2005-2006 抽代期末

1. (10 分)设 R 是一个整环，则 R 上的一元多项式环 R[x]是否还是整环？若是，请证明之，若不是请举出反例.

2. (15 分)给出唯一因子分解整环（高斯整环）、主理想整环和欧几里得整环的涵义并说明它们之间的关系.

3. (15 分)构造一个具有 16 个元素的有限域，从中任选两个非零非单位元的相异元素，计算它们的和、差、积、商.

4. (10 分)证明有限域上的任一不可约多项式一定可分.

5. (20 分)

(1)证明 2 次扩张一定是正规的.

(2)设 E/K 和 K/F 均为正规扩张，举例说明 E/F 不一定为正规扩张.

6. (30 分)设 $\mathbb{Q}$ 为有理数域，$f(x)=x^4-2\in \mathbb{Q}[x]$.

(1)求 $f(x)$ 的分裂域 E.

(2)求此分裂域 E 的 Galois 群 $Gal(E/\mathbb{Q})$.

(3)求 $Gal(E/\mathbb{Q})$ 的所有子群及这些子群所对应的 $E/\mathbb{Q}$ 的中间域(每阶子群举出一例).

(4)由于 $\mathbb{Q}$ 的特征为 0，所以 $E/\mathbb{Q}$ 一定为单代数扩张，给出此扩张的一个本原元素 θ，即使得 $E=\mathbb{Q}(\theta)$，求 θ 的极小多项式的所有根.

2008 年冯荣权

1. 来自杨的 P139 182 题

2. 证明存在非唯一分解因子整环

3. p 为素数，求 $Z(p^n)$ [x]中的 可逆元，零因子，幂等元

4. 杨的 P542 748

5. 体中的华罗庚恒等式

6. 2 年前考试题最后一题，把 2 改成 3.

2008-2009 冯荣权

一、判断正误，并证明或举反例。

（1）如果一个群的子群 H 的任意两个左陪集相乘还是左陪集，则 H 是正规子群。

（2）E/K 是代数扩张，K/F 是代数扩张，则 E/F 是代数扩张

（3）E/K 是正规扩张，K/F 是正规扩张，则 E/F 是正规扩张

二、G 是奇次交换群。α 为自同构。α^2 为恒同映射。

$G1=\{g|\alpha(g)=g$, g 属于 G}。$G2=\{g|\alpha(g)=g$ 逆, g 属于 G}

求证 G1，G2 为子群，且 $G=G1\times G2$

三、丘维声《抽象代数基础》75 页推论 8 和例 1

四、构造 27 阶有限域并找出生成元。

五、忘了……

六、证明 $Z(p^n)$的剩余类环 R 上的非可逆元构成一个理想 P，该理想为极大理想。并求商环 R/P

七、$E=Q(\sqrt{p}, \sqrt{q})$, p, q 为素数。

（1）求 E/Q 的伽罗华群

（2）求伽罗华群的子群并求出中间域

（3）求证 $E=Q(\sqrt{p}+\sqrt{q})$ 并求出极小多项式

06-07 期末抽代

北京大学数学科学学院期中试题

2006 -2007 学年第 1 学期

考试科目：抽象代数　　考试时间：2006 年 11 月 8 日

姓　　名：史钞　　学　　号：00501178.

班　　级：3

本试题共 六 道大题，满分 100 分

1. (20 分). 将下述的群按同构进行分类：

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$,

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$,

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$,

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$,

$\mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/500\mathbb{Z}$.

2. (15 分). 试估计所有互不同构且阶数为 n 的群的个数，并说明为什么.

3. (10 分). 写出对称群 S_4 的全部正规子群及 (在同构意义下的) 商群.

4. (20 分). 证明 56 阶的群必有 7 阶正规子群或 8 阶正规子群，并推广你的结论.

5. (15 分). 设 G 为有限群， $H \lhd G$. 证明 H 的合成群列的长度不超过 G 的合成群列的长度.

6. (20 分). 设 p 为一个素数， l 为一个正整数， G 为一个 p^l 阶的有限群. 试证 G 的非正规子群的个数被 p 整除.

08-09 期中

1. (20’)写出 D4 的所有子群，并指出其中哪个是 D4 的中心，哪个是 D4 的导群
2. (15’)N/C 定理：NG(H)={g 属于 G|gHg-1=H},CG(H)={g 属于 G|gxg-1=x,对任意 x 属于 H},证明 NG(H)/CG(H)同构于 Aut(H)的一个子群
3. (15’)|G|=2k，其中 k 为奇数，证明：G 有一个阶为 k 的正规子群
4. (20’)p、q 为素数，证明 p2q 阶群不是单群（考虑 p、q 相等和不等的情况）
5. (20’)|G|=n，证明 G 为循环群当且仅当对于 n 的每一个因子 d，G 都有唯一的 d 阶子群
6. (10’)Q=<a,b|a4=e,a2=b2.bab-1=a-1>