

北京大学数学科学学院期中试题

2016–2017 学年第 1 学期

考试科目：抽象代数 考试时间：2016 年 11 月 xx 日*

1. 设 H 是有限群 G 的一个非平凡子群，证明

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$$

2. 我们知道，一个群 G 到另一个群 G' 的同态的核是 G 的一个正规子群。反过来，假设 K 是 G 的一个正规子群，是否一定能找到 G 到某一群的一个同态恰好以 K 为核？论证你的结论。
3. 假设有限群 G 到有限集合 Ω 上有一个群作用， x 是 Ω 中的一点。试写出由 x 产生的轨道 $G(x)$ 和 x 的稳定子群 G_x 的数学定义，并写出他们的元素个数之间的数量关系。
4. 设群 G 的阶为 $n = p^l m$ ，其中 p 为素数且 $(p, m) = 1$ ， $l > 0$ ，如果 $1 \leq k \leq l$ ，那么 G 的任一 p^k 阶子群一定是某一 Sylow p -子群的子群。试证之。
5. p 和 q 是不同的素数，试证 $p^2 q$ 阶的群一定不是单群。
6. 在 Cayley 定理和 Kronecker 定理的基础上分别提出一个有意义的问题。
7. 试证当 $n \geq 5$ 时，交错群 A_n 是单群。
8. 一个群的两个有限阶元素的乘积的阶一定有限吗？试举例说明你的结论。
9. $C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : |x_i| \leq 1\}$ 是一个 n 维立方体。假设 G 是所有 C 到它自身的保距离线性变换构成的群。试分析确定这个群的阶。
10. 设 H 是有限群 G 的一个子群。 p 是 $|G|$ 的最小素因子。如果 $|G : H| = p$ ，试证 H 一定是 G 的一个正规子群。

* sic.