北京大学数学科学学院期末试题

2011 - 2012 学年 第二学期

考试科目：数学分析　　　　考试时间：12 年 06 月 12 日

姓　名：________________　　学　号：________________

本试题共 九 道大题满分 100 分

1. (15) 叙述函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 一致有界和一致收敛到 0 的定义；现设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 不一致收敛， $f(x)$ 在 $(0,1)$ 连续且处处大于 0, 试问 $\{f_n(x)f(x)\}$ 在 $(0,1)$ 是否必定不一致收敛？（说明理由）

2. (10) 设 $f_n(x)(n=1,2,...)$ 在区间 I 一致连续且函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 一致收敛到 $f(x)$. 证明 $f(x)$ 在 I 一致连续.

3. (10) 证明 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^2+1}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内具有连续导函数.

4. (10) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续. 证明：存在多项式序列 $\{p_n(t)\}$, 使得 $\{P_n(e^{-x})\}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛到 $f(x)$ 的充分必要条件是 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

5. (10) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛. 证明：对该函数项级数适当加括号后得到的函数项级数可在 I 上绝对一致收敛.

6. (10) 求 cos^2x 在 $x=1$ 处的 Taylor 级数.

7. (10) 求 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}$ 的和.

8. (10) 写出一个定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 $f(x)\neq 0$, 使得它的 Fourier 级数在 $[0,\pi]$ 一致收敛到 0. (不要求计算它的 Fourier 级数但要证明该函数满足要求)

9. (15) 求 $f(x)=|x|\quad(x\in[-\pi,\pi])$ 的 Fourier 级数以及该 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 的和函数；并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ 的和.