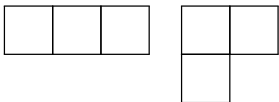


## 李群与李代数期末试题简略版（2017 春）

命题人：曹庆宏老师

注：仅作参考，不保证正确性。前三大题选两道作答。

1. （15 分）矩阵  $R$  满足  $R^T R = I_3$ ， $I_3$  为三阶单位矩阵，证明存在向量  $\vec{n}$  使得  $R\vec{n} = \vec{n} \cdot \det R$ .
2. （15 分） $T_{ij}$  为  $SO(3)$  二阶转动张量.
  - (a) 证明  $\text{Tr}(T) = \delta^{ij}T_{ij}$  在  $SO(3)$  旋转中不变.
  - (b) 证明  $T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$  在旋转中保持反对称性，并证明  $\hat{T}_k = \epsilon^{ijk}T_{[ij]}$  为矢量.
  - (c) 证明  $T_{\{ij\}} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$  在旋转中保持对称性.
3. （15 分）给出  $SO(4)$ ,  $SO(5)$ ,  $SP(4)$  的权矢量和非零根矢量，以及其全部正根和素根.
4. （55 分） $SU(3)$ .
  - (a) 分别给出  $SU(3)$  的  $3, \bar{3}$  表示的权矢量和权图，计算出二阶和三阶 Casimir 算符  $C_2, C_3$ .
  - (b) 双夸克态  $(qq)$ ，用权图和杨图两种方法给出其  $SU(3)$  不可约表示分解. 给出所有不可约表示的维度、 $C_2, C_3$ ，给出张量表示  $u^i v^j$  的不可约表示分解.
  - (c) 正反夸克态  $(q\bar{q})$ ，用权图和杨图两种方法给出其  $SU(3)$  不可约表示分解. 给出所有不可约表示的维度、 $C_2, C_3$ ，给出张量表示  $u^i v_j$  的不可约表示分解.
  - (d) 三夸克态  $(qqq)$ ，用权图或杨图给出  $SU(3)$  不可约表示分解.
  - (e) 若  $(qqq)$  的夸克态处于  $SU(2)$  表示，求所有可能的  $SU(2)$  不可约表示.
  - (f) 给出  $3, \bar{3}, 6, 8$  表示的  $SU(3) \rightarrow SU(2) \times U(1)_Y$  分解.

5. (15 分) 在  $SU(4)$  和  $SU(N)$  中的杨图表示: 

- (a) 分别求出其维度大小.
- (b) 用杨图给出二者的直乘分解的不可约表示, 求出所有不可约表示的维度, 验证分解是否正确.
- (c) 在  $SU(4)$  中, 给出这两个表示的共轭表示的杨图, 并问在直乘分解的不可约表示中是否存自共轭表示?

最后有各种公式供参考.

欢迎关注公众号: 一只粲夸克