2014期末试题

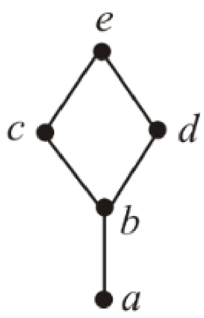
一、（10 分） 写出代数系统 $\langle Z_4,\oplus\rangle$ 的全部自同态，并写出每个自同态导出的同余关系。（不需要计算过程或证明）

解：

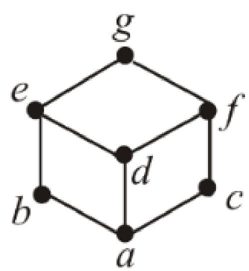
自同态	导出的同余关系
$f_0(x)=0,\ x=0,1,2,3$	全域关系
$f_1(x)=x,\ x=0,1,2,3$	恒等关系 I_{Z4}
$f_2(0)=f_2(2)=0$, $f_2(1)=f_2(3)=2$	$\{<0,2>,<2,0>,<1,3>,<3,1>\}\cup I_{Z4}$
$f_3(0)=0, f_3(1)=3$, $f_3(2)=2, f_3(3)=1$	恒等关系 I_{Z4}

2014期末试题

二、（15 分）对下图中的两个格 L_1和L_2，分别找出它们所有的 3 元子格、4 元子格及 5 元子格。（不需要计算过程或证明）



L_1



L_2

解：L_1 的三元子格：$\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,b,e\}$, $\{a,c,e\}$，$\{a,d,e\}$，$\{b,c,e\}$，$\{b,d,e\}$；四元子格：$\{a,b,c,e\}$，$\{a,b,d,e\}$，$\{b,c,d,e\}$；五元子格：$\{a,b,c,d,e\}$.

L_2 的三元子格：$\{a,b,e\}$，$\{a,b,g\}$，$\{a,d,e\}$，$\{a,d,f\}$，$\{a,d,g\}$，$\{a,c,f\}$，$\{a,c,g\}$，$\{a,e,g\}$，$\{a,f,g\}$，$\{b,e,g\}$，$\{d,e,g\}$，$\{c,f,g\}$，$\{d,f,g\}$；四元子格：$\{a,b,e,g\}$，$\{a,d,e,g\}$，$\{a,d,f,g\}$，$\{a,c,f,g\}$，$\{a,b,d,e\}$，$\{a,c,d,f\}$，$\{d,e,f,g\}$，$\{a,b,f,g\}$，$\{a,c,e,g\}$，$\{a,b,c,g\}$；五元子格：$\{a,b,d,e,g\}$，$\{a,c,d,f,g\}$, $\{a,d,e,f,g\}$, $\{a,b,c,e,g\}$, $\{a,b,c,f,g\}$.

2014期末试题

三、（10 分）设$a_1a_2\cdots a_n$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列，如果对每个$i=1,2,\cdots,n$，均有$a_i\neq i$，则称$a_1a_2\cdots a_n$是一个错位排列。求 n 个元素的错位排列数D_n.

解：迭代法、对称筛公式、棋盘多项式等方法均可。

$$R(C) = 1+C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \ldots + C(n,n)x^n$$

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}0!$$

$$= n! - n! + \frac{1}{2!}n! - \frac{1}{3!}n! + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}n!$$

$$= n![1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}]$$

2014期末试题

四、（15 分）

(1) 把 n 只相同的球放到 r 个不同的盒子里（$n \geq r$），没有空盒，问有多少种方法？

(2) 把 n 只相同的球放到 r 个不同的盒子里（$n \geq rq$），每个盒子至少包含 q 个球，问有多少种方法？

解：(1) 相当于方程 $x_1+x_2+\ldots+x_r=n$ 的正整数解个数，即 $C(n-1,r-1)$.

(2) 相当于方程 $x_1+x_2+\ldots+x_r=n$，$x_i \geq q$ 的非负整数解个数，即 $x_1'+x_2'+\ldots+x_r'=n-rq$ 的非负整数解个数,即 $C(n-rq+r-1, n-rq)=C(n-rq+r-1, r-1)$.

2014期末试题

五、（12 分）把 n 个苹果（n 为奇数）恰好分给 3 个孩子，如果第一个孩子和第二个孩子分的苹果数不相同，问有多少种分法？

解：每个孩子至少得到一个苹果的分法数是方程 $x_1+x_2+x_3=n-3$ 的非负整数解的个数，其生成函数为

$$A(y)=(1+y+y^2+\ldots)^3=\frac{1}{(1-y)^3}$$

上述展开式中 y^{n-3} 项的系数为 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

前两个孩子苹果数相等的分法数为方程 $2x_1+x_3=n-3$ 的非负整数解个数. 当 n 为奇数时，x_3 为偶数，有 $\frac{n-1}{2}$ 种取法，于是

$$N=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{n-1}{2}=\frac{(n-1)(n-3)}{2}.$$

2014期末试题

六、（13 分）考虑用 4 种颜色对正五边形的顶点进行染色，则在允许图形旋转和翻转的情况下，一共有多少种不同的染法？

解: 用1,2,3,4,5记正五边形的5个顶点。保持图形重合的置换有:

σ_0=(1)(2)(3)(4)(5), σ_1=(1 2 3 4 5), σ_2=(1 3 5 2 4),

σ_3=(1 4 2 5 3), σ_4=(5 4 3 2 1), σ_5=(1 5)(2 4)(3) ,

σ_6=(1 4)(2 3)(5) , σ_7=(1 3)(2)(4 5), σ_8=(1 2)(3 5)(4) ,

σ_9=(1)(2 5)(3 4).

由Polya定理, 染色方案数目为:

$$\frac{1}{10}(4^5+4\cdot 4^1+5\cdot 4^3)=136.$$

2014期末试题

七、（12 分）设$G=\langle M_2(Z),+\rangle$是整数集 Z 上的全体 2 阶方阵关于普通的矩阵加法构成的群。

(1) 证明：$M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\text{均为偶数}\right\}$是 G 的子群。

(2) M 是否是 G 的正规子群？若是，请写出 G/M 中的全体元素；若不是，请说明理由。

(1) 证明： M 非空，因为全 0 矩阵属于 M.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}\in M,$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}\in M,$$因为偶数减偶数还是偶数

故 M 是 G 的子群。

2014期末试题

七、（12 分）设$G=\langle M_2(Z),+\rangle$是整数集 Z 上的全体 2 阶方阵关于普通的矩阵加法构成的群。

(1) 证明：$M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\text{均为偶数}\right\}$是 G 的子群。

(2) M 是否是 G 的正规子群？若是，请写出 G/M 中的全体元素；若不是，请说明理由。

(2) 解：由于矩阵加法可交换，因此 M 是 G 的正规子群。

$\overline{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}$ $a,b,c,d\in\{0,1\}$，共有 16 个陪集。这里 0 表示陪集中的矩阵在相应位置的数为偶数，否则为奇数。

2014期末试题

元素的阶

k 阶轮换 $(i_1\, i_2 \ldots i_k)$ 的阶为k

若$\sigma=\tau_1\tau_2\ldots\tau_l$是不交轮换的分解式，则 $|\sigma|=[|\tau_1|,|\tau_2|,\ldots,|\tau_l|]$

八、（13 分）设 p 是任意素数，S_p 是 p 元对称群，证明：

(1) S_p 恰好有$(p-1)!$个 p 阶元。

(2) S_p 恰好有$(p-2)!$个 p 阶子群。

证明：(1) 利用置换的轮换表示证明 p 阶元的结构是 p 阶轮换$(i_1 i_2 i_3 \ldots i_p)$，而 $i_1 i_2 i_3 \ldots i_p$ 是$\{1,2,3,\ldots,p\}$的环排列，有$(p\text{-}1)!$种构成方式。

(2) p 阶子群是素数阶群，都是循环群$\langle\sigma\rangle$，$\langle\sigma\rangle$的生成元为$\sigma,\sigma^2,\ldots,\sigma^{p-1}$. 恰好 p-1 个。若同一个 p 阶元属于两个 p 阶子群，则这两个子群相等，即不同的 p 阶子群是正交的. 因为每个 p 阶元仅属于一个 p 阶子群，每个 p 阶子群恰含有 p-1 个 p 阶元，$(p\text{-}1)!$个 p 阶元必属于$(p\text{-}2)!$个不同的 p 阶子群。

2015期末试题

一、（12分） 设R是环，且对$\forall a \in R$ 都有$a^2 = a$.证明：

(1) $\forall a \in R$有$a + a = 0$；

(2) 如果$|R| > 2$，则R不是整环。

证明：

(1) $\forall a \in R$, $a+a= (a+a)(a+a)=a^2+a^2+a^2+a^2=a+a+a+a \Rightarrow a+a=0$.

(2) 假设R是整环，则$1 \in R$, 由于$|R|>2$, 存在$a \in R$, $a \neq 0,1$. 那么

$$(a-1)a=a^2-a=a-a=0.$$

从而推出$a-1$和a是零因子，与R是整环矛盾.

(2) 也可以使用下面的证法，但需要证明R是交换环：

$|R|>2$, R中存在两个不等的非0元素a,b. 若$ab=0$, 则a,b为零因子，R不是整环. 若$ab \neq 0$，则

$$ab(b-a)=ab^2-a^2b=ab-ab=0$$

ab与$b-a$为零因子. R也不是整环.

2015期末试题

二、（12分）设f是格$\langle L_1, \preccurlyeq \rangle$到格$\langle L_2, \preccurlyeq \rangle$的双射，且$f$满足：

对任意$a, b \in L_1$，$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow f(a) \preccurlyeq f(b)$.

证明：$f(a) \vee f(\mathrm{b}) = f(a \vee b)$.

证明： 由保序性，容易证明$f(a) \vee f(b) \preccurlyeq f(a \vee b)$.

由满射性，存在d使得$f(a) \vee f(b) = f(d)$. 由$f(a) \preccurlyeq f(d)$推出$a \preccurlyeq d$, 同理$b \preccurlyeq d$. 于是，$a \vee b \preccurlyeq d$, 推出

$f(a \vee b) \preccurlyeq f(a) \vee f(b)$.

从而，$f(a) \vee f(b) = f(a \vee b)$.

2015期末试题

三、（12分）设$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是正整数序列，证明存在整数k和l，$1 \le k \le l \le m$，使得$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$是$m$的倍数。

证明：

设
$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\ldots$$
$$S_m = a_1 + a_2 \ldots + a_m$$

S_i 除以 m 的余数为 r_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, 若存在 $r_j = 0$, 则命题得证；否则由鸽巢原理有 $r_i = r_j$, $i<j$. 因此 $S_j - S_i$ 被 m 整除。取 $k = i+1$, $l = j$, 命题得证.

2015期末试题

四、（12分）求解递推方程：

$$\begin{cases} a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 3^n \\ a_0 = 0, \quad a_1 = 1. \end{cases}$$

解：特征方程为 $x^2-7x+10=0$，齐次通解为

$$\overline{a_n} = c_1 2^n + c_2 5^n$$

设特解为 $P3^n$，代入方程得到 $P= -9/2$. 因此原递推方程的通解为

$$a_n = c_1 2^n + c_2 5^n - 9/2 \cdot 3^n \,.$$

代入初值解得 $c_1= 8/3$, $c_2= 11/6$，从而得到原递推方程的解为

$$a_n = \frac{8}{3} \cdot 2^n + \frac{11}{6} \cdot 5^n - \frac{9}{2} \cdot 3^n$$

2015期末试题

五、（13分）方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ 满足

$1 \le x_1 \le 5,\ -2 \le x_2 \le 4,\ 0 \le x_3 \le 5,\ 3 \le x_4 \le 9$

的整数解的数目是多少？

解： 计算生成函数

$$(y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5)(y^{-2} + y^{-1} + \cdots + y^4)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5)(y^3 + y^4 + \cdots + y^9)$$

展开式中y^{18}的系数，结果是55。

2015期末试题

五、（13分）方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ 满足

$1 \le x_1 \le 5,\ -2 \le x_2 \le 4,\ 0 \le x_3 \le 5,\ 3 \le x_4 \le 9$

的整数解的数目是多少？

另解（包含排斥原理）：令$\boldsymbol{y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 + 2, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - 3}$，则原方程整数解一一对应于 $\boldsymbol{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16\ (*)}$

$\boldsymbol{0 \le y_1 \le 4, 0 \le y_2 \le 6, 0 \le y_3 \le 5, 0 \le y_4 \le 6}$，的整数解。令$\boldsymbol{S}$是$\boldsymbol{(*)}$的非负整数解的集合，则$\boldsymbol{|S| = \binom{16+4-1}{16} = 969}$.

令$\boldsymbol{P_1}$为性质$\boldsymbol{y_1 \ge 5}$，$\boldsymbol{P_2}$为性质$\boldsymbol{y_2 \ge 7}$，$\boldsymbol{P_3}$为性质$\boldsymbol{y_3 \ge 6}$，$\boldsymbol{P_4}$为性质$\boldsymbol{y_4 \ge 7}$，集合$\boldsymbol{A_i}$为满足性质$\boldsymbol{P_i}$的解组成。例如，$\boldsymbol{A_1}$的个数与

$\boldsymbol{z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 11}$ 的非负整数解的个数相同，即$\boldsymbol{\binom{11+4-1}{11}}$.

最终有，$\boldsymbol{|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = 969 - (364 + 220 + 286 + 220) + (35 + 56 + 35 + 20 + 10 + 20) = 55}$.

2015期末试题

六、（13分）考虑用红、蓝2种颜色着色 3×3 方格棋盘，则在允许图形旋转和翻转的情况下，一共有多少种不同的着色方案？

解：关于中心旋转 0 度，±90 度，180 度，对应的置换分别为：

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)，(1397)(2684)(5)，(1793)(2486)(5)，
(19)(28)(37)(46)(5).

关于两条对角线翻转，对应的置换分别为:

(3)(5)(7)(26)(19)(48)，(1)(5)(9)(24)(37)(68)

关于中间行或中间列翻转，对应的置换分别为:

(4)(5)(6)(17)(28)(39)，(2)(5)(8)(13)(46)(79)

共 8 种置换。由 Polya 定理知，不同的着色方案数

$$=\frac{1}{8}[2^9+2\times2^3+2^5+4\times2^6]$$

=102

2015期末试题

七、（13分）设$A=\{1,2,\ldots,n\}$，f为A上的双射，令f^m表示f的m次复合，证明：

(1)存在正整数i和j，$i<j$，使得$\forall x\in A$有$f^i(x)=f^j(x)$；

(2)存在正整数k使得$\forall x\in A$有$f^k(x)=x$.

证明：

（1）考虑S_n，取序列$f, f^2, \ldots f^{n!+1}$, 由于双射函数有$n!$个，根据鸽巢原理必有i, j存在使得$f^i = f^j$.

（2） S_n关于合成运算构成有限群，单位元为恒等映射I，对于任意函数$f\in S_n$，f的阶存在，即存在k使得$f^k=I$.

2015期末试题

八、（13分） 群G的可以写成 $a^{-1}b^{-1}ab$ 形式的元素称作**换位子**。令 $C=\{\,g\mid g$是G中有限个换位子的乘积$\}$。 证明：

(1) C是G的正规子群；

(2) G/C是交换群；

(3) 若N是G的正规子群，并且G/N是交换群，那么 $C\subseteq N$.

证明：（1） 单位元$1\in C$, 故C非空；C的两个元素的乘积仍然是有限个换位子的乘积，因而仍是C的一个元素。一个换位子的逆仍是一个换位子，所以C的一个元的逆仍在C中。这样C是一个子群。

对 $\forall\, a\in G, g\in C, aga^{-1}=(aga^{-1}g^{-1})g\in C$, 所以$C$是$G$的正规子群。

（2） 令 $a,b\in G$, 则 $a^{-1}b^{-1}ab=c\in C$. 由此得 $ab=bac, abC=bacC=baC$, 即 $aCbC=bCaC$, 故G/C是交换群。

2015期末试题

八、（13分） 群G的可以写成 $a^{-1}b^{-1}ab$ 形式的元素称作**换位子**。令 $C=\{g \mid g$是G中有限个换位子的乘积$\}$。 证明：

(1) C是G的正规子群；

(2) G/C是交换群；

(3) 若N是G的正规子群，并且G/N是交换群，那么 $C\subseteq N$.

证明：

（3）因为G/N是交换群，所以对G的任何两个元素a和b，有$(aN)(bN)=(bN)(aN)$，即$abN=baN$. 故存在$n\in N$ 使得$ab=ban$，所以$a^{-1}b^{-1}ab=n\in N$. 这样N含有一切换位子，因而包含C.

考试与答疑安排

- 补作业的截止时间：**6**月**12**日
- 缓考同学：请**email**告知是否使用以往成绩
- 考试时间：**6**月**21**日（周二）上午**8:30-10:30**
- 考试地点：二教**101**
- 答疑时间：**6**月**14**日（周二） **8:00-10:00**
  6月**20**日（周一） **8:00-12:00**
  14:00-17:00
- 答疑地点：理科一号楼**1623N**

考试范围

- 教材：

  ~~十五章 15.1-4~~　~~十六章 16.1~~

  十七章 17.1-7　十八章 18.1-2

  十九章 19.1-2

  二十章 20.1　~~Ramsey定理~~

  二十一章 21.1-4

  二十二章 22.1-6

  二十三章 23.1-4

- PPT讲义
- 考试范围：两者公共部分

谢 谢！