几何学期中考试参考答案与评分标准

考试日期: 2009 年 11 月 13 日。**考试时间**: 2 小时。

题 1 (40 分) 设 $\mathbb{P}$ 为顶点在单位球面上的正八面体，它的六个顶点为 $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$，$O$ 为其重心。以 $\{O; \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_5}\}$ 为单位正交标架建立右手坐标系。请用空间解析几何的方法来解答以下问题，每小题 8 分。

(1) 求三角形 $A_3A_4A_5$ 所在平面 Σ 的方程；
(2) 求直线 A_1A_6 与平面 Σ 之间的夹角；
(3) 求 A_1 到平面 Σ 的距离；
(4) 求直线 A_1A_5 与 A_2A_3 之间的夹角和距离；
(5) 求三角形 $A_2A_3A_6$ 所在平面与平面 Σ 之间的夹角。

• 解：(1) $x + y - z + 1 = 0$。(2) $\theta = 0$，即直线与平面平行。(3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$。(4) 夹角为 $\pi/3$，距离为 $\frac{2}{\sqrt{3}}$。(5) $\arccos\frac{1}{3}$。过程略。

• 评分标准：*每一小题，步骤正确答案错误酌情扣 1-3 分，答案正确无步骤（公式）扣 3 分。2,4,5 中夹角均应取为锐角，写为钝角扣 1 分。*

题 3 (15 分) 已知 I 和 I' 都是平面右手直角坐标系，I' 的 x' 轴在 I 中的方程为 $3x - 4y + 5 = 0$，I 的原点在 I' 中的坐标为 $(2, 1)$。

(1) 求 I 到 I' 的点的坐标变换公式（即 (x, y) 依赖于 (x', y') 的表达式）。
(2) 求在 I 中方程为 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆在 I' 中的方程。

• 解：可直接根据题意作出图形，并从中确认 e_1' 在 I 中的坐标为 $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$，$e_2'$ 在 I 中的坐标为 $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$，$O'$ 在 I 中的坐标为 $(1, 2)$。所以可以直接写出变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

如果忘记了对应关系，也可以先写出

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

（相当于用待定系数法。）然后根据 $(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x', y') = (1, 2)$ 推出

$$2\cos\theta + \sin\theta + a = 0,$$
$$-2\sin\theta + \cos\theta + b = 0.$$

根据 $3x - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow y' = 0$ 推出

$$3\cos\theta + 4\sin\theta = 0,$$
$$3a - 4b + 5 = 0.$$

联立解得 $\cos\theta = -\frac{4}{5}, \sin\theta = \frac{3}{5}, a = 1, b = 2$。将以上 (x, y) 替换为 (x', y') 的表达式代入 $x^2 + y^2 = 1$，得到在 I' 中对应的方程 ${x'}^2 + {y'}^2 - 4x' - 2y' + 4 = 0$.（或直接由圆半径为 1，圆心在 I' 中坐标为 $(2, 1)$ 而推出。）

• 评分标准：*求坐标变换公式 10 分，圆的新方程 5 分。另外在最后公式中将 (x, y) 与 (x', y') 弄颠倒要扣 4 分，仅写逆变换公式扣 2 分。最后方程用变量*

(x,y) 而非 (x',y') 写出者扣 *1* 分，常数项 *4* 错为 *5* 扣 *2* 分，只代入坐标变换公式不计算出最后答案扣 *3* 分。弄错坐标系方向扣 *6* 分。采用待定系数法求解出错或由图形推导出错的，酌情给 *2-5* 分。

题 3 (10 分) 设 l 过空间直角坐标系的原点和 $(1,1,1)$，求绕 l 转 90 度的空间等距变换在此坐标系中的矩阵表示。其中角度方向为从 $(1,1,1)$ 向原点看去时的顺时针方向。

• 解：取 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 与 (x,y,z) 作外积，再取负号，结果是 $\frac{1}{\sqrt{3}}(y-z,z-x,x-y)$，为相对 $(1,1,1)$ 垂直分量的旋转后结果。再加上与 $(1,1,1)$ 平行的分量 $\frac{x+y+z)}{3}(1,1,1)$，得最后结果。可写为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

• 评分标准：*若只记得用 $(1,1,1)$ 叉乘作用，忽视了与之平行的分量保持不变，应扣去 5 分。若丢失某些因子，酌情扣 1-3 分。将转角方向弄反，扣 3 分。若推导结果不是线性式子，至少扣 5 分。*

题 4 (10 分) 设 α,β,γ 是球面上三个不同点对应的位置向量，起点都在球心。求证它们在球面上的外接圆圆心的位置向量平行于 $\alpha\times\beta+\beta\times\gamma+\gamma\times\alpha$。

• 证：取上述向量分别与 α,β,γ 作内积得同一个混合积 $[\alpha,\beta,\gamma]$，又这三个向量等长，意味着夹角相等，即此向量单位化以后在球面上到其它三点距离相等。(另一个思路是取球面上此三点外接圆的“切锥”，则锥顶点 C 与球心 O 连线与球面相交的交点即为外接圆心，故只需求此锥顶点。由于 CO 垂直于 α,β,γ 三向量端点所在平面，所以可以用 $(\alpha-\beta)\times(\alpha-\gamma)$ 得出，展开即得欲证结果。)

• 评分标准：*中间过程关键步骤错或有逻辑/推理上的跳跃，扣 5 分以上。未讨论 α,β,γ 三向量共面情形扣 1 分，其余情形酌情扣分。*

题 5 (10 分) 平面凸五边形的顶点顺次记为 A_i，约定 $A_{i+5}=A_i$，满足：任一顶点 A_i 的对边 $A_{i+2}A_{i+3}$，平行于其两相邻顶点所连对角线 $A_{i+1}A_{i+4}$。证明此五边形仿射等价于正五边形。

• 证：设有一平面正五边形，顶点按同一顺序为 $B_i, i=1,\cdots,5$。由平面仿射变换的基本定理，知存在（唯一的）平面仿射变换 ϕ 将 A_1,A_2,A_3 对应地映到 B_1,B_2,B_3。下证 $\phi(A_4)=B_4,\phi(A_5)=B_5$。反设不然，则已知这两个像点连线平行于 $\overline{B_1B_3}$（由仿射变换保平行性）。从图形上可见这两个像点连线若高于或低于 $\overline{B_1B_3}$，都会破坏平行性，矛盾。故 ϕ 给出了到正五边形的仿射等价，从而证明了结论。(也可以用向量法。)

• 评分标准：*取三顶点对应到正五边形顶点，或四点对应到等腰梯形，若其余步骤缺失，得 3 分左右。用正压缩来论证却无存在性论证，扣 5 分以上；中间未详细论证剩下两顶点为何必须重合到正五边形的其余两顶点，扣 3 分。*

题 6 (10 分) 考虑无不动点且保定向的平面仿射变换 f。

1) 证明：若 f 作用下有一条不变直线 l，则 f 必为以下两个变换 ϕ, ψ 的复合，其中 ϕ 是沿 l 方向的平移，ψ 是以 l 为压缩轴的一个斜压缩（此处 "斜压缩" 定义里不包含错切或斜反射之类）。

2) 对于上述 $f = \phi \circ \psi$，请找出一条与 l 不同的 "不变曲线" 在 f 作用下映为自身（可取适当坐标系来描述）。说明此曲线为仿射齐性曲线。

3) 任一无不动点且保定向的平面仿射变换是否必定形如上述 $f = \phi \circ \psi$?

• 1) 证：由于无不动点，故 f 限制在不变直线 l 上的作用效果为平移，设对应的平面平移为 ϕ，则复合上 ϕ^{-1} 之后，l 上全为不动点。

在 l 外任取一点 A，若 $\phi^{-1} \circ f(A) = A'$ 与 A 连线平行于 l，则可以取一个以 l 为错切轴的适当平移 ψ，使得 $\psi(A') = A$，于是 $\psi \circ \phi^{-1} \circ f$ 有 l 上及 A 三个不共线的不动点，必为恒同。这说明 $f = \phi \circ \psi^{-1}$. 但后者 $\phi \circ \psi^{-1}$ 是两个同方向的平移和错切的复合，必有不动点。矛盾。

因此在 l 外任取一点 A，必有 $\phi^{-1} \circ f(A) = A'$ 与 A 连线，与 l 相交于 P。取 l 为压缩轴，$A'A$ 连线方向为斜压缩方向，$|A'P|/|AP|$ 为压缩比，得到的斜压缩 ψ^{-1} 满足 $\psi^{-1} \circ \phi^{-1} \circ f$ 有 l 上及 A 三个不共线的不动点，必为恒同。这说明 $f = \phi \circ \psi$。（注意两者复合次序可颠倒。）

2) 取 l 为 x 轴，l 上任一点为原点，ϕ 平移量为 a；斜压缩 ψ 方向为 y 轴方向，压缩比为 $\lambda > 0$。则对应的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

或 $x' = x + a, y' = \lambda y$。设 $\ln \lambda = \mu a$，易见按上述关系有 $e^{\mu x'}/y' = e^{\mu x}/y$。故上述仿射坐标系下任一方程

$$y = ce^{\mu x}$$

定义的曲线都是上述变换下的不变曲线，其中 c 为常数，$c = 0$ 对应的恰好为不变直线 l，其它情形为指数函数的图象。并且，任给这种曲线上两点 $(x, y), (x^*, y^*)$，设 $x^* = x + a^*, y^* = \lambda^* y$，由于曲线方程的限制，必有同样的关系 $\ln \lambda^* = \mu a^*$。取仿射变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^* \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

即可以保证 $y = ce^{\mu x}$ 保持不变，同时 $(x, y) \to (x^*, y^*)$。这就证明了仿射齐性。事实上，这些不变曲线均是单参数变换群（参数为 $t \in (-\infty, +\infty)$）

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu t \\ 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

作用下的点的轨道。

3) 存在其它类型的无不动点且保定向的平面仿射变换。例如取平面上一抛物线的两条直径，存在关于这两条直径的斜反射，保持抛物线不变，其复合效果是保定向的平面仿射变换，且无不动点，无不变直线，故不同于以上类型。（或

直接写出如下变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

容易验证其行列式为正，特征方向只有 $(1,0)$，故若有不变直线必须为水平直线。但同时纵坐标 $y' = y + 2$，每一条水平直线都会上升 2，故既无不动点也无不变直线。有几个同学写可取一个平移与一个垂直方向的错切复合，也成立。

写平移复合位似或平移复合旋转的，都忽视了此时有不动点，不构成反例，不能得分。）

• 评分标准：三小题分别占 *4*，*4*，*2* 分。若 *1*) 中忘记了排除错切的可能或论证有误，要扣 *2* 分。*2*) 中写出仿射坐标系中的曲线方程即可。论证“仿射齐性”占 *2* 分。

题 7（5 分） 证明，若两椭圆 Γ_1, Γ_2 有平行公切线 l, l'，则任一与 l 平行的直线分别截 Γ_1, Γ_2 所得线段之长度比值为定值。

• 证：不妨设 Γ_1 为圆周（不然可整体用一个适当正压缩作用）。然后可取平行 l 方向的错切以及沿 l 方向的一个正压缩，将 Γ_2 变为一个依然与 l, l' 相切的圆周 Γ_2'，此时 Γ_1, Γ_2' 显然成立欲证结论，又过程中 Γ_2, Γ_2' 沿 l 方向的线段依然保持在同一直线上，长度作了同一放缩，故命题结论依然成立。由此知道 Γ_1, Γ_2 被平行于 l 的直线截得弦长成固定比例。（另法可先证引理：椭圆的弦长与平行的直径之比，是一个只依赖于弦在共轭直径上所分单比的三角函数。用椭圆的标准方程证不难。作为推论，直接得欲证结论。）

• 评分标准：大量错误是把两椭圆直接仿射等价于一对圆，或同时取到标准形，这是错的，基本全扣。指出可先取仿射变换将其中一个变成圆，且保持平行公切线，可得 *2* 分。