

代数结构小测验（2015 年 5 月） 姓名： 学号：

一、（25 分）设 $A=Q \times Q$, Q 为有理数集, \circ 为 A 上的二元运算, $\forall \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in A$ 定义

$$\langle a, b \rangle \circ \langle c, d \rangle = \langle ac, ad+b \rangle$$

- (1) 判断 \circ 运算是否满足交换律和结合律。(仅写结果即可)
- (2) 求出 \circ 运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元。

二、（25 分）设 $V = \langle S, \circ \rangle$ 是半群, $\emptyset \neq I \subseteq S$, 且满足 $IS \subseteq I$ 和 $SI \subseteq I$. 在 S 上如下定义二元关系 R :

$$xRy \Leftrightarrow x = y \text{ 或 } (x \in I \text{ 且 } y \in I).$$

- (1) 证明 R 是 V 上的同余关系。
- (2) 描述商代数 $\langle S/R, \bar{\circ} \rangle$, 即给出 S/R 中元素及运算 $\bar{\circ}$. (仅写结果即可)

三、（25 分）(1) 设 G, H 是两个群, 在其卡氏积 $G \times H$ 上如下定义二元运算:

$$\forall \langle g_1, h_1 \rangle, \langle g_2, h_2 \rangle \in G \times H, \quad \langle g_1, h_1 \rangle \langle g_2, h_2 \rangle = \langle g_1 g_2, h_1 h_2 \rangle$$

证明: 关于上面定义的二元运算, $G \times H$ 是一个群。

- (2) 若 $A \trianglelefteq G, B \trianglelefteq G$, 并且 $G = AB$, 证明: $G/(A \cap B) \cong G/A \times G/B$.

四、（25 分）事实（素理想的定义）: 设 R 是含么交换环, D 是 R 的理想。若对 $\forall a, b \in R$, $ab \in D \Rightarrow a \in D$ 或 $b \in D$, 则称 D 为 R 的素理想。

- (1) 写出 $\langle \mathbb{Z}_{10}, \oplus, \otimes \rangle$ 的全部素理想。(仅写结果即可)
- (2) 证明: D 是 R 的素理想当且仅当商环 R/D 是整环。(请在背面作答该题)