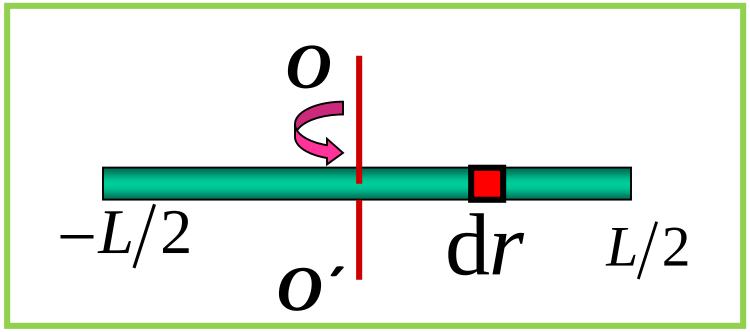
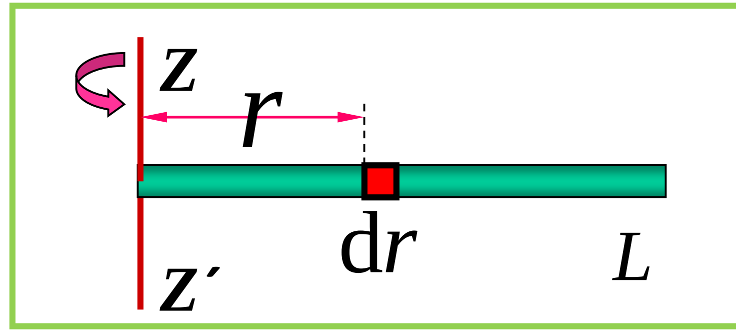
例1 一质量为 m 、长为 l 的均匀细长棒，求通过棒中心并与棒垂直的轴的转动惯量。





解 设棒的线密度为 λ，取一距离转轴 OO' 为 r处的质量元

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}J = r^2 \mathrm{d}m = \lambda r^2 \mathrm{d}r$$

$$J = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} r^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{12} \lambda l^3$$

$$= \frac{1}{12} m l^2$$

**如转轴过端点垂直于棒

$$J = \lambda \int_0^l r^2 \mathrm{d}r$$

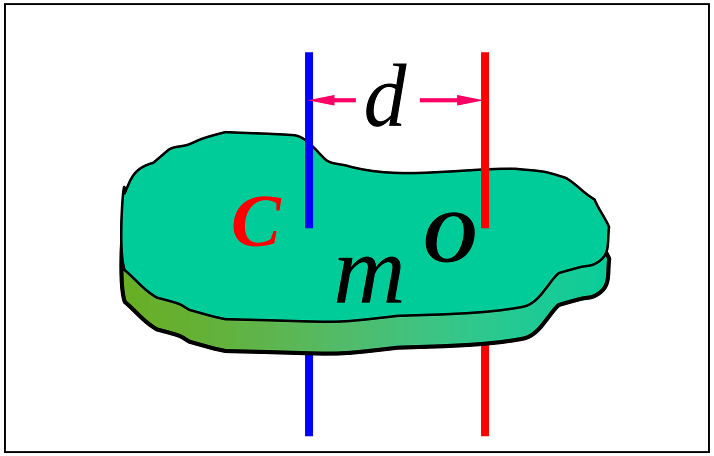
$$= \frac{1}{3} m l^2 = \frac{1}{12} m l^2 + m(\frac{1}{2} l)^2$$

选讲

平行轴定理

质量为 m 的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为 J_C，则对任一与该轴平行，相距为 d 的转轴的转动惯量为

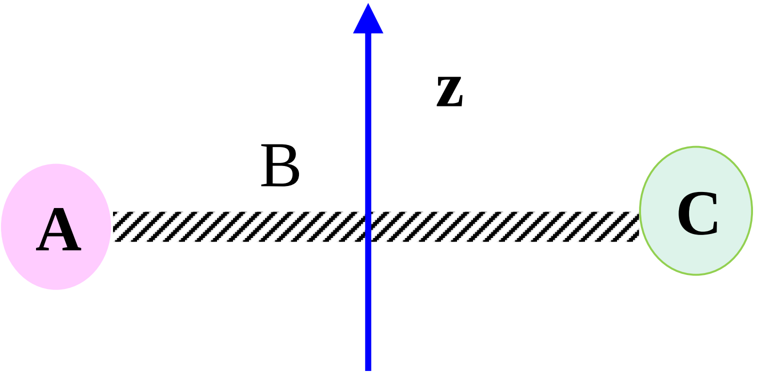
$$\boxed{J_O = J_C + md^2}$$



故通过质心轴的转动惯量最小

转动惯量叠加定理

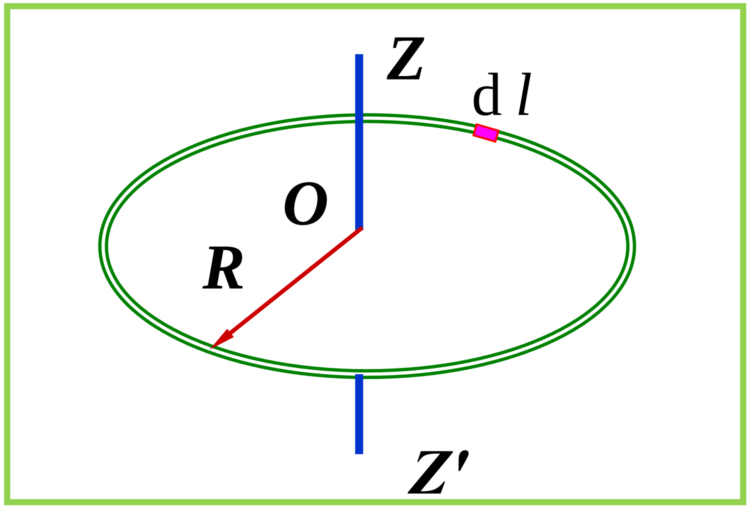
$$J_z = J_A + J_B + J_C$$



例2 一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆环，求通过环中心 O 并与环所在平面垂直的轴的转动惯量 。

解： 设圆环线密度为 λ ，

$$\lambda = \frac{m}{2\pi R}$$



在环上取微元 $\mathrm{d}\,l$

则 $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l$

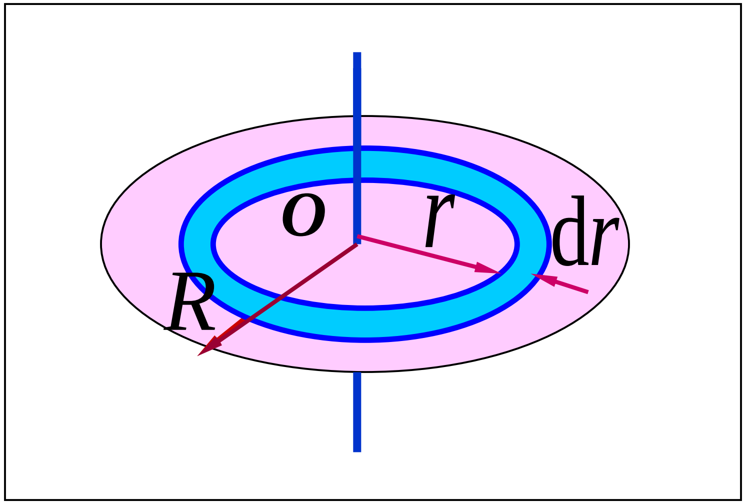
圆环对轴的转动惯量

$$dJ = R^2 \lambda dl$$

$$J = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda \mathrm{d}l = mR^2$$

例3 一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆盘，求通过盘中心 O 并与盘面垂直的轴的转动惯量 。

解： 设圆盘面密度为 σ ，在盘上取半径为 r ，宽为 $\mathrm{d}r$ 的圆环



圆环质量 $\mathrm{d}m = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$

圆环对轴的转动惯量

$$\mathrm{d}J = r^2 \mathrm{d}m = 2\pi \sigma r^3 \mathrm{d}r$$

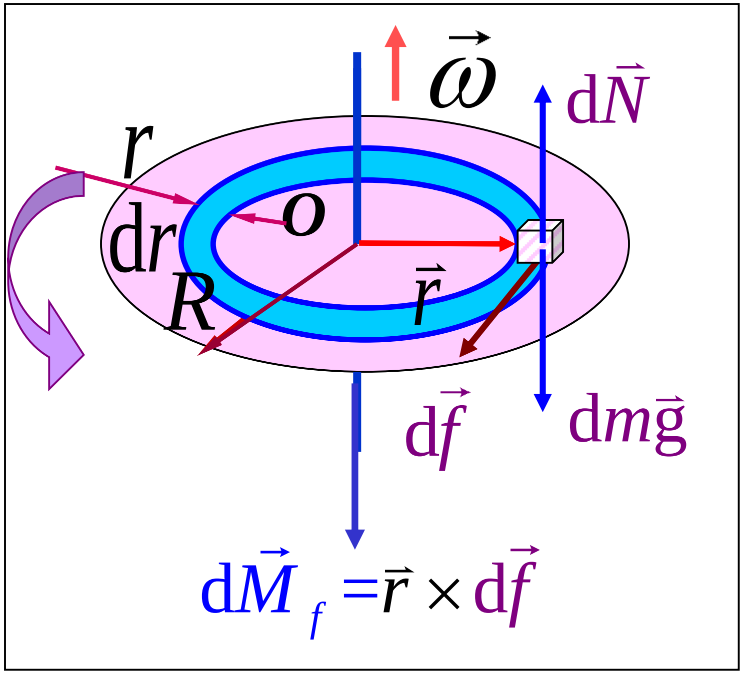
$$J = \int_0^R 2\pi \sigma r^3 \mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2}\pi R^4$$

而 $\sigma = m/\pi R^2$ 　　所以 $J = \frac{1}{2} m R^2$

圆盘对 P 轴的转动惯量 　　$J_P = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2$

➢转动惯量的大小取决于刚体的质量、形状及转轴的位置 。

例1 一匀质圆盘质量为m，半径为R，绕过中心垂直于盘面的竖直转轴以初速度ω_0转动，盘放置于滑动摩擦系数为μ的桌面上。求: (1) 经历多长时间圆盘停止转动? (2) 总共转了多少圈?



解: 设圆盘面密度为σ，在盘上取半径为r，宽为$\mathrm{d}r$ 的圆环

圆环质量 $\mathrm{d}m = \sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r$

$$m = \sigma \pi R^2$$

那么摩擦力矩为

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{M}}_f = \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{f}} = \mathrm{d}\boldsymbol{M}_f \hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M}_f = -\mu \boldsymbol{g}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{m} = -2\pi \mu \boldsymbol{g}\sigma \boldsymbol{r}^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{M}_f = \int \mathrm{d}\boldsymbol{M}_f = \int_0^R -2\pi \mu \boldsymbol{g}\sigma \boldsymbol{r}^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{2}{3}\pi \mu \boldsymbol{g}\sigma \boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{J}\beta$$

$$M_f=\int \mathrm{d}M_f=\int_0^R -2\pi\mu g\sigma r^2\mathrm{d}r=-\frac{2}{3}\pi\mu g\sigma R^3=J\beta$$

$$M_f=-\frac{2}{3}\pi\mu g\sigma R^3=-\frac{2}{3}\mu mgR=\frac{1}{2}mR^2\beta$$

$$\beta=-\frac{4\mu g}{3R}=\mathrm{const}$$ 圆盘上所有质点均做匀变速率圆周运动

$$\omega=\omega_0+\beta\Delta t$$

(1) 经历多长时间圆盘停止转动？

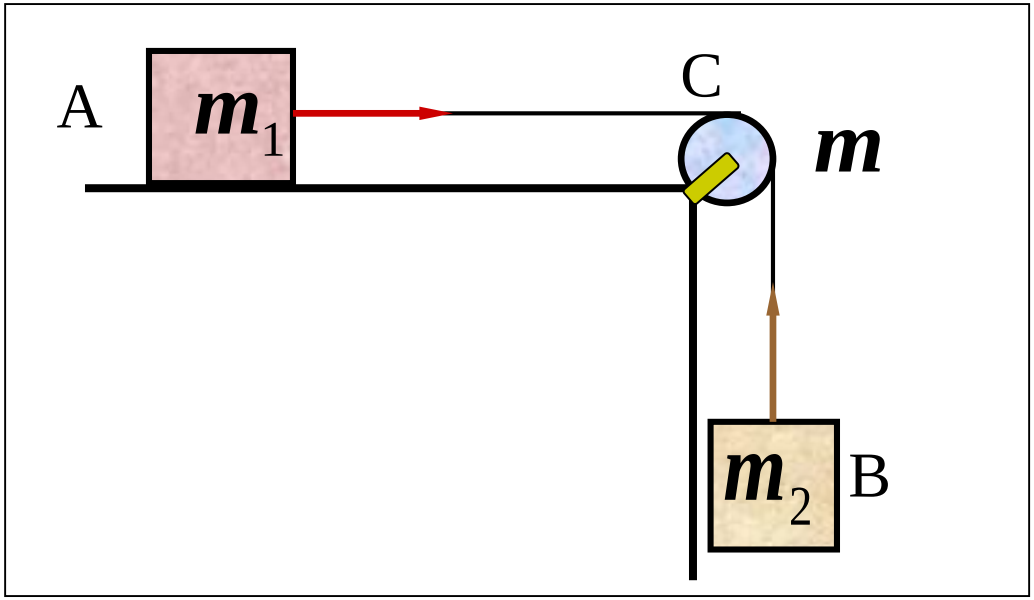
$$\Delta t=\frac{\omega-\omega_0}{\beta}=\frac{-\omega_0}{\beta}=\frac{3\omega_0\mu R}{4g}$$

(2) 总共转了多少圈

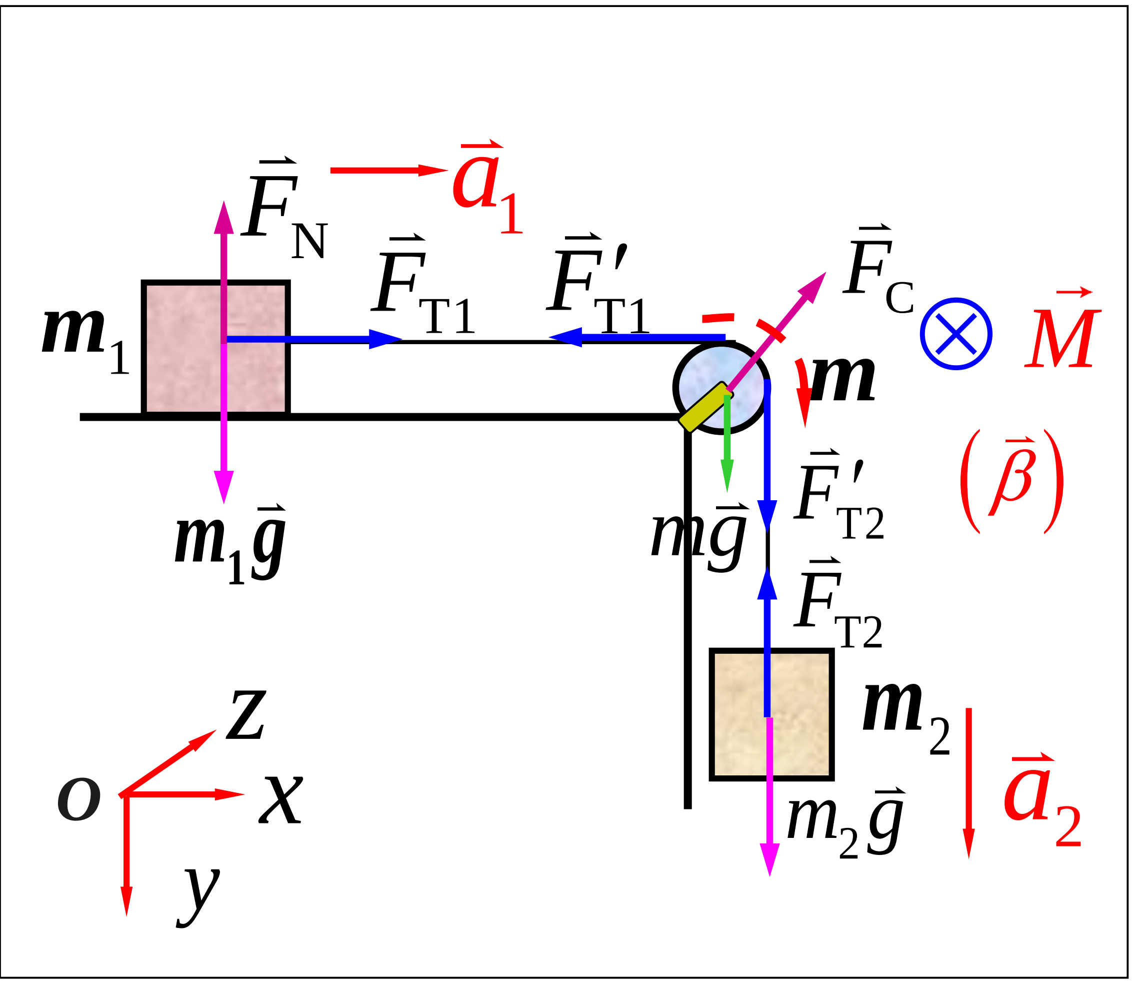
$$\Delta\theta=\theta-\theta_0=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\beta}=-\frac{\omega_0^2}{2\beta}=\frac{3\omega_0^2R}{8\mu g}\quad \Delta n=\frac{\Delta\theta}{2\pi}=\frac{3\omega_0^2R}{16\pi\mu g}$$

例2 阿特伍德机

（1）如图所示,不计绳子的质量和滑轮的质量及半径，滑轮与绳间只滚不滑，不计滑轮与轴间的摩擦力。且 $m_1 < m_2$ 。 求重物释放后，物体的加速度和绳的张力。



（2）如图所示,不计绳子的质量，滑轮的质量与半径分别为M和R，滑轮与绳间只滚不滑，不计滑轮与轴间的摩擦力。且$m_1 < m_2$ 。求重物释放后，物体的加速度和绳的张力。



取坐标如图

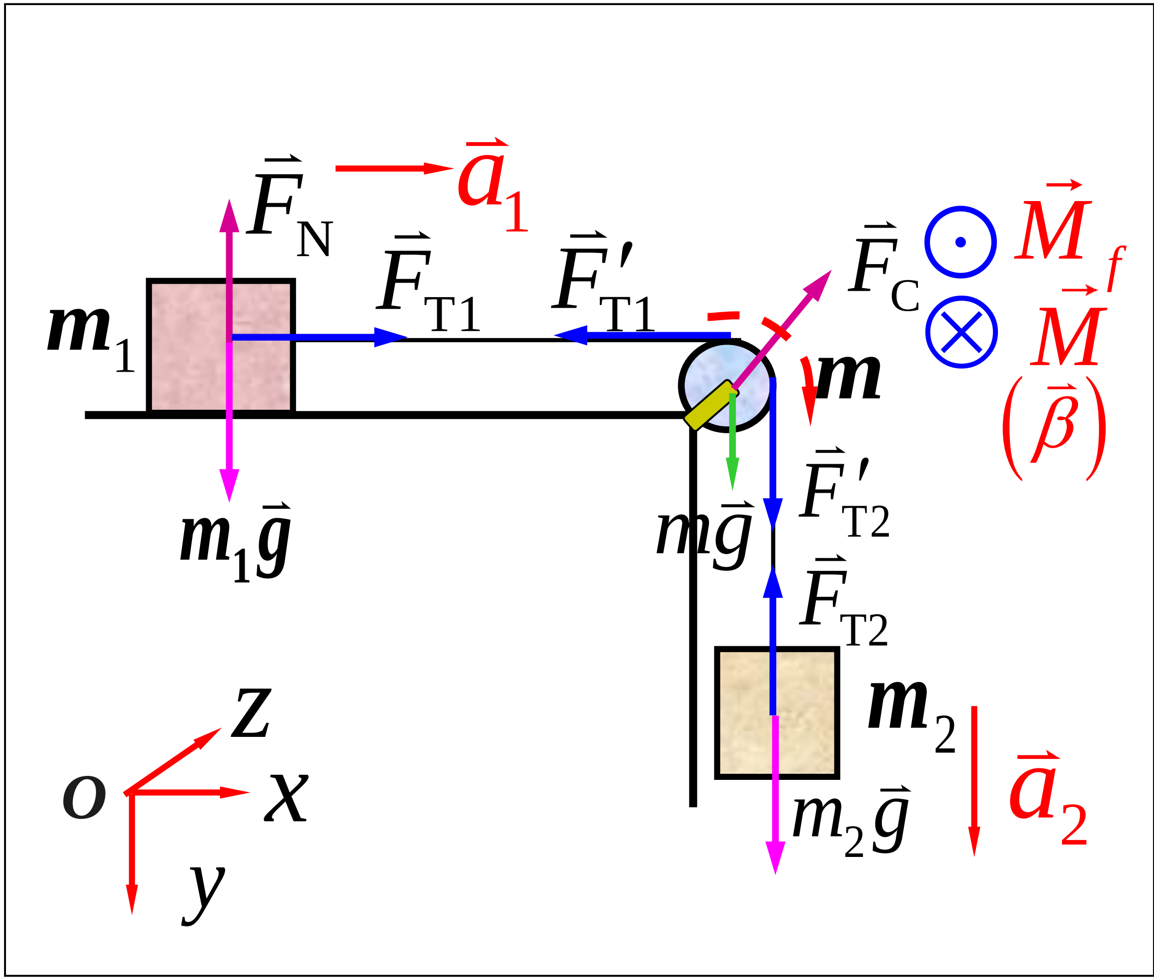
$$
\begin{cases}
F_{T1} = m_1 a_1 \\
m_2 g - F'_{T2} = m_2 a_2 \\
RF'_{T2} - RF'_{T1} = J\beta \\
a = R\beta \\
F_{T1} = F'_{T1}, \quad F_{T2} = F'_{T2}
\end{cases}
$$

由上述方程组解得：

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2 + m/2} \\[2ex] F_{\mathrm{T1}} = \dfrac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + m/2} \\[2ex] F_{\mathrm{T2}} = \dfrac{(m_1 + m/2) m_2 g}{m_1 + m_2 + m/2} \end{cases}$$

（3）如图所示,不计绳子的质量，滑轮的质量与半径分别为M和R，滑轮与绳间只滚不滑，若滑轮与轴承间的摩擦力不能忽略，并设它们间的摩擦力矩为M_f。求重物释放后，物体的加速度和绳的张力。

$$
\begin{cases}
F_{T1} = m_1 a \\
m_2 g - F_{T2} = m_2 a \\
RF_{T2} - RF_{T1} - M_f = J\beta \\
a = R\beta
\end{cases}
$$



由上述方程组解得：

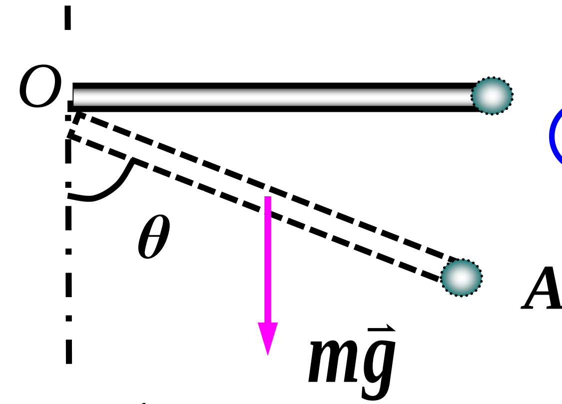
$$a=\frac{m_2 g-M_{\mathrm{f}}/R}{m_1+m_2+m/2}$$

$$F_{\mathrm{T1}}=\frac{m_1(m_2 g-M_{\mathrm{f}}/R)}{m_1+m_2+m/2}$$

$$F_{\mathrm{T2}}=\frac{m_2\left[(m_1+m/2)g+M_{\mathrm{f}}/R\right]}{m_1+m_2+m/2}$$

例3 长为L，质量为m的匀质细杆，可绕通过杆的端点O并与杆垂直的水平固定轴转动。杆从水平位置由静止开始自由下摆，忽略轴处的摩擦，当杆转到与竖直方向成θ角时，求A端的速度。

解：运动物体为细棒，绕O轴作定轴转动，取垂直纸面向外为正。



$\odot\hat{k}$ 正

$$\vec{\beta}=\beta\hat{k}$$

$$\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{g}=\vec{\beta}=\mathrm{J}\beta\hat{k}$$

$$J=\frac{1}{3}mL^2$$

$$M=-mgL\sin\theta/2=J\beta$$

$$-mgL\sin\theta/2=\frac{1}{3}mL^2\beta$$

$$-\frac{3g}{2L}\sin\theta=\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

$$-\frac{3g}{2L}\sin\theta=\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}-\frac{3g}{2L}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\int_{0}^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega$$

$$\frac{1}{2}\omega^{2}=\frac{3g}{2L}\cos\theta$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g\cos\theta}{L}}$$

$$v=\sqrt{3gL\cos\theta}$$