北京大学数学科学学院期中试题

2011 - 2012 学年 第二学期

考试科目： 数学分析　　考试时间： 12 年 04 月 17 日

姓　　名：　　学　　号：

本试题共 七 道大题满分 100 分

1. (10) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积. 试问：(1) 是否必有 $e^{f(x)}$ 在 $[0,1]$ 上可积？ (2) 是否必有 $[|f(x)|]$ 在 $[0,1]$ 上可积？

2. (30) 计算题

   (1) 求极限
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(arctant)^2dt}{\sqrt[3]{1+x^3}};$$

   (2) 计算定积分 $\int_1^e sin(lnx)dx$;

   (3) 求星型线 $x=acos^3t; y=asin^3t, 0\le t\le\pi$ 绕 x 轴一周所成的旋转面的面积.

3. (10) 设非负函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续且 $f(1)=0$. 证明：存在 $\xi\in[0,1]$ 使得成立 $f(\xi)=\int_0^\xi f(x)dx$.

4. (15) 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}cos\frac{1}{x^2}dx(p>0)$ 的敛散性与绝对收敛性.

5. (10) 设函数 $f(x)$ 满足条件： $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_1^{+\infty}f'(x)dx$ 都收敛并且 $f(1)=0$. 证明 $\int_1^{+\infty}f'(x)dx=0$.

6. (10) 讨论 $\sum_{n=2}^\infty\frac{(-1)^n}{\ln n}\frac{x}{1+x^n}$ 的敛散性. $x>0$

7. (15) 讨论数项级数 $\sum_{n=1}^\infty(\sqrt[5]{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}}-1)(p>0)$ 的敛散性与绝对收敛性.