

广义相对论期末试题简略版（2017 春）

命题人：陈斌老师

注：仅作参考，不保证正确性.

1. (20 分) 嵌入在 \mathbb{R}^3 上的曲面：

$$x = (a + b \sin \phi) \cos \psi, \quad y = (a + b \sin \phi) \sin \psi, \quad z = b \cos \phi \quad (1)$$

- (a) 求曲面度规，及所有非零的克氏符；
 (b) 求曲面的内禀曲率 R ，并计算积分 $\int \sqrt{g} R d^2x$.
 （给了曲率张量的计算公式）

2. (40 分) 有球对称的时空，度规为

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + B(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2)$$

假设你正在飞船上，飞船通过火箭的推力保持在空间位置 ($r = r_1, \theta = \pi/2, \phi = 0$) 的地方. (以下答案请用 $B(r), B'(r) \dots$ 的表达式给出)

- (a) 求你的 4- 速度，4- 加速度在坐标卡 (t, r, θ, ϕ) 中的坐标；
 (b) 设飞船静质量为 m ，求飞船为保持该位置而受到的 4- 力大小 $\sqrt{\hat{f} \cdot \hat{f}}$ ；
 (c) 假设你手里有一个钟，你把钟朝严格径向向外的方向扔出，已知钟会到达的 r 最大位置为 $r = r_2 > r_1$. 求扔出时钟的 4- 速度，以及钟相对你的速度；
 (d) 一段时间后你又接到了钟，求钟上显示的时间间隔，钟经历的坐标时，以及你的手表记录的时间间隔.

（给了已算好的一些非零克氏符）

3. (20 分)

- (a) 说明什么是爱因斯坦等效原理，推导出用引力红移进行验证的方式.

(b) 在史瓦西时空中，发射源可发射波长为 6000 \AA 的电磁波。（以下答案保留到整数）

- i. 如果发射源在牛顿势 $|\Phi| = 6 \times 10^{-4}$ 的位置，求无穷远观测者观察到电磁波波长；
- ii. 如果发射源位于 $r = 2.02GM$ 的位置，求无穷远观测者观察到电磁波波长。

4. （20 分）克尔黑洞度规

$$ds^2 = \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2} dt^2 + \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} (d\phi - \omega dt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (3)$$

其中 $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - 2GMr + a^2$, $\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta$.

- (a) 求黑洞稳定极限面半径，并证明在稳定极限面内物体不能保持空间位置静止；
- (b) 求黑洞外视界的面积 A ；
- (c) 仔细解释彭罗斯过程，并证明该过程中 A 不会增加。

欢迎关注公众号：一只絜夸克