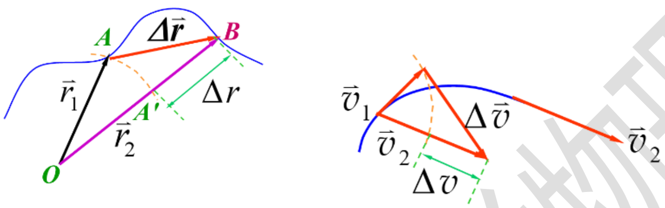
2019 春大学物理 C　　作业一

第一章 质点运动学

一、简答题

1. 在曲线运动中，$\Delta\vec{r}$ 与 $\Delta r=\Delta|\vec{r}|$，$\Delta\vec{v}$ 与 $\Delta v=\Delta|\vec{v}|$ 有何区别，试作图说明之。

答：$\Delta\vec{r}$ 是两位置矢量之差，即 $\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$，而 $\Delta r=\Delta|\vec{r}|$ 是两位置矢量的大小之差（矢量模之差），即 $\Delta r=|\vec{r}_2|-|\vec{r}_1|$，如图所示 $\Delta\vec{r}=\overrightarrow{AB}$，而 $\Delta r=\overline{A'B}$，同理，$\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$，$\Delta v=|\vec{v}_2|-|\vec{v}_1|$。



题 1 解图

2. 在变速圆周运动中，加速度的方向是什么，是否指向圆心？其切向加速度和法向加速度是如何引起的？

答： 圆周运动的加速度 $\vec{a}$ 方向总是指向圆周的凹侧，加速度 $\vec{a}$ 与 $\vec{v}$ 的夹角 $\alpha=\arctan\dfrac{a_n}{a_\tau}$。

其法向加速度 $a_n=\dfrac{v^2}{R}$ 指向圆心，改变圆周运动速度的方向，切向加速度 $a_\tau=\dfrac{dv}{dt}$ 沿轨道切线方向，改变圆周运动速度的大小。

二、选择题

3. 一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为

(A) $\dfrac{dr}{dt}$　(B) $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$　(C) $\dfrac{d|\vec{r}|}{dt}$　(D) $\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

[　D　]

4. 质点作曲线运动，$\vec{r}$ 表示位置矢量，$\vec{v}$ 表示速度，$\vec{a}$ 表示加速度，S 表示路程，a_t 表示切向加速度，下列表达式中，

(1) $dv/dt=a$，　(2) $dr/dt=v$，　(3) $dS/dt=v$，　(4) $|d\vec{v}/dt|=a_t$

(A) 只有(1)、(4)是对的　　(B) 只有(2)、(4)是对的

(C) 只有(2)是对的　　(D) 只有(3)是对的

[　D　]

5. 质点作半径为 R 的变速圆周运动时的加速度大小为（v 表示任一时刻质点的

速率）

(A) $\dfrac{dv}{dt}$ (B) $\dfrac{v^2}{R}$ (C) $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{v^2}{R}$ (D) $\sqrt{\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2}$

[D]

三、填空题

6. 质点沿半径为 R 的圆周运动，运动学方程为 $\theta=3+2t^2$ (SI)，则 t 时刻质点的法向加速度大小为 $a_n=$ __16Rt^2 m/s^2__；角加速度 $\beta=$ __4 rad/s^2__。

7. 一质点从静止出发沿半径 R=1 m 的圆周运动，其角加速度随时间 t 的变化规律是 $\beta=12t^2-6t$ (SI)，则质点的角速度 $\omega=$ __$4t^3-3t^2$ rad/s__；切向加速度 $a_t=$ __$12t^2-6t$ m/s^2__。

四、计算题

8. (教材 1-2 题) 一质点在 Oxy 平面内运动，其运动方程为 $x=2t$, $y=12-2t^2$，（SI 单位）。试求：质点的运动轨迹以及质点的速度和加速度。

分析 本题属于运动学的第一类问题，已知运动方程求质点运动的速度、加速度、位置矢量。本题只需由运动方程的分量式分别求出速度、加速度的分量，再由运动合成算出速度和加速度的大小和方向。

解 根据质点的运动方程 $x=2t$，$y=12-2t^2$ 得质点的运动轨迹为

$$y=12-2t^2=12-2\left(\frac{x}{2}\right)^2=12-\frac{x^2}{2}$$

(2) 设 x 方向的速度为 v_x，y 方向的速度为 v_y，则

$$v_x=\frac{dx}{dt}=2$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=-4t$$

所以质点的速度为 $\boldsymbol{v}=2\vec{\boldsymbol{i}}-4t\vec{\boldsymbol{j}}$

设 x 方向的加速度为 a_x，y 方向的加速度为 a_y，则

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=0$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=-4t \quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=-4$$

所以加速度为 $a=-4\vec{\boldsymbol{j}}$

9. (教材 1-6 题) 一艘正在沿直线行驶的汽艇，在发动机关闭后，其加速度方向与速度方向相反，满足 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=-kv^2$，式中 k 是常数。试证明汽艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度为 $v=v_0 e^{-kx}$，其中 v_0 是关闭发动机时的速度。

分析 本题是属于质点运动学的第二类问题，已知加速度表达式，求速度、位移矢量。处理此类问题，只需在给定初始条件下采用积分求解。

解 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}(-kv^2)$

分离变量积分得

$$\int_0^x -k\mathrm{d}x=\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

$$v=v_0e^{-kx}$$

10. (教材 1-7 题) 一质点在 xOy 平面内运动，其运动方程为 $\vec{r}=acos\omega t\vec{i}+bsin\omega t\vec{j}$，其中 a，b，ω 均为大于零的常量。(1) 试求质点在任意时刻的速度；(2) 证明质点运动的轨道为椭圆；(3) 证明质点的加速度恒指向椭圆中心。

分析 本题属于运动学的第一类问题，已知运动方程求质点运动的速度、加速度、轨迹。

解 (1) 由速度的定义得质点在任意时刻的速度为

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}=-a\omega\sin\omega t\vec{\boldsymbol{i}}+b\omega\cos\omega t\vec{\boldsymbol{j}}$$

(2) 由已知可得 t 时刻 x 轴、y 轴的坐标分别为

$$x=a\cos\omega t$$
$$y=b\sin\omega t$$

所以质点运动的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(3) 由加速度的定义得质点在任意时刻的加速度为

$$\vec{\boldsymbol{a}}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-a\omega^2\cos\omega t\vec{\boldsymbol{i}}-b\omega^2\sin\omega t\vec{\boldsymbol{j}}$$
$$=-\omega^2\left(a\cos\omega t\vec{\boldsymbol{i}}+b\sin\omega t\vec{\boldsymbol{j}}\right)=-\omega^2\vec{\boldsymbol{r}}$$

显然质点加速度 a 的方向与矢径 r 方向相反，即指向椭圆圆心。

11. (教材 1-11 题) 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s=v_0t-bt^2/2$ 运动，v_0、b 都是常量。求：(1) 任意 t 时刻的总加速度；(2) t 为何值时总加速度在数值上等于 b? ？(3) 当加速度达到 b 时，质点已沿圆周运行了多少圈？

分析 在自然坐标中，由给定运动方程 $s=s(t)$，对时间 t 求一阶、二阶导，即得质点沿曲线运动的速率 v 和切向加速度 a_τ，而法向加速度为 $a_n=v^2/R$。总的加速度为 $\vec{a}=a_n\vec{e}_n+a_\tau\vec{e}_\tau$。

质点 t 时间内通过的路程 $\Delta s = s_t - s_0$，圆周长为 $2\pi R$，质点所转的圈数即可求得。

解 (1) 质点作圆周运动的速率为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 - bt$$

切向加速度和法向加速度分别为

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -b，\quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

总加速度大小为 $a = \sqrt{{a_n}^2 + {a_\tau}^2} = \dfrac{\sqrt{(v_0 - bt)^4 + R^2 b^2}}{R}$

其方向与切线方向的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{a_n}{a_\tau} = \arctan[-\frac{(v_0 - bt)^2}{Rb}]$$

或写出矢量形式：

$$\vec{a} = a_n \vec{e}_n + a_\tau \vec{e}_\tau$$

(2) 由题意得 $a = b$，即 $\dfrac{\sqrt{(v_0 - bt)^4 + R^2 b^2}}{R} = b$

解得

$$t = \frac{v_0}{b}$$

(3) 当加速度达到 b 时，质点运动的路程为

$$\Delta s = s_t - s_0 = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2 = \frac{v_0^2}{b} - \frac{v_0^2}{2b} = \frac{v_0^2}{2b}$$

质点沿圆周运行的圈数为 $n = \dfrac{\Delta s}{2\pi R} = \dfrac{v_0^2}{4\pi bR}$