2019 春大学物理 C　　作业三

第三章 刚体的定轴转动

一、简答题

1. 刚体的最基本运动形式是什么，分析刚体运动与质点运动的区别和联系。

答： 刚体的最基本运动形式是平动和绕固定轴的转动，刚体的一般运动可看成是平动和绕固定轴转动的叠加。刚体平动时，刚体内的各个质点的运动位移、速度、加速度都是完全相同的，所以刚体的平动可用刚体内任一点的运动代表刚体的整体运动。刚体在定轴转动时，组成刚体的各个质点都在绕同一直线作圆周运动，各个质点的位移、速度、加速度不同，但各个质点在其转动平面内运动的角位移、角速度、角加速度确是相同的，因此可以用刚体内任一质点在其转动平面运动的角位移、角速度、角加速度代表刚体的转动情况。

2. 刚体定轴转动，规定逆时针方向为正方向，问在以下条件下刚体作什么运动：

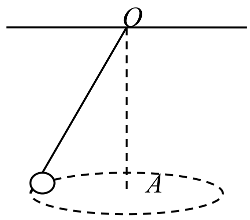
　(1) $\theta > 0$，而 $\omega < 0$；(2) $\omega > 0$，而 $\beta < 0$；(3) $\omega < 0$，而 $\beta < 0$

答： (1) $\theta > 0$，而 $\omega < 0$，表示刚体的角坐标为正，且沿顺时针方向转动；

　(2) $\omega > 0$，而 $\beta < 0$，表示刚体沿逆时针方向减速运动；

　(3) $\omega < 0$，而 $\beta < 0$，表示刚体沿顺时针方向加速运动。

3. 一质量为 m 的小球系于绳的一端，在光滑圆锥面上绕 Z 轴作圆周运动，分析小球动量是否守恒？机械能是否守恒？角动量是否守恒？



答： 小球受到绳子的拉力和重力，所受外力不等于零，动量不守恒。但拉力和重力与小球的速度方向垂直都不作功，机械能守恒。系统相对于 O 点外力矩不等于零(重力矩不为零)，角动量不守恒。系统相对于 A 外力矩等于零，角动量守恒。

4. 花样溜冰运动员在表演绕其自身快速旋转这一动作，利用了什么原理？

答： 花样溜冰运动员利用角动量守恒定律来完成。花样溜冰运动员在作旋转动作时，先将两臂和腿伸开，旋转起来，转动惯量 J_1，角速度 ω_1，然后两臂和腿突然收拢，使转动惯量减小为 J_2，获得角速度 ω_2。由于旋转过程中运动员对轴的合外力矩为零，故角动量守恒，即 $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$。由于 $J_1 > J_2$，所以 $\omega_1 < \omega_2$，转速加快。停止的时候，重新把两臂和腿伸开，降低转速，运动员平稳地停下来。

二、选择题

5. 一人造地球卫星到地球中心 O 的最大距离和最小距离分别是 R_A 和 R_B。设卫星对应的角动量分别是 L_A、L_B，动能分别是 E_{KA}、E_{KB}，则应有

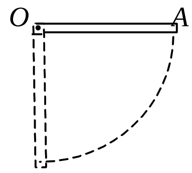
　(A) $L_B > L_A$，$E_{KA} > E_{KB}$　(B) $L_B > L_A$，$E_{KA} = E_{KB}$

　(C) $L_B = L_A$，$E_{KA} = E_{KB}$　(D) $L_B < L_A$，$E_{KA} = E_{KB}$

　(E) $L_B = L_A$，$E_{KA} < E_{KB}$

[E]

6. 均匀细棒 OA 可绕通过其一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，如图所示。今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆动到竖直位置的过程中，下述说法哪一种是正确的？



(A) 角速度从小到大，角加速度从大到小

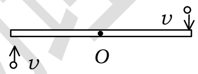
(B) 角速度从小到大，角加速度从小到大

(C) 角速度从大到小，角加速度从大到小

(D) 角速度从大到小，角加速度从小到大

[A]

7. 光滑的水平桌面上，有一长为 $2L$、质量为 m 的匀质细杆，可绕过其中点且垂直于杆的竖直光滑固定轴 O 自由转动，其转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$，起初杆静止。桌面上有两个质量均为 m 的小球，各自在垂直于杆的方向上，正对着杆的一端，以相同速率 v 相向运动，如图所示。当两小球同时与杆的两个端点发生完全非弹性碰撞后，就与杆粘在一起转动，则这一系统碰撞后的转动角速度应为：



俯视图

(A) $\dfrac{2v}{3L}$ (B) $\dfrac{4v}{5L}$ (C) $\dfrac{6v}{7L}$ (D) $\dfrac{8v}{9L}$ (E) $\dfrac{12v}{7L}$

[C]

8. 一水平圆盘可绕通过其中心的固定竖直轴转动，盘上站着一个人。把人和圆盘取作系统，当此人在盘上随意走动时，若忽略轴的摩擦，此系统

(A) 动量守恒 (B) 机械能守恒 (C) 对转轴的角动量守恒

(D) 动量、机械能和角动量都守恒 (E) 动量、机械能和角动量都不守恒

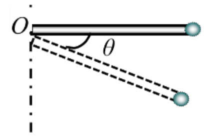
[C]

三、填空题

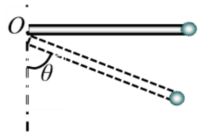
9. 一质量为 m 的质点沿着一条曲线运动，其位置矢量在空间直角坐标系中的表达式为 $\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$，其中 a、b、ω 皆为常量，则此质点对原点的角动量 L = $\underline{m\omega ab}$；此质点所受对原点的力矩 M = $\underline{\quad 0 \quad}$。

10. 半径为 r=1.5m 的飞轮，初角速度 ω_0=10rad·s^{-1}，角加速度 β=-5rad·s^{-2}，则在 t= $\underline{\quad 4s \quad}$ 时角位移为零，而此时边缘上点的线速度 v＝$\underline{15m\cdot s^{-1}}$。

11. 一长为 l，质量可以忽略的直杆，可绕通过其一端的水平光滑轴在竖直平面内作定轴转动，在杆的另一端固定着一质量为 m 的小球，如图所示。现将杆由水平位置无初转速地释放。则杆刚被释放时的角加速度 β_0 = $\underline{\quad g/l \quad}$，杆与水平方向夹角为 60°时的角加速度 β = $\underline{\quad g/2l \quad}$。



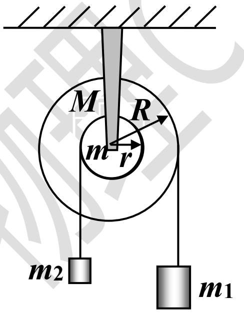
12. 长为 L，质量为 m 的匀质细杆，可绕过杆的端点 O 并与杆垂直的水平固定轴转动。杆的另一端连接一个质量为 m 的小球。杆从水平位置由静止开始自由下摆，忽略轴处的摩擦，当杆转到与竖直方向成 θ 角时，小



球与杆的角速度为$\omega=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{g\cos\theta}{L}}$。

四、计算题

13. (教材 3-3 题) 如图，一个固定在一起的两个同轴薄圆盘，可绕通过盘心且垂直于盘面的光滑水平轴 O 转动，大圆盘质量为 M，半径为 R；小圆盘质量为 m，半径为 r；两圆盘边缘上都绕有细线，分别挂有质量为 m_1，m_2 的物体（$m_1>m_2$）。系统从静止开始在重力作用下运动，不计一切摩擦。求(1)圆盘角加速度 (2)各段绳的张力。



解：$m_1g-T_1=m_1a_1$

$$T_1R-T_2r=\frac{1}{2}(MR^2+mr^2)\beta$$

$$T_2-m_2g=m_2a_2$$

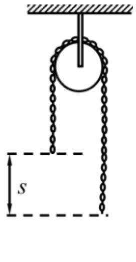
以及$\begin{cases}a_1=R\beta\\a_2=r\beta\end{cases}$

解得：$$\beta=\frac{\left(m_1R\text{-}m_2r\right)g}{\frac{1}{2}(MR^2+mr^2)+m_1R^2+m_2r^2}$$

$$T_1=\frac{m_1g\left[\frac{1}{2}(MR^2+mr^2)+m_2r\left(R+r\right)\right]}{\frac{1}{2}(MR^2+mr^2)+m_1R^2+m_2r^2}$$

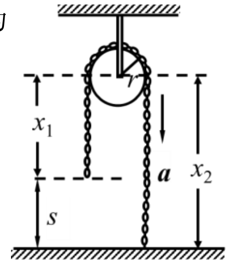
$$T_2=\frac{m_2g\left[\frac{1}{2}(MR^2+mr^2)+m_1r\left(R+r\right)\right]}{\frac{1}{2}(MR^2+mr^2)+m_1R^2+m_2r^2}$$

14. (3-4 题) 质量为 m_0 的匀质圆盘，可绕通过盘中心且垂直于盘的固定光滑轴转动，绕过盘的边缘挂有质量为 m，长为 l 的匀质柔软绳索，设绳与圆盘间无相对滑动。求当圆盘两侧绳长之差为 s 时，绳的加速度大小。



分析 如图所示将软绳分成三部分考虑，x_1 段、x_2 段绳与盘切点处的张力不同，这两点张力力矩的差值提供了圆盘和圆盘上软绳转动角动量。

解 设任一时刻圆盘两侧的绳长分别为x_1，x_2，选长度为x_1，x_2的两段绳和绕着绳的盘为研究对象，设a为绳的加速度，β为盘的角加速度，r为盘的半径，ρ为绳的线密度，且绳与盘切点处的张力分别为T_1，T_2，则



$$\rho = m/l$$
$$a = \beta r$$
$$x_2 \rho g - T_2 = x_2 \rho a$$
$$T_1 - x_1 \rho g = x_1 \rho a$$
$$\left(T_2 - T_1\right) r = \left(\frac{m_0}{2} + \pi r \rho\right) r^2 \beta$$

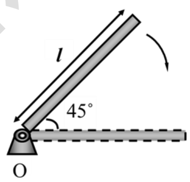
解上述方程组，并利用$l = \pi r + x_1 + x_2$，$s = x_2 - x_1$得

$$a = \frac{smg}{\left(m + m_0/2\right) l}$$

15. (3-5 题) 一根长为 l、质量为 m 的均匀直棒可绕其一端，且与棒垂直的水平光滑固定轴转动，抬起另一端使棒向上与水平面成 45°，然后无初速转速地棒释放。已知棒对轴的转动惯量为$\frac{1}{3}mL^2$，设$l = 2\text{m}$，求：

(1) 放手时棒的角加速度；

(2) 棒转到水平位置时的角速度。



分析 根据刚体定轴转动定律很容易得出杆的角加速度。已知角加速度运用角速度和角加速度运动学关系就可得出角速度。还有另一种求解角速度的方法，在杆转动过程中只有杆的重力做功，因此系统能量守恒，由此可以得出角速度。

解 (1) 对杆进行受力分析，根据刚体定轴转动定理可得

$$M = mg\frac{l}{2}\cos\theta = J\beta\text{，}\quad J = \frac{1}{3}mL^2$$

故角加速度为 $$\beta = \frac{3g\cos\theta}{2l} = 10.39\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

(2) ∵ $$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

分离变量积分得

$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega = \int_0^{\theta}\frac{3g\cos\theta}{2l}\mathrm{d}\theta$$

可求得角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}} = 4.56\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

或根据能量守恒求角速度：

由分析可知细杆与地球的系统能量守恒，则

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

可求得角速度为 $\omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$

或根据转动的动能定理有：$A=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

所以，$\int_0^{45^\circ} mg\frac{l}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta=mg\frac{l}{2}\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2$

可求得角速度为 $\omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$

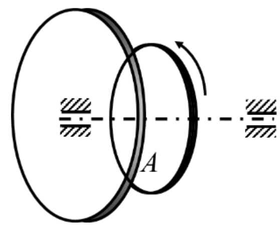
16. 一转动惯量为 J 的圆盘绕一固定轴转动，起初角速度为 ω_0。设它所受阻力矩与转动角速度成正比，即 $M=-k\omega$（k 为正的常数），求圆盘的角速度从 ω_0 变为 $\omega_0/2$ 时所需要的时间。

解：根据转动定律得 $J\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t=-k\omega$，$\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}=-\frac{k}{J}\mathrm{d}t$

两边积分得 $\int_{\omega_0}^{\omega_0/2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}=-\int_0^t\frac{k}{J}\mathrm{d}t$，$\ln 2=kt/J$，$t=(J\ln 2)/\mathrm{k}$

17. (教材 3-7 题) 如图所示，两飞轮 A 和 B 的轴杆在同一中心线上，设 A 轮、B 轮的转动惯量分别为 $J_A=1.0\mathrm{kg\cdot m^2}$ 和 $J_B=2.0\mathrm{kg\cdot m^2}$。开始时，A 轮转速为 $3\pi\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，B 轮静止然后两轮"啮合"，使两轮转速相同，啮合过程中无外力矩作用，求(1) 两轮啮合后的共同角速度 ω，(2) 两轮各自所受的冲量矩。

解：(1) 由角动量守恒定律有



$$J_A\omega_{A0}+0=\left(J_A+J_B\right)\omega$$

得 $\omega=\frac{J_A\omega_{A0}}{\left(J_A+J_B\right)}$

由角动量定理有 $\int_0^t\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}-\vec{L}_0$

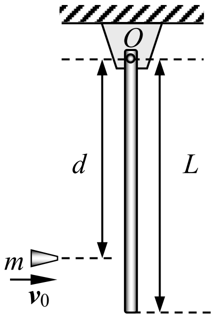
A 轮所受的冲量矩 $\int_0^t M\mathrm{d}t=J_A\omega-J_A\omega_{A0}=-2\pi\mathrm{N\cdot m\cdot s}$

B 轮所受的冲量矩 $\int_0^t M\mathrm{d}t=J_B\omega-J_B\omega_{A0}=2\pi\mathrm{N\cdot m\cdot s}$

18. (3-9 题)如图所示，一个长为 L，质量为 m_0 的匀质细杆，可绕通过一端的水平轴 O 转动，开始时杆自由悬挂。一质量为 m 的子弹，以水平速度 v_0 射入杆中而不复出，入射点离 O 点的距离为 d。试问：（1）子弹射入杆后杆所获得的角速度；（2）子弹射入杆的过程中（设经历时间为 Δt），杆的上端受轴的水平和竖直分力各多大？（3）若要使杆的上端不受水平力作用，子弹的入射位置应在何处（该位置称为打击中心）？

分析 子弹射入细杆后，子弹和细杆将一起以一定的角速度绕 O 点转动。若将子弹和细杆作为一个系统，因系统不受外力矩作用，故系统角动量守恒。根据动量定理，系统动量的增量等于合外力对物体作用的冲量，可以确定杆上端所受力的大小。

解 （1）将子弹和细杆作为一个系统，根据角动量守恒有



$$mv_0d+0=\left(\frac{1}{3}m_0L^2+md^2\right)\omega$$

求得子弹射入杆后的角速度

$$\omega=\frac{3mv_0d}{m_0L^2+3md^2}$$

（2）子弹射入杆的过程中（设经历时间为 Δt），杆的上端受轴的水平和竖直分力分别为F_x，F_y，水平方向上满足动量定理

$$F_x\Delta t=P_2-P_1=m_0\frac{L\omega}{2}+md\omega-mv_0$$

得杆的上端受轴的水平分力为

$$F_x=\left(m_0\frac{L\omega}{2}+md\omega-mv_0\right)\Big/\Delta t$$

竖直方向忽略子弹的重量，由动量定理得

$$(F_y-m_0\omega^2\frac{L}{2}-m_0g)\Delta t=0$$

得杆的上端受轴的竖直分力为

$$F_y=m_0\omega^2\frac{L}{2}+m_0g$$

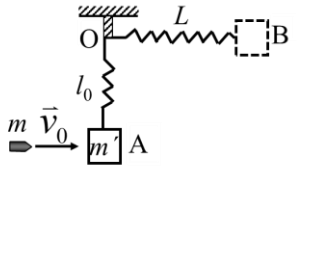
（3）若要使杆的上端不受水平力作用，子弹的入射位置应满足

$$m_0\frac{L\omega}{2}+md\omega-mv_0=0$$

得子弹的入射位置　　$d=\dfrac{2}{3}L$

19. (3-10 题) 一光滑水平面上，质量为 m' 的小木块在劲度系数为 k 的轻弹簧一端，弹簧另一端固定在 O 点，开始时，木块与弹簧静止在 A 点，且弹簧自然长度为 l_0。一质量为 m 的子弹以初速度 v_0 击入木块并嵌入在木块内。当木块到达 B 点时，弹簧的长度为 L，且 OB⊥OA，求木块到达 B 点时的速度。

解：由动量守恒



$$mv_0=(m+m')v_1$$

由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}(m+m')v_1^2=\frac{1}{2}(m+m')v_2^2+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

由角动量守恒

$$\frac{1}{2}(m+m')v_1l_0=\frac{1}{2}(m+m')v_2l\sin\theta$$

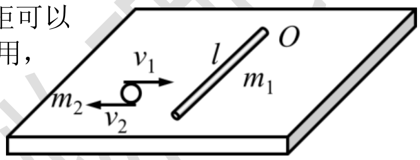
联立求解方程组求得

$$v_2=\frac{1}{(m+m')}\sqrt{m^2v_0^2-k(l-l_0)^2(m+m')}$$

速度方向（与水平方向的夹角）

$$\sin\theta = \frac{mv_0 l_0}{l\sqrt{m^2 v_0^2 - k(l-l_0)^2\left(m+m'\right)}}$$

20. (3-11 题) 如图所示，一质量为 m_1，长为 l 的均匀细棒，静止水平放置在动摩擦系数 μ 的水平桌面上，它可绕通过其端点 O，且与桌面垂直的固定光滑轴 OO' 转动。另有一水平运动的质量为 m_2 的小滑块，从侧面垂直于棒与棒的另一端 A 相撞，设碰撞时间极短。已知滑块在在碰撞前、后的速度分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$，求碰撞后从细棒开始转动到停止转动过程所需要的时间。



分析 将滑块和细杆作为一个系统，碰撞瞬间，摩擦力矩可以近似忽略，系统角动量守恒。细杆转动后受到摩擦力矩的作用，根据刚体定轴转动定律可以确定角加速度。

解：将滑块和细杆作为一个系统，由滑块击中细杆前后系统角动量守恒得

$$m_2 v_1 l = \frac{1}{3}m_1 l^2\omega - m_2 v_2 l\frac{l}{2}$$

得细杆开始转动的角速度

$$\omega = \frac{3m_2\left(v_1+v_2\right)}{m_1 l}$$

细杆受到的摩擦力矩为

$$M = \int_0^l \frac{\mu m_1 g x \mathrm{d}x}{l} = \frac{1}{2}\mu l m_1 g$$

根据刚体定轴转动定律

$$M = \frac{1}{3}m_1 l^2\beta$$

可求得细杆的角加速度为

$$\beta = \frac{\frac{g\mu l}{2}}{l^2} = \frac{g\mu}{2l} = \text{const}$$

设细杆转动 θ 后停下来，则

$$\theta = \frac{\omega^2}{2\beta} = \frac{\left(\frac{3m_2\left(v_1+v_2\right)}{m_1 l}\right)^2}{2\frac{\quad}{2l}} = \frac{l}{g\mu}\left(\frac{3m_2\left(v_1+v_2\right)}{m_1}\right)^2$$

所以由角动量定理 $\int_0^t \vec{M}\mathrm{d}t = \vec{L} - \vec{L}_0$，有 $-\frac{1}{2}\mu m_1 g l\cdot t = 0 - \frac{1}{3}m_1 l^2\omega$

故需要的时间为：$t = \dfrac{2m_2\left(v_1+v_2\right)}{\mu m_1 g}$