

北京大学数学科学学院期中试题

2011 - 2012 学年 第一学期

考试科目: 数学分析

考试时间: 11 年 11 月 11 日

姓 名:

学 号:

本试题共 18 道大题满分 100 分

1. (10) 用肯定语气叙述

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq \infty$;

(2) $f(x)$ 在区间 I 上不一致连续。

2. (20) 用定义证明

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0;$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\sin x}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = +\infty.$$

3. (10) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n})$;

4. (10) 设 $b_1 = 1, b_{n+1} = \frac{1}{b_n+1} (n = 1, 2, \dots)$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在并求出其极限值。

5. (10) 设 $f(x)$ 是区间 I (不一定是有限闭区间) 上的连续函数, 用有限覆盖定理证明 $f(I)$ 也是一个区间。

6. (15) 设 $f(x), g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上一致连续. 试问 (1) $f(x)g(x)$ 在 $(0, 1)$ 是否一致连续; (2) 设 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $(0, 1)$ 有定义并且有界, 试问它是否一致连续. (说明理由)

7. (15) 设 $f(x)$ 在区间 I 连续且非负. 证明: (1) 对于 I 内任意两点 x_1, x_2 , 总存在 $\xi_1, \xi_2 \in I$ 使得有 $f(\xi_1) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$ 和 $f(\xi_2) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$; (2) 如果 (1) 中的 ξ_1, ξ_2 总成立 $\xi_1 < \xi_2$, 证明 $f(x)$ 在 I 上严格递增。

8. (10) 设 Q 是有理数集, 试构造 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 的间断点集为 $Q \cap [0, 1]$ 并且 $x = \frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点。