

几何学期中考试试题

考试日期：2010 年 11 月 20 日。考试时间：2 小时。

1, 2 题为计算题，可只写答案。若答案错但有计算过程，可给过程分。

题 1 (40 分) 过空间直角坐标系的原点 O ，求出满足以下条件的平面或直线方程。每小题 8 分。

- 1) 作平面 Σ_1 ，使其垂直于平面 $z = 0$ 并过 $(1, 1, 1)$ 点。
- 2) 作平面 Σ_2 ，使其过直线

$$\ell: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

- 3) 作平面 Σ_3 ，使其与直线 $l: \frac{x+1}{2} = \frac{y+11}{1} = \frac{z+111}{-3}$ 和 $l': \frac{x-9}{1} = \frac{y-99}{-5} = \frac{z-999}{4}$ 平行。
- 4) 作平面 Σ_4 ，使其到点 $(2010, 11, 20)$ 的距离尽量大（即达到最大值）。
- 5) 作直线 l_5 ，使其与直线 $(x, y, z) = (1, 0, t)$ (t 为参数) 垂直且两者距离尽量大（达到可能的最大值）。要求写出 l_5 的标准方程（即点斜式或参数式）。

题 2 (10 分) 给定平面直角坐标系，直线 l 的方程为 $x + y = 1$ 。写出关于 l 的反射变换的坐标变换公式。

题 3 (10 分) 设 l, l' 是同一平面上的两条不同直线， $\phi: l \rightarrow l'$ 为等距映射。证明：任取 $p \in l$ ，取其与 $\phi(p) \in l'$ 连线的中点，这些中点要么共线，要么是同一个定点。

题 4 (20 分)

- 1) (10 分) 平面上给定椭圆 Γ 和椭圆外一点 A ，过 A 作 Γ 的两条切线，切点为 B, C ， BC 中点为 D 。试证明 A, D 及椭圆中心 O 三点共线。
- 2) (10 分) 椭圆 Γ 的所有外切平行四边形中，面积的最小值是多少？什么时候达到？

题 5 (10 分) 证明：空间中起点相同的四向量 a, b, c, d ，其终点共面当且仅当 $[a, b, c] - [b, c, d] + [c, d, a] - [d, a, b] = 0$ 。（方括号表示混合积。）

题 6 (10 分)

- 1) (5 分) 设空间等距变换 ϕ 有一条不变直线 l 。试分析并列举出所有可能的这种变换 ϕ 。
- 2) (5 分) 设空间仿射变换 ψ 有唯一不动点 O 。试证明 ψ 的任一不变直线都过点 O 。