抽象代数II期末考试试题

蔡金星

2010年1月13日

1. (20分) 判断下列命题是否正确, 正确的给出证明, 错误的给出反例.

   (a) 280阶群都不是单群.

   (b) H, K, N都是G的正规子群, 且$G = H \times K$, 则$H \cap N, K \cap N$不能都是平凡的.

   (c) F是$\mathbb{Q}$上的Galois扩张, 次数为偶数, 则存在中间域K使$|F : K| = 2$.

2. (20分) 写出以下这些群的元素个数.

   (a) $\mathtt{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{36}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{15}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{24}$

   (b) $\mathbb{Z}^{\oplus 2}/A$, 其中A是$(m, 0), (n, 1)$生成的子模.

3. (20分) 证明:

   (a) 若M是主理想整环上的有限生成自由模, N是M的子模, 则N的任意一组基可以扩充为M的一组基的充要条件是M/N无扭.

   (b) 若M是主理想整环上的有限生成模, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是M的一组生成元, $y_1 = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, (a_1, \cdots, a_n) = 1$,则存在$y_2, \cdots, y_n$使得$y_1, y_2, \cdots, y_n$是$M$的一组生成元.

4. (20分) 记$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-3}, \sqrt[3]{5})$

   (a) 证明$K/\mathbb{Q}$是Galois扩张.

   (b) 计算$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

(c) 写出所有中间域.

5. (20分) G是一个群,$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$是$G$的一个线性表示, χ是它的特征标.
对于$\forall g \in G$, A是$\rho(g)$的矩阵, 记$\delta : G \to \mathbb{C}^*, \delta(g) = \mathtt{det}(A)$.

   (a) 证明δ是一个同态, 并且$G/\mathtt{Ker}(\delta)$是交换群.

   (b) 若存在$g \in G$, $\delta(g) = -1$, 则G存在指数为2的正规子群.

   (c) g是二阶元, $\chi(g) \equiv \chi(e) (\mathrm{mod}\ 2)$.

   (d) g是二阶元, 则要么G存在指数为2的正规子群，要么$\chi(g) \equiv \chi(e) (\mathrm{mod}\ 4)$.