09-10 数分

北京大学数学科学学院期末试题

2009 - 2010 学年第一学期

考试科目：	数学分析 (III)	考试时间：	2010 年 1 月 8 日
姓　　名：		学　　号：	
本试题共	6 道大题	满　　分：	100 分

一 (每小题 10 分，共 60 分) 用 I 表示数轴上的 $[0,1]$ 区间，II 表示 R^2 中的 $I\times I$ 区域，III 表示 R^3 中的 $I\times I\times I$ 区域. 试计算以下各题的积分值：

(1) $\iint_{II}(x+y)dxdy$.

(2) $\iiint_{III}(x+y+z)dxdydz$.

(3) $\oint_{\partial II}(x+y)ds$, 其中 ∂II 是区域 II 的边界.

(4) $\oint_{\partial II^+} xdx+ydy$, 其中 ∂II^+ 是区域 II 的正向边界 (即逆时针方向).

(5) $\iint_{\partial III}(x+y+z)dS$, 其中 ∂III 是区域 III 的边界.

(6) $\iint_{\partial III^+} xdydz+ydzdx+zdxdy$, 其中 ∂III^+ 是 III 的边界，外侧.

二 (15 分) 计算曲面积分：$I=\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, 其中 S 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le 1)$ 所表示的那部分的外侧.

三 (10 分) 设 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 都是线性函数 (即具有形式 $ax+by+cz+d$), 而且在包含原点在内的某单连通区域 Ω 内 $\int_{\widehat{AB}}Pdx+Qdy+Rdz$ 积分与路径无关. 证明在 Ω 内 $\int_{\widehat{AB}}xdP+ydQ+zdR$ 积分也与路径无关.

四 (10 分) 假设 $f\in C^1(R^2)$, $F(x)=\int_{x^2}^{2x^2}ds\int_s^{x^2}f(s,t)dt$. 试求 $F'(x)$.

五 (5 分) 假设 $f(x)$ 是 R 上的非负连续函数，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$,

$$I_n=\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_n^2\le 2010^2} f(x_1)\cdots f(x_n)dx_1\ldots dx_n.$$

证明：$\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

08-09 数分

北京大学数学科学学院期末试题

2008 - 2009 学年 第一学期

考试科目：数学分析　　考试时间：09 年 1 月 16 日

姓　名：　　学　号：

本试题共 七 道大题，满分 100 分

1.（40 分）简答题（给出答案即可，每小题 5 分）：

(1) 假设 D 是 R^2 中由圆 $x^2+y^2=5$ 和双曲线 $xy=2$ 在第一象限 $(x,y\geq 0)$ 中所围闭集，f 是 D 上连续函数，把二重积分 $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ 化成不同次序的二次积分。

(2) 设 D 是 R^2 中两直线 $y=x$，$y=2x$ 与两双曲线 $xy=1$，$xy=2$ 在第一和第三象限中所围点集。利用变换 $\Phi: D\ni(x,y)^T\longrightarrow(\xi,\eta)^T=(\frac{y}{x},xy)^T$ 将二重积分 $\iint_D f(xy)\,dxdy$ 写成定积分，这里 f 是 $[1,2]$ 上连续函数。

(3) 根据关于 n 维矩形上 Riemann 积分可积性的 Lebesgue 定理回答这样的问题：在考虑有界集上 n 重积分时为什么要求积分区域是 Jordan 集？

(4) 根据 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ 给出积分 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx$ 值 $(\alpha\geq 0)$。

(5) 假设 Σ 是下半球面：$x^2+y^2+z^2=1$ $(z\leq 0)$，请答出第一类曲面积分 $\iint_\Sigma ds$ 和第二类曲面积分 $\iint_\Sigma dxdy$（这里 Σ 取下侧）的值分别是多少？

(6) 用微分形式语言统一写出关于曲线和曲面积分的 Green 公式，Gauss 公式及 Stokes 公式。

(7) 设 $\alpha=\sin(x^2yz)\,dx+e^{xz^3}\,dz$ 是 R^3 上微分 1- 形式，请写出 $d\alpha$。

(8) 假设 $\alpha=Pdx+Qdy$，这里 P,Q 分别是 R^2 上连续可微函数，如果任何分段可微闭路 l 上积分 $\oint_l\alpha=0$，请问 α 是否闭？是否全微分（恰当）？

2. (20 分) 记 Σ 为在第一卦限 $(x, y, z \geq 0)$ 中的平面 $x + y + 2z = 2$ (取下侧)。Γ 为 Σ 的边界并由上往下 (这里下指 z 坐标为小者) 看为逆时针方向。计算如下积分，

$$\oint_{\Gamma} xy\, dx + yz\, dy + xyz dz, \qquad \iint_{\Sigma} x\, dydz.$$

3. (10 分) 假设 f 是 R^3 上连续函数，D_ϵ 是 R^3 中球面 Σ_1: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与球面 $\Sigma_{1+\epsilon}$: $x^2 + y^2 + z^2 = (1 + \epsilon)^2$ 所夹的点集 $(\epsilon > 0)$. 证明，

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon} \iiint_{D_\epsilon} f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{\Sigma_1} f\, dS.$$

4. (10 分) 令 $D = \{ (x, y) \in R^2 \mid 1 \leq x,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \}$. f 是 D 上非负连续函数，偏导数 $\partial_y f(x, y)$ 在 D 上存在且有界，请证明，

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy \text{ 收敛} \iff \int_1^{+\infty} \frac{f(x, 0)}{x}\, dx \text{ 收敛}.$$

5. (10 分) 讨论 $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{1 + x^2}\, dx$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续性和可微性.

6. (5 分) 设 Γ 是 R^2 中 C^1 无自交封闭正向曲线，$\overrightarrow{v} = (M, N)$ 是不可压缩液体通过 Γ 的流速 (R^2 上 C^1 向量值函数)，请用曲线积分表示液体通过 Γ 的流量并由此证明如下 Bendixson 判别法：如果 $\partial_x M + \partial_y N$ 处处非 0, 则 R^2 中不可能存在封闭曲线以 (M, N) 作为其切线方向。

7. (5 分) 假设 A 是 n 阶严格正定的对称矩阵，ϕ 是 R^n 上连续函数并且在原点 O 附近满足 $\phi(x) = x^T A\, x + o(\|x\|^2)$. 请证明当 $\delta > 0$ 充分小时，

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{(\sqrt{\pi t})^n} \int_{B_\delta(O)} e^{-t\phi(x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\det A}}.$$