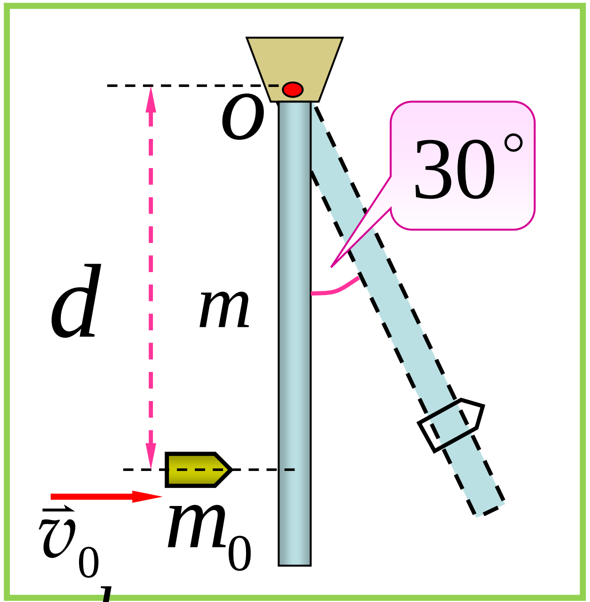
例1 长为l，质量为m的匀质细杆，可绕支点O并与杆垂直的水平固定轴自由转动。一质量为 m_0、速率为 v_0的子弹射入竿内距支点为d处，使竿的偏转角为30°。问子弹的初速率为多少？

解： 子弹和杆系统，在子弹射入杆的过程角动量守恒

$$m_0 v_0 d = (\frac{1}{3} m l^2 + m_0 d^2)\omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{3m_0 v d}{3m_0 d^2 + ml^2}$$



射入杆后，以子弹、细杆和地球为系统，机械能守恒。

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2 + m_0 d^2)\omega_0^2 = m_0 g d\left(1-\cos 30°\right) + mg\frac{l}{2}\left(1-\cos 30°\right)$$

$$v_0 = \frac{\sqrt{g\dfrac{(2-\sqrt{3})}{6}(ml + 2m_0 d)(ml^2 + 3m_0 d^2)}}{m_0 d}$$

力学

内 容 总 结

一、质点运动学

二、质点动力学

三、刚体力学

一、质点运动学

质点的运动

运动的绝对性、相对性，选择参考系，建立坐标系，选择计时零点

描述运动的物理量

位矢：$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

位移：$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

速度：$\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r} / \mathrm{d}t$

加速度：$\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v} / \mathrm{d}t$

角位移：$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

角速度：$\omega = \mathrm{d}\theta / \mathrm{d}t$

角加速度：$\beta = \mathrm{d}\omega / \mathrm{d}t$

线量与角量的关系

$v = R\omega \quad a_\tau = R\beta \quad a_n = R\omega^2$

描述运动的方法

解析法

运动函数：$\vec{r} = \vec{r}(t)$

直角坐标系中：

$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

微分 ↓ ↑ 积分

速度：$\vec{v} = \vec{v}(t)$

微分 ↓ ↑ 积分

加速度：$\vec{a} = \vec{a}(t)$

质点运动问题的求解

注意：矢量性、瞬时性、相对性

几种常见的运动

加速度： $\vec{a}=\vec{a}(t)$

匀速直线运动

$\vec{a}=0$

$(a_\tau=0)$

$(a_n=0)$

匀变速直线运动

$\vec{a}\neq 0$

$(a_\tau=\text{const})$

$(a_n=0)$

匀速圆周运动

$\vec{a}\neq 0$

$(a_\tau=0)$

$(a_n=v^2/R\neq 0)$

变速圆周运动

$\vec{a}\neq 0$

$(a_\tau=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t\neq 0)$

$(a_n=v^2/R\neq 0)$

曲线运动

$\vec{a}\neq 0$

$(a_\tau=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)$

$(a_n=v^2/\rho)$

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t$$

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0t+\tfrac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$v^2=v_0^2+2a(r-r_0)$$

$\Longleftrightarrow$

匀变速圆周运动

$$\omega=\omega_0+\beta t$$

$$\theta=\theta_0+\omega_0t+\tfrac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega^2=\omega_0^2+2\beta(\theta-\theta_0)$$

斜抛运动

$$x=(v_0\cos\theta)t$$

$$y=(v_0\sin\theta)t-\tfrac{1}{2}gt^2$$

二. 质点动力学

1. 牛顿运动定律

牛顿运动定律

第一定律

惯性

力

第二定律

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},\ \vec{p}=m\vec{v}$$

$$\vec{F}=m\vec{a}$$

第三定律

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$$

质点运动微分方程

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

直角坐标系分量式

$$\begin{cases}F_x=ma_x\\F_y=ma_y\\F_z=ma_z\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_\tau=ma_\tau\\F_n=ma_n\end{cases}$$

解题步骤

关键是加速度

① 认物体
② 看运动
③ 分析力
④ 列方程
⑤ 求解、讨论

概括为：“四个什么”
什么物体，在什么力作用下，
对什么参考系，作什么运动。

二. 质点动力学

2. 力对物体的累积效应

力的空间累积效应

力的功

$$A=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}A=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

动能

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2$$

保守力作功

$$\oint_L \vec{F}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=0$$

势能 E_p

机械能

质点的动能定理

$$A=E_{\mathrm{kB}}-E_{\mathrm{kA}}==\Delta E_k$$

质点系的动能定理

$$A_{总}=E_{\mathrm{kB}}-E_{\mathrm{kA}}==\Delta E_k$$

质点系的功能定理

$$A_{外力}+A_{非保守内}=E-E_0=\Delta E$$

系统机械能守恒

$$E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=E_{\mathrm{k0}}+E_{\mathrm{p0}}$$

条件：$A_{外力}+A_{非保守内}=0$

力的时间累积效应

动量

$$\vec{p}=m\vec{v}$$

力的冲量

$$\vec{I}=\int_0^t \vec{F}dt$$

质点的动量定理

$$\vec{I}=\int_0^t \vec{F}dt=\vec{p}_2-\vec{p}_1$$

质点系动量定理

$$\vec{I}=\int_0^t \vec{F}dt=\vec{p}_2-\vec{p}_1$$

系统动量守恒

$$\sum_i m_i\vec{v}_i=\sum_i m_i\vec{v}_{i0}$$

条件：$\sum_i \vec{F}_i=0$

三. 刚体力学

刚体的运动

- 刚体的平动
- 刚体的定轴转动
- 平动+转动

刚体的定轴转动

定轴转动运动学

- 角位置 $\theta(t)$
- 角位移 $\Delta\theta$
- 角速度 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
- 角加速度 $\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
- 匀变速转动
  $\omega=\omega_0+\beta t$
  $\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$
  $\omega^2=\omega_0^2+2\beta(\theta-\theta_0)$
- **线量与角量的关系**
  $v=R\omega \quad a_t=R\beta \quad a_n=R\omega^2$

定轴转动动力学

- 力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$
- 转动惯量 $J=\int r^2\,\mathrm{d}m$
- 转动定理 $\vec{M}=J\vec{\beta}$

定轴转动功能关系

- 力矩的功 $A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta$
- 转动动能 $E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$
- 动能定理
  $A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2}J\omega\mathrm{d}\omega$
  $=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$

角动量定理 角动量守恒

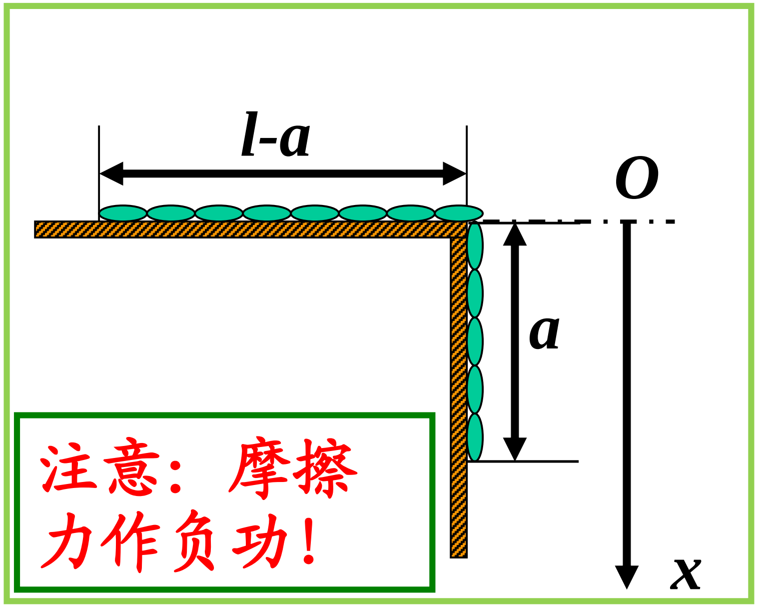
- 冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t$
- 角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ $=J\vec{\omega}$
- 角动量定理
  $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$
  $=J\vec{\omega}_2-J\vec{\omega}_1$
- 角动量守恒
  条件：$\vec{M}=0$
  $J\vec{\omega}$=衡量

质点运动与刚体定轴转动的对照

质点运动		刚体定轴转动	
速度与加速度	$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ $\quad \vec{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$	角速度与角加速度	$\vec{\omega}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t}$ $\quad \vec{\beta}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$
力	$\vec{F}$	力矩	$\vec{M}$
质量	m	转动惯量	J
动量	$\vec{p}=m\vec{v}$	角动量	$\vec{L}=J\vec{\omega}$
运动定律	$\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律	$\vec{M}=J\vec{\beta}$
动量定理	$\mathrm{d}\vec{p}=\vec{F}\mathrm{d}t$ $\int\vec{F}\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}\vec{p}$	角动量定理	$\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\mathrm{d}t$ $\int\vec{M}\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}\vec{L}$

	质点运动		刚体定轴转动
功	$A=\int \mathrm{d}A=\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功	$A=\int \mathrm{d}A=\int \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{\theta}$
功率	$P=\vec{F}\cdot\vec{v}$	力矩的功率	$P=\vec{M}\cdot\vec{\omega}$
动能	$E_k=\frac{1}{2}mv^2$	转动动能	$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$
动能定理	$A=\Delta E_k=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$	动能定理	$A=\Delta E_k=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$
动量守恒定律	$\vec{F}^{ex}=0$ $\vec{p}\sum m_i\vec{v}_i=$ 衡量	角动量守恒定律	$\vec{M}^{ex}=0$ $\vec{L}=\sum J\vec{\omega}=$ 恒量
机械能守恒定律	$A_{外}+A_{非}=0$ $E_k+E_p=\mathrm{const}$	机械能守恒定律	$A_{外}+A_{非}=0$ $E_{k转}+E_{k平}+E_p=\mathrm{const}$

例2 一链条总长为l，质量为m 。放在桌面上并使其一部分下垂，下垂的长度为a，设链条与桌面的滑动摩擦系数为μ，令链条从静止开始运动，则: (1) 到链条离开桌面时，摩擦力对链条做了多少功？(2) 链条离开桌面时的速率是多少？



解：(1) 建立坐标系如图所示，

则下垂长度为x 时，

$$f=\mu mg(l-x)/l$$

$$W_f=\int_a^l \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^l -\frac{\mu mg}{l}(l-x)\mathrm{d}x$$

$$=-\left[\frac{\mu mg}{l}(lx-\frac{1}{2}x^2)\right]_a^l=-\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2$$

(2) 对链条应用动能定理：

$$\sum W=W_P+W_f=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \because v_0=0 \quad \therefore W_P+W_f=\frac{1}{2}mv^2$$

$$W_P=\int_a^l m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^l \frac{mg}{l}x\mathrm{d}x=\frac{mg(l^2-a^2)}{2l}$$

$$W_f = -\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2$$

$$W_P = \int_a^l m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^l \frac{mg}{l} x dx = \frac{mg(l^2 - a^2)}{2l}$$

$$\sum W = W_P + W_f = \frac{1}{2} mv^2$$

$$\therefore \frac{mg(l^2 - a^2)}{2l} - \frac{\mu mg(l-a)^2}{2l} = \frac{1}{2} mv^2$$

$$\because \quad v = \sqrt{\frac{g}{l}}\left[(l^2 - a^2) - \mu(l-a)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

例3 一质量为 m 的物体悬于一条轻绳的下端，绳的另一端绕在一轮轴的轴上，如图所示。轴水平且垂直于轮轴面，其半径为 r，整个装置加在光滑的固定轴承之上。当物体从静止释放后，在时间 t 内下降了一段距离 s 。试求整个轮轴的转动惯量.

解: 对滑轮，滑轮所受力距，并根据**转动定律**

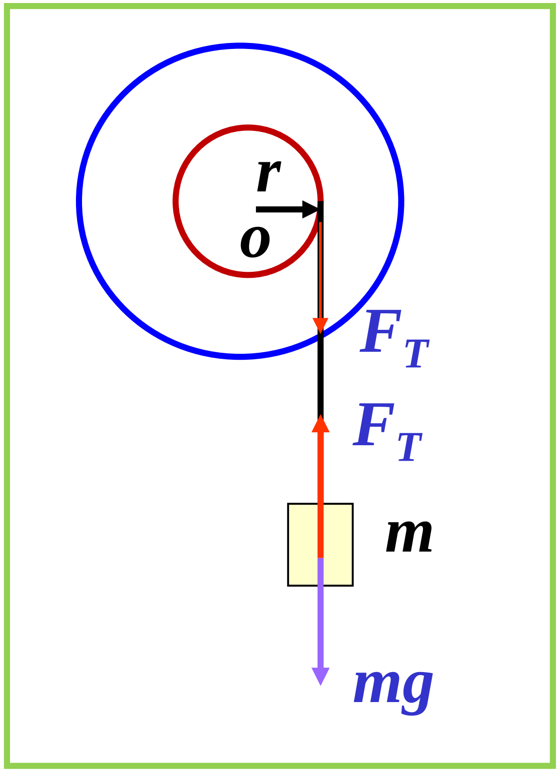
$$M_z = F_T r = J\beta,$$

滑轮的转动惯量 $J = \dfrac{F_T r}{\beta} \quad \cdots(1)$

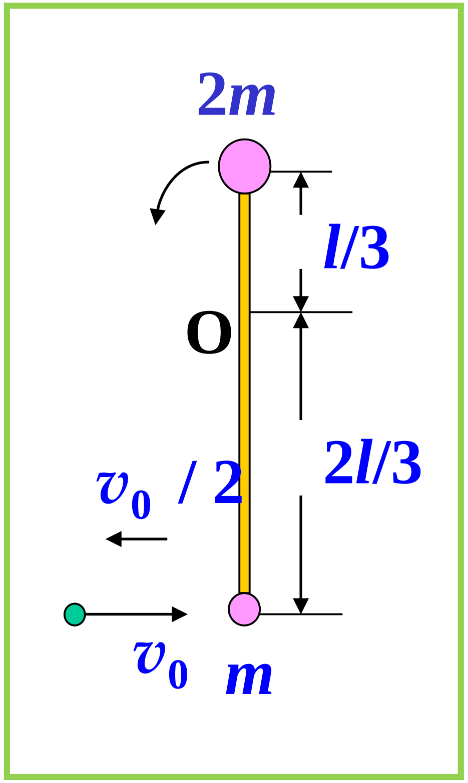
对重物： $mg - F_T = ma = m\beta r \cdots(2)$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\beta r t^2 \cdots(3)$$

由(1)，(2)，(3) 得 $J = mr^2\left(\dfrac{t^2 g}{2s} - 1\right)$



例4 如图所示， 长为 l 的轻杆，两端各固定一质量分别为 m 和 $2m$ 的小球，杆可绕水平光滑轴 O 在竖直面内转动，转轴 O 距两端分别为 $l/3$ 和 $2l/3$ 。原来杆静止在竖直位置。今有一质量为 m 的小球，以水平速度 v_0 与杆下端小球作对心碰撞，碰后以 $v_0/2$ 返回，试求碰撞后轻杆获得的角速度ω。



解： 由**角动量守恒**

$$m\frac{2}{3}l\cdot v_0 = m\frac{2}{3}l\cdot(-\frac{v_0}{2}) + m(\frac{2}{3}l)^2\omega + 2m(\frac{1}{3}l)^2\omega$$

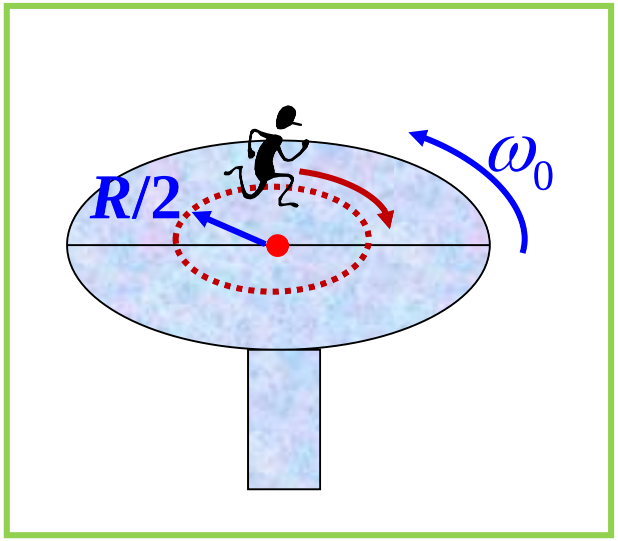
$$\therefore \omega = \frac{3v_0}{2l}$$

例5 在半径为 R 的具有光滑竖直固定中心轴的水平圆盘上，有一人(看作质点)静止站立在距转轴为 $R/2$ 处，人的质量 m 是圆盘质量 M 的 1/10，开始时盘载人相对地以角速度 ω_0 匀速转动。如果此人垂直圆盘半径相对于盘以速率v 沿与盘转动相反方向作圆周运动，已知圆盘对中心轴的转动惯量为 $MR^2/2$.

求：(1) 圆盘对地的角速度ω；(2) 欲使圆盘对地静止，人沿着半径为 $R/2$ 的圆周对圆盘的速度 v 的大小和方向。

解： (1) 由**角动量守恒**

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0+\frac{1}{4}mR^2\omega_0=\frac{1}{2}MR^2\omega+\frac{1}{4}mR^2\left(\omega-\frac{v}{\frac{R}{2}}\right)$$



解得 $$\omega=\omega_0+\frac{2}{21R}v\cdots(1)$$

(2) 若使盘静止，在(1) 式中令 $\omega=0$，得

$$v=-\frac{21}{2}\omega_0 R$$

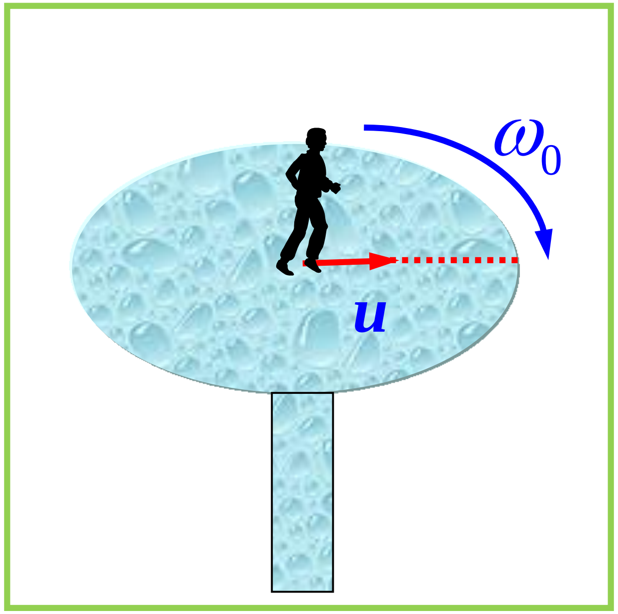
与原设定的速度方向相反, 即顺着ω_0 的方向。

例6 如图所示， 设一转台质量为 M，可绕竖直中心轴转动，初角速度为ω_0 。 有一质量为 m 的人(看作质点)以相对于转台的恒定速率 u 沿半径从转台中心向边缘走去，求转台转动的角速度与时间 t 的关系。

解： 由**角动量守恒**

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0+0=\frac{1}{2}MR^2\omega+(mr^2)\omega\cdots(1)$$

$$r=ut\cdots(2)$$



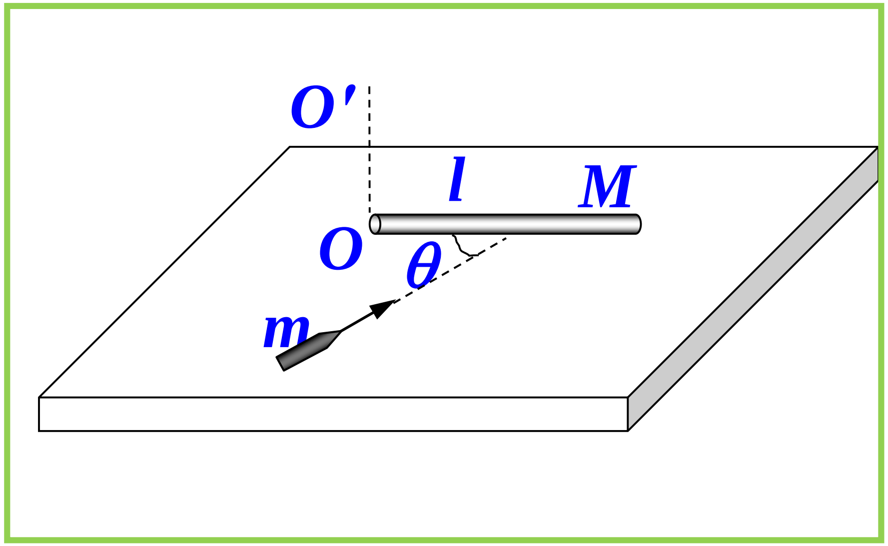
把(2)代入(1)，得：

$$\omega=\frac{\omega_0}{1+\dfrac{2mu^2t^2}{MR^2}}$$

例7 水平桌面上有一长$l=1.0\mathrm{m}$，质量$M=3.0\mathrm{kg}$的匀质细杆，细杆可绕通过端点O的竖直轴OO′转动，杆与桌面之间的摩擦系数$\mu=0.20$。开始时杆静止，有一颗子弹质量$m=20\mathrm{g}$，沿水平方向以$v=400$，且与杆成$\theta=30°$的速度射入杆的中点并留在杆内。试求：（1）子弹射入后，细杆开始转动的角速度；（2）子弹射入后，细杆的角加速度；（3）细杆转动多大角度后停下来。

解（1）将子弹和细杆作为一个系统，由子弹击中细杆前后系统角动量守恒得

$$mv\frac{l}{2}\sin\theta+0=\left(\frac{1}{3}Ml^2+m\frac{l}{4}^2\right)\omega_0$$



得细杆开始转动的角速度

$$\omega_0=\frac{mv\frac{l}{2}\sin\theta}{\left(\frac{1}{3}Ml^2+m\frac{l}{4}^2\right)}=2.0\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

（2）子弹射入后，细杆的角加速度；

细杆受到的摩擦力矩为
$$K=\int_0^l \frac{Mgx\mu \mathrm{d}x}{l}+\frac{mg\mu l}{2}=\frac{g\mu l}{2}(M+m)$$

根据刚体定轴转动定律
$$K=\left(\frac{1}{3}Ml^2+m\frac{l^2}{4}\right)\beta$$

可求得细杆的角加速度为
$$\beta=\frac{\frac{g\mu l}{2}(M+m)}{\left(\frac{1}{3}Ml^2+m\frac{l^2}{4}\right)}=3.0\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

(3) 设细杆转动θ后停下来，则
$$\theta=\frac{\omega_0^2}{2\beta}=0.67\,\mathrm{rad}$$