

一、(8 分) 求 $(15^{195})_{31}$ (需给出详细计算过程,下同)

二、(8 分) 求 $\phi(9! \times 2652)$.

三、(8 分) 采用默比乌斯反演公式来计算 $\phi(1575)$

四、(8 分) 采用欧拉定理来求解同余方程 $5x \equiv 61 \pmod{624}$.

五、(8 分) 求解同余方程 $111x \equiv 75 \pmod{321}$.

六、(8 分) 已知 2015 年北大校本部全职教师人数在 2000 到 3000 之间, 该人数用 5 除余 2, 用 13 除余 10, 用 17 除余 13, 列出同余方程组并用中国剩余定理求出北大校本部 2015 年全职教师总人数.

七、(8 分) 解同余方程

$$24x^{25} + 20x^{23} - 4x^{15} - 30x^{12} + 6x^{11} + 3x^5 + 16x^3 - 7x \equiv 0 \pmod{11}.$$

八、(8 分) 解同余方程 $28x^4 - 20x + 31 \equiv 0 \pmod{27}$.

九、(6 分) 判断 1729 是否是基为 2 和 68 的伪素数.

十、(10 分) 证明: 设 p 为一奇素数, $0 \leq k \leq p-1$, 求证

$$k!(p-1-k)! \equiv (-1)^{k+1} \pmod{p}$$

十一、(10 分) 证明: 对于任意正整数 $n \geq 2$, n 不可能整除 $2^n - 1$.

十二、(10 分) 试求 $10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \cdots + 10^{10^{10}}$ 被 7 除的余数