北京大学数学科学学院期末试题

2012 -2013 学年第 一 学期

考试科目 抽象代数　　考试时间 2013 年 1 月 15 日

姓　名 ________　　学　号 ________

本试题共 10 道大题，满分 42 分

以下 5 题， 每题 9 分， 任选 3 题

1. 构造一个 9 个元素的有限域， 并写出乘法表。

2. 设 A 和 B 是任意有单位元的交换环。 令 R=A x B， 证明 R 中理想 I 具有形式 I=L x T， 其中 L 是 A 的理想，T 是 B 的理想。

3. 设 E={ $\begin{bmatrix} a & b \\ pb & a \end{bmatrix}$: a, b 是整数}， 其中 p 为素数。 证明存在环同构 E $\cong$ Z[$\sqrt{p}$] 。

4. 求 x^4 -2 在有理数域 Q 上的分裂域和 Galois 群。

5. 证明 Q($\sqrt{2}$) 中的代数整数环是欧式环。

以下 4 题， 每题 6 分， 任选 2 题

6. 设 F 的特征为素数 p。 f(x) 是 F[x] 中不可约多项式， a 是 f(x) 在 F 的某扩域 K 中的一个根。 若 p 与 [F(a): F] 互素， 则 a 是可分元。

7. 设 Q 为有理数域，p，q 为不同素数，求 Gal（Q（$\sqrt{p}$ ，$\sqrt{q}$）/Q ）及其子群和相应的不动点子域。

8. 设 G 是有限 p-群， F 是特征为 p 的域。证明对群代数 FG 而言，不可约 FG-模 M 的维数为 1。

9. 设 F 是有单位元的交换环，若 F 的每个主理想都是素理想，证明 F 是域

10 （本题 3 分）. 设 R 是 [1, 2] 区间上全体实连续函数组成的环，其加法和乘法定义如下： 对任 f， g ∈ R，x ∈ [1, 2],

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x).$$

证明 I 是 R 的 极大理想当且仅当存在 a ∈ [1, 2] 使得

$$I=\{f\in R:\ f(a)=0\}$$