭圆标准方程计算论证。但最好的做法是用仿射不变性。注意所述性质都是仿射变换下的不变性（切线、中点、中心、共线性、面积的最大性），而椭圆仿射等价于圆周。对于圆周，前一小题结论显然；后一题结论是外切正方形面积最小，等于直径平方，经过正压缩变回椭圆，知最小值是 $4ab$，其中 a, b 分别是椭圆半长轴，此最小值在外切四边形的对边切点连线构成椭圆的共轭直径时达到。

• 评分标准：*未说清何时取到最小值或最小值的表示，酌情扣 1-2 分。*

题 5 (10 分) 证明：空间中起点相同的四向量 a, b, c, d，其终点共面当且仅当 $[a, b, c] - [b, c, d] + [c, d, a] - [d, a, b] = 0$.（方括号表示混合积。）

• 证：若 a, b, c 已经共线，结论显然。若 a, b, c 在 a, b 张成平面内，不妨取 $\{a, b, e_3\}$ 为空间一组基，$d = \alpha a + \beta b + \gamma e_3$，计算知题中式子左端为 0 当且仅当 $\gamma = 0$，当且仅当 d 也在 a, b 张成平面内。若 a, b, c 不共面，则有分解 $d = \alpha a + \beta b + \gamma c$，代入左侧，其为 0 当且仅当 $\alpha + \beta + \gamma = 1$，当且仅当 d 在 a, b, c 终点所在平面上。故命题得证。证法二可由 a, b, c 不共面情形的简单证明，取极限知道退化情形也对。证法三可由几何含义，原式子表示两对三棱锥体积之和相等，这当且仅当 a, b, c, d 端点共面时成立。证法四转化为 $\{a - d, a - b, a - c\}$ 三向量共面，其混合积 $[a - d, a - b, a - c] = 0$ 展开即得题中式子。

• 评分标准：*只证明了充分性或必要性的一半，扣 5 分。类似证法一中若忽视了 a, b, c 共面的情形，也要扣 3 分。*

题 6 (10 分)
1)（5 分）设空间等距变换 ϕ 有一条不变直线 l。试分析并列举出所有可能的这种变换 ϕ。
2)（5 分）设空间仿射变换 ψ 有唯一不动点 O。试证明 ψ 的任一不变直线都过点 O。

• 解：1) 此题完全说清的人很少。可按空间等距类型或 l 上不动点个数来讨论，后者更严密且容易说清。细分有 9 种变换，分别是：(1) 恒同 id; (2) 关于包含 l 的平面的反射；(3) 关于垂直于 l 的平面反射；(4) 绕 l 的旋转；(5) 绕与 l 垂直相交的任一直线旋转 π；(6) 沿 l 的平移；(7) 沿 l 平移并复合绕 l 的旋转（螺旋运动）；(8) 沿 l 平移并复合关于含 l 的平面的反射（滑反射）；(9) 绕 l 旋转并复合上关于垂直于 l 的一个平面反射（旋转反射，含关于 l 上一点的中心对称为特例）。

此题不必用矩阵。只需利用 “仿射变换诱导的线性变换” 以及 “仿射变换

在不变直线（乃至一般的不变子空间）上诱导的仿射变换”概念。若有不变直线 l，则此直线方向在 ψ 作用下仍沿同一方向，故过 O 的同一方向直线也为不变直线，ψ 在它上面的作用效果只有一个不动点，说明限制在 l 上的表示为 $f(x)=\lambda x$，其中 $\lambda \neq 1$。于是在 l 上的作用效果同样为 $g(x)=\lambda x+c$，但是当 $\lambda \neq 1$ 时，$g(x)=\lambda x+c=x$ 必定有解，所以 l 上的此变换必定有不动点，只能为 O，故 l 过 O 点。证毕。

• 评分标准：本题不少人依然未搞清“不变直线”指的是“在变换作用下整体未变的直线”，而不是“整条直线上都是不动点”。犯下此错的基本都不得分。第 *1* 小题未数完全的酌情扣分。