例 1 设质点的运动方程为 $\vec{r}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$,

其中 $x(t)=t+2\ (\mathrm{SI})$, $y(t)=0.25t^2+2\ (\mathrm{SI})$.

求(1) $t=3\ \mathrm{s}$ 时的速度；(2)轨迹方程及轨迹曲线。

解 （1）由题意可得速度分量分别为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.5t$$

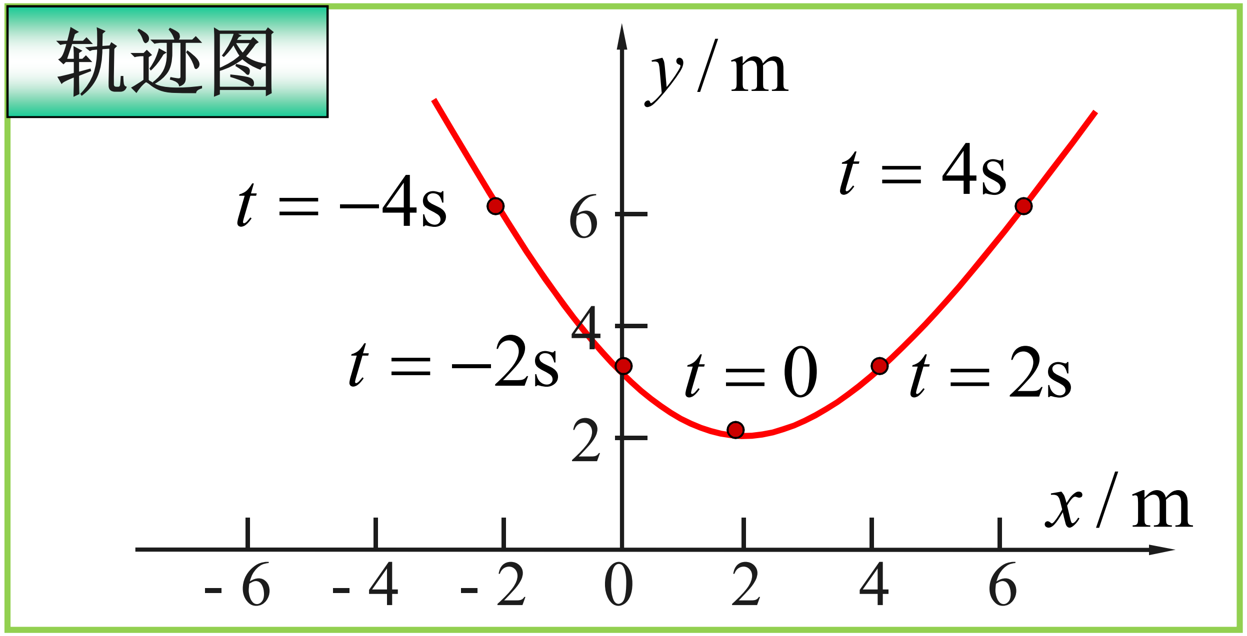
$t=3\ \mathrm{s}$ 时速度为 $\vec{v}=1.0\hat{i}+1.5\hat{j}\left(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)$

（2） 运动方程

$$\begin{cases} x(t) = t + 2 \\ y(t) = 0.25t^2 + 2 \end{cases}$$

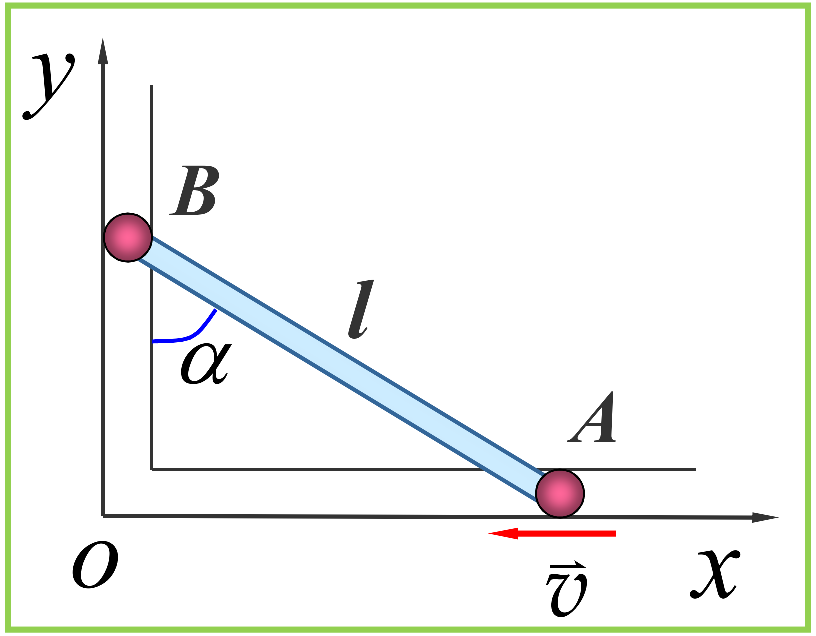
由运动方程消去参数 t 可得轨迹方程为

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$$



例2 如图所示，A、B 两物体由一长为 l 的刚性细杆相连，A、B 两物体可在光滑轨道上滑行。如物体A以恒定的速率v 向左滑行，当 $\alpha=60^{\circ}$ 时，物体B的速率为多少？

解 建立坐标系如图，



物体A 的速度

$$\vec{v}_A = v_x\hat{i} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{i} = -v\hat{i}$$

物体B 的速度

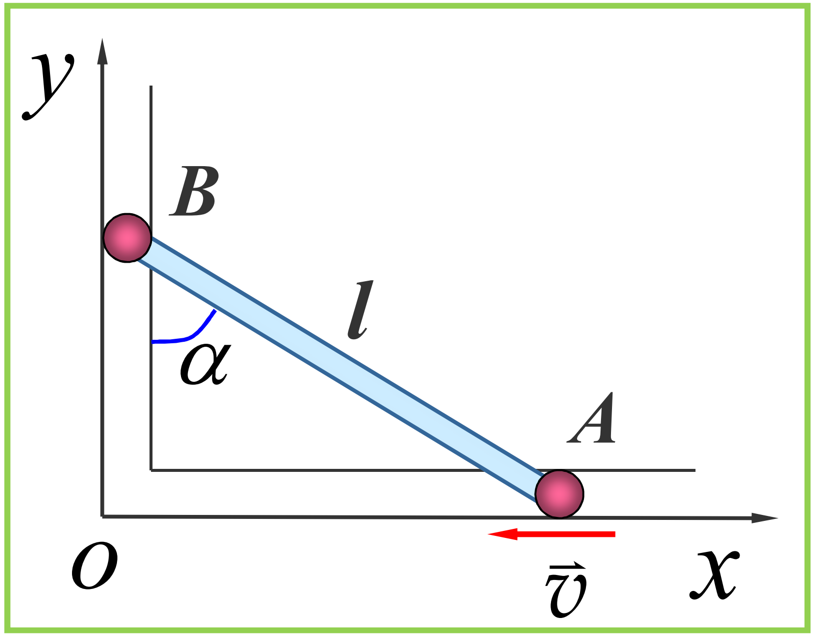
$$\vec{v}_B = v_y\hat{i} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{j}$$

OAB为一直角三角形，刚性细杆的长度 l 为一常量

$$x^2 + y^2 = l^2$$

两边求导得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$



即：
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v}_B = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{j}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v, \quad \tan\alpha = \frac{x}{y} \qquad \therefore \vec{v}_B = v\tan\alpha\,\hat{j}$$

$\vec{v}_B$ 沿 y 轴正向，当 $\alpha = 60^\circ$时，$v_B = 1.73v$

例3 有一个球体在某液体中竖直下落，其初速度为 $\vec{v}_0=(10\mathrm{m\cdot s^{-1}})\hat{j}$ ，它的加速度为 $\vec{a}=(-1.0\mathrm{s^{-1}})v\hat{j}$ 。

求：小球的运动方程。

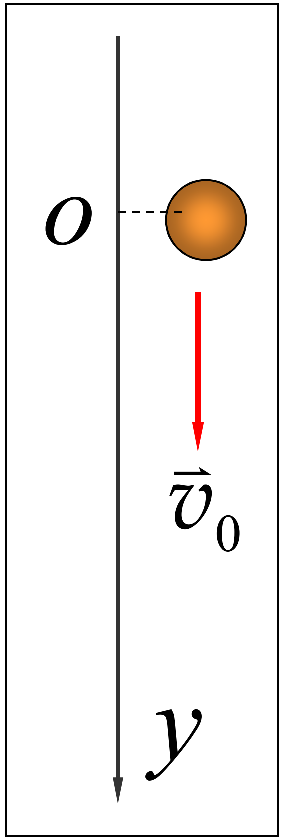
解： 由加速度定义

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(-1.0)v$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{d}t \qquad v=v_0\mathrm{e}^{-t}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{-t} \qquad \int_0^y\mathrm{d}y=v_0\int_0^t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$y=10[1-\mathrm{e}^{-t}](\mathrm{m})$$



练习：斜抛运动

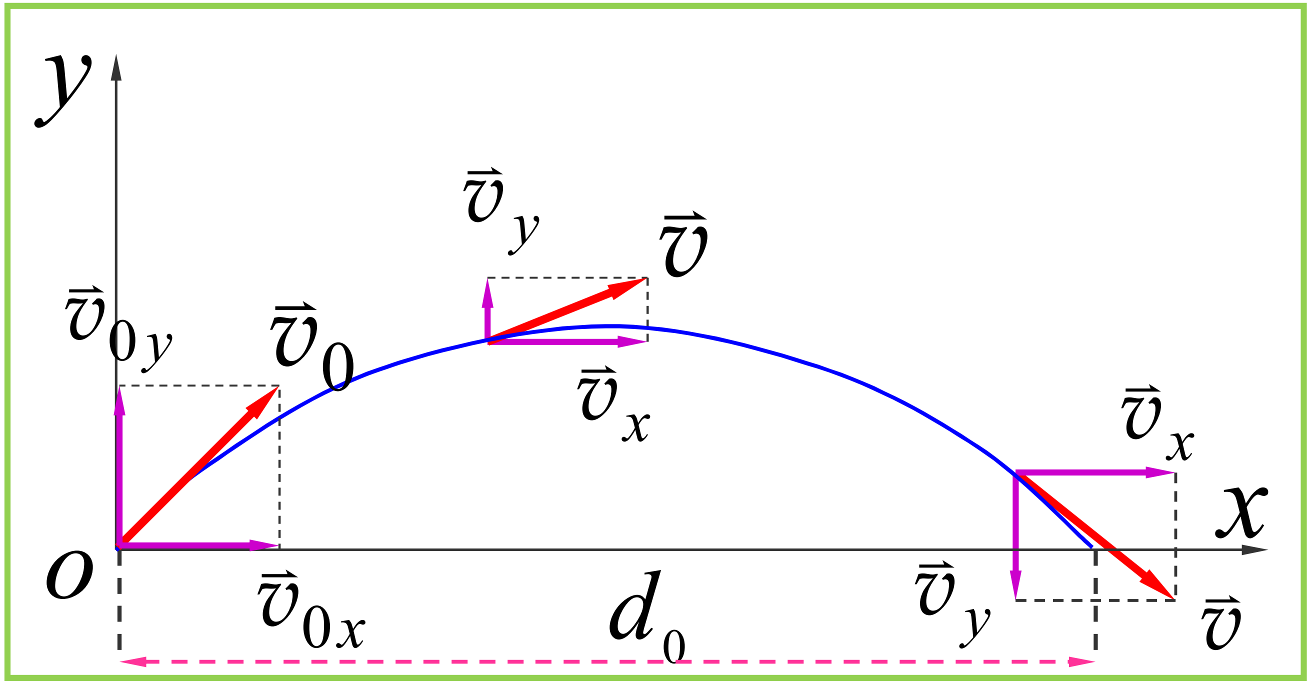
运动特点： 二维曲线（平面运动） $\vec{a}=\vec{g}$

$a_x=0 \quad a_y=-g, \quad t=0 \quad x_0=y_0=0 \quad \begin{cases} v_{0x}=v_0\cos\alpha \\ v_{0y}=v_0\sin\alpha \end{cases}$

任意时刻速度分量为

$$\begin{cases} v_x=v_0\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y=v_0\sin\alpha-gt=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

积分得 $\begin{cases} x=v_0\cos\alpha\cdot t \\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$



$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

消去方程中的参数 t 得轨迹：$y = x\tan\alpha - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} x^2$

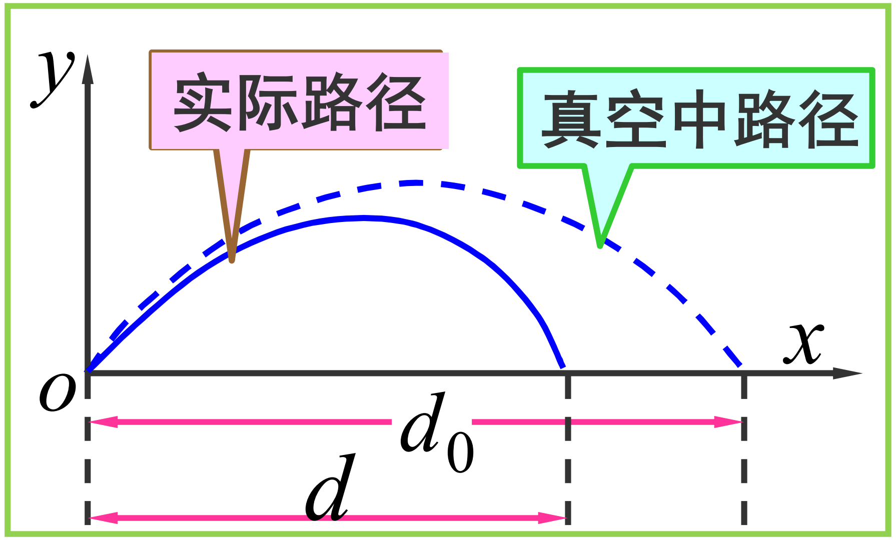
求最大射程

$$d_0 = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}d_0}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\cos 2\alpha = 0$$

$$\alpha = \pi/4$$

最大射程 $d_{0\mathrm{m}} = v_0^2/g$



由于空气阻力，实际射程小于最大射程。

☞抛体运动的矢量分析

速度的矢量形式为

$$v_x = v_0\cos\theta$$
$$v_y = v_0\sin\theta - gt$$

$$\vec{v} = (v_0\cos\theta)\vec{i} + (v_0\sin\theta - gt)\vec{j}$$

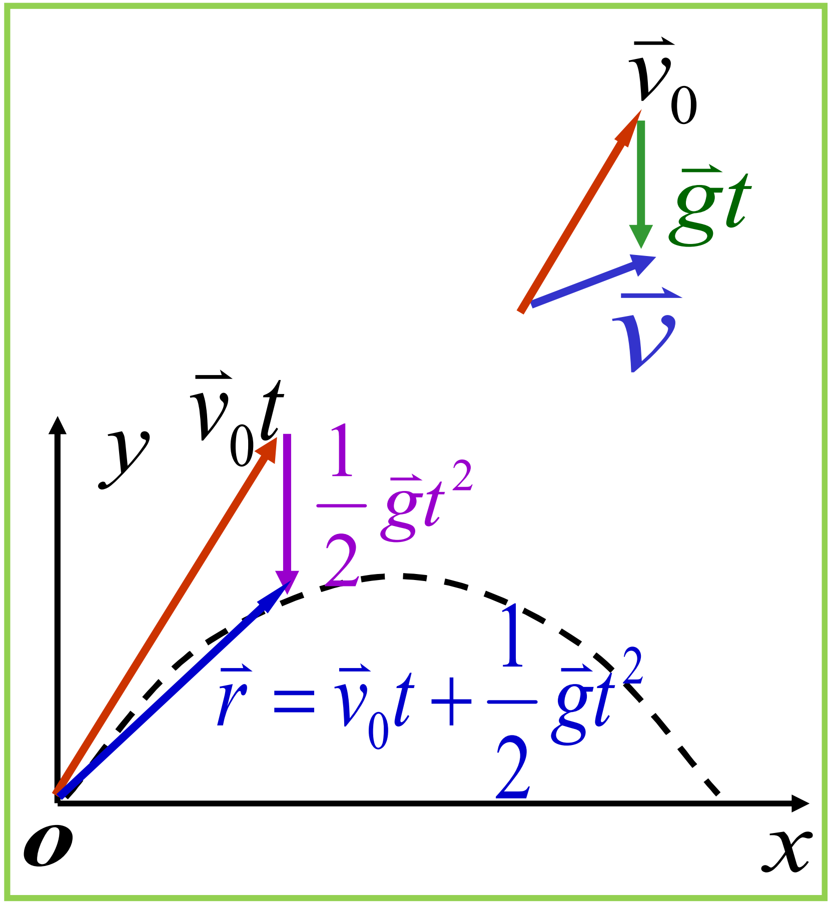
即 $$\vec{v} = [(v_0\cos\theta)\vec{i} + (v_0\sin\theta)\vec{j}] - gt\,\vec{j} \qquad \vec{g} = -g\vec{j}$$

$$= \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

$$\because \vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$$

$$\therefore \vec{r} = \int_0^t \vec{v}dt = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{g}t)dt$$

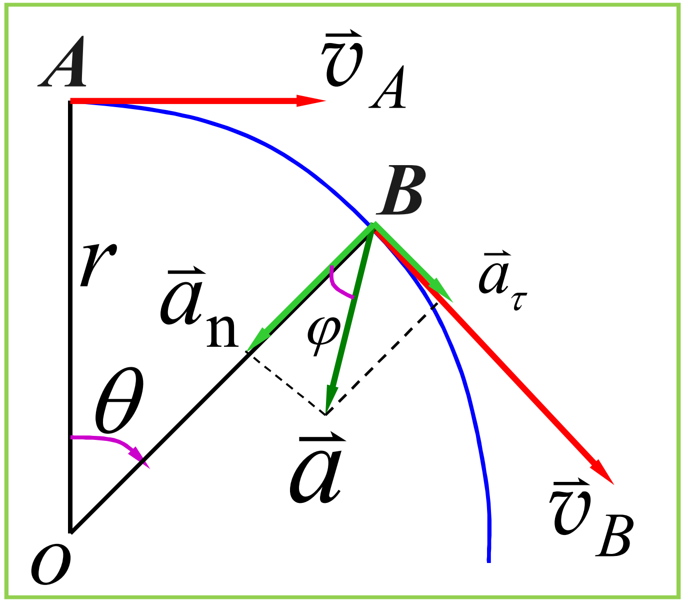
$$= \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$



☞初速度方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动的叠加

----归结为直线运动的叠加

例4 如图一超音速歼击机在高空 A 时的水平速率为 1940 km/h，沿近似于圆弧的曲线俯冲到点 B ,其速率为 2192 km/h，所经历的时间为 3s，设圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的半径约为 3.5km，且飞机从A 到B 的俯冲过程可视为匀变速率圆周运动，若不计重力加速度的影响，求：(1) 飞机在点B 的加速度；(2)飞机由点A 到点B 所经历的路程 。



解（1）因飞机作匀变速率运动所以 a_τ 和 β 为常量。

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

分离变量有 $\int_{v_A}^{v_B} \mathrm{d}v = \int_0^t a_\tau \mathrm{d}t$

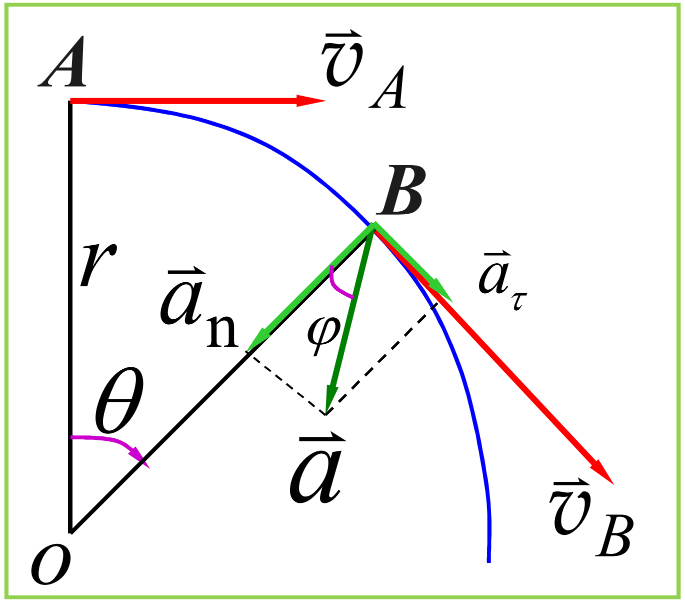
已知： $v_A = 1940\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ $v_B = 2192\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$

$t = 3\mathrm{s}$ $\overset{\frown}{AB} = 3.5\mathrm{km}$

$$\int_{v_A}^{v_B} v\mathrm{d}v = \int_0^t a_\tau \mathrm{d}t \qquad a_\tau = \frac{v_B - v_A}{t} = 23.3\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

在点 ***B*** 的法向加速度 $a_\mathrm{n} = \dfrac{v_B^2}{r} = 106\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

在点 ***B*** 的加速度



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 109 m\cdot s^{-2}$$

$\vec{a}$ 与法向之间夹角 φ 为

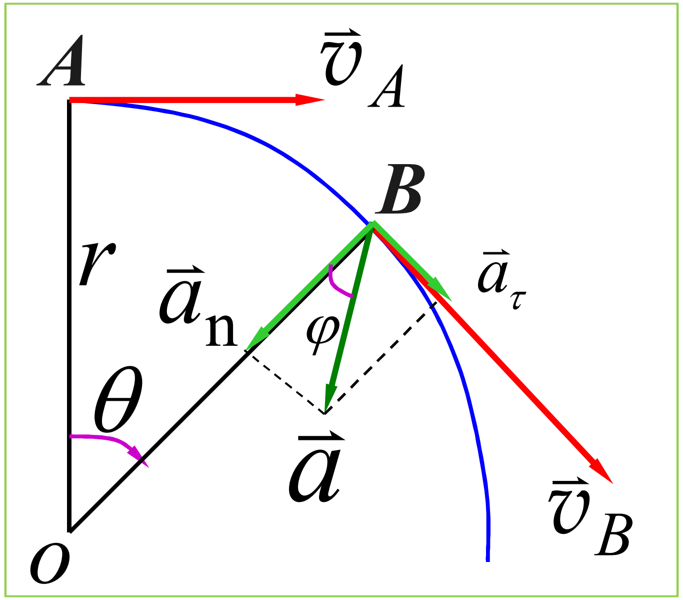
$$\varphi = \arctan\frac{a_\tau}{a_\mathrm{n}} = 12.4^\circ$$

已知：$v_A = 1940\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ $\quad v_B = 2192\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

$t = 3\text{s}$ $\quad \widehat{AB} = 3.5\text{km}$

（2）在时间 t 内矢径 $\vec{r}$ 所转过的角度 θ 为

$$\theta = \omega_A t + \frac{1}{2}\beta t^2$$



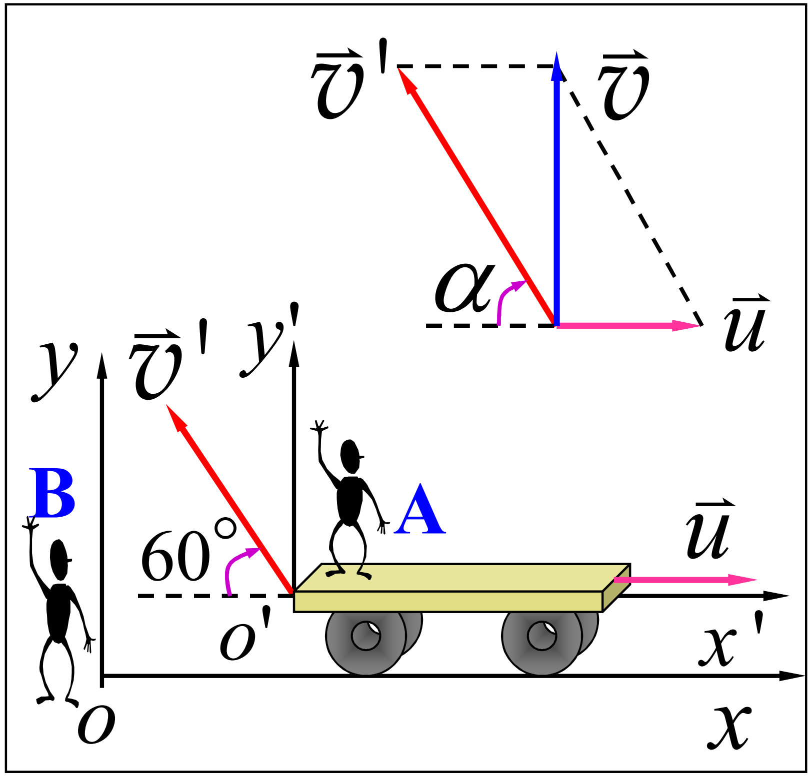
飞机经过的路程为

$$s = r\theta = v_A t + \frac{1}{2}a_\tau t^2$$

代入数据得

$$s = 1722\ \text{m}$$

例5 如图示，一实验者 A 在以 **10 m/s** 的速率沿水平轨道前进的平板车上控制一台射弹器, 射弹器以与水平方向呈 60°度角向后上方射出一弹丸。 此时站在地面上的另一实验者 B 看到弹丸铅直向上运动, 求弹丸上升的高度 。



解: 地面参考系为 S 系

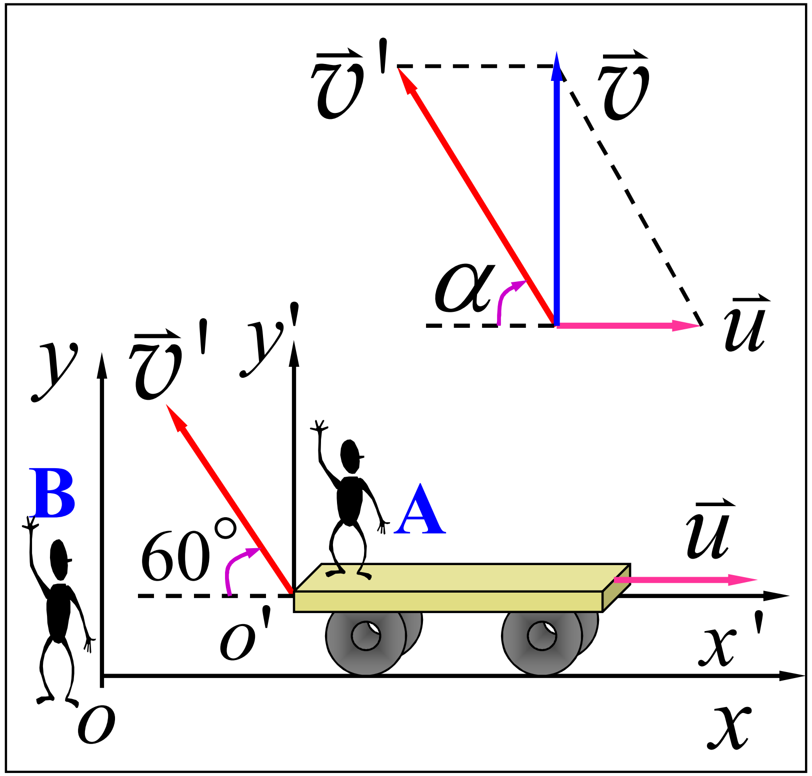
平板车参考系为 S'系

$$\vec{v}_{dd} = \vec{v}'_{dc} + \vec{u}_{cd}$$

$$\begin{cases} v_x = v'_x + u \\ v_y = v'_y \end{cases}$$

$$\because v_x = 0 \qquad \therefore v'_x = -u = -10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$|v_y| = |v'_y| = |v'_x \tan\alpha| \qquad |v_y| = 17.3\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$



弹丸上升高度

$$y = \frac{v_y^2}{2g} = 15.3\mathrm{m}$$

思考题：

一运动质点在某瞬时的矢径为 $\vec{r}(x,y)$，其速度大小 ________？

（**A**） $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　　（**B**） $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

（**C**） $\dfrac{\mathrm{d}\left|\vec{r}\right|}{\mathrm{d}t}$　　 $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

注意

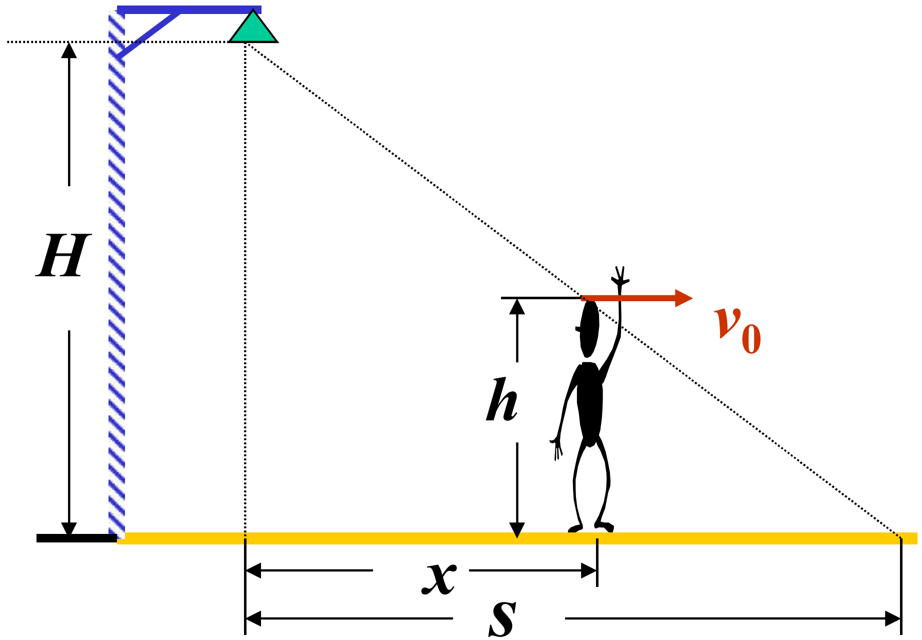
$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|$$

速率

$$\boldsymbol{v}=\left|\vec{\boldsymbol{v}}\right|=\sqrt{\boldsymbol{v}_x^2+\boldsymbol{v}_y^2+\boldsymbol{v}_z^2}$$

例6 路灯离地面高度为 H， 一个身高为 h 的人在灯下水平路面上一匀速 v_0 步行，如图所示。求当人与灯水平距离为 x 时，他的头顶在地面上的影子移动的速度的大小。

解：



由图可得 $$\frac{h}{H}=\frac{S-x}{S}$$

故 $$S=\frac{H}{H-h}x$$

头顶在地面影子的速度

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{H}{H-h}\frac{dx}{dt}=\frac{H}{H-h}v_0$$

质点运动学

质点的运动

运动的绝对性、相对性，选择参考系，建立坐标系，选择计时零点

描述运动的物理量

位矢：$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

位移：$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

速度：$\vec{v} = d\vec{r} / dt$

加速度：$\vec{a} = d\vec{v} / dt$

角位移：$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

角速度：$\omega = d\theta / dt$

角加速度：$\beta = d\omega / dt$

线量与角量的关系

$v = R\omega \quad a_t = R\beta \quad a_n = R\omega^2$

注意：路程与位移的区别

描述运动的方法

解析法

运动函数：$\vec{r} = \vec{r}(t)$

直角坐标系中：

$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

速度：$\vec{v} = \vec{v}(t)$

加速度：$\vec{a} = \vec{a}(t)$

匀变速运动的基本公式

匀变速直线运动	匀变速圆周运动
$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$	$\omega = \omega_0 + \beta t$
$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(r - r_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$