“力学篇”总结

第一章 质点运动学

参考系　　坐标系　　质点

位置矢量　　$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

运动方程　　$\vec{r} = \vec{r}(t)$

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$　轨迹方程

位移　　$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

路程：质点实际运动轨迹的长度　　$\Delta s = AB$

速度：　$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$　　速率：　$v = \dfrac{ds}{dt}$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

加速度 $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$

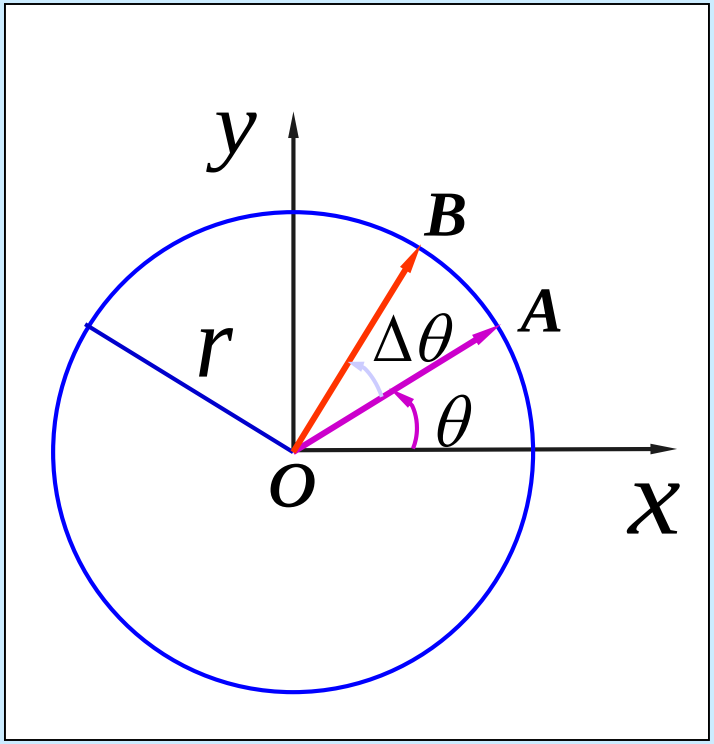
$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\qquad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}\qquad a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}$$

圆周运动

角坐标（角位置）$\theta(t)$

微小角位移 $d\vec{\theta}$

角速度 $\vec{\omega}=\dfrac{d\vec{\theta}}{dt}$



角加速度 $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

$$d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad v = R\omega$$

$$\vec{a} = a_t \vec{\tau}_0 + a_n \vec{n}_0$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\beta \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v\omega$$

相对运动

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}' \qquad \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$

第二章 质点动力学

牛顿运动定律

功 $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ $A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$

功率 $p = \dfrac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

动能（状态函数）—— $\boxed{E_k = \dfrac{1}{2} m v^2}$

质点动能定理 $A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{k_b} - E_{k_a} = \Delta E_k$

$E_p = mgh$ $E_p = \dfrac{1}{2} k x^2$ $E_p = -G \dfrac{Mm}{r}$

势能 $E_{p_b} - E_{p_a} = -\int_a^b \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r}$

质点系动能定理 $\sum A_{外} + \sum A_{内} = \sum E_{k2} - \sum E_{k1}$

质点系功能原理

$$\sum A_{外} + \sum A_{非保内} = \sum E_{i2} - \sum E_{i1} = E_2 - E_1$$

机械能守恒定律

当 $\sum A_{外} + \sum A_{非保内} = 0$ 时，

$E_1 = E_2$， 即 $\Delta E = 0$

动量 $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

冲量为力对时间的累积 $\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t}$

质点的动量定理

$$\boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\vec{p}_2-\vec{p}_1}$$

质点系动量定理 作用于质点系的合外力的冲量等于质点系动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum\vec{F}_i\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}$$

动量守恒定律

若 $\sum\vec{F}_{外}=0$，则 $\vec{p}=\sum_i\vec{p}_i=\sum_i m_i\vec{v}_i=$ 恒量

平均冲力

第三章 刚体的定轴转动

力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

刚体定轴转动定律 $\vec{M}=J\vec{\beta}$

转动惯量： $J=\sum_i \Delta m_i r_i^2,\ J=\int_{(m)} r^2 dm$

匀质细杆 $J=\frac{1}{3}ml^2 \qquad J=\frac{1}{12}ml^2$

匀质圆盘 $J=\frac{1}{2}mR^2$

力矩的功 $dA=Md\theta \qquad A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta$

定轴转动刚体的动能 $E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$

转动动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2=E_{k_2}-E_{k_1}$$

质点的角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$

定轴转动刚体的角动量 $\vec{L}=J\vec{\omega}$

角动量定理 $\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$ $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt=\vec{L}_2-\vec{L}_1$

角动量守恒定律

若 $\vec{M}=0$, 则 $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$ 即 $\vec{L}=$恒量

质点运动与刚体定轴转动的对照

质点运动		刚体定轴转动	
速度 加速度	$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	角速度 角加速度	$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ $\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
力	$\vec{F}$	力矩	$\vec{M}$
质量	m	转动惯量	J
动量	$\vec{P}=m\vec{v}$	角动量	$L=J\omega$
运动定律	$\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律	$M=J\beta$
动量定理	$\mathrm{d}\vec{p}=\vec{F}\mathrm{d}t$ $\int\vec{F}\mathrm{d}t=\vec{p}-\vec{p}_0$	角动量定理	$\mathrm{d}L=M\mathrm{d}t$ $\int M\mathrm{d}t=J_2\omega_2-J_1\omega_1$
功	$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功	$\mathrm{d}A=M\mathrm{d}\theta$
功率	$P=\vec{F}\cdot\vec{v}$	力矩的功率	$P=M\omega$
动能	$E_K=\dfrac{1}{2}mv^2$	转动动能	$E_K=\dfrac{1}{2}J\omega^2$
动能定理	$\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0^2$	动能定理	$\int M\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{2}J\omega^2-\dfrac{1}{2}J\omega_0^2$

静电学

内 容 总 结

第六章 静电场

1. 库仑定律

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0$$

——真空中点电荷之间的相互作用力

2. 电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- 点电荷的电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{r}_0$$

- 电荷连续分布带电体的电场强度

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{r}_0 \qquad \vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{r}_0$$

3. 电场强度电通量

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad \Phi_{\mathrm{e}}=\int_S \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}=\int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

4. 真空中的高斯定理

在真空中，通过任一闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以真空介电常数 ε_0 。与闭合曲面外电荷无关。

$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}q_i$$

- 无限长均匀带电直线外的场强 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$
- 无限大均匀带电平面 $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

5. 电势： $U = \dfrac{W}{q_0}$

- 点电荷的电势 $U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$
- 电荷连续分布带电体的电势 $U_P = \int \mathrm{d}U = \int_q \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$
- 电势差 $\Delta U = U_A - U_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

6. 电场强度与电势的关系 $\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{n}_0 = -\nabla U$

$$\vec{E} = -(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k})$$

7. 静电平衡条件

（1）导体内部任何一点处的电场强度为零；

（2）导体表面处的电场强度的方向, 都与导体表面垂直。

——推论： 导体是等势体；导体表面是等势面。

8. 电容

孤立导体的电容 $C = \frac{Q}{U}$

电容器的电容 $C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{Q}{\Delta U}$

9. 电介质 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

有电介质时的高斯定理： $\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0 = \sum_i q_{0i}$

10. 静电场的能量

- 孤立导体的静电能 $W_e = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{1}{2} qU = \dfrac{1}{2} CU^2$
- 导体组的静电能 $W_e = \sum_{i=1}^{N} W_{ei} = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i U_i$
- 能量密度 $w_{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{2} \varepsilon E^2$

$$W_e = \int_V w_{\mathrm{e}} \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \mathrm{d}V$$

1、质量为 m 的小球，在水中受的浮力为常数 F，当它从静止开始沉降时，受到水的粘滞阻力为 $f = kv$ （k为常数）。证明小球在水中竖直沉降的速度 v 与时间 t 的关系为

$$v = \frac{mg - F}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$

解： 根据**牛顿第二定律**，有:

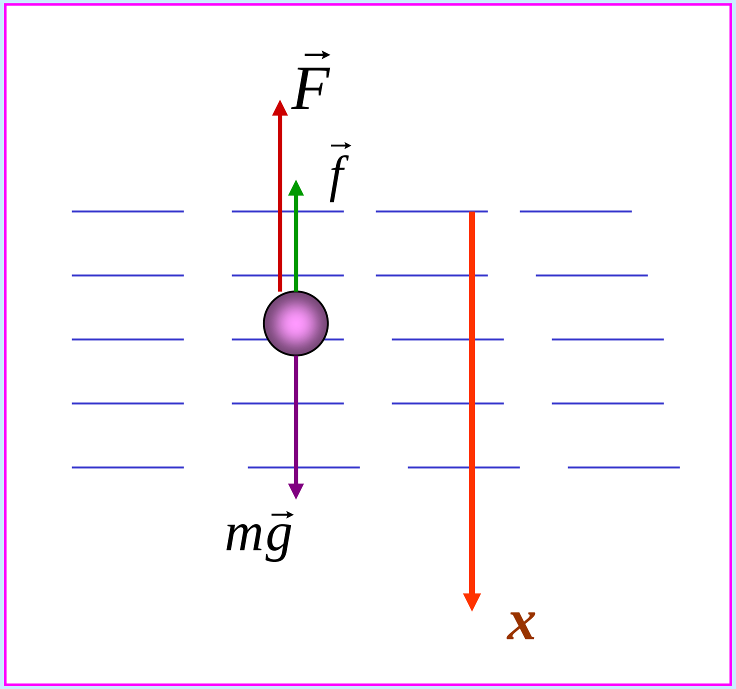
$$mg - F - kv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

分离变量: $$\frac{m dv}{mg - F - kv} = dt$$

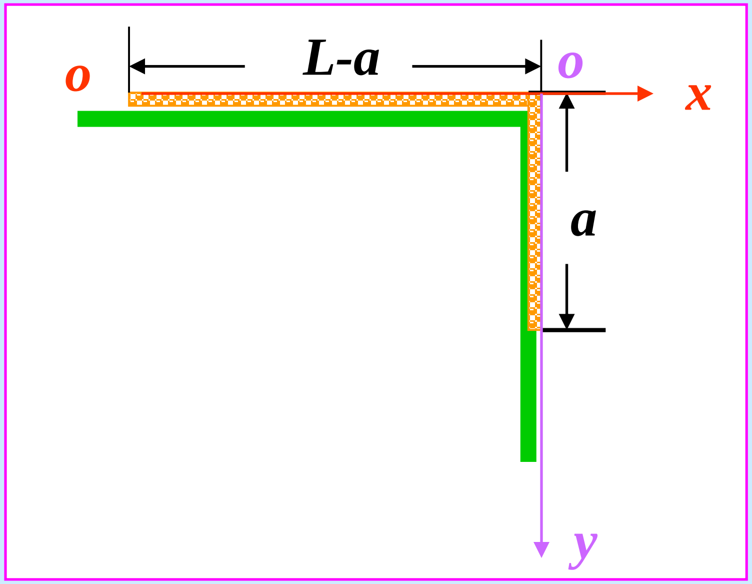
初始条件为: $t = 0,\ v = 0.$

两边积分，有: $$\int_0^v \frac{m dv}{mg - F - kv} = \int_0^t dt$$

$$\therefore v = (mg - F)\left(1 - e^{-kt/m}\right)/k.$$



2、如图，长为 L ，质量为 m 的匀质链条，置于水平桌面上，链条与桌面之间的摩擦系数为μ，下垂部分的长度为 a 。链条**由静止开始运动**，求在链条滑离桌面的过程中，重力和摩擦力所作的功和链条离开桌面时的速率。



解：（1）重力所作的功：

链条下端在 y 时，**重力所作元功**

$$dA_p = \frac{m}{L} ygdy$$

链条下端由位置 a 滑至 L，**重力所作的功**为

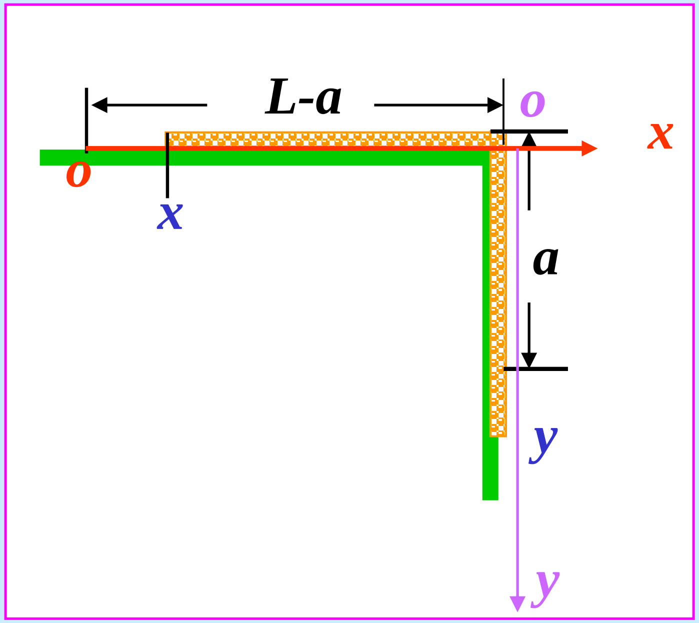
$$A_p = \int_a^L \frac{m}{L} ygdy = \frac{mg}{2L} y^2 \Big|_a^L$$

$$= \frac{1}{2L} mg(L^2 - a^2)$$

（2）链条左端在 x 时，摩擦力所作元功

$$dA_f = -\mu\frac{m}{L}(L-a-x)g\,dx$$

链条左端由坐标原点 o 滑至 $(L-a)$ 处，**摩擦力所作的功**为



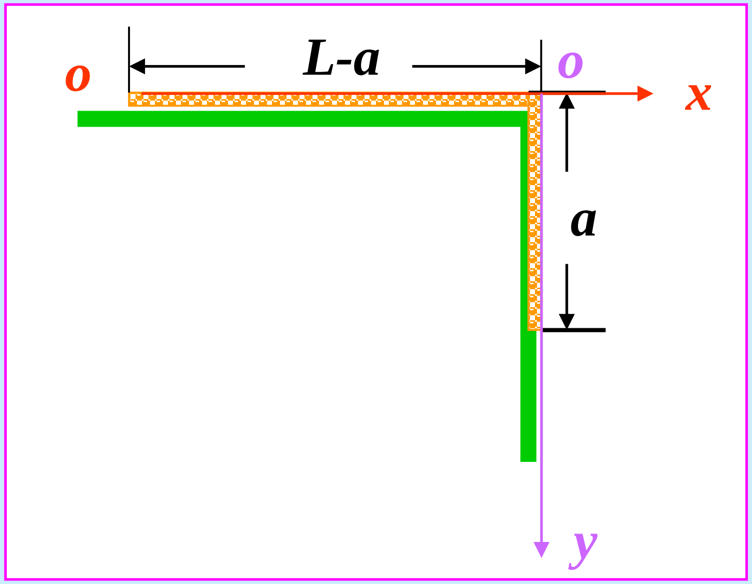
$$A_f = \int_0^{L-a} -\frac{\mu mg}{L}(L-a-x)dx$$

$$= -\frac{\mu mg}{L}\left[(L-a)x - \frac{1}{2}x^2\right]\Bigg|_0^{L-a}$$

$$= -\frac{\mu mg}{2L}(L-a)^2$$

$$A_p = \frac{1}{2L} mg(L^2 - a^2) \qquad A_f = -\frac{\mu mg}{2L}(L-a)^2$$

（3）根据动能定理



$$A_p + A_f = \frac{1}{2} m v^2 - 0$$

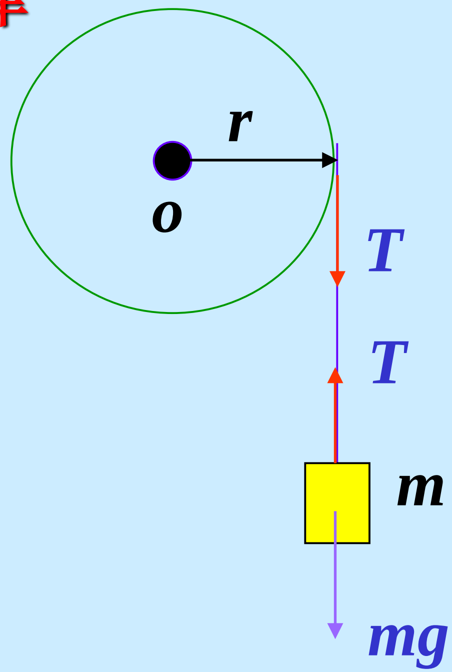
$$\frac{mg}{2L}(L^2 - a^2) - \frac{\mu mg}{2L}(L-a)^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v^2 = \frac{g}{L}\left((L^2 - a^2) - \mu (L-a)^2\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{L}\left((L^2 - a^2) - \mu (L-a)^2\right)}$$

4、一质量为 m 的物体悬于一条轻绳的下端，绳的另一端绕在一滑轮上，如图所示。滑轮轮轴水平放置，轮半径为 r ，设轮轴与滑轮之间光滑。当物体从静止释放后，在时间 t 内下降了一段距离 s 。试求整个滑轮的转动惯量.

解：对滑轮，滑轮所受力距，并根据**转动定律**



$$M_z = Tr = J\beta,$$

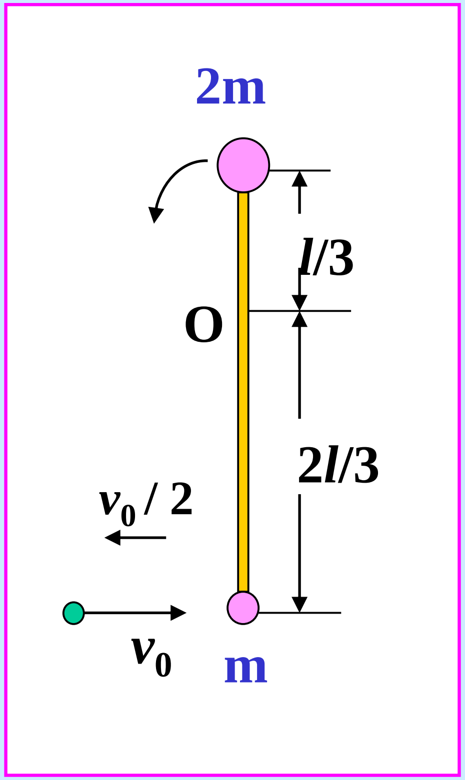
滑轮的转动惯量 $J = \dfrac{Tr}{\beta} \quad \cdots(1)$

对重物： $mg - T = ma = m\beta r \cdots (2)$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\beta r t^2 \cdots (3)$$

由(1),(2),(3) 得 $J = mr^2 \cdot (\dfrac{t^2 g}{2s} - 1)$

5、 如图所示， 长为 l 的轻杆，两端各固定一质量分别为 *m* 和 2*m* 的小球，杆可绕水平光滑轴 O 在竖直面内转动，转轴 O 距两端分别为 *l*/3 和 2*l*/3 。原来杆静止在竖直位置.今有一质量为 *m* 的小球，以水平速度 v_0 与杆下端小球作对心碰撞，碰后以 $v_0/2$ 返回，试求碰撞后轻杆获得的角速度ω。



解： 由**角动量守恒**

$$m\frac{2}{3}l\cdot v_0 = m\frac{2}{3}l\cdot(-\frac{v_0}{2}) + m(\frac{2}{3}l)^2\omega + 2m(\frac{1}{3}l)^2\omega$$

$$\therefore \omega = \frac{3v_0}{2l}$$

6、如图所示， 设一转台质量为 M，可绕竖直中心轴转动，初角速度为ω_0。 有一质量为 m 的人以相对于转台的恒定速率 u 沿半径从转台中心向边缘走去，求转台转动的角速度与时间 t 的关系。

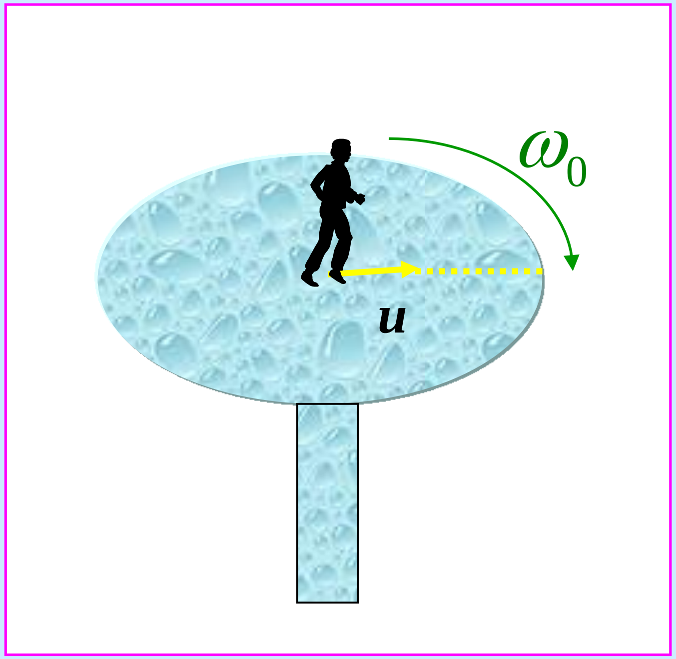
解：由**角动量守恒**

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0+0=\frac{1}{2}MR^2\omega+(mr^2)\omega\cdots(1)$$

$$r=ut\cdots(2)$$

把（2）代入（1），得：

$$\omega=\frac{\omega_0}{1+\dfrac{2mu^2t^2}{MR^2}}$$



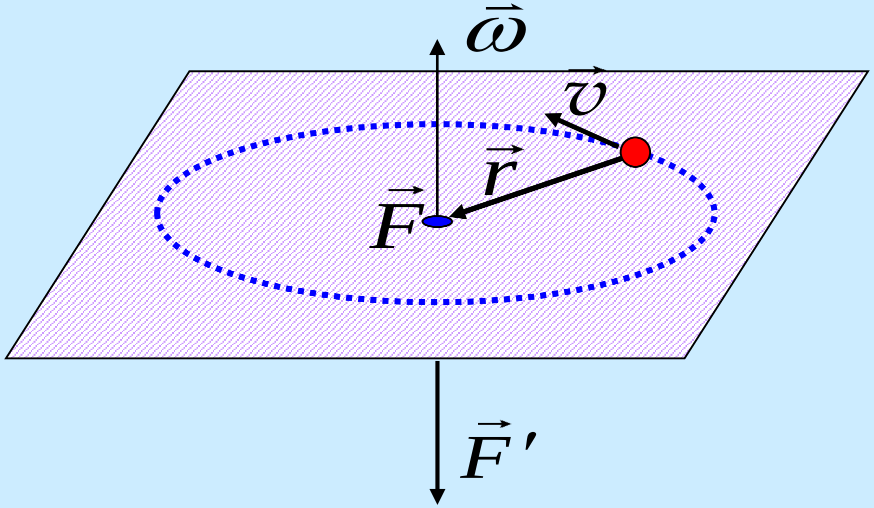
7 用绳系一小球使它在光滑的水平面上做匀速率圆周运动，其半径为 r_0，角速度为 ω_0。现通过圆心处的小孔缓慢地往下拉绳使半径逐渐减小。求当半径缩为r 时小球的角速度。

解：选取平面上绳穿过的小孔O为原点。

因为绳对小球的的拉力 沿绳指向小孔，则力 对 *O* 点的力矩：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

所以小球对 O 点的角动量守恒。



$$r_0 m v_0 = r m v$$

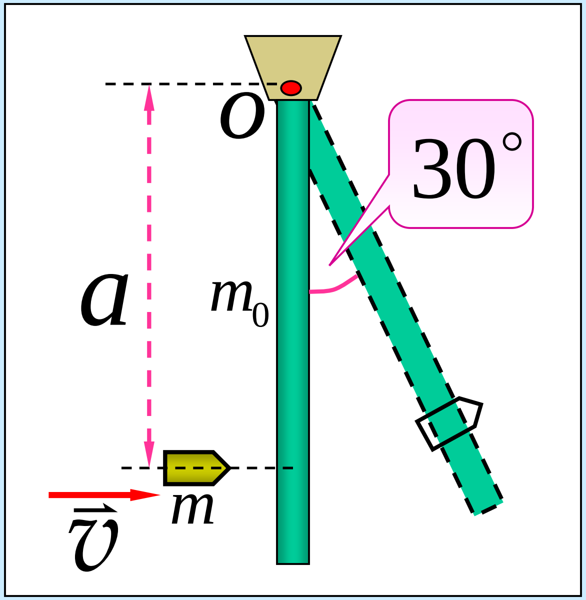
$$\because v = r\omega,\ v_0 = r_0\omega_0$$

$$m r_0^{\,2}\omega_0 = m r^2 \omega$$

$$\therefore \omega = \frac{r_0^{\,2}}{r^2}\omega_0$$

8 一长为 l ，质量为 m_0 的竿可绕支点O自由转动 。一质量为 m 、速率为 v 的子弹射入竿内距支点为 a 处，使竿的偏转角为**30 º**。问子弹的初速率为多少？

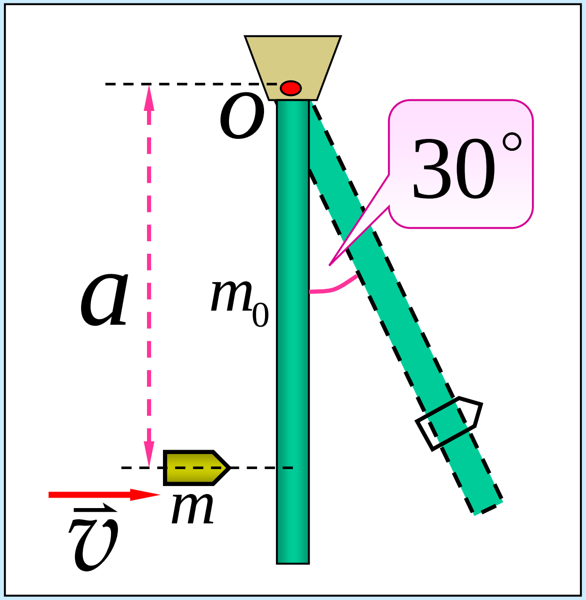
解 把子弹和竿看作一个系统。子弹射入竿的过程系统角动量守恒



$$mva = \left(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{3mva}{m_0 l^2 + 3ma^2}$$

射入竿后，以子弹、细杆和地球为系统，机械能守恒。



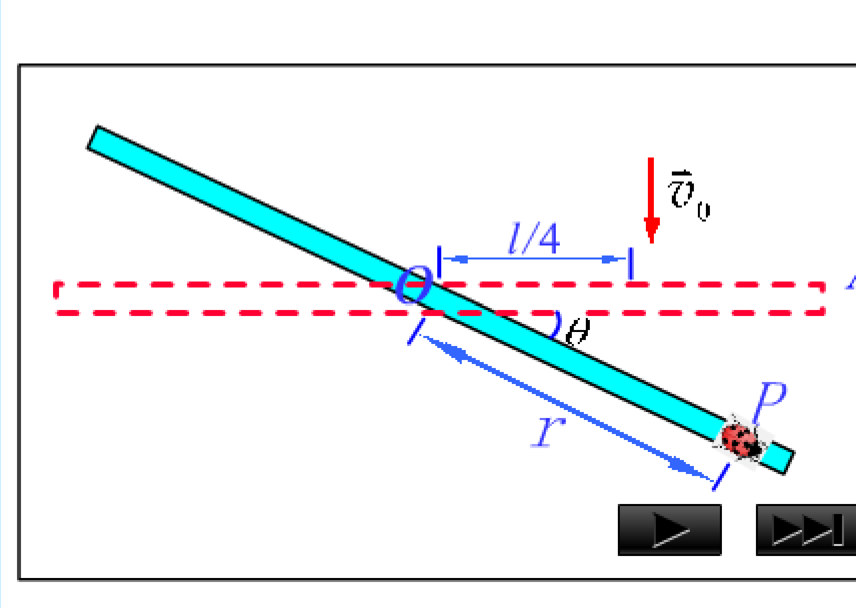
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2)\omega^2 =$$

$$= mga\left(1-\cos 30^\circ\right) + m_0 g\frac{l}{2}\left(1-\cos 30^\circ\right)$$

$$v = \frac{\sqrt{g\frac{(2-\sqrt{3})}{6}(m_0 l + 2ma)(m_0 l^2 + 3ma^2)}}{ma}$$

9长为l 的均匀细杆。当杆静止于水平位置时，有一只小虫以速率 v_0垂直落在距杆的中心O为 $l/4$ 处，并背离点O 向细杆的端点A 爬行.设小虫与细杆的质量均为m. 现欲使细杆以恒定的角速度转动，小虫应以多大速率向细杆端点爬行？

解:角动量守恒



$$mv_0\frac{l}{4}=\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]\omega$$

$$\therefore \omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$

由角动量定理

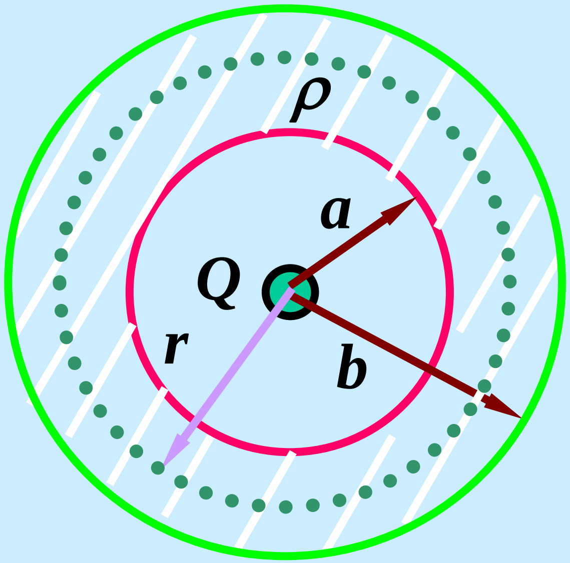
$$M=\frac{dL}{dt}=\frac{d(J\omega)}{dt}=\omega\frac{dJ}{dt}$$

$$mgr\cos\theta=\omega\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}ml^2+mr^2\right)=2mr\omega\frac{dr}{dt}$$

考虑到$\theta=\omega t$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{g}{2\omega}\cos\omega t=\frac{7lg}{24v_0}\cos\left(\frac{12v_0}{7l}t\right)$$

例1：有一带电球壳,内外半径分别为 a和b,电荷体密度$\rho=A/r$,在球心处有一点电荷Q,证明当$A=Q/(2\pi a^2)$时,球壳区域内的场强E的大小与 r 无关.



证: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = (Q+\int \rho dV)/\varepsilon_0$

$$\int \rho dV = \int_a^r \frac{A}{r}4\pi r^2 dr = 2\pi A(r^2-a^2)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{A}{2\varepsilon_0} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0 r^2}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0 r^2} = 0$$

$$\therefore A = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

例2：三块平行金属板A、B和C的面积都是200cm²，其中A、B相距4.0mm，A、C相距2.0mm，B和C板接地。如果使A板带正电，电荷量Q为$3*10^{-7}$C，忽略边缘效应，试求：（1）金属板B和C的感应电量; (2)A板相对于地的电势。

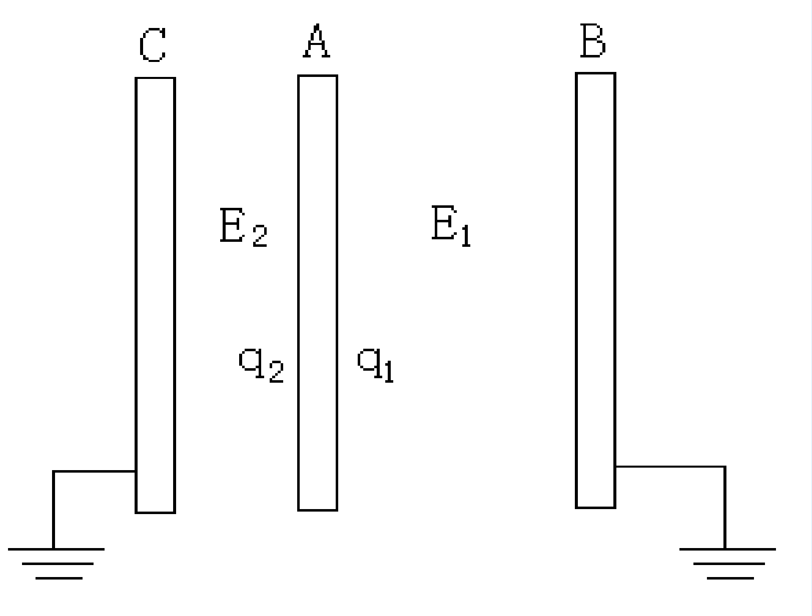
解：（1）设B、C板因静电感应带电$-q_1$，$-q_2$，A板两表面相应分布电荷q_1 及q_2，则$q_1 + q_2=Q$

A,B间及A,C间场强为:

$$E_1=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}=\frac{q_1}{\varepsilon_0 S}$$

$$E_2=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}=\frac{q_2}{\varepsilon_0 S}$$

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{q_1}{q_2}$$



因B、C接地，$U_{AC}=U_{AB}$，即$E_2\,d_{AC}=E_1 d_{AB}$，故

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{d_{AC}}{d_{AB}}=\frac{1}{2}$$

联立

$$q_1=1.0\times10^{-7}C \qquad q_2=2.0\times10^{-7}C$$

（2）

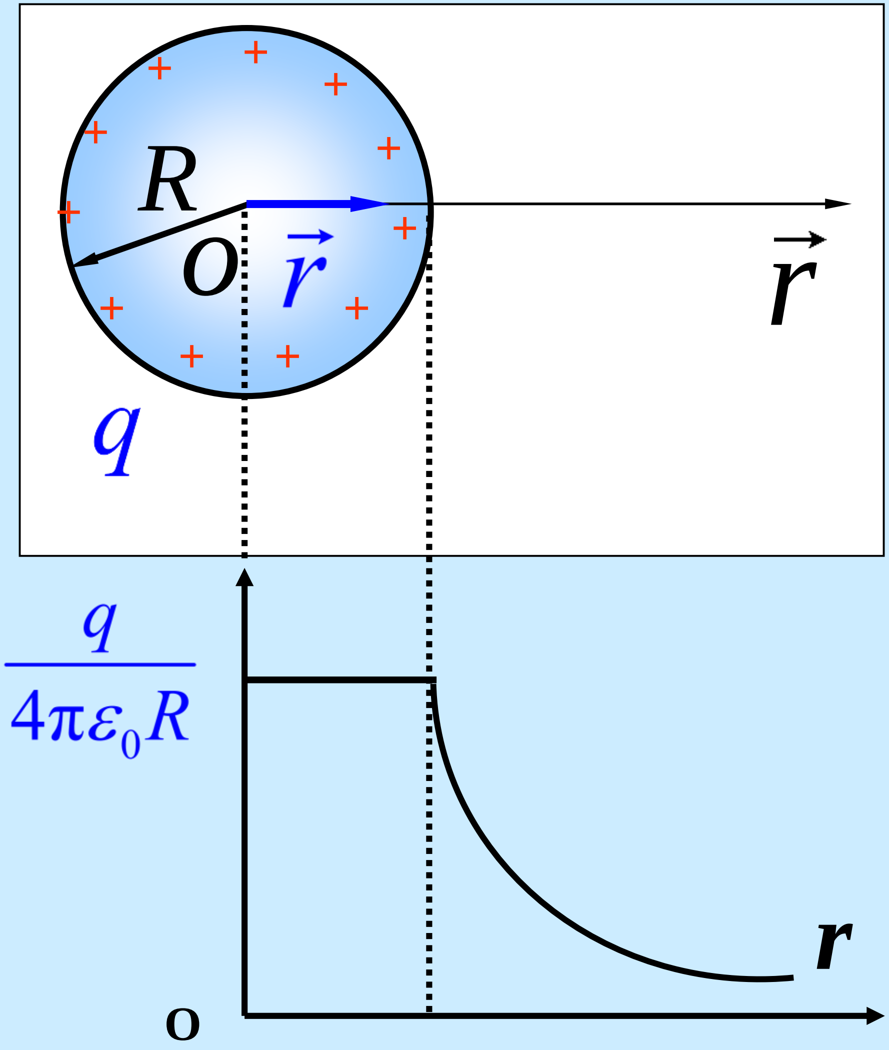
$$U_{AB}=E_1 d_{AB}=\frac{q_1}{\varepsilon_0 S}d_{AB}=2.26\times10^{3}V$$

例3：两个同心的均匀带电球面，半径分别为R_1=5.0cm, R_2=20.0cm,已知内球面的电势为U_1 =60V, 外球面的电势U_2 = -30V 。求：（1）求内，外球面上所带电量？（2）在两个球面之间何处的电势为零？

$$\begin{cases} r < R, & \vec{E}_1 = 0 \\ r > R, & \vec{E}_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \end{cases}$$

$$U = \int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\begin{cases} r < R, & U_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ r > R, & U_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$



解：（1）以 q_1和q_2分别表示内外球面所带电量。

由电势叠加原理:

$$U_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1}+\frac{q_2}{R_2}\right)=60V \qquad U_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_2}=-30V$$

带入给出的 R_1 和 R_2值联立解上两式可得:

$$q_1=6.7\times10^{-10}C \qquad q_2=-1.3\times10^{-9}C$$

（2）设该点半径为**r**,由:

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r}+\frac{q_2}{R_2}\right)=0$$

由此可得:

$$r=\frac{q_1}{-q_2}R_2=\frac{6.7\times10^{-10}}{1.3\times10^{-9}}\times20=10cm$$