# 2014期末试题

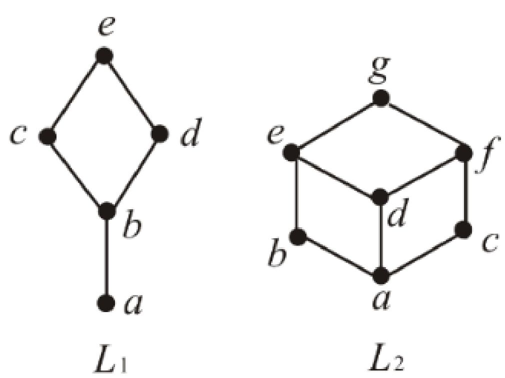
一、(10分) 写出代数系统$< Z_4, \oplus >$的全部自同态，并写出每个自同态导出的同余关系。(不需要计算过程或证明)

解

| 自同态 | 导出的同余关系 |
|---|---|
| $f_0(x) = 0, x = 0, 1, 2, 3$ | 全域关系 |
| $f_1(x) = x, x = 0, 1, 2, 3$ | 恒等关系$I_{Z4}$ |
| $f_2(0) = f_2(2) = 0,$<br>$f_2(1) = f_2(3) = 2$ | $\{< 0, 2 >, < 2, 0 >, <$ |
| $f_3(0) = 0, f_3(1) = 3,$<br>$f_3(2) = 2, f_3(3) = 1$ | 恒等关系$I_{Z4}$ |

# 2014期末试题

**二、(15分) 对下图中的两个格$L_1$和$L_2$，分别找出它们所有的3元子格、4元子格及5元子格。(不需要计算过程或证明)**




解: $L_1$的三元子格: $\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\}$, $\{a,c,e\},\{a,d,e\},\{b,c,e\},\{b,d,e\}$；四元子格: $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,d,e\}$, $\{b,c,d,e\}$；五元子格: $\{a,b,c,d,e\}$.

$L_2$的三元子格: $\{a,b,e\},\{a,b,g\},\{a,d,e\}$, $\{a,d,f\},\{a,d,g\},\{a,c,f\},\{a,c,g\},\{a,e,g\},\{a,f,g\},\{b,e,g\},\{d,e,g\}$, $\{c,f,g\},\{d,f,g\}$；四元子格：$\{a,b,e,g\},\{a,d,e,g\},\{a,d,f,g\}$, $\{a,c,f,g\},\{a,b,d,e\},\{a,c,d,f\},\{d,e,f,g\},\{a,b,f,g\},\{a,c,e,g\}$, $\{a,b,c,g\}$；五元子格：$\{a,b,d,e,g\},\{a,c,d,f,g\},\{a,d,e,f,g\}$, $\{a,b,c,e,g\},\{a,b,c,f,g\}$.

# 2014期末试题

三、(10分) 设$a_1a_2\ldots a_n$是$\{1,2,\ldots,n\}$的一个排列如果对每个$i=1,2,\ldots,n$均有$a_i\neq i$，则称$a_1a_2\ldots a_n$是一个错位排列。求$n$个元素的错位排列数$D_n$.

解: 迭代法、对称筛公式、棋盘多项式等方法均可。

$$R(C)=1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\cdots+C(n,n)x^n$$

$$D_n=n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}0!$$

$$=n!-n!+\frac{1}{2!}n!-\frac{1}{3!}n!+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}n!$$

$$=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

# 2014期末试题

四、(15分)

(1) 把$n$只相同的球放到$r$个不同的盒子里$(n \geq r)$，没有空盒，问有多少种方法?

(2) 把$n$只相同的球放到$r$个不同的盒子里$(n \geq rq)$，每个盒子至少包含$q$个球，问有多少种方法?

解:(1) 相当于方程$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$的正整数解个数，即$C(n-1, r-1)$.

(2)相当于方程$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n, x_i \geq q$ 的非负整数解个数，即$x_1' + x_2' + \cdots + x_r' = n - rq$的非负整数解个数，即$C(n-rq+r-1, n-rq) = C(n-rq+r-1, r-1)$

# 2014期末试题

五、(12分) 把$n$个苹果（$n$为奇数）恰好分给3个孩子，如果第一个孩子和第二个孩子分的苹果数不相同，问有多少种分法?

解：每个孩子至少得到一个苹果的分法数是方程$x_1+x_2+x_3=n-3$的非负整数解的个数，其生成函数为

$$A(y)=\left(1+y+y^2+\cdots\right)^3=\frac{1}{(1-y)^3}$$

上述展开式中$y^{n-3}$项的系数为$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

前两个孩子苹果数相等的分法数为方程$2x_1+x_3=n-3$的非负整数解个数. 当$n$为奇数时，$x_3$为偶数，有$\frac{n-1}{2}$种取法，于是

$$N=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{n-1}{2}=\frac{(n-1)(n-3)}{2}$$

# 2014期末试题

**六、(13分) 考虑用4种颜色对正五边形的顶点进行染色，则在允许图形旋转和翻转的情况下，一共有多少种不同的染法?**

解: 用1,2,3,4,5记正五边形的5个顶点。保持图形重合的置换有:

$\sigma_0=(1)(2)(3)(4)(5)$, $\sigma_1=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\sigma_2=(1\ 3\ 5\ 2\ 4)$,

$\sigma_3=(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$, $\sigma_4=(5\ 4\ 3\ 2\ 1)$, $\sigma_5=(1\ 5)(2\ 4)(3)$ ,

$\sigma_6=(1\ 4)(2\ 3)(5)$ , $\sigma_7=(1\ 3)(2)(4\ 5)$, $\sigma_8=(1\ 2)(3\ 5)(4)$ ,

$\sigma_9=(1)(2\ 5)(3\ 4)$.

由Polya定理, 染色方案数目为:

$$\frac{1}{10}\left(4^5+4\cdot 4^1+5\cdot 4^3\right)=136.$$

# 2014期末试题

七、(12分) 设$G=<M_2(Z),+>$是整数集$Z$上的全体2阶方阵关于普通的矩阵加法构成的群。

(1) 证明: $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d\text{均为偶数}\right\}$是$G$的子群。

(2) $M$是否是$G$的正规子群？若是，请写出$G/M$中的全体元素；若不是，请说明理由。

(1)证明: $M$非空，因为全0矩阵属于$M$.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}\in M,$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}\in M$，因为偶数减偶数还是偶数

故$M$是$G$的子群。

# 2014期末试题

七、(12分) 设$G=<M_2(Z),+>$是整数集$Z$上的全体2阶方阵关于普通的矩阵加法构成的群。

(1) 证明: $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\text{均为偶数}\right\}$是$G$的子群。

(2) $M$是否是$G$的正规子群？若是，请写出$G/M$中的全体元素；若不是，请说明理由。

(2)解: 由于矩阵加法可交换，因此$M$是$G$的正规子群。

$\overline{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}$ $a,b,c,d\in\{0,1\}$，共有16个陪集。这0表示陪集中矩阵在相应位置的数为偶数，否则为奇数。

# 2014期末试题

元素的阶

$k$ 阶轮换 $(i_1\, i_2 \ldots i_k)$ 的阶为$k$

若$\sigma=\tau_1\tau_2\ldots\tau_l$是不交轮换的分解式，则 $|\sigma|=[|\tau_1|,|\tau_2|,\ldots,|\tau_l|]$

八、(13分) 设$p$是任意素数，$S_p$是$p$元对称群，证明:

(1) $S_p$恰好有$(p-1)!$个$p$阶元。

(2) $S_p$恰好有$(p-2)!$个$p$阶子群。

证明:(1) 利用置换的轮换表示证明$p$阶元的结构是$p$阶轮换$(i_1 i_2 i_3 \ldots i_p)$，而$i_1 i_2 i_3 \ldots i_p$是$\{1,2,3,\ldots,p\}$的环排列，有$(p-1)!$种构成方式。

(2) $p$阶子群是素数阶群，都是循环群$<\sigma>$，$<\sigma>$的生成元$\sigma,\sigma^2,\ldots,\sigma^{p-1}$，恰好$p-1$个。若同一个$p$阶元属于两个$p$阶子群，则这两个子群相等。因为每个$p$阶元仅属于一个$p$阶子群，每个$p$阶子群恰含有$p-1$个$p$阶元，$(p-1)!$个$p$阶元必属于$(p-2)!$个不同的$p$阶子群。

# 2015期末试题

一、（12分） 设$R$是环，且对$\forall a \in R$ 都有$a^2 = a$.证明：

(1) $\forall a \in R$有$a + a = 0$;

(2) 如果$|R| > 2$，则$R$不是整环。

**证明：**

(1) $\forall a \in R$, $a+a=(a+a)(a+a)=a^2+a^2+a^2+a^2=a+a+a+a \Rightarrow a+a=0$.

(2) 假设$R$是整环，则$1 \in R$, 由于$|R|>2$, 存在$a \in R$, $a \neq 0,1$. 那么

$$(a-1)a=a^2-a=a-a=0.$$

从而推出$a-1$和$a$是零因子，与$R$是整环矛盾.

**(2) 也可以使用下面的证法，但需要证明$R$是交换环：**

$|R|>2$, $R$中存在两个不等的非0元素$a,b$. 若$ab=0$, 则$a,b$为零因子，$R$不是整环. 若$ab \neq 0$，则

$$ab(b-a)=ab^2-a^2b=ab-ab=0$$

$ab$与$b-a$为零因子. $R$也不是整环.

# 2015期末试题

二、（12分）设$f$ 是格 $\langle L_1, \preccurlyeq \rangle$ 到格 $\langle L_2, \preccurlyeq \rangle$ 的双射，且$f$ 满足：

对任意 $a, b \in L_1$，$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow f(a) \preccurlyeq f(b)$.

证明：$f(a) \vee f(\mathrm{b}) = f(a \vee b)$.

**证明：** 由保序性，容易证明 $f(a) \vee f(b) \preccurlyeq f(a \vee b)$.

由满射性，存在 $d$ 使得 $f(a) \vee f(b) = f(d)$. 由 $f(a) \preccurlyeq f(d)$ 推出 $a \preccurlyeq d$, 同理 $b \preccurlyeq d$. 于是，$a \vee b \preccurlyeq d$, 推出

$f(a \vee b) \preccurlyeq f(a) \vee f(b)$.

从而，$f(a) \vee f(b) = f(a \vee b)$.

# 2015期末试题

三、（12分）设$a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是正整数序列，证明存在整数$k$和$l$，$1 \le k \le l \le m$，使得$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$是$m$的倍数。

**证明：**

**设**

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\dots \\ S_m &= a_1 + a_2 + \cdots + a_m \end{aligned}$$

**$S_i$除以$m$的余数为$r_i, i = 1, 2, \dots, m$，若存在$r_j = 0$，则命题得证；否则由鸽巢原理有$r_i = r_j, i < j$. 因此$S_j - S_i$被$m$整除。取$k = i + 1, l = j$, 命题得证.**

# 2015期末试题

四、（12分）求解递推方程：

$$\begin{cases} a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 3^n \\ a_0 = 0,\ \ a_1 = 1. \end{cases}$$

**解: 特征方程为$x^2 - 7x + 10 = 0$，齐次通解为**

$$\overline{a_n} = c_1 2^n + c_2 5^n$$

**设特解为$P3^n$，代入方程得到$P = -9/2$. 因此原递推方程的通解为**

$$a_n = c_1 2^n + c_2 5^n - 9/2 \cdot 3^n.$$

**代入初值解得$c_1 = 8/3, c_2 = 11/6$，从而得到原递推方程的解为**

$$a_n = \frac{8}{3} \cdot 2^n + \frac{11}{6} \cdot 5^n - \frac{9}{2} \cdot 3^n$$

# 2015期末试题

五、（13分）方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ 满足

$1 \le x_1 \le 5,\ -2 \le x_2 \le 4,\ 0 \le x_3 \le 5,\ 3 \le x_4 \le 9$

的整数解的数目是多少？

**解：** 计算生成函数

$$(y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5)(y^{-2} + y^{-1} + \cdots + y^4)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5)(y^3 + y^4 + \cdots + y^9)$$

展开式中$y^{18}$的系数，结果是55。

# 2015期末试题

五、（13分）方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ 满足

$1 \le x_1 \le 5$, $-2 \le x_2 \le 4$, $0 \le x_3 \le 5$, $3 \le x_4 \le 9$

的整数解的数目是多少？

**另解（包含排斥原理）：令$\boldsymbol{y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 + 2, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - 3}$, 则原方程整数解一一对应于 $\boldsymbol{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16(*)}$ $\boldsymbol{0 \le y_1 \le 4, 0 \le y_2 \le 6, 0 \le y_3 \le 5, 0 \le y_4 \le 6}$, 的整数解。令$\boldsymbol{S}$是$\boldsymbol{(*)}$的非负整数解的集合，则$\boldsymbol{|S| = \binom{16+4-1}{16} = 969}$.**

**令$\boldsymbol{P_1}$为性质$\boldsymbol{y_1 \ge 5}$，$\boldsymbol{P_2}$为性质$\boldsymbol{y_2 \ge 7}$，$\boldsymbol{P_3}$为性质$\boldsymbol{y_3 \ge 6}$，$\boldsymbol{P_4}$为性质$\boldsymbol{y_4 \ge 7}$，集合$\boldsymbol{A_i}$为满足性质$\boldsymbol{P_i}$的解组成。例如，$\boldsymbol{A_1}$的个数与 $\boldsymbol{z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 11}$ 的非负整数解的个数相同，即$\boldsymbol{\binom{11+4-1}{11}}$.**

**最终有，$\boldsymbol{\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right| = 969 - (364 + 220 + 286 + 220) + (35 + 56 + 35 + 20 + 10 + 20) = 55}$.**

# 2015期末试题

六、（13分）考虑用红、蓝2种颜色着色 $3\times 3$ 方格棋盘，则在允许图形旋转和翻转的情况下，一共有多少种不同的着色方案？

**解: 关于中心旋转0度，±90度，180度，对应的置换分别为:**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

**(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)，(1397)(2684)(5)，(1793)(2486)(5)，(19)(28)(37)(46)(5).**

**关于两条对角线翻转，对应的置换分别为:**

**(3)(5)(7)(26)(19)(48)，(1)(5)(9)(24)(37)(68)**

**关于中间行或中间列翻转，对应的置换分别为:**

**(4)(5)(6)(17)(28)(39)，(2)(5)(8)(13)(46)(79)**

**共8种置换。由Polya定理知，不同的着色方案数**

$$= \frac{1}{8}\left[2^9 + 2\times 2^3 + 2^5 + 4\times 2^6\right]$$

$$= 102$$

# 2015期末试题

七、（13分）设$A=\{1,2,\dots,n\}$，$f$为$A$上的双射，令$f^m$表示$f$的$m$次复合，证明：

(1)存在正整数$i$和$j$，$i<j$，使得$\forall x\in A$有$f^i(x)=f^j(x)$；

(2)存在正整数$k$使得$\forall x\in A$有$f^k(x)=x$.

**证明：**

（1）考虑$S_n$，取序列$f,f^2,\dots f^{n!+1}$，由于双射函数有$n!$个，根据鸽巢原理必有$i,j$存在使得$f^i=f^j$.

（2）$S_n$关于合成运算构成有限群，单位元为恒等映射$I$，对于任意函数$f\in S_n$，$f$的阶存在，即存在$k$使得$f^k=I$.

# 2015期末试题

八、（13分） 群$G$的可以写成 $a^{-1}b^{-1}ab$ 形式的元素称作**换位子**。令 $C=\{g \mid g$是$G$中有限个换位子的乘积$\}$。 证明：

(1) $C$是$G$的正规子群；

(2) $G/C$是交换群；

(3) 若$N$是$G$的正规子群，并且$G/N$是交换群，那么 $C\subseteq N$.

**证明：**（1） 单位元$1\in C$, 故$C$非空；$C$的两个元素的乘积仍然是有限个换位子的乘积，因而仍是$C$的一个元素。一个换位子的逆仍是一个换位子，所以$C$的一个元的逆仍在$C$中。这样$C$是一个子群。

对 $\forall\, a\in G, g\in C, aga^{-1}=(aga^{-1}g^{-1})g\in C$, 所以$C$是$G$的正规子群。

（2） 令 $a,b\in G$, 则 $a^{-1}b^{-1}ab=c\in C$ . 由此得 $ab=bac, abC=bacC=baC$, 即 $aCbC=bCaC$, 故$G/C$是交换群。

# 2015期末试题

八、（13分） 群$G$的可以写成 $a^{-1}b^{-1}ab$ 形式的元素称作**换位子**。令 $C=\{g \mid g$是$G$中有限个换位子的乘积$\}$。 证明：

(1) $C$是$G$的正规子群；

(2) $G/C$是交换群；

(3) 若$N$是$G$的正规子群，并且$G/N$是交换群，那么 $C \subseteq N$.

**证明：**

（3）因为$G/N$是交换群，所以对$G$的任何两个元素$a$和$b$，有$(aN)(bN)=(bN)(aN)$，即$abN=baN$. 故存在$n \in N$ 使得$ab=ban$，所以$a^{-1}b^{-1}ab=n \in N$. 这样$N$含有一切换位子，因而包含$C$.

# 考试范围

- 教材：

  ~~十五章 15.1-4~~　　~~十六章 16.1~~

  十七章 17.1-7　　十八章 18.1-2

  十九章 19.1-2

  二十章 20.1　　~~Ramsey定理~~

  二十一章 21.1-4

  二十二章 22.1-6

  二十三章 23.1-4

- PPT讲义
- 考试范围：两者公共部分

我们在学校学到的最重要的东西就是 最重要的东西不可能在学校学到

——村上春树

# 考试与答疑安排

- 补作业的截止时间：6月9日20:00
- 考试时间：6月18日（周二）上午8:30-10:30
- 考试地点：二教101(> 1700012733，230人)，
  二教205(≤ 1700012733，92人)
- 答疑时间：6月15日（周六） 14:00-17:00
  19:00-21:00
- 答疑地点：理科一号楼1623N

**复习够充分，用不着焦虑；**

**复习不够充分，抓紧时间复习！**

# 谢 谢！