例 点电荷电场中试验电荷的电势能和电势

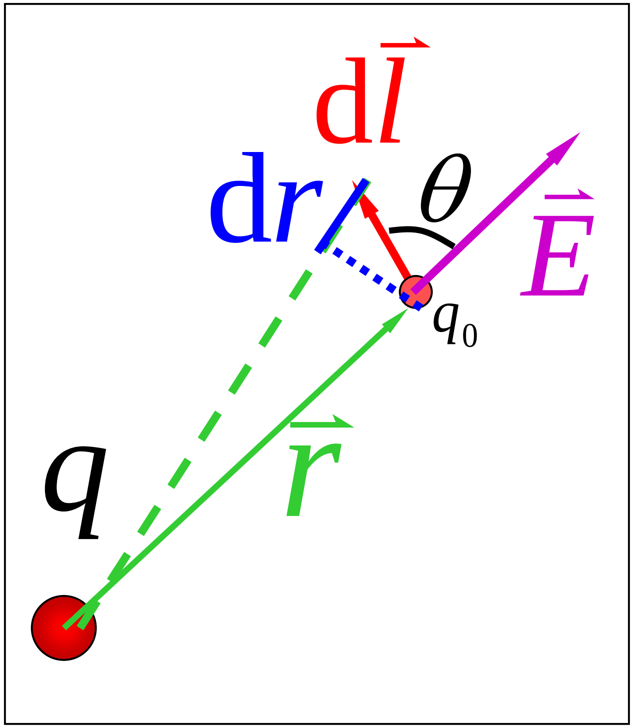
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r$$

令 $W_\infty = 0$

$$W = \int_r^\infty \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_r^\infty \frac{q_0 q \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{W = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$



点电荷的电势

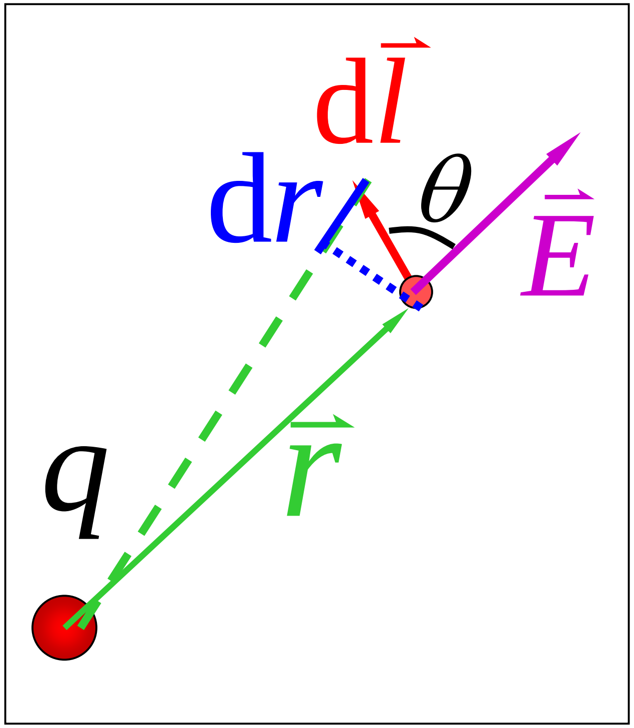
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \qquad \text{令 } U_\infty = 0$$

$$U = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$\boxed{U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

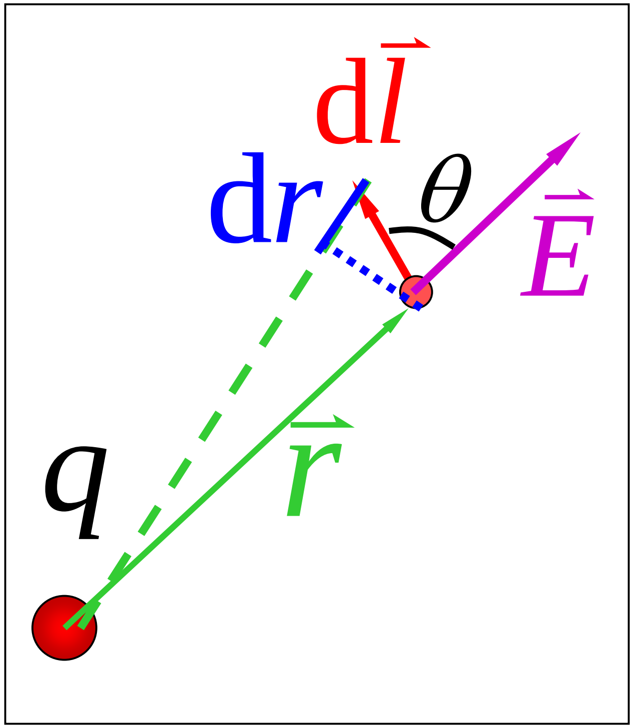
——球对称性



六、电势的计算

1. 点电荷的电势

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \qquad 令\ U_\infty=0$$



$$U=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

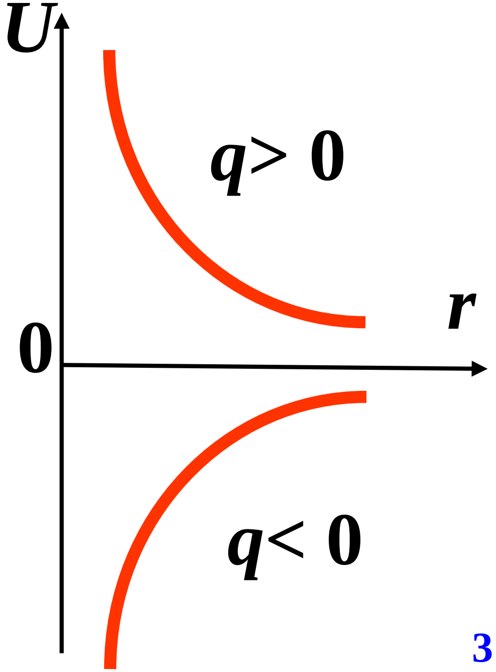
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$\boxed{U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}\ \begin{cases} q>0,\ U>0 \\ q<0,\ U<0 \end{cases}$$

——球对称性

标量

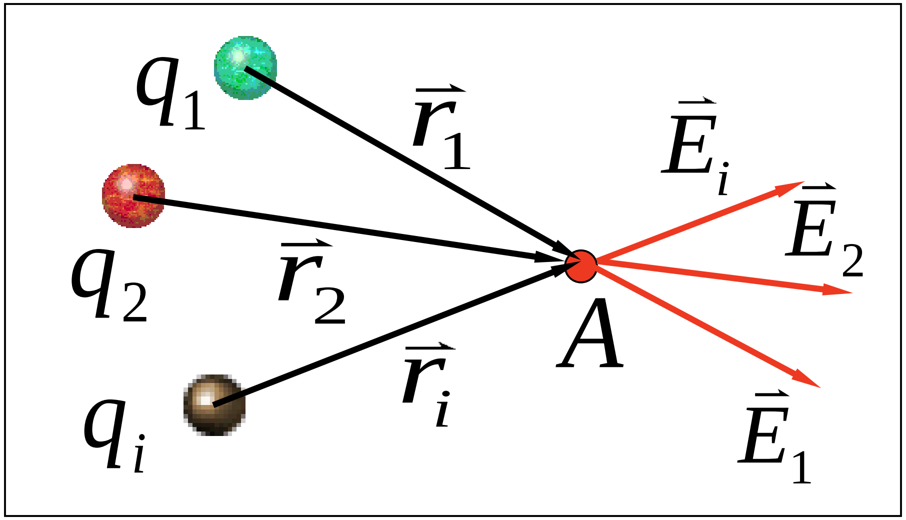
有正负



2. 电势的叠加原理

$$U_{\infty}=0$$

点电荷系 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$



$$U_A=\int_A^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_A^{\infty}\sum_i \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_i\int_A^{\infty}\vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_i U_i$$

对于点电荷—— $\boxed{U_i=\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$

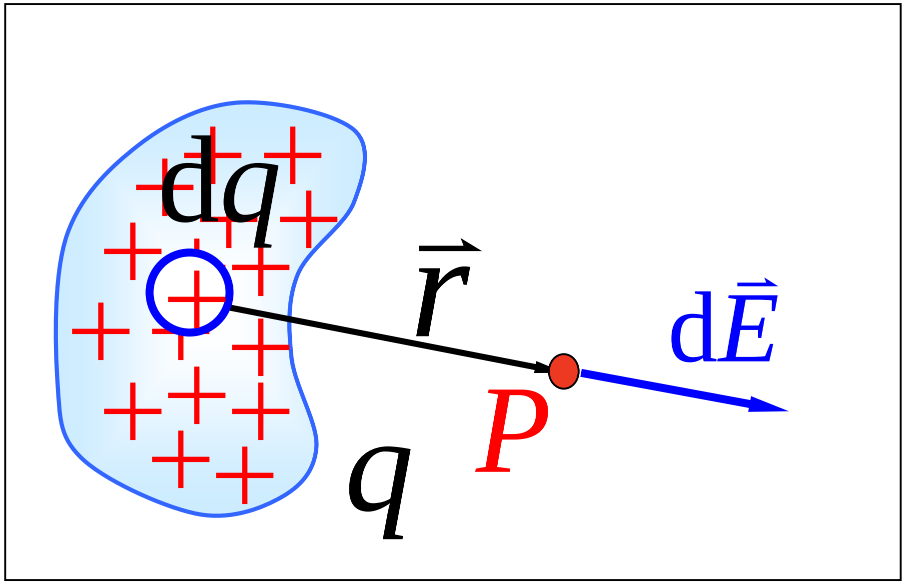
对于点电荷系—— $\boxed{U_A=\sum_i U_{iA}=\sum_i \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$

------- 电势叠加原理

3. 连续分布电荷的电势

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U_P = \int \mathrm{d}U = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



求电势的方法

- 利用 $U_P = \int \mathrm{d}U = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

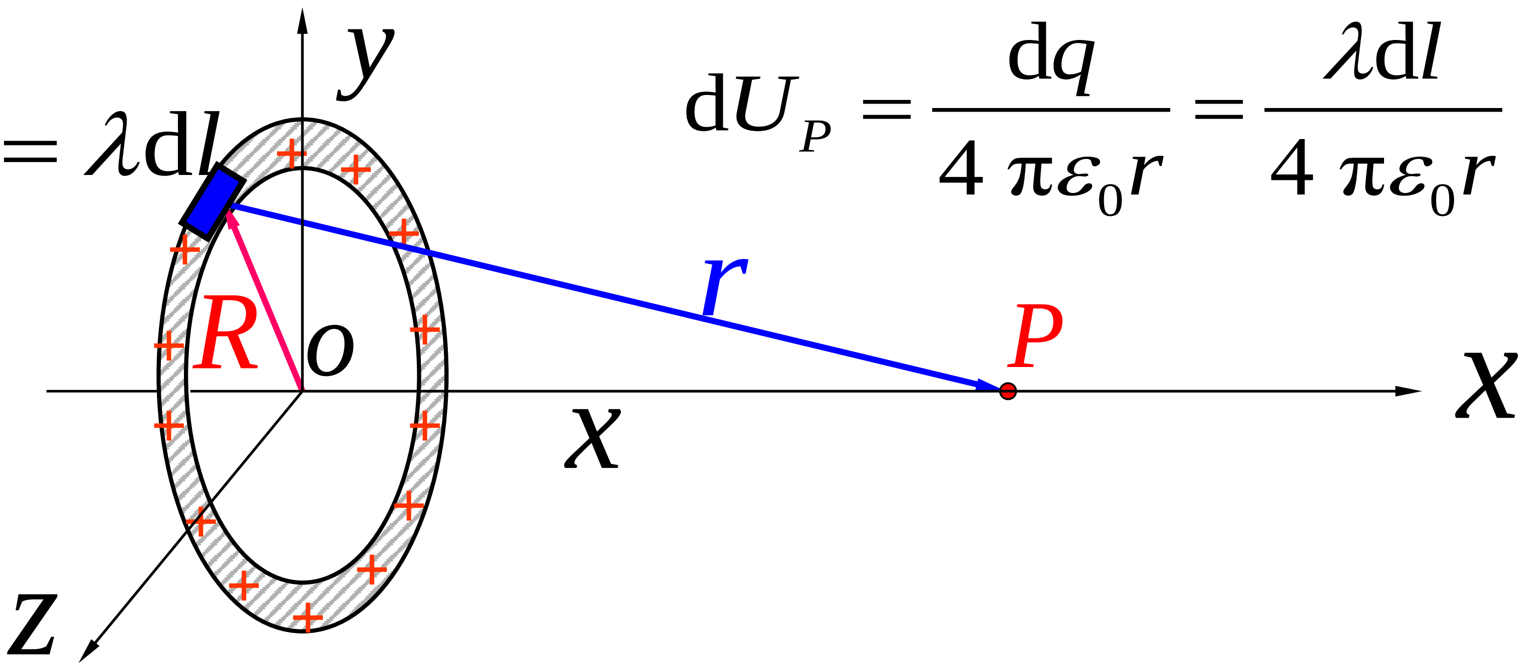
  ——这一结果已选无限远处为电势零点。

- 若已知在积分路径上 $\vec{E}$ 的函数表达式，

  则 $U_A = \int_A^{U=0\text{点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

例1 正电荷q均匀分布在半径为R的细圆环上。求圆环轴线上距环心为x处点P的电势。

解： $\lambda = q/2\pi R$　　$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \dfrac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}$



$$\mathrm{d}U_P = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

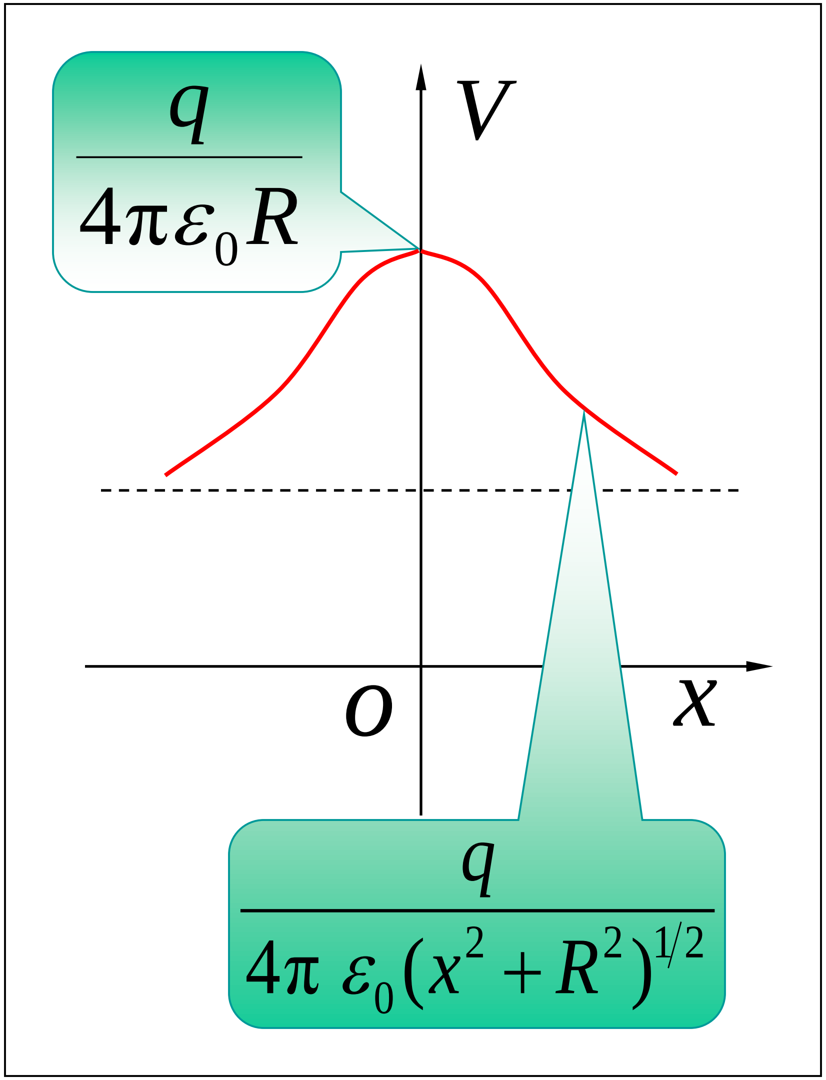
$$U_P = \int_{(q)} \mathrm{d}U_p = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

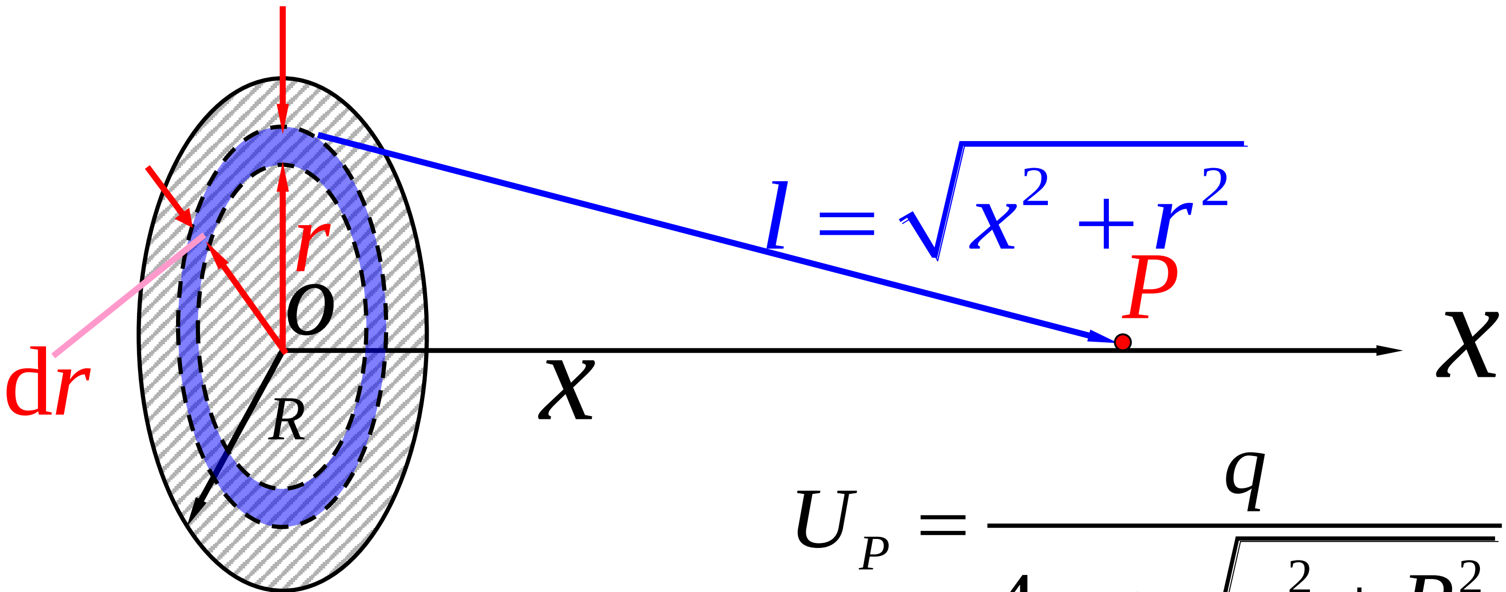
讨 论:

若 $x=0$, $U_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

若 $x>>R$, $U_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$



例2 求均匀带电薄圆盘轴线上的电势。



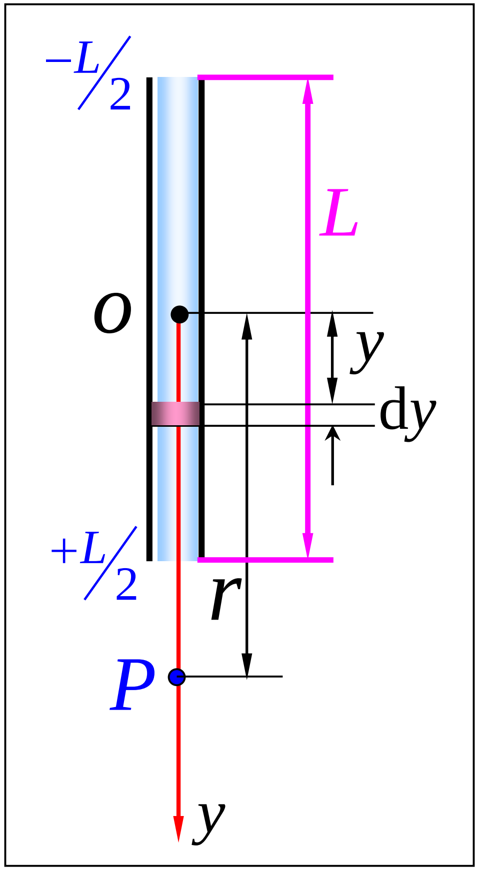
$$U_P = \frac{q}{4\,\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

解： $\mathrm{d}q = \sigma 2\,\pi r \mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}U_p = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$U_P = \int_{(q)}\mathrm{d}U = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma 2\,\pi r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)$$

例3 求长为 L 的均匀带电 q 直线延长上一点 P 的电势。



解： $\lambda=\dfrac{q}{L}$ $\qquad \mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}y$

令 $U_\infty=0$

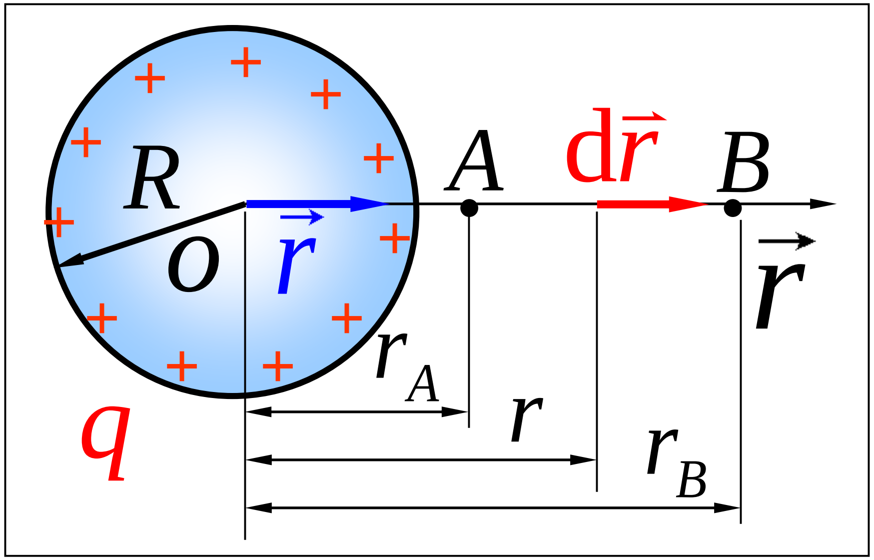
$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(r-y)}=\frac{\lambda\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0(r-y)}$$

$$U=\int\mathrm{d}U=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\lambda\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0(r-y)}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\mathrm{d}y}{r-y}\qquad=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r+\dfrac{L}{2}}{r-\dfrac{L}{2}}$$

例4 真空中，有一带**均匀带电球壳**，带电量为q，半径为R。试求（1）球壳外任意点的电势；（2）球壳内任意点的电势；（3）球壳外两点间的电势差；（4）球壳内两点间的电势差。

解：



$$\begin{cases} r < R, & \vec{E}_1 = 0 \\ r > R, & \vec{E}_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r \end{cases}$$

以无限远为参考点。

（1）$r > R$ 时

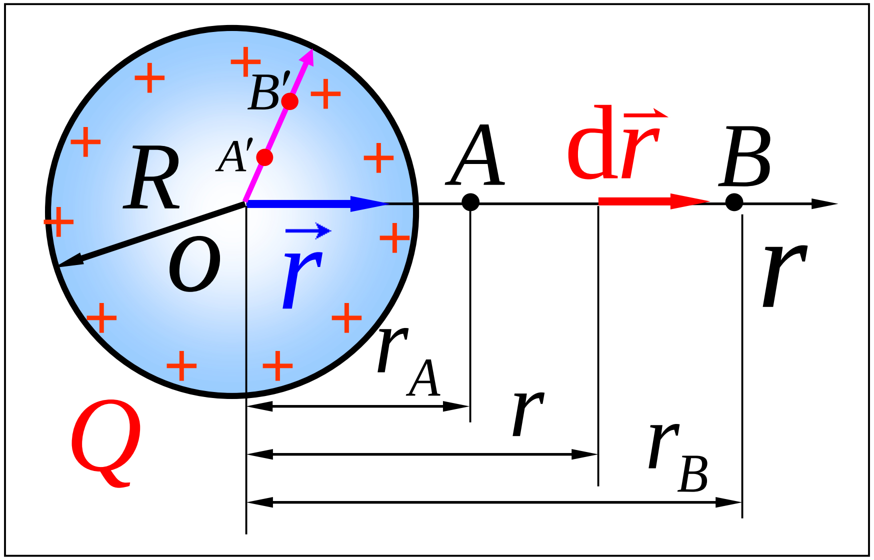
$$U_P(r) = \int_r^\infty \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{r^2}\hat{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

（2）$r<R$ 时

$$U_{内}(r)=\int_r^R \vec{E}_1\cdot d\vec{r}+\int_R^\infty \vec{E}_2\cdot d\vec{r} \ =\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

（3）$r>R$



$$U_A-U_B=\int_{r_A}^{r_B}\vec{E}_2\cdot d\vec{r}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{\vec{r}_0\cdot d\vec{r}}{r^2}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} \quad =\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B})$$

（4）$r<R$ $\qquad U_{A'}-U_{B'}=\int_{r_{A'}}^{r_{B'}}\vec{E}_1\cdot d\vec{r}=0$

电场强度与电势的关系概括如下：

积分关系： $$\boldsymbol{U}=\int_{(\boldsymbol{P})}^{(\boldsymbol{P}_0)}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$ **---- 由场强求电势**

微分关系： $$\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla\boldsymbol{U}$$ **---- 由电势求场强**

真空中静电场小结

一. 线索（基本定律、定理）：

$$\left.\begin{array}{l}\text{库仑定律}\\ \vec{E}=\vec{F}/q_0\\ \vec{E}=\sum\vec{E}_i\end{array}\right] \rightarrow \vec{E}=\sum_i\frac{q_i\hat{e}_{r_i}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \rightarrow \left[\begin{array}{l}\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\dfrac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}\\ \oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0\end{array}\right.$$

二. 求静电场的方法：

静电场 可以用电场 强度来描述，

静电场 也可以用电势来描述。

1.求 $\vec{E}$
$$\begin{cases}\text{场强叠加法}\\ \text{高斯定理法}\\ \text{电势梯度法}\end{cases}$$

2.求 U
$$\begin{cases}\text{电势叠加法}\\ \text{场强积分法}\end{cases}$$

2.求U

场强积分法：$U_p = \int_{(P)}^{(零势点)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$，

（$\vec{E}$分段，积分也要分段）；

叠加法：$U = \sum_i U_i$（零点要同）；

$$U = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$，（$U_\infty = 0$）。

真空中静电场小结（两两歌）

1.两个物理量 $\vec{E} \quad U$

2.两个基本性质方程

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \qquad \oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

3.两个计算思路

$$\vec{E} = \int_{(Q)} d\vec{E} \qquad U = \int_{(Q)} dU$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \qquad U = \int_{(P)}^{(0)} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

叠加

与

高斯

4.强调两句话

注重典型场　　注重叠加原理

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r<R \quad E=0 \qquad U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$r>R \quad \vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

三、几种典型电荷分布的$\vec{E}$和U

点电荷（? ）

均匀带电球面（? ）

均匀带电球体（? ）

均匀带电无限长直线（? ）

均匀带电无限大平面（? ）