任课教师：时红艳　　学号：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿

2019 春大学物理 C　作业四

第六章 静电场

一、简答题

1. 如果通过闭合面的电通量为零，是否能肯定：(1) 面上每一点的场强都等于零？(2)面内没有电荷？(3)面内净电荷为零？

答：(1) 不能肯定面上每一点场强都等于零。因为电通量不是电场强度，它是电场强度的面积分。面 上各处电场强度不为零时，通过它的电通量仍然可能为零。通过在一个点电荷旁边的封闭曲面的电通量就是如此。(2) 不一定没有电荷。电荷分为正负两种，只要其代数和为零，通过包围这些电荷的闭合曲面的电通量也为零。(3) 该闭合曲面内的净电荷肯定为零。

2. 把一个点电荷由静止释放到电场中，若只受到电场力的作用，该点电荷的运动轨迹是否就是电场的电力线？

答：一般不是。电力线上任一点的切线方向是该点电场的方向，是点电荷在该点的加速度方向。电荷运动轨迹上一点的切线方向是它的速度方向。如果电荷做曲线运动，可以肯定加速度的方向不是沿曲线的切线方向，因此这条曲线肯定不是电力线，所以两者不重合。只有当电力线为直线，初速度为零的点电荷进入电场时，其运动轨迹才与电力线重合。

3. 下列说法是否正确？请举一例加以论述。

(1) 场强相等的区域，电势也处处相等；
(2) 场强为零处，电势一定为零；
(3) 电势为零处，场强一定为零；
(4) 场强大处，电势一定高。

答：(1) 不正确。例如匀强电场中同一电场线上的两点，场强相同，但电势不同。
(2) 不正确。处于静电平衡状态下的导体内部场强为零，但电势不一定为零。
(3) 不正确。带等量异种电荷的两点电荷形成的电场中，点电荷连线的中垂面上与无穷远处等势，可视为零势，而此处场强不为零。
(4) 不正确。例如由一个带负电的点电荷形成的电场，距负电荷近处电场强度大，但距负电荷远处电势较高。

二、选择题

4. 一带电体可作为点电荷处理的条件是：　[C]

(A) 电荷必须呈球形分布；　(B) 带电体的线度很小；
(C) 带电体的线度与其它有关长度相比可忽略不计；(D) 电量很小。

5. 两个同心簿金属球壳，半径分别为 R_1 和 R_2(R_1< R_2)，若分别带上电量为 q_1 和 q_2 的电荷，则两者的电势分别为 U_1 和 U_2(选无穷远处为电势零点)。现用导线将两球壳相连接，则它们的电势为：　[B]

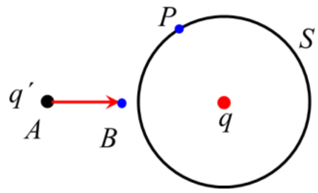
(A) U_1；　(B) U_2；
(C) U_1+U_2；　(D)$1/(U_1+U_2)$。

6. 已知一高斯面所包围的体积内电量代数和 $\sum q_i = 0$，则可肯定：　[C]

(A) 高斯面上各点场强均为零；　(B) 穿过高斯面上每一面元的电通量均为零；

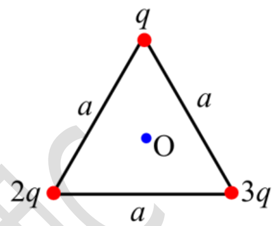
(C) 穿过整个高斯面的电通量为零；(D) 以上说法都不对。

7. 如图所示，闭合曲面 S 内有一点电荷 q，P 为 S 面上一点，在 S 面外 A 点有一点电荷 q'，若将 q'移至 B 点，则 [B]



(A) 穿过 S 面的电通量改变，P 点的电场强度不变；
(B) 穿过 S 面的电通量不变，P 点的电场强度改变；
(C) 穿过 S 面的电通量和 P 点的电场强度都不变；
(D) 穿过 S 面的电通量和 P 点的电场强度都改变。

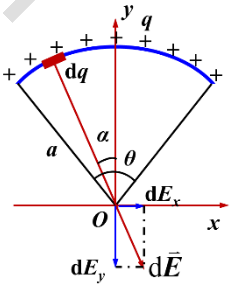
8. 如图所示，边长为 a 的等边三角形的三个顶点上，放置着三个正的点电荷，电量分别为 q、$2q$、$3q$。若将另一正点电荷 $\boldsymbol{Q}$ 从无穷远处移到三角形的中心 O 处，外力所作的功为: [C]



(A) $\dfrac{2\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_o a}$； (B) $\dfrac{4\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_o a}$； (C) $\dfrac{6\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_o a}$； (D) $\dfrac{8\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_o a}$。

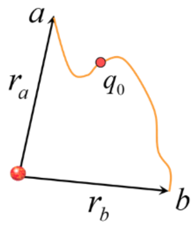
三、填空题

9. 一段半径为 a 的细圆弧，对圆心的张角为 θ，其上均匀分布有正电荷 q，如图所示。以 a，q，θ 表示出圆心 O 处的电场强度 $\vec{E}=-\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\dfrac{q}{\theta}\sin\dfrac{\theta}{2}\hat{j}$，$\hat{j}$ 为 y 方向的单位矢量。



10. 一平行板电容器，两板间充满各向同性均匀电介质，已知相对介电常数为 ε_r。若极板上的自由电荷面密度为 σ，则介质中电位移的大小 $D=\sigma$，电场强度的大小：$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$。

11. 如图所示，在带电量为 q 的点电荷的静电场中，将一带电量为 q_0 的试验电荷从 a 点经任意路径移动到 b 点，外力所作的功 $A_1=\dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_b}-\dfrac{1}{r_a}\right)$；电场力所作的功 $A_2=\dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_a}-\dfrac{1}{r_b}\right)$。



四、计算题

9. 两导体球 A、B 相距很远，其中 A 原来带电，B 不带电。现用一根细长导线连接两球，电荷将如何分配？

分析 导线连接两球的瞬间，由于两球所带电不同，因此电势不同，导体中的电子就会由电势低处流向电势高处，使两球上电荷重新分布，直至两球电势相等。根据两球是等势体就可以确定两球的电荷分布情况。

解: 设 A 球半径为 R_1，B 球半径为 R_2，达到静电平衡时所带的电量分别为 q_1、q_2，根据两球是等势体得

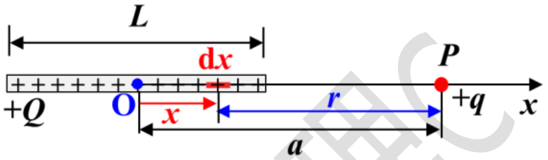
$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

简化得

$$\frac{q_1}{R_1}=\frac{q_2}{R_2}$$

10.(6-1 题)在长为 L 的细棒上，电量 Q 均匀分布，一带电量 q ($q>0$) 的点电荷被放在细棒的延长线上距细棒中心 O 距离为 a 的点 P 处，求带电细棒对该点电荷的作用力。

分析 这实际是计算连续分布带电体电场强度的问题，计算出细棒在 P 点的电场强度也就知道了细棒对该点电荷的作用力。细棒上电荷可以看成是均匀分布在一维的直线上。如图建立坐标系，在直线上任取



一线元 dx，其电荷为 $\mathrm{d}q=Q\mathrm{d}x/L$,它在点 P 处的电场强度为 $\mathrm{d}\vec{E}=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r$,整个带电细棒在 P 点的电场强度为 $\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}$ 。

解： 由以上分析可知，点 P 点处的电场场强

$$E=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{Q\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0\left(l-x\right)^2 L}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{l-\dfrac{L}{2}}-\frac{1}{l+\dfrac{L}{2}}\right)=\frac{Q}{\pi\varepsilon_0(4l^2-L^2)}$$

电场强度的方向沿 x 轴。

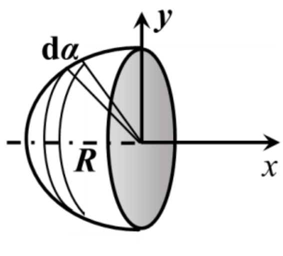
所以点电荷所受到的力为： $F=Eq=\dfrac{qQ}{\pi\varepsilon_0(4l^2-L^2)}$

11.(6-3 题) 求半径为 R，面电荷密度为 σ 的均匀带电半球面球心 O 处的电场强度?

分析 本题是一个连续带电体电场强度问题，解题的关键就是如何取电荷元。可以将均匀带电半球面看成一系列的平行细圆环组成，所有细圆环在半球面球心 O 处的电场强度方向都相同，将所有带电圆环在 O 处的电场强度积分即可求得球心 O 处的电场强度。

解： 取如图所示在球面上任一细圆环所带的电荷为

$$\mathrm{d}q=\sigma\,\mathrm{d}s=\sigma\cdot 2\pi R\sin\alpha\cdot R\mathrm{d}\alpha$$



带电量 dq 的细圆环在 O 点的场强为

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{i}}$$

利用几何关系 $x=R\cos\alpha$，$x^2+r^2=R^2$ 统一积分变量有

$$\mathrm{d}E = \frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{R\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^3}2\pi R^2\sigma\sin\alpha\mathrm{d}\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cos\alpha\sin\alpha\mathrm{d}\alpha$$

积分得球心 O 处的电场强度

$$E = \int \mathrm{d}E = \int_0^{\pi/2}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\alpha\cos\alpha\mathrm{d}\alpha = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

12.（6-4 题）半径为 R 的无限长均匀带电直圆筒面上，沿轴线单位长度的带电量为λ，求其内外电场强度的分布，并画出 E-r 曲线。

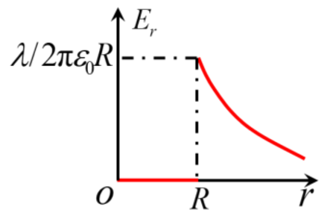
分析 无限长均匀带电直圆筒的电荷分布具有圆柱对称性，轴线就是圆柱空间的对称中心。可选择与有限长度的同轴圆柱面为高斯面，采用高斯定理求解其电场强度的分布要简洁方便。

解： 由高斯定理$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q$求得电场分布，在圆筒内即$r < R$

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}}_1\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q = 0\text{，即}\qquad E_1 = 0$$

当$r \ge R$时，$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}}_2\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q$，即 $E_2 2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



故
$$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \lambda/2\pi\varepsilon_0 r & r \ge R \end{cases}$$

所画出 E-r 曲线如下图所示。

13. (6-11 题)半径 R 的带电球体，其体电荷密度 $\rho = k/r$ （k 为常数，r 为到球心的距离，$r \le R$），求该带电球体内外的电场强度及电势的分布。

分析 由于带电球体的电荷分布具有球对称性，因此可取同心球面为高斯面，借助高斯定理求得各区域的电场强度，再根据电势与电场强度的积分关系$U_p = \int_p^\infty \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 可求得电势分布。

解： 由高斯定理求得电场分布，在球体内即 $r \le R$

$$\oint_S \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q$$

$$E_1(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \frac{k}{r}4\pi r^2\mathrm{d}r = \frac{2\pi k}{\varepsilon_0}r^2$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_1=\frac{k}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

同理，在球体外即 $r > R$

$$E_2\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R\frac{k}{r}4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{2\pi k}{\varepsilon_0}R^2$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_2=\frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

14. 证明：对于无限大的平行平面带电导体板, 静电平衡时有以下结果

(1) 相向的两面（图中 2 和 3），电荷的面密度总是大小相等而符号相反;

(2) 向背的两面（图中 1 和 4），电荷的面密度总是大小相等而符号相同。

证明: 设静电平衡时导体板的 4 个表面上的电荷面密度分别为σ_1、σ_2 、σ_3 、σ_4。

(1) 由静电平衡条知，无限大平行平面导体板内场强应为零，且外界的电场强度方向垂直于导体表面。取如图 11-5 所示高斯面，由高斯定理得

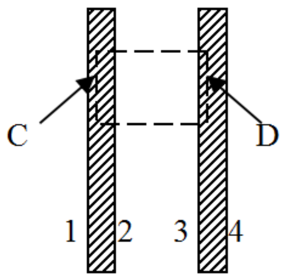
$$\sigma_2+\sigma_3=0,$$

得

$$\sigma_2=-\sigma_3$$

即相向的两面电荷的面密度总是大小相等而符号相反，得证。

(2) 由静电平衡条知，无限大平行平面导体板内场强应为零。C 点的场强是四个均匀带电平面的场强的叠加。设向右为正方向，则导体内 C 点处的场强为



$$\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4)=0$$

又由(1)知$\sigma_2=-\sigma_3$，故得

$$\sigma_1=\sigma_4$$

即向背的两面电荷的面密度总是大小相等而符号相同，得证

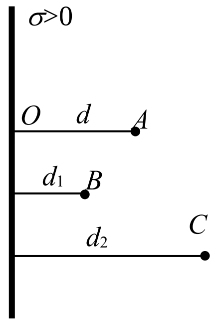
15. 如图所示，在一个面电荷密度为σ的无限大均匀带电平板的电场中，求：(1) 距离平板为 d 的一点 A 与平板之间的电势差；(2)与平板的距离分别为d_1、d_2的两点 B、C 之间的电势差($d_1<d_2$)；(3) 有一质量为 m、带电量为-e 的尘粒，从点 A 自静止开始飞向平板面达到平板时的速度。

分析 无限大均匀带电平板的电荷分布具有对称性，借助高斯定理求得各区域的电场强度，再根据电势与电场强度的积分关系$U_a-U_b=\int_a^b\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$可求得任两点间的电势差。静电场力是保守力，在只有电场力做功的系统中能量守恒。所以带电量为-e 的尘粒从点 A 自静止开始飞向平板面的过程中电场力对其所作的功等于其动能的增加。

解: (1)由高斯定理得,平板外的电场是均匀的，电场强度为：$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

所以点 A 与平板之间的电势差为

$$\Delta U_{AO} = -\frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}.$$



(2)点 B 与点 C 之间的电势差

$$\Delta U_{BC} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(d_2 - d_1\right).$$

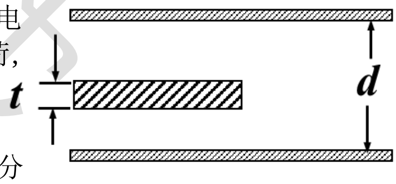
(3)质量为 m、带电量为-*e* 的尘粒，从点 A 自静止开始飞向平板面达到平板，该尘粒做的功为 $A = -e\Delta U_{AO} = \frac{e\sigma d}{2\varepsilon_0}$

使该尘粒从静止加速到速度为 v ,有

$$A = \frac{1}{2}mv^2$$

代入解得尘粒的速度为 $$v = \sqrt{\frac{e\sigma d}{m\varepsilon_0}}$$

16.　(6-20 题)如图所示，有一电容器其结构如下：极板面积为 $A=a^2$，极板距离为 d；在两极板之间插入一厚为 t 且介质介电常量为 ε 的平行于极板的介质板，其插入深度为 $a/2$，面积为 A/2。若略去边缘效应，求该电容器的电容。



分析 题中的电容器可以等效为极板面积为 *A/2* 的两个平板电容器并联。插入电介质的部分，由于介质界面出现极化电荷，介质内的电场减弱，使得这部分的电容器的电容量发生变化，因而电容器两部分的电荷分布不同。设这两部分极板的面电荷密度分别为 σ_1 、σ_2，根据高斯定理可以确定各部分的电场强度、电势差，根据 $C = Q/U$ 可以得出各部分的电容。

解: 由分析得电容器可以等效为极板面积为 *A/2* 两个平板电容器并联，设定有电介质部分的电容器极板表面的电荷密度为 σ_1，另一部分的电容器极板表面的电荷密度为 σ_2，高斯定理可得

有电介质部分的电容器的空气介质中的电场强度为

$$E_{空} = \sigma_1/\varepsilon_0$$

有电介质部分的电容器的电介质中的电场强度为

$$E_{介} = \sigma_1/\varepsilon$$

故这部分的电容器的电势差为

$$U_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon}t + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\left(d - t\right)$$

由此可得这部分的电容器电容为

$$C_1 = \frac{\sigma_1 A/2}{U_1} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 A}{2\left[t\varepsilon_0 + (d-t)\varepsilon\right]}$$

同理不含介质部分的电容器中的电场强度为

$$E = \sigma_2/\varepsilon_0$$

电势差为 $$U_2 = \sigma_2 d/\varepsilon_0$$

电容为 $$C_2 = \frac{\sigma_2 A/2}{U_1} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}$$

总电容为

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 A(2\varepsilon d - \varepsilon t + \varepsilon_0 t)}{2d\left[t\varepsilon_0 + (d-t)\varepsilon\right]}$$

17. 一半径为 R 的导体球，带电量为 Q，置于电容率为 ε 的无限大均匀电介质中，试求电场的能量。

分析 静电场的能量 $W = \iiint \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}V$，所以本题的关键就是确定电位移矢量 $\vec{\boldsymbol{D}}$ 和电场强度 $\vec{\boldsymbol{E}}$。置于无限大均匀电介质中导体球的电场具有球对称性,可采用高斯定理确定电场的分布，进而求出电场的能量。

解: 取同心球面为高斯面,由高斯定理有

$$\oint \vec{\boldsymbol{D}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \sum q_0$$

得当 $r < R$ 时， $\vec{\boldsymbol{D}}_1 = \vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0$

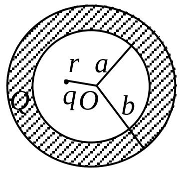
当 $r > R$ 时， $\vec{\boldsymbol{D}}_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

故电场的能量

$$W = \iiint \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}V = \int_R^\infty \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\times\frac{Q}{4\pi r^2}\times 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R}$$

18. 如图所示，一内半径为 a、外半径为 b 的金属球壳，带有电荷 Q，在球壳空腔内距离球心 r 处有一点电荷 q。设无限远处为电势零点，试求：(1) 球壳内外表面上的电荷。(2) 球心 O 点处，由球壳内表面上电荷产生的电势。(3) 球心 O 点处的总电势。



解: (1) 由静电感应，金属球壳的内表面上有感生电荷 $-q$，外表面上带电荷 $q+Q$

(2) 不论球壳内表面上的感生电荷是如何分布的，因为任一电荷元离 O 点的距离都是 a，所以由这些电荷在 O 点产生的电势为：

$$U = -\frac{\int \mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_o a} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_o a}.$$

(3) 球心 O 点处的总电势为分布在球壳内外表面上的电荷和点电荷 q 在 O 点产生的电势的代数和

$$U_O = U_q + U_{-q} + U_{Q+q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_o a} + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_o b} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o b}$$