例 1 一质量为1.0kg 的小球系在长为1.0m 细绳下端，绳的上端固定在天花板上。起初把绳子放在与竖直线成 30° 角处，然后放手使小球沿圆弧下落。试求绳与竖直线成 10 ° 角时小球的速率。

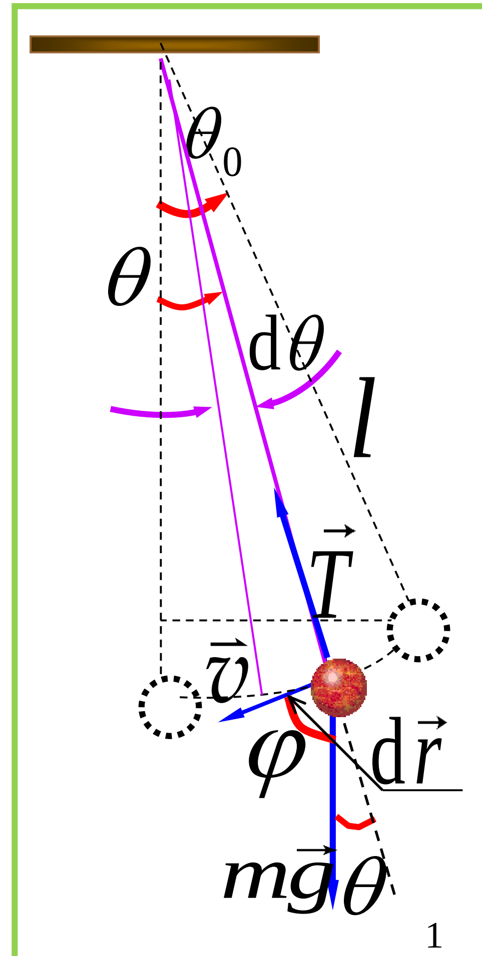
解： $\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\quad=\vec{T}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$=m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\quad=-mgl\,\mathrm{d}\theta\cos\varphi$$

$$=-mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$A=-mgl\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=mgl(\cos\theta-\cos\theta_0)$$



$m = 1.0\mathrm{kg} \qquad l = 1.0\mathrm{m}$

$\theta_0 = 30^\circ \qquad \theta = 10^\circ$

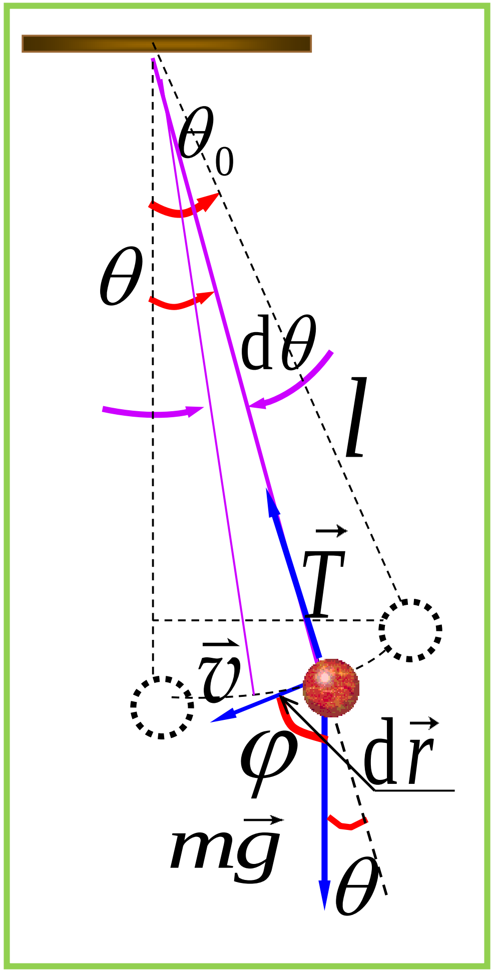
$$A = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

由动能定理

$$A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

得 $v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

$= 1.53\mathrm{m \cdot s^{-1}}$



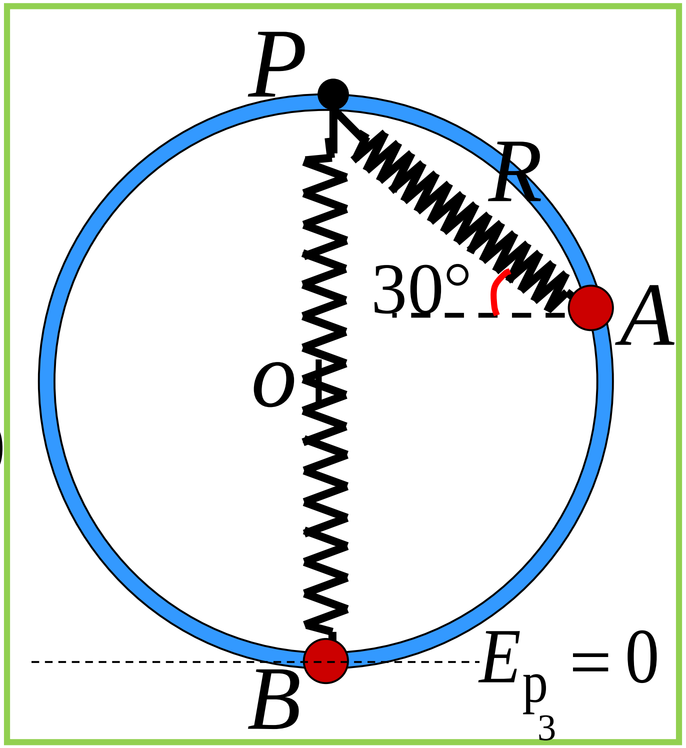
例2 有一轻弹簧，其一端系在铅直放置的圆环的顶点*P*，另一端系一质量为*m* 的小球，小球穿过圆环并在圆环上运动(不计摩擦)。开始小球静止于点 *A*，弹簧处于自然状态，其长度为圆环半径*R*；当小球运动到圆环的底端点*B*时,小球对圆环没有压力。求弹簧的劲度系数。

解 以弹簧、小球和地球为一系统，

$\because A \rightarrow B$ 只有保守内力做功

$\therefore$.系统机械能守恒 $E_B = E_A$

取图中点 B 为重力势能零点。

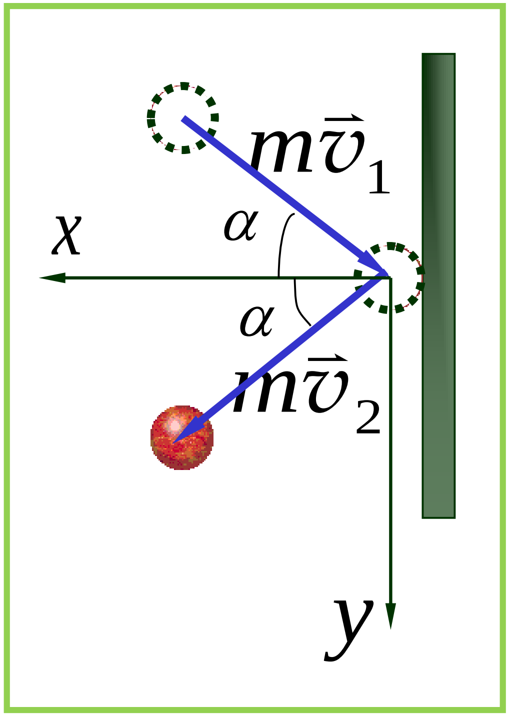


即：$$\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kR^2 = mg(2R - R\sin 30°)$$

又 $$kR - mg = m\frac{v_B^2}{R}$$ 所以 $$k = \frac{2mg}{R}$$

例3 一质量为0.05kg、速率为$10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的刚球,以与钢板法线呈45°角的方向撞击在钢板上,并以相同的速率和角度弹回来。设碰撞时间为0.05s.求在此时间内钢板所受到的平均冲力 $\overline{F}$ 。

解: 建立如图坐标系, 由动量定理得



$$\overline{F}_x \Delta t = mv_{2x} - mv_{1x}$$

$$= mv\cos\alpha - (-mv\cos\alpha)$$

$$= 2mv\cos\alpha$$

$$\overline{F}_y \Delta t = mv_{2y} - mv_{1y}$$

$$= mv\sin\alpha - mv\sin\alpha = 0$$

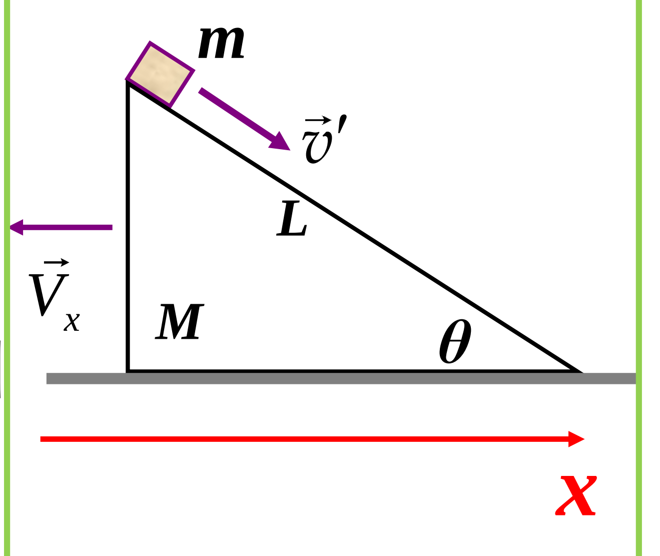
$$\overline{F} = \overline{F}_x = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t} = 14.1\mathrm{N}$$

$$\vec{F}_{板} = -\vec{F} = -14.1\mathrm{N}$$

方向沿 x 轴反向。

例4 已知：M，m，θ，L，各接触面光滑初始静止。

求：m自顶滑到底时，M的位移。



解： 对于M和m 构成的系统，建坐标如图

$$\because \sum_i F_{ix} = 0$$

$$\therefore MV_x + mv_x = p_{0x} = 0$$

由相对运动 $v_x = v'_x + V_x$

解得 $V_x = -\dfrac{mv'_x}{m+M}$ "—"表明位移与x轴反向。

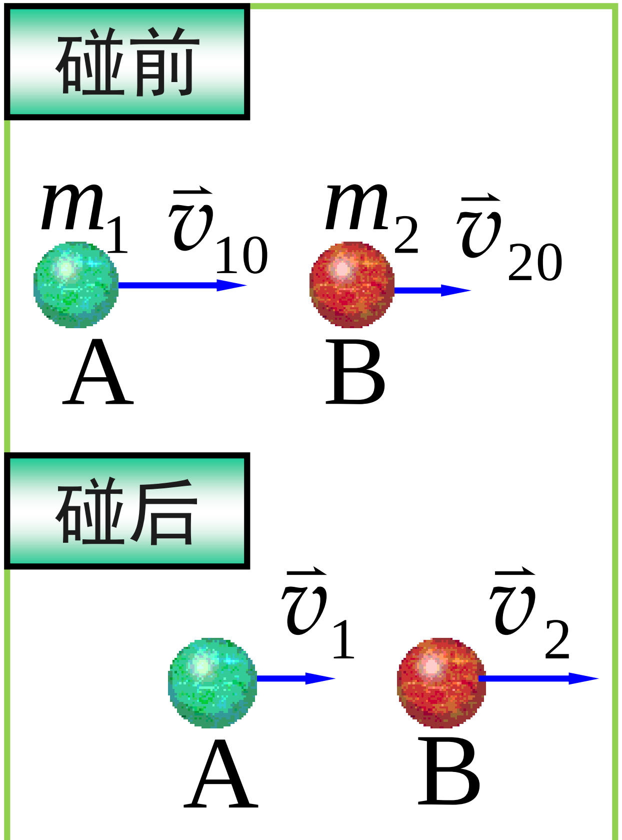
$$\therefore \Delta X = \int_0^t V_x \, \mathrm{d}t = -\frac{m}{m+M}\int_0^t v'_x \, \mathrm{d}t = -\frac{mL\cos\theta}{m+M}$$

例5 设有两个质量分别为 m_1和 m_2，速度分别为 $\vec{v}_{10}$和 $\vec{v}_{20}$的弹性小球作对心碰撞，两球的速度方向相同。若碰撞是完全弹性的,求碰撞后的速度 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$。

解 取初速度方向为正向，由动量守恒定律得

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

$$m_1 (v_{10} - v_1) = m_2 (v_2 - v_{20}) \quad (1)$$



由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (2)$$

$$m_1 (v_{10}^2 - v_1^2) = m_2 (v_2^2 - v_{20}^2) \quad (2)$$

$$m_1(v_{10}-v_1)=m_2(v_2-v_{20}) \quad (1)$$

$$m_1(v_{10}^2 - v_1^2)=m_2(v_2^2-v_{20}^2) \quad (2)$$

联立，解得

$$v_{10}+v_1=v_2+v_{20} \quad (3)$$

代入(1) 解得

$$v_1=\frac{(m_1-m_2)v_{10}+2m_2v_{20}}{m_1+m_2} \quad (4)$$

$$v_2=\frac{(m_2-m_1)v_{20}+2m_1v_{10}}{m_1+m_2} \quad (5)$$

讨论：

（1）若 $m_1=m_2$

则 $v_1=v_{20}$ ，$v_2=v_{10}$

（2）若 $m_2 >> m_1$ 且 $v_{20}=0$

则 $v_1\approx -v_{10}$ ，$v_2\approx 0$

（3）若 $m_2 << m_1$ 且 $v_{20}=0$

则 $v_1\approx v_{10}$ ，$v_2\approx 2v_{10}$