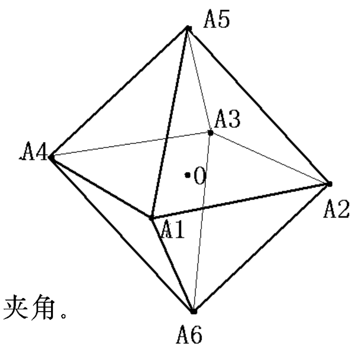
几何学期中考试试题

考试日期：2011 **年** 11 **月** 13 **日。考试时间**：2 **小时。**

题 1 (40 分) 设 $\mathbb{P}$ 为顶点在单位球面上的正八面体，它的六个顶点为 $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$，$O$ 为其重心。以 $\{O; \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_5}\}$ 为单位正交标架建立右手坐标系。请用空间解析几何的方法来解答以下问题，每小题 8 分。



(1) 求三角形 $A_3A_4A_5$ 所在平面 Σ 的方程；

(2) 求直线 A_1A_6 与平面 Σ 之间的夹角；

(3) 求 A_1 到平面 Σ 的距离；

(4) 求直线 A_1A_5 与 A_2A_3 之间的夹角和距离；

(5) 求三角形 $A_2A_3A_6$ 所在平面与平面 Σ 之间的夹角。

题 2 (15 分) 已知 I 和 I' 都是平面右手直角坐标系，I' 的 x' 轴在 I 中的方程为 $3x - 4y + 5 = 0$，I 的原点在 I' 中的坐标为 $(2, 1)$。

(1) 求 I 到 I' 的点的坐标变换公式（即 (x, y) 依赖于 (x', y') 的表达式）。

(2) 求在 I 中方程为 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆在 I' 中的方程。

题 3 (10 分) 设 l 过空间直角坐标系的原点和 $(1, 1, 1)$，求绕 l 转 90 度的空间等距变换在此坐标系中的矩阵表示。其中角度方向为从 $(1, 1, 1)$ 向原点看去时的顺时针方向。

题 4 (10 分) 设 α, β, γ 是球面上三个不同点对应的位置向量，起点都在球心。求证它们在球面上的外接圆圆心的位置向量平行于 $\alpha \times \beta + \beta \times \gamma + \gamma \times \alpha$。

题 5 (10 分) 平面凸五边形的顶点顺次记为 A_i，约定 $A_{i+5} = A_i$，满足：任一顶点 A_i 的对边 $A_{i+2}A_{i+3}$，平行于其两相邻顶点所连对角线 $A_{i+1}A_{i+4}$。证明此五边形仿射等价于正五边形。

题 6 (10 分) 考虑无不动点且保定向的平面仿射变换 f。

1) 证明：若 f 作用下有一条不变直线 l，则 f 必为以下两个变换 ϕ, ψ 的复合，其中 ϕ 是沿 l 方向的平移，ψ 是以 l 为压缩轴的一个斜压缩（此处“斜压缩”定义里不包含错切或斜反射之类）。

2) 对于上述 $f = \phi \circ \psi$，请找出一条与 l 不同的“不变曲线”在 f 作用下映为自身（可取适当坐标系来描述）。说明此曲线为仿射齐性曲线。

3) 任一无不动点且保定向的平面仿射变换是否必定形如上述 $f = \phi \circ \psi$?

题 7 (5 分) 证明：若两椭圆 Γ_1, Γ_2 有平行公切线 l, l'，则任一与 l 平行的直线分别截 Γ_1, Γ_2 所得线段之长度比值为定值。