北京大学数学学院期中考试试题

2014 - 2015 学年 第一学期

考试科目：数学分析　　考试时间：14 年 11 月 17 日

姓　　名：＿＿＿＿＿＿　　学　　号：＿＿＿＿＿＿

本试题共 九 道大题满分 100 分

1. (10') 设 D 和 Ω 为 R^n 内的两个不交的闭区域，且 D 是一个有界集合. 证明： D 与 Ω 的距离 $d(D,\Omega)$ 满足 $d(D,\Omega)=d(\partial D,\partial\Omega)>0$.

2. (10') 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(|x|+y^2)^{\frac{1}{2}}\tan(xy)}{x^2+y^2}.$$

3. (10') 求 $f(xy,x\sin y,x)$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, 其中 f 是一个 C^2 函数.

4. (15') 设 $f(x,y)=\sin(x^2-2x)e^{x+y^2-2y}$, 求 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处的所有四阶偏导数.

5. (15') 对 $F(x,y)=0$ 叙述相应的隐函数存在定理；假定 $F(x,y)$ 是一个 C^2 函数，求它确定的隐函数 $y=f(x)$ 的二阶导数.

6. (10') 设 $F(x,y,z)$ 是 R^3 上的一个 k (其中 k 是一个正整数) 次齐次函数，即对于 $\forall(x,y,z)\in R^3$ 和 $\forall t>0$ 满足 $F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)$. 再假定对于 $\forall(x,y,z)\in R^3$, $F'(x,y,z)$ 均为非零向量。证明：曲面 $F(x,y,z)=0$ 在所有点的切平面过一个固定点。

7. (10') 试求由方程 $x^2+y^2-2xy+y^4=1$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的极值.

8. (10') 设函数 $\overset{z}{y}=f(x,y)$ 在区域 D 内处处存在两个偏导数且这两个偏导数在 D 有界，试问 $f(x,y)$ 在 D 内是否一致连续，(说明理由).

9. (10') 试构造一个定义在 R^3 上的函数 $f(x,y,z)$, 使得它同时满足下列条件：

   (1) $f(x,y,z)$ 在 $(0,0,0)$ 处具有各个偏导数；

   (2) $f(x,y,z)$ 在 $R^3\backslash(0,0,0)$ 是 C^1 函数；

   (3) $f(x,y,z)$ 在 $(0,0,0)$ 处不连续.