代数结构与组合数学期末测试试题(2012)

Abrat Chen

2012 年 6 月 19 日

代数结构与组合数学是一门非常有趣的课，曹老师特别理解学生，大家如果有课程上的困难都可以和曹老师多交流和沟通。

1 格

设f是从格L_1到格L_2的双射。证明以下两个条件等价：

1. $\forall a, b \in L_1, a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$；
2. f是格L_1到格L_2的同构映射。

2 组合存在性

$\{a_i\}_{1 \leq i \leq 2n+1}$是一个由$2n+1$个数组成的实数序列。证明其必然存在长度为$n+1$的单调子序列。

3 装错信封

$T_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$。$f$是$T_n$上的置换，并且$\forall 1 \leq i \leq n, f(i) \neq i$。求这样的$f$有多少个。

4 域

证明$\mathbb{Z}_p$是域（p是素数）。

5 生成函数

（本题中的具体出现次数已记不清，但解题思想是一样的）由$0,1,2,3,4$组成的六位数，问满足以下条件的这样的六位数有多少个：

1. 0不能出现在首位，并且有且只能出现1次；
2. 1出现至多2次；
3. 2出现2次或3次；
4. 3出现奇数次；
5. 4没有限制。

6 串的计数

把$1,2,3,4$组成的长度为n的串的集合记做M，$G=\{e,\tau\}$在M_n上有群作用：

1. $\forall m\in M, e(m)=m$，也就是说它是恒等作用；
2. $\forall m=a_1a_2a_3\ldots a_n\in M, \tau(m)=a_na_{n-1}\ldots a_1$，也就是说它把一个串逆序了。

试求G在M上的轨道数。

7 交错群

1. 证明存在从n元置换群S_n到$2n$元交错群A_{2n}的单同态；
2. 证明对于任何有限群G在同构的意义下是某个A_{2n}的子群。

8 换位子群

设G是一个群。$x,y\in G$，我们把所有形如$xyx^{-1}y^{-1}$的元素称为换位子。群G的所有换位子生成的子群称为G的换位子群G'。

1. 验证G的换位子群G'确实一个子群，并且是一个正规子群；

2. 证明G/G'是Abel群；

3. 证明若$N \trianglelefteq G$，则G/N是Abel群当且仅当$G' \subseteq N$。

这实际上是关于可解群理论（即群论最初的应用，也就是Galois将它应用于代数方程根式可解性的研究中）的一个最基础的结果。

接下来发生的事情就是这样，将群G不断地求换位子群，得到递降的换位子群列$G \trianglerighteq G' \trianglerighteq G^{(2)} \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G^{(k-1)} \trianglerighteq G^{(k)} \trianglerighteq \ldots$。其中后一个群总是前一个群的换位子群。那么只有两种情形：

1. 存在某个n_0，使得$G^{(n_0-1)} = G^{(n_0)} \neq \{e\}$；

2. 存在某个n_0，使得$G^{(n_0)} = \{e\}$。

我们把满足第2种情形的群G叫做可解群。Galois给出的结论就是：一个代数方程是根式可解的当且仅当它的Galois群是可解群。但是$n \geq 5$时，A_n均不可解，然后再找到一个五次方程它的Galois群恰是不可解的，就说明了一般的五次方程是根式不可解的。

历史在这里的注记是（按照历史发展顺序）：

1. Ruffini（1799年，但不完全）和Abel（1824年）证明了一般的五次方程不存在统一的根式解（即用系数的有限次四则和开方运算得到，不意味着解不存在，事实上由Gauss第一次证明的代数基本定理保证了其存在性）。现在关于一般五次方程根式不可解的定理就叫Abel-Ruffini定理；

2. Galois（1829年左右）独立地发现了此结果，发现了群论和域论，并且给出了以上的判别法；

3. Hermite证明五次方程的解可用四则运算，开方和椭圆函数表出；

4. Poincare证明一般代数方程的解可用四则运算，开方和Fuchs函数表出。