

一、利用留数定理计算下列积分

$$1) \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{1-2r \cos \theta + r^2} d\theta, -1 < r < 1$$

$$2) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(1+x^2)} dx$$

二、利用 Γ 函数计算下列积分

$$1) \int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x dx, 0 < \alpha < 1$$

$$2) \int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q dx, \operatorname{Re} p > -1, \operatorname{Re} q > -1$$

三、利用 Laplace 变换计算求 $y(x)$

$$\int_0^t \frac{y(x)}{\sqrt{t-x}} dx = t^\alpha, \alpha \geq 0$$

四、利用 δ 函数算出下列定积分的结果

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x + ai} dx, a > 0$$

五、计算积分

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$$