高等量子力学期末试题简略版（2017 秋）

命题人：朱世琳老师

注：仅作参考，不保证正确性．除第二大题 (2)–(5) 小问外，均可直接写出答案．

1. （25 分）对称性与守恒律．

   (a) T 为时间反演算符，$D(\alpha,\beta,\gamma)$ 为欧拉角下的空间转动算符，写出以下对易式结果：$[T,\, D(\alpha,\beta,\gamma)]$，$[J_\pm,\, TD(0,\pi,0)]$．

   (b) 这 ... 忘记了，应该很简单嗯．

   (c) 两个非全同粒子，$\mathbf{r}_i$, $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{l}_i$ 分别是第 i 个粒子的坐标、动量、自旋、轨道角动量．$H=\frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}+a\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\mathbf{s_1}\cdot\mathbf{s}_2$，问体系是否具有空间反射对称性？

   (d) 若 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 在空间反射中发生相应变化，则以下各项中哪些项破坏空间反射对称性？

   $$H=a_1\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{p}_2+a_2\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{l}_1+a_3\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{l}_1+a_4\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{E}+a_5\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{B}+a_6\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2$$

   (e) 承上问，哪些项破坏时间反演对称性？

2. （25 分）二次量子化理论．以下考虑无自旋玻色子体系，设动量为 $\mathbf{p}$ 的自由粒子消灭算符 $a_\mathbf{p}$，某一点粒子的消灭算符 $\phi(\mathbf{r})$．

   (a) 写出体系的广义动量算符．

   (b) 用广义动量算符推导出空间平移 $\boldsymbol{\delta}$ 时消灭算符 $a_\mathbf{p}$ 如何变化．

   (c) 推导空间平移 $\boldsymbol{\delta}$ 时，$\phi(\mathbf{r})$ 如何变化．

   (d) 另一玻色体系，哈密顿量 $H=5a^\dagger a+2(a^2+a^{\dagger 2})$，其中 $[a,a^\dagger]=1$，$[a,a]=[a^\dagger,a^\dagger]=0$，推导该体系的粒子数是否守恒？

   (e) 试求解该体系的能谱．

3. （25 分）角动量理论．

(a) 自旋为 $\frac{7}{2}$ 的两个粒子，不考虑相对轨道角动量，则耦合角动量的全部可能值是多少？

(b) 无自旋粒子，$\mathbf{L}$, L_z 共同本征态为 $|nlm\rangle$，请使用 Wigner-Eckart 定理及空间反射对称性，写出 $\langle n'l'm'|\mathbf{L}|nlm\rangle$、$\langle n'l'm'|\mathbf{r}|nlm\rangle$ 不为 0 的选择定则．

(c) 已知强子具有同位旋 $\mathbf{I}$，其满足与角动量相同的对易关系 $[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk}I_k$，强相互作用下同位旋是守恒量．已知 ρ^0 介子自旋为 1，同位旋 $(I, I_3) = (1, 0)$，宇称为 -1，电荷为 0．π 为赝标量介子，π^+, π^0, π^- 的同位旋 $I = 1$, $I_3 = 1, 0, -1$，宇称为 -1，电荷为 $1, 0, -1$．问以下过程能否通过强相互作用发生：$\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$，$\rho^0 \to \pi^0 + \pi^0$．如可以，两个 π 介子轨道角动量是多少？

4. （25 分）狄拉克方程．

(a) 用狄拉克方程描述的自由正电子，动量 $\mathbf{p}$，能量 $-|E|$，螺旋度 $\Sigma_e = +1$，问其电荷共轭态描述怎样的物理态？

(b) 两个单色平面波解 $\psi(\mathbf{x})$, $\phi(\mathbf{x})$，问下式中两个双线性项的乘积

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \cdot \bar{\phi}\gamma^\mu\gamma_5\phi$$

在正常 Lorentz 变换和空间反射变换下是否变化？

(c) 设电子的单色平面波的正能解 $\phi(\mathbf{x})$，考虑矩阵 $\Gamma = \gamma^\mu$, σ^{02}, σ^{13}, $\gamma^\mu\gamma_5$，则当电子质量 $m_e \to +\infty$ 时，哪些情形对应的双线性项 $\bar{\phi}\Gamma\phi$ 不趋于 0？

(d) 设单色平面波解 $\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)/\hbar}$，求以下恒等式的系数 C_1, C_2．

$$\bar{u}(\mathbf{p}_1)\gamma^\mu u(\mathbf{p_2}) = \frac{1}{m_e}\bar{u}(\mathbf{p}_1)\left(C_1(p_1+p_2)^\mu + C_2\sigma^{\mu\nu}(p_{1\nu}-p_{2\nu})\right)u(\mathbf{p_2})$$