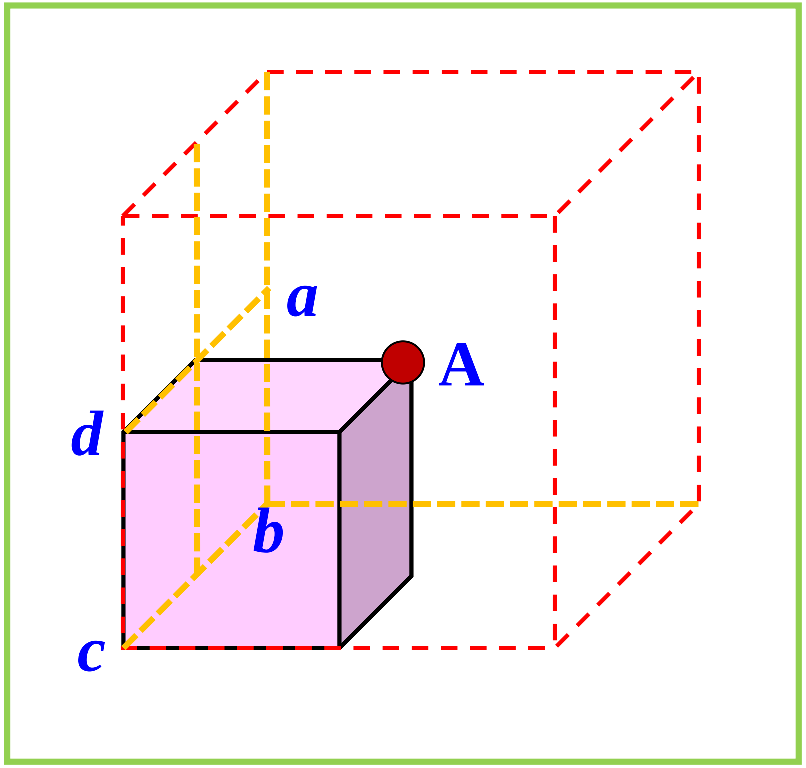
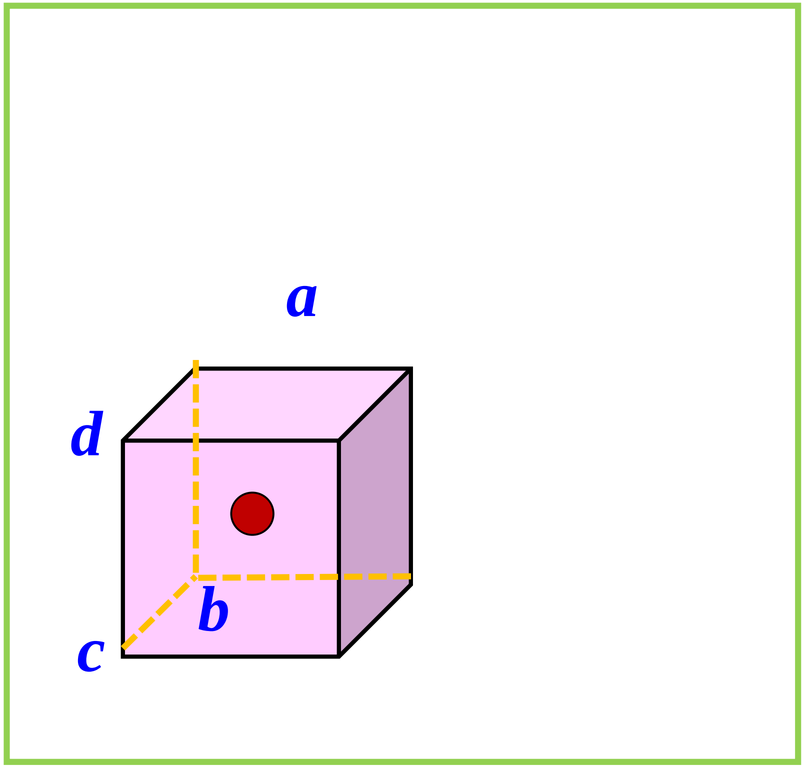
高斯定理应用1：求电通量

如图，一个带电量为q的点电荷位于立方体的A角上，则通过侧面$abcd$的电通量为：$\dfrac{q}{24\varepsilon_0}$

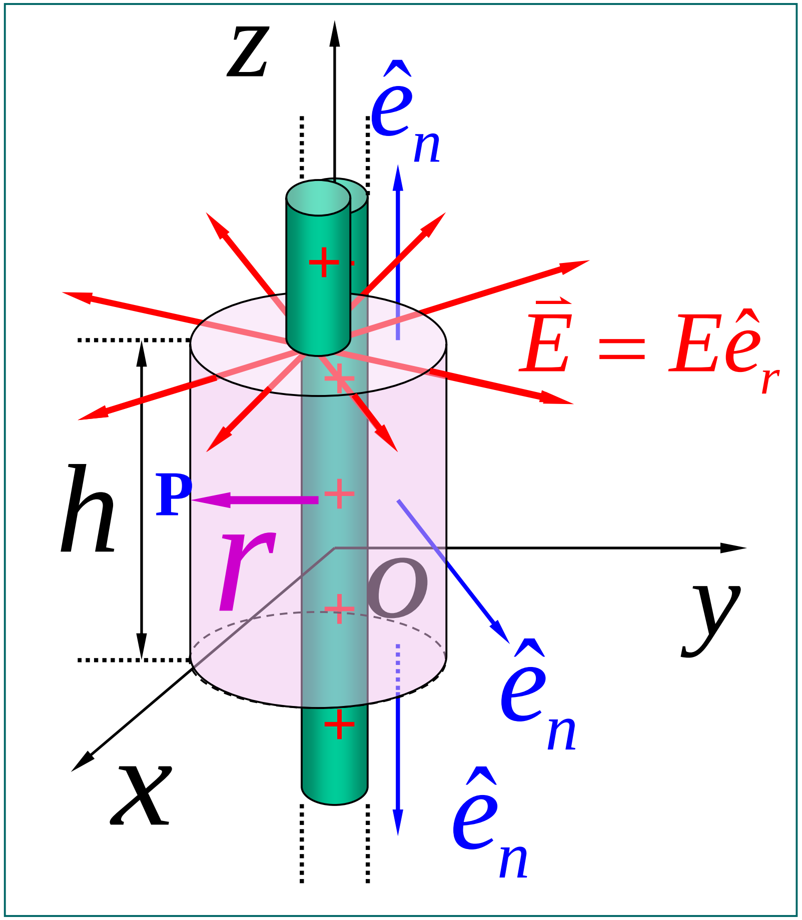
如果放在中心处，则电通量为：$\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$





例1 无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷即电荷线密度为 λ，求距直线为 r处的电场强度。

解： 电场分布具有柱对称性，带电体轴线即为对称轴。选取闭合的柱形高斯面，侧面上各点电场强度大小相等，且平行于侧面各处的法线；上下底面的法线与场强方向垂直。



$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_{i(\text{内})}$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S(\text{侧面})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S(\text{上底})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S(\text{下底})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \iint_{S(\text{侧面})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S(\text{侧面})} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S(\text{侧面})} E dS = E2\pi rh$$

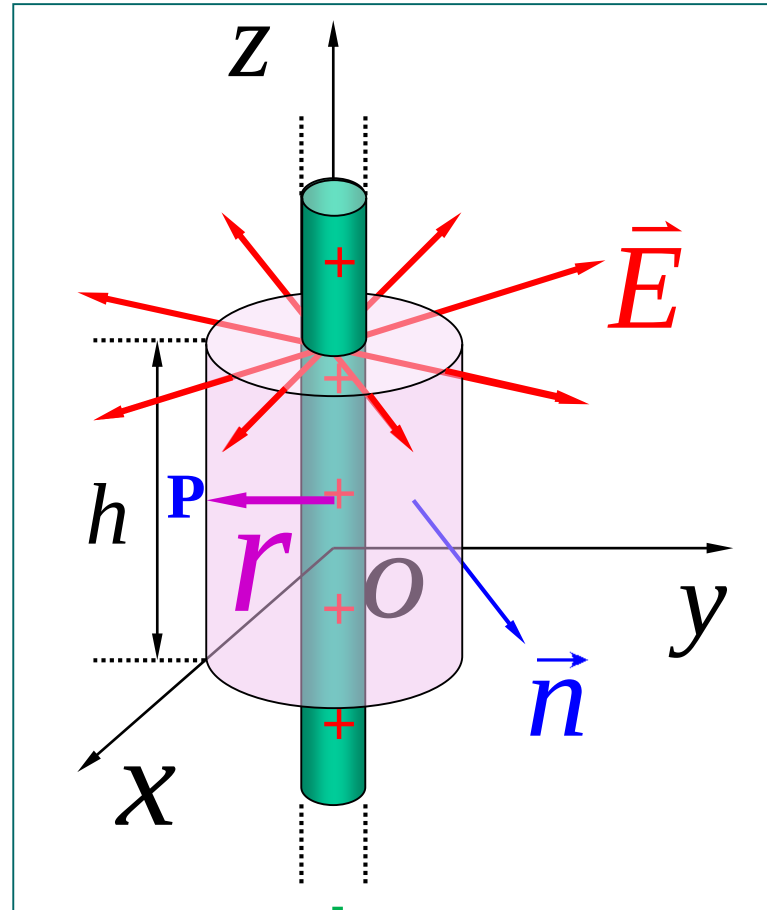
$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S\text{内}} q_i = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad 2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

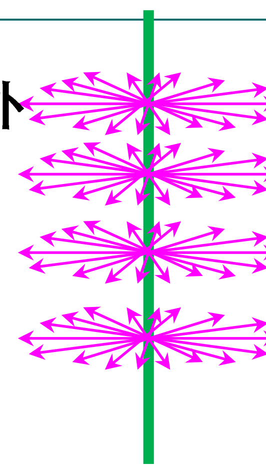
$\boxed{r > R}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r}_0}$$



P 点 *E* 的方向垂直于轴线向外

（或向内---带负电时）

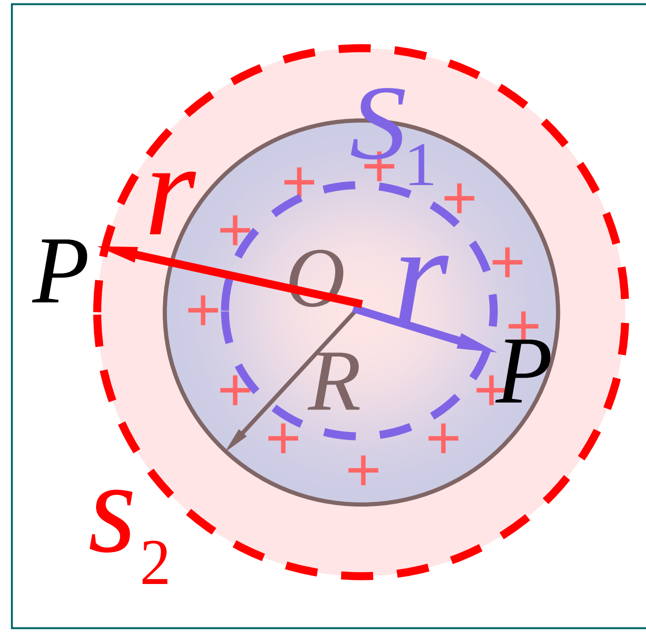


思考：若求 $r < R$ 空间内的电场强度分布，如何求？

例2 一半径为R，均匀带电Q的薄球壳。

求：球壳内外任意点的电场强度。

解： 选同心球面为高斯面。



（1）$0 < r < R$

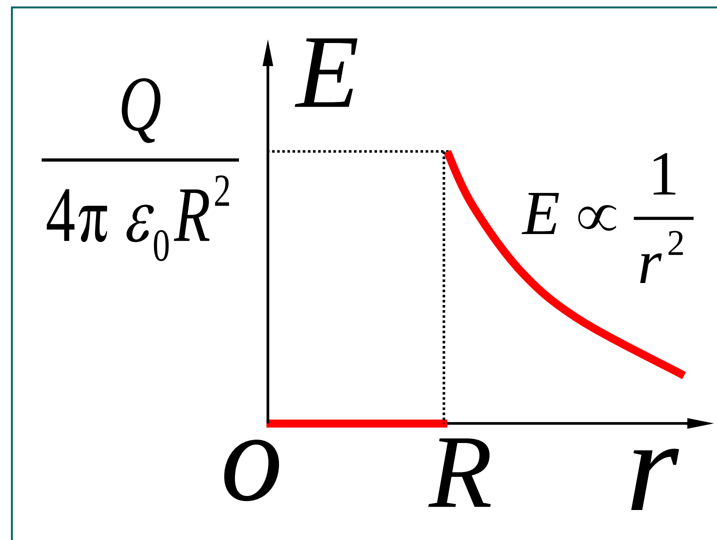
$$\oint\!\!\!\oint_{S1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

（2）$r > R$

$$\oint\!\!\!\oint_{S2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0}$$



$$\oint\!\!\!\oint_{S2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint\!\!\!\oint_{S2} E dS = 4\pi r^2 E$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

均匀带电球面外的场强分布正象球面上的电荷都集中在球心时所形成的点电荷在该区的场强分布一样。在球面内的场强均为零。场强分布在R处不连续。

例3 无限大均匀带电平面，单位面积上的电荷，即电荷面密度为σ，求距平面为r处的电场强度。

解： 通过对称性分析可知，场是面对称的，$\vec{E}$垂直平面，若平面带正电，则场强方向外指；反之，场强方向内指。

选取闭合的柱形高斯面

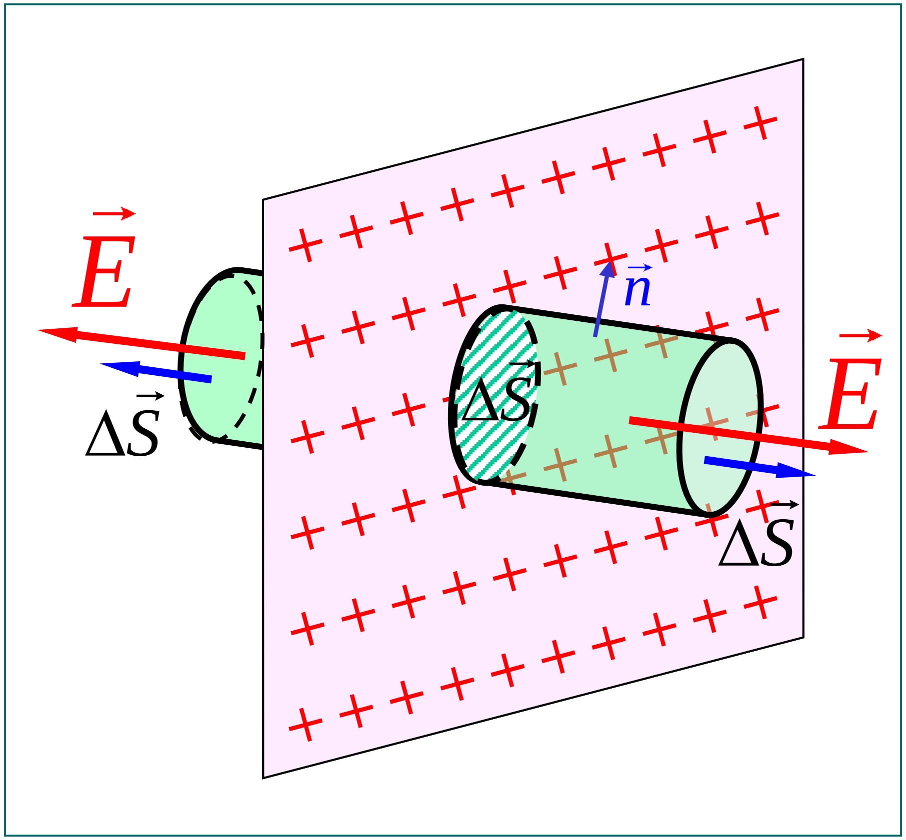
$$\Phi_e = \oint\!\!\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_{左底面} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{右底面} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

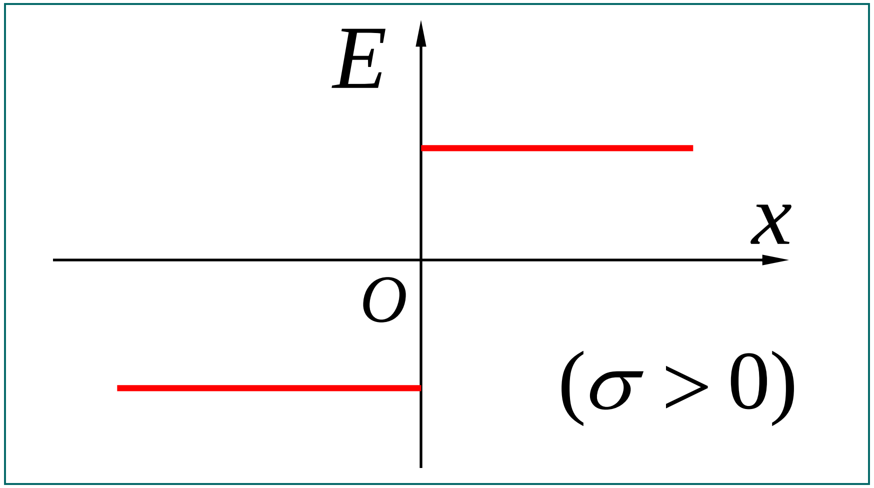
$$2\Delta SE = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

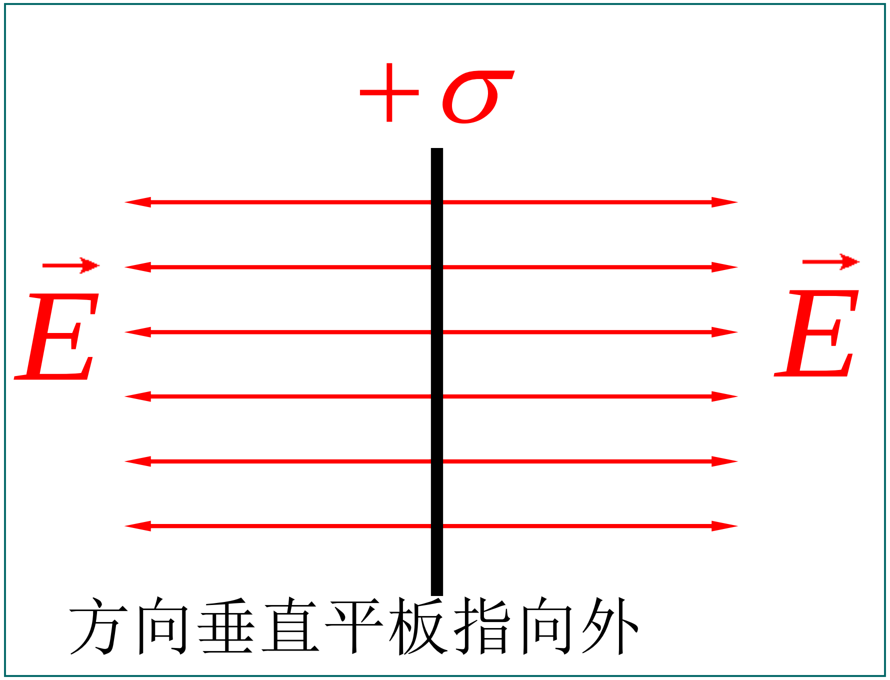
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

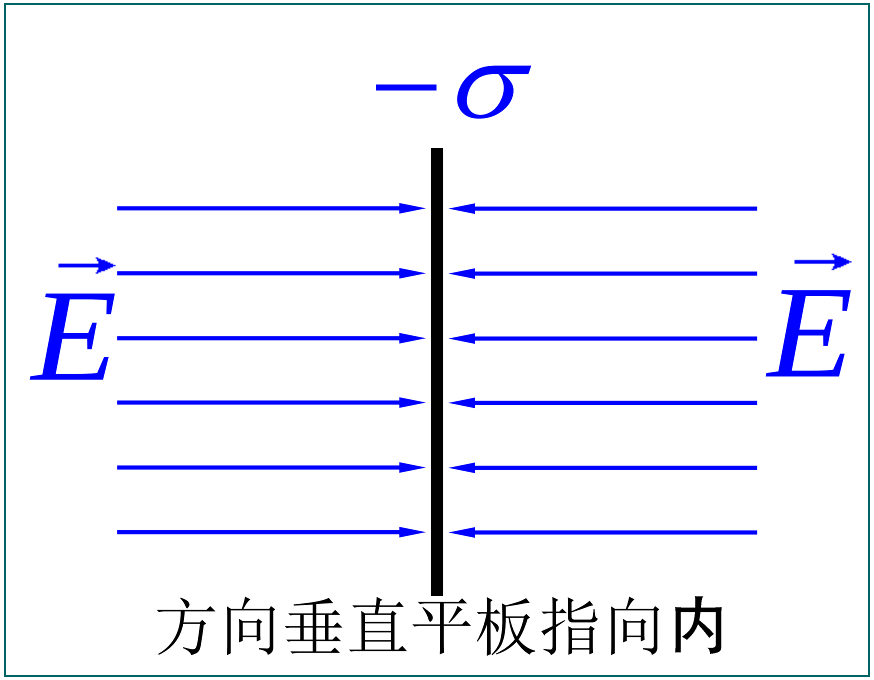


$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

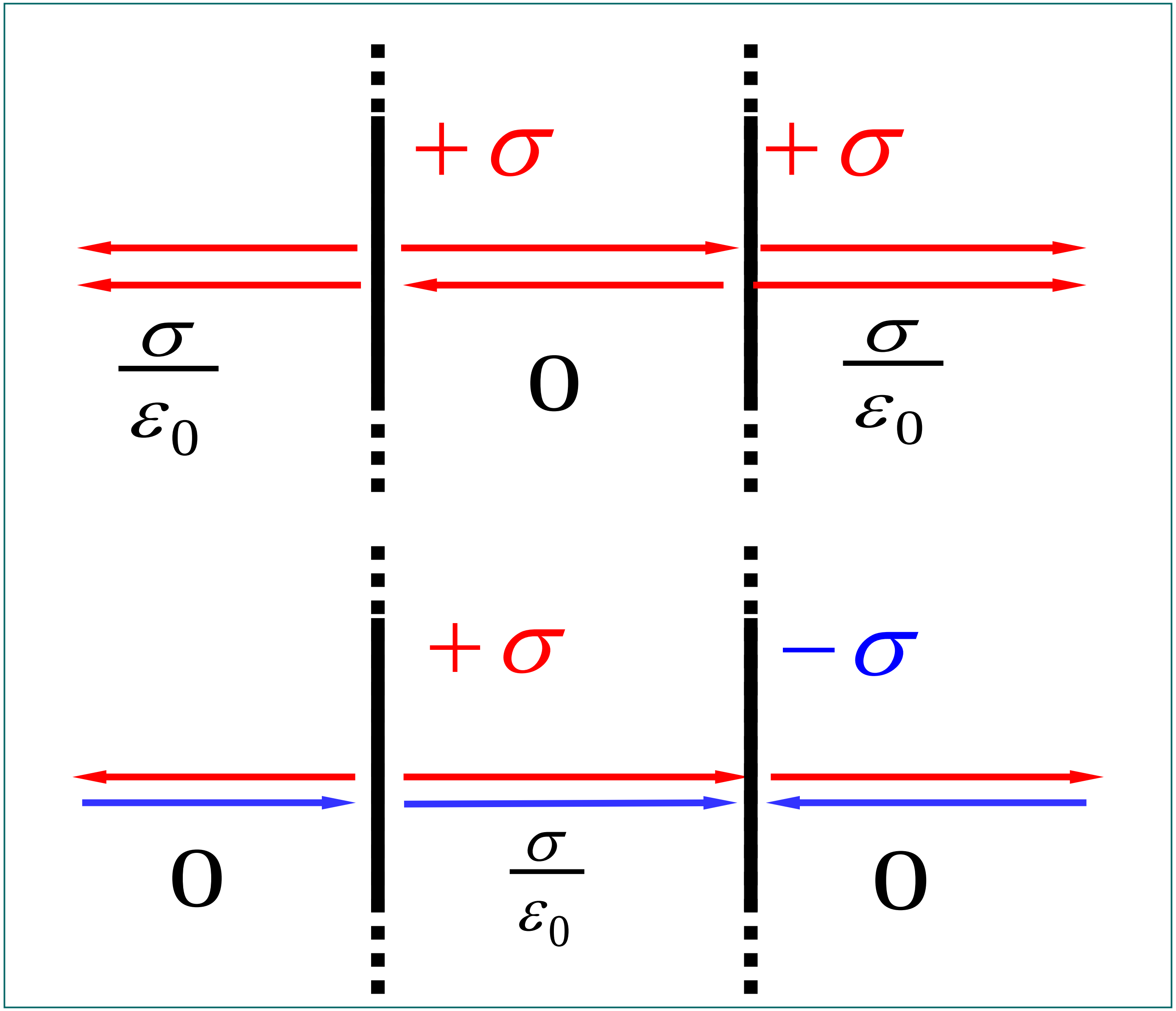
均匀带电无限大平面的电场分布---匀强场





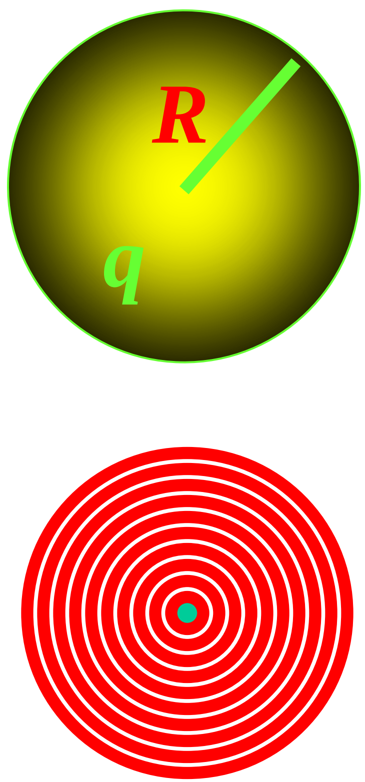


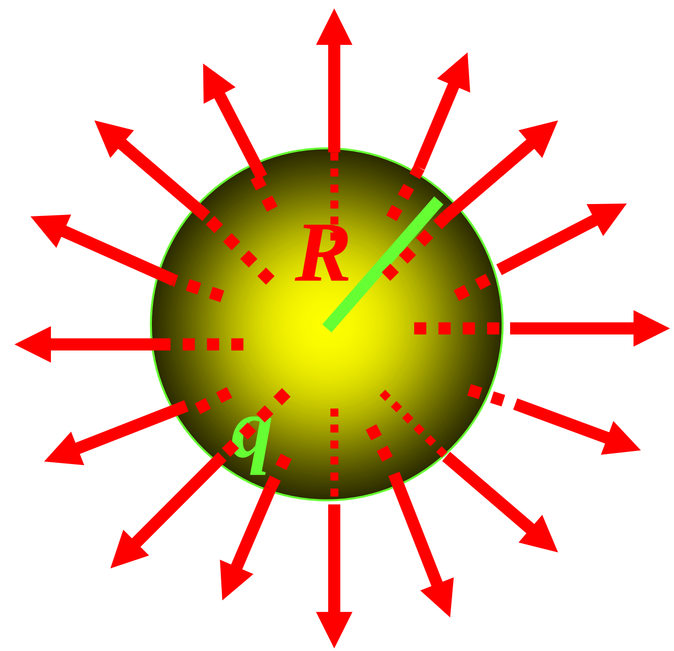
思考：多个无限大均匀带电平面间的电场叠加问题。



例4 一半径为R、均匀带电q 的球体，求其电场的分布$\vec{E}(r)$。

解：（1）对称性分析，将球体看成许多薄球壳组成。





结论：球内外都是球对称分布。

（2）作半径为 r 的球面 $(R \le r < \infty)$

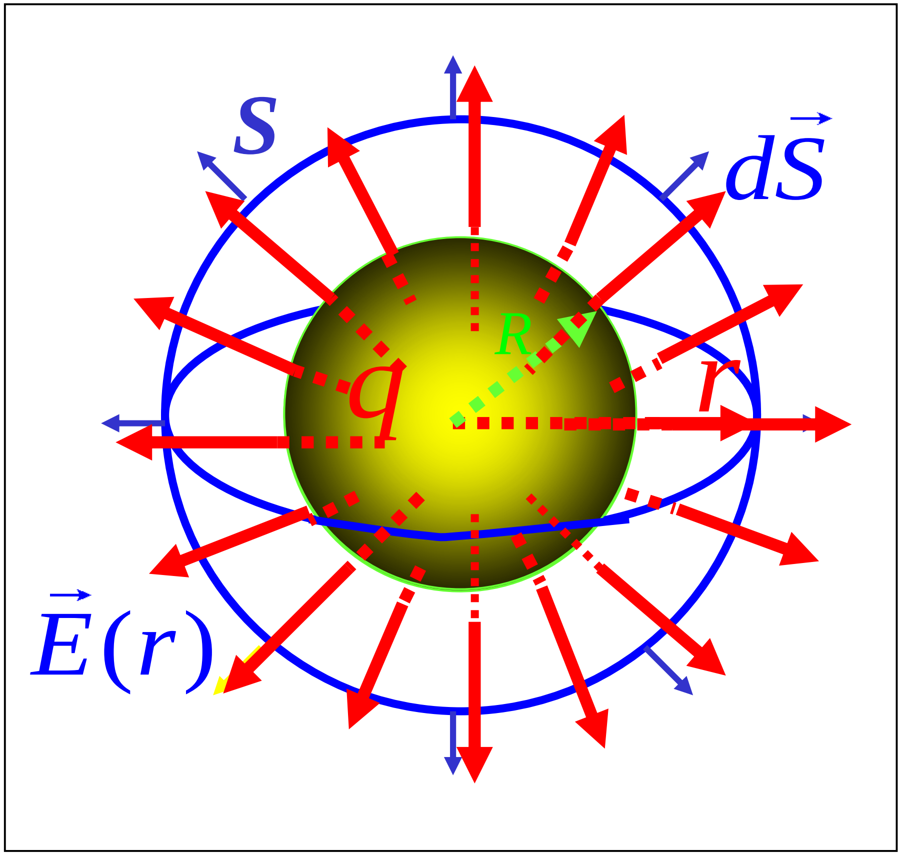
由高斯定理：

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$\oint_S E \cos 0^\circ \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$E \oint_S \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

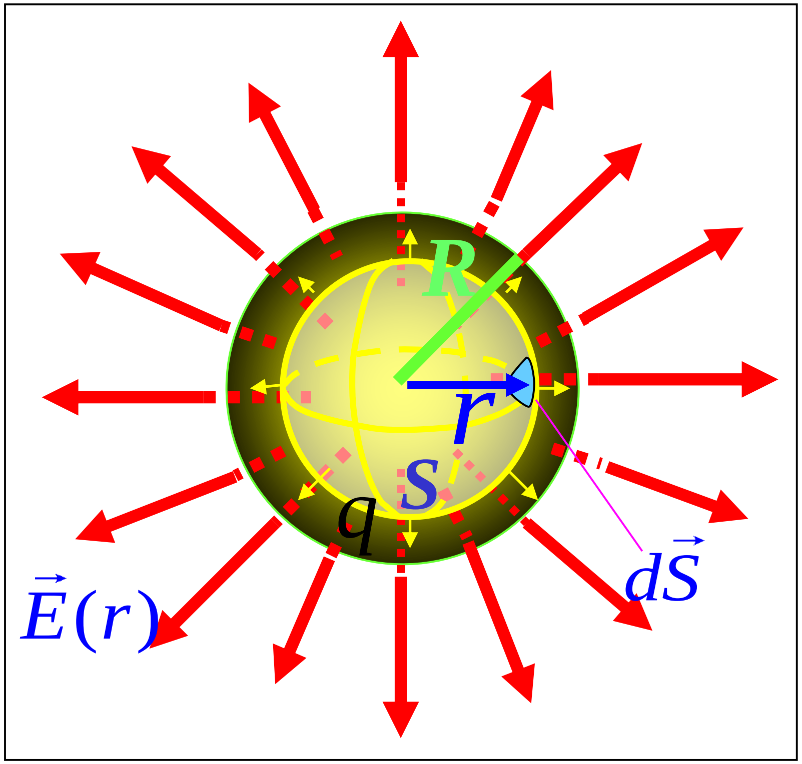
$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$



$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r}_0}$$

（2）作半径为 r 的球面 $(0 \le r < R)$

由高斯定理：$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\cos 0^\circ \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$= E \oint_S dS = E 4\pi r^2$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qr}{R^3}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{r}_0 = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \vec{r}_0}$$

$$\vec{E}(r)=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0\cdots(R<r<\infty)\\[2ex]\dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}_0\cdots(0\le r<R)\end{cases}$$