北京大学数学科学学院期末试题

2014 - 2015 学年 第一学期

考试科目：数学分析 (III)　　考试时间：15 年 1 月 12 日

姓　名：＿＿＿＿＿＿　　学　号：＿＿＿＿＿＿

本试题共 十 道大题满分 100 分

1. (10) 设 $u(x,y,z)$ 在 R^3 中具有二阶连续偏导数, 计算 $div\mathrm{grad}\sin(u(x,y,z))$.

2. (10) 改变累次积分 $\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dx\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f dz$ 的积分顺序 (只做 $dzdxdy$ 一种情况)，其中 $f(x,y,z)$ 在 R^3 连续.

3. (10) 计算单位球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 被柱面 $x^2+y^2=x$ 所分成的两部分的体积.

4. (10) 讨论 $\int\int_{R^2}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}}dxdy$ 的敛散性.

5. (10) 计算第一型曲面积分 $\int\int_S(x+2y+2z)^2\sin(x+2y+2z)dS$, 其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

6. (10) 计算第二型曲面积分 $\int\int_S y^2dydz+xzdzdx+z^2dxdy$, 其中 S 是球面 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ 的外侧。

7. (10) 证明曲线积分 $\int_\Gamma 2x\sin y^2dx+2y[\sin y^2+(x^2+y^2)\cos y^2]dy$ 在 R^2 中与路线无关并求出 $2x\sin y^2dx+2y[\sin y^2+(x^2+y^2)\cos y^2]dy$ 的一个原函数.

8. (10) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的任何有限闭子区间上可积且 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=1$. 求 (1) $\lim_{y\to0+0}\int_0^{+\infty}e^{-xy}f(x)dx$, (2)$\lim_{y\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-xy}f(x)dx$.

9. (10) 设 $D\subset R^2$ 为一个区域, $u(x,y)$ 在 D 内具有二阶连续偏导数, 证明: $u(x,y)$ 在 D 内调和 (即 $u(x,y)$ 在 D 内满足 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$) 的充分必要条件是: 对于 $\forall(x_0,y_0)\in D$ 和 $\forall r>0$, 若 $\{(x,y);(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\}\subset D$ 内, 则有 $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)d\theta$.

10. (10) 设 $f(x,y)$ 在 R^2 上一致连续且 $\int\int_{R^2}f(x,y)dxdy$ 收敛. 试问: 当 $r\to+\infty$ 时, $f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 对于 $\theta\in[0,2\pi]$ 是否一致趋于 0?(说明理由)