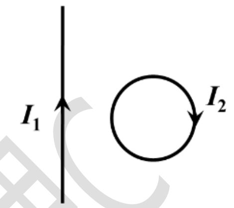
任课教师：<u>时红艳</u>　　　学号：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

2019 春大学物理 C　作业五

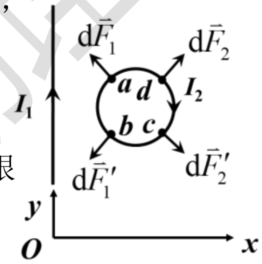
第七章 稳恒磁场

一、简答题

1. 如图，通以电流 I_1 的无限长载流直导线近旁，与其在同一平面内有一圆形载流线圈通以电流 I_2。若长直导线固定不动，请定性分析圆形载流导线所受到的磁场力及从静止开始的初始运动方向。



答：无限长载流直导线 I_1 在其两侧空间产生的磁场 $B=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ 是非均匀，近处较强，远处较弱。且在如图直导线的右侧，磁场方向垂直纸面向里。



　　而在圆形载流导线上，取对称的 $abcd$ 四点，并在各处取电流元，根据安培力公式 $\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$，各个电流元所受到的安培力为，如图所示。并且由于对称性，y 轴方向上总安培力 $\sum \mathrm{d}\boldsymbol{F}_y=0$。而在 x 轴方向上，圆形载流导线的左边半圆的磁感应强度比右边半圆要强，所以左边半圆的安培力 $\boldsymbol{F}_{x左}=\sum \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{x左}$ 比右边半圆 $\boldsymbol{F}_{x右}=\sum \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{x右}$ 要强，故圆形载流导线所受到的总的合力沿 ox 轴负方向，圆形载流导线将从静止开始沿 ox 轴向左运动。

二、选择题

2. 下面关于电流密度的描述正确的是:　[　B　]

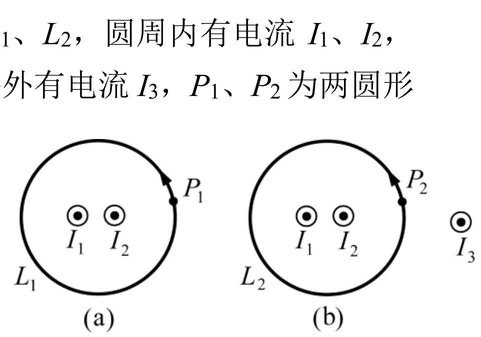
　(A) 电流密度的大小为单位时间垂直穿过单位面积的电荷量;

　(B) 电流密度的大小为单位时间穿过垂直于电流方向单位面积的电荷量;

　(C) 电流密度的大小为单位时间通过任一横截面的电荷量;

　(D) 电流密度的方向为载流子运动的方向。

3. 在图(a)和(b)中各有一半径相同的圆形回路 L_1、L_2，圆周内有电流 I_1、I_2，其分布相同，且均在真空中，但在(b)图中 L_2 回路外有电流 I_3，P_1、P_2 为两圆形回路上的对应点，则：　[　C　]



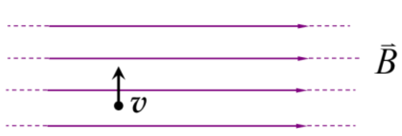
　(A) $\oint_{L_1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{dl}=\oint_{L_2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{dl},\quad \mathbf{B}_{P_1}=\mathbf{B}_{P_2}$;

　(B) $\oint_{L_1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{dl}\neq\oint_{L_2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{dl},\quad \mathbf{B}_{P_1}=\mathbf{B}_{P_2}$;

　(C) $\oint_{L_1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{dl}=\oint_{L_2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{dl},\quad \mathbf{B}_{P_1}\neq\mathbf{B}_{P_2}$;

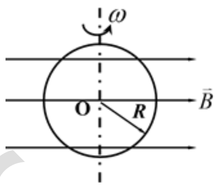
　(D) $\oint_{L_1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{dl}\neq\oint_{L_2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{dl},\quad \mathbf{B}_{P_1}\neq\mathbf{B}_{P_2}$。

4. 如图所示，一电子以速度 v 垂直地进入磁感强度为 B 的匀强磁场中，此电子在磁场中的运动轨道所围面积内的磁通量将 [B]



(A) 正比于 B，反比于电子动能；　　(B) 反比于 B，正比于电子动能；
(C) 正比于 B，反比于 v ；　　(D) 反比于 B，反比于 v。

5. 有一半径为 R、电荷线密度为 λ 的均匀带电圆环，以角速度 ω 绕其一直径旋转。现将转动圆环置入匀强磁场中，磁感强度 $\vec{B}$ 与转轴垂直，则圆环受到的磁力矩大小为 [A]



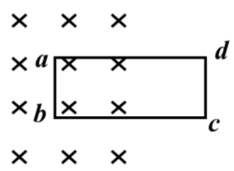
(A) $\dfrac{\pi\lambda\omega BR^3}{2}$　(B) $\dfrac{\pi\lambda\omega BR^3}{4}$　(C) $\dfrac{\pi\lambda\omega BR^4}{2}$　(D) $\lambda\pi\omega BR^3$

二、填空题

6. 一个电流元 $Id\vec{l}$ 位于直角坐标系原点，电流沿 z 轴正方向。在以原点为中心半径为 R 的同心球面上，磁感强度最大值是 $\underline{\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Idl}{R^2}}$，最小值是___0___。

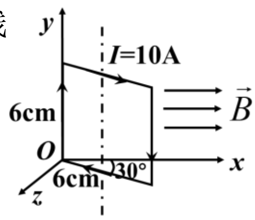
7. 一电量为 q 的带电粒子以角速度 ω 作半径为 R 的匀速率圆周运动，在圆心处产生的磁感应强度 $B=\underline{\dfrac{\mu_0 q\omega}{4\pi R}}$。

8. 匀强磁场的磁感强度大小为 0.6T，方向为垂直纸面向里。一矩形线圈 $abcd$ 的面积为 0.4m^2，共 100 匝。开始，$\vec{B}$ 与线圈平面垂直，且线圈有 1/2 面积在磁场中，如图所示。当线圈绕 cd 边旋转 60°角时，线圈中的磁通量为__0__Wb。



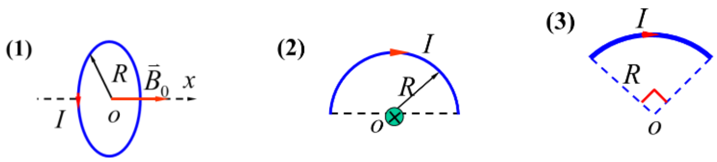
9. 稳恒磁场中的安培环路定理的数学表达式为 $\underline{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_i}$，式中回路方向与电流正负之间的关系为<u>电流方向与回路绕向满足右手定则时为正，相反时为负。</u>

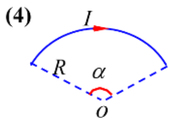
10. 如图所示，载流 I=10A 的矩形线圈，可绕平行于 y 轴且通过线圈中心的转轴转动，如果有一均匀磁场 B=0.2 T，方向沿 x 轴正方向，则保持线圈在这一位置所需的力矩大小为 <u>6.24×10^{-3}N·m</u>。

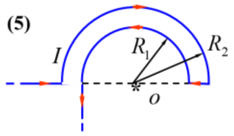


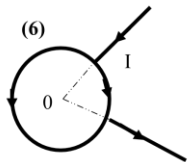
三、计算题

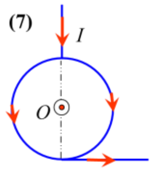
11. (7-1 题) 求图中各种情况下，真空中圆心 O 处的磁感应强度。









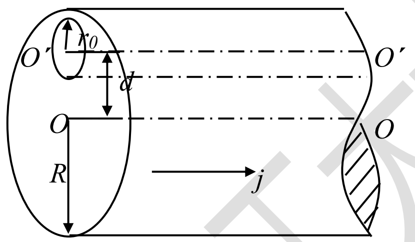


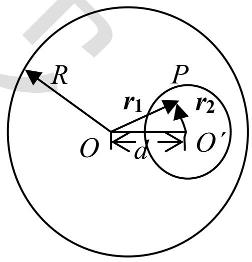
答：(1) $B_0=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$；(2) $B_0=\dfrac{\mu_0 I}{4R}$ ；(3) $B_0=\dfrac{\mu_0 I}{8R}$ ；

(4) $B_0=\dfrac{\mu_0 I}{2R}\dfrac{\alpha}{2\pi}$；(5) $B_0=\dfrac{\mu_0 I}{4R_2}-\dfrac{\mu_0 I}{4R_1}-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$ ；(6) $B_0=0$；(7) $\boldsymbol{B_0}=\dfrac{\boldsymbol{\mu_0 I}}{\boldsymbol{4\pi R}}$

12. (7-4) 一半径为 R 的无限长导体圆柱，在离轴线 d 处，挖掉半径为 r_0 ($r_0<d$) 的无限长小圆柱，两圆柱的轴线互相平行，余下部分沿轴向流过均匀的电流密度。(1) 求大圆柱轴线上的磁感应强度；(2) 求空圆柱轴线上的磁感应强度；(3) 证明挖空部分有均匀磁场。

分析 本体可采用补偿法，将本题中的空心圆柱电流假想为电流密度为 j，半径为 R 的实心圆柱电流与电流密度为-j 的半径为 r_0 的实心圆柱电流的叠加，叠加的结果即为原载流空心圆柱体。空心圆柱体在任一点的磁感应强度为这两个载流实心圆柱体分别在此处磁感应强度的矢量和。





解 （1）由分析可知，半径为 R 的载流圆柱体在 OO 轴上产生的 B_1=0；半径为 r_0 的载流圆柱体在 OO 轴上产生的磁感应强度由安培环路定理得

$$\oint \vec{B}_0\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum I_i$$

$$B_0 2\pi d=\mu_0\pi r_0^2 j$$

所以有
$$B_0=\frac{\mu_0 r_0^2}{2d}j$$

方向垂直于纸面向外。

大圆柱轴线上的磁感应强度 $B=B_0=\dfrac{\mu_0 r_0^2}{2d}j$，方向垂直于纸面向外。

（2）同理由安培环路定理得，半径为 R 的载流圆柱体在 $O'O'$轴上产生的磁感应强度为

$$B_1^{'}==\frac{\mu_0 d}{2}j$$

方向垂直于纸面向外。

半径为 r_0 的实心载流圆柱体在 $O'O'$轴上产生的磁感应强度为 $B_0^{'}=0$，

故空圆柱轴线上的磁感应强度 $B'=B_1^{'}=\dfrac{\mu_0 d}{2}j$

（3）如图所示，设 P 点为空心圆柱内的任意一点，设 $O'P=r_2$ ，$OP=r_1$，

$-j$ 电流在 P 点产生的磁感应强度 B_2 按照安培环路定理为

$$\vec{B}_2=-\frac{\mu_0}{2}\vec{j}\times\vec{r}_2$$

同理 j 电流在 P 点产生的磁感应强度 B_1' 为

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0}{2}\vec{j}\times\vec{r}_1$$

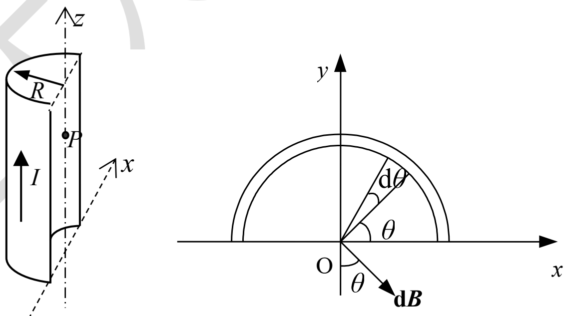
所以 P 点的磁感应强度为

$$\vec{B}_P=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0}{2}\vec{j}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{\mu_0}{2}\vec{j}\times\vec{d}$$

其中 $\boldsymbol{d}$ 为由 OO 轴到 $O'O'$ 轴垂直距离的指向。
故空心部分为大小和方向均不变的均匀磁场，得证。

13. **(7-15 题)** 在半径 $R=1.0\text{cm}$ 的无限长半圆柱形金属薄片中，自上而下地通有电流 $I=5.0\text{A}$，求圆柱轴线上任一点 P 处的磁感应强度。

分析 可以采用毕-萨定律和磁场叠加原理求解。将载流的无限长半圆形金属薄片看成由许多与轴线平行的无限长直导线组成，导线宽度为 $\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta$，其上通有的电流为 $\mathrm{d}I=\dfrac{I\mathrm{d}l}{\pi R}=\dfrac{I\mathrm{d}\theta}{\pi}$，这些线电流在轴线上产生的磁感应强度之和即为圆柱轴线上的磁感应强度。



(a) (b)

解 将载流的无限长半圆形金属薄片看成由许多无限长的平行直导线组成。对应于宽度为 $\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta$ 的无限长直导线的电流

$$\mathrm{d}I=\frac{I\mathrm{d}l}{\pi R}=\frac{I\mathrm{d}\theta}{\pi}$$

它在 P 点产生的磁感应强度的大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\mathrm{d}\theta$$

其方向是在与轴垂直的 xy 平面内，与 $\mathrm{d}l$ 引向 O 点的半径垂直，如图所示。由对称性可知，半圆形电流在 P 处的磁感应强度在 y 方向分量相互抵消，在 x 方向上相互加强。所以 P 点的磁感强度大小为

$$B=\int\mathrm{d}B_x=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}=6.37\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$

14. 如图所示，宽度为 b 的无限长金属薄板，均匀流过电流 I，求在薄板平面上，距板的一边为 r 的 P 点的磁感应强度。

解： 设 x 轴正方向水平向右，坐标原点在薄板左边缘

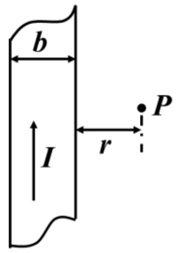
$x \sim x+\mathrm{d}x$ 无限长直条在 P 点产生的磁感强度:

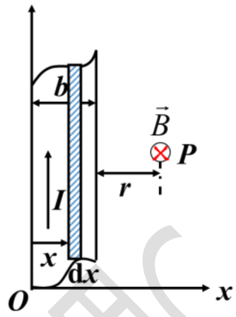
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}x}{2\pi b(r+b-x)}$$

总磁感强度：

$$B = \int_0^b \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \frac{\mathrm{d}x}{r+b-x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln\frac{r+b}{r}$$

方向垂直纸面向里。



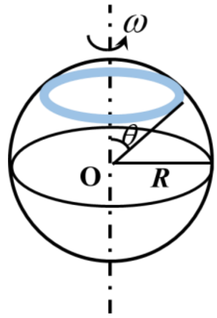


15. (7-5 题) 半径为 R 的均匀带电球面的电势为 U，带电球面绕其直径以角速度 ω 转动，求球心处的磁感应强度。

分析 带电球面绕其直径以角速度 ω 转动，相当于形成一个球面电流，球面电流在空间会形成磁场。球面电流可以看作由一组圆电流构成，各圆电流在球心处的磁感应强度矢量和即为球心处的磁感应强度。

解 由题可知球面所带电量

$$q = 4\pi\varepsilon_0 RU$$



球面的电荷面密度

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{\varepsilon_0 U}{R}$$

如图 10-19 所示，在球面上取一细圆环，细圆环所带电量为

$$\mathrm{d}q = \sigma \cdot 2\pi R\sin\theta \cdot R\mathrm{d}\theta$$

带电球面绕其直径以角速度 ω 转动，细圆环上形成的圆电流为

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q = \omega\varepsilon_0 UR\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

该细圆环电流在球心处的磁场大小为

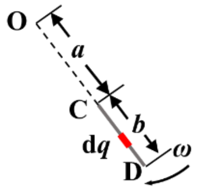
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I (R\sin\theta)^2}{2(R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta)^{3/2}} = \frac{1}{2}\mu_0 U\omega\varepsilon_0 \sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

方向满足右手螺旋定则，沿其转轴向上方向。由于各圆电流在其球心处的磁场方向相同，故球心处的磁感应强度大小为

$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{1}{2}\omega U\varepsilon_0\mu_0 \int_0^{\pi} \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\omega U\varepsilon_0\mu_0$$

方向沿其转轴向上。

16. (7-9 题) 均匀带电刚性细杆 CD ，电荷线密度为 λ，绕垂直于图面的轴 O (O 点在细杆 CD 的延长线上）以角速度ω 匀速转动，求



（1） O 点的磁感应强度 B_O;

（2）磁矩 m ；

（3）若 $a >> b$, 求 B_O 及 m 。

分析 均匀带电刚性细杆 CD 绕垂直于图面的轴 O (O 点在细杆 CD 的延长线上）以角速度ω 匀速转动可以等效为一组同心圆电流，各圆电流在 O 点的磁感应强度矢量和即为 O 点的磁感应强度。而磁矩 $\boldsymbol{m} = IS\boldsymbol{e}_n$ 。

解:（1）在 CD 上任取一线元 dr，它距 O 点的距离为 r，其上带电量 $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}r$，当 CD 转动时， dq 形成圆形电流，电流强度为

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega \mathrm{d}q}{2\pi} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}\mathrm{d}r$$

此电流在 O 点的磁感应强度大小为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r} = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

方向垂直纸面向里。

故带电线段 CD 旋转时在 O 点的总磁感应强度为

$$B_0 = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\int_a^{a+b}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

方向为垂直纸面向里。

(2) 旋转的带电线元 dr 的磁矩大小为

$$\mathrm{d}m = \pi r^2 dI = \frac{\lambda\omega}{2}r^2\mathrm{d}r$$

方向为垂直纸面向里，故转动的带电线段 CD 的总磁矩大小为

$$m = \int \mathrm{d}m = \int_a^{a+b}\frac{\lambda\omega}{2}r^2\mathrm{d}r = \frac{\lambda\omega}{6}[(a+b)^3 - a^3]$$

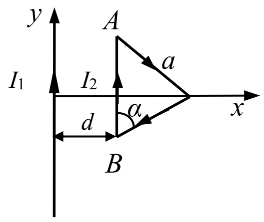
方向为垂直纸面向里。

(3) 若 $a >> b$，则

$$B_0 = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\ln\frac{a+b}{a} = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\left(\frac{b}{a}+...\right) \approx \frac{\mu_0\lambda\omega}{4\pi}\frac{b}{a}$$

$m = \dfrac{\lambda\omega}{6}[(a+b)^3 - a^3] = \dfrac{\lambda\omega a^3}{6}[(1+\dfrac{b}{a})^3 - 1] = \dfrac{\lambda\omega a^3}{6}[3\dfrac{b}{a}+\cdots] \approx \dfrac{1}{2}a^2\omega\lambda b$ 磁感应强度 B_O、磁矩 m 方向均为垂直纸面向里。

17. **(7-11 题)** 如图所示，在通过电流为 I_1 的无限长直线外，有与它共面的边长为 a 的等边三角形，通过电流 I_2。三角形一边与无限长直线的距离为 d，求等边三角形受的总安培力。



分析 将三角形导线按三个边分别计算，分别求出三段直导线所受安培力 $\vec{F}_i = \int I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$，等边三角形受的总安培力 $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$。

解 电流 I_1 在右边产生磁场方向垂直纸面向里，在 AB 边处产生的磁感应强度大小为

$$B = \mu_0 I_1/2\pi d$$

AB 边作到的安培力方向向左，大小为

$$F_{AB} = I_2 aB = \mu_0 I_1 I_2 a/2\pi d$$

三角形的三个内角 $\alpha = 60°$，在 AC 边上的电流元 $I_2\mathrm{d}l$ 所受磁场力为

$$\mathrm{d}F = I_2 \mathrm{d}lB$$

两个分量分别为 $\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cos\alpha$ 和 $\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\sin\alpha$，

与 BC 边相比，两个 x 分量大小相等，方向相同；两个 y 分量大小相等，方向相反。由于 $\mathrm{d}l = \mathrm{d}r/\sin\alpha$， 所以有

$$F_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \cot\alpha}{2\pi}\int_d^{d+a\sin\alpha}\frac{1}{r}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \sqrt{3}}{6\pi}\ln\frac{d+a\sqrt{3}/2}{d}$$

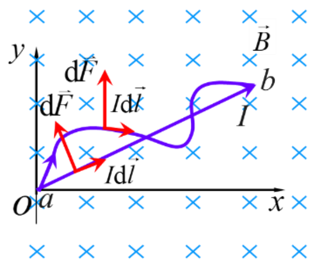
方向向右。

作用在三角形线圈上的力的大小为

$$F = F_{AB} - 2F_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(\frac{a}{d} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\ln\frac{d+a\sqrt{3}/2}{d}\right)$$

方向向左。

18. 如图所示，一条任意形状的载流导线位于均匀磁场中，试证明它所受的安培力等于通以相同电流的载流直导线 ab 所受的安培力。



解：建立如图所示的直角坐标系，任意形状导线上电流元表示为：$I\mathrm{d}\vec{l} = I\mathrm{d}x\,\vec{i} + I\mathrm{d}y\,\vec{j}$，

磁感应强度：$\vec{B} = -B\,\vec{k}$

电流元所受到的安培力：$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$

$$\mathrm{d}\vec{F} = I(\mathrm{d}x\,\vec{i} + \mathrm{d}y\,\vec{j}) \times (-B\,\vec{k})$$

$$\mathrm{d}\vec{F} = IB\mathrm{d}x\,\vec{j} - IB\mathrm{d}y\,\vec{i}$$

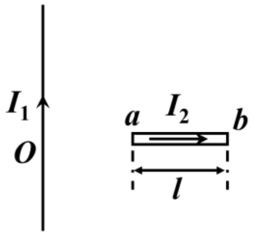
任意形状的载流导线受到安培力：$\vec{F} = \int_0^{b_x} IB\mathrm{d}x\,\vec{j} - \int_0^{b_y} IB\mathrm{d}y\,\vec{i}$， $\vec{F} = IBb_x\,\vec{j} - IBb_y\,\vec{i}$

同理得到载流直导线 ab 所受的安培力：

$$\vec{F}' = \int_0^{b_x} IB\mathrm{d}x\,\vec{j} - \int_0^{b_y} IB\mathrm{d}y\,\vec{i}，\quad \vec{F}' = IBb_x\,\vec{j} - IBb_y\,\vec{i}$$

所以：$\vec{F} = \vec{F}'$，一个在均匀磁场中任意形状的闭合载流回路受到的安培力为零。

19. 如图所示，一长直导线通有电流 I_1，在其旁边共面放置一长度为 l 且通有电流 I_2 的直导线 ab。两导线相互垂直，且直导线 ab 的延长线与长直导线相交于 O 点。求导线 ab 所受作用力对点 O 的力矩。



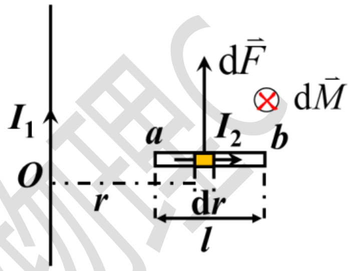
解：在 ab 上取 $\mathrm{d}r$，它受力 $\mathrm{d}\vec{F}$ 垂直 ab 向上，大小为

$$\mathrm{d}F = I_2 \mathrm{d}r \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

对 O 点力矩：$\mathrm{d}\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$，方向为垂直纸面向外。

$$\mathrm{d}M = r\mathrm{d}F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\mathrm{d}r$$

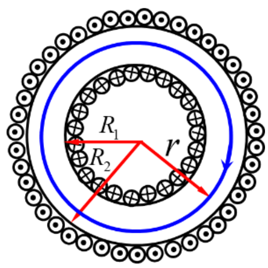
$$M = \int_a^b \mathrm{d}M = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_a^b \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} l$$



20. 螺绕环平均周长 l=10cm($R_1 \approx R_2$),, 环上线圈 N=200 匝，线圈中电流 I=100mA，试求：(1) 管内 H 和 B 的大小；

(2) 若管内充满相对磁导率 $\mu_r = 4200$ 的磁介质，管内的 B 和 H 的大小。

解：选取如图所示的环形回路



根据介质中的安培环路定理：$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$

$$H \cdot 2\pi r = NI$$

磁场强度：$H = \dfrac{NI}{2\pi r}$，$H = 200\ \text{A/m}$，磁感应强度：$B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$，

$$B = 8\pi \times 10^{-5}\ \text{T}$$

如果管内充满相对磁导率 $\mu_r = 4200$ 的磁介质：磁场强度：$H = \dfrac{NI}{2\pi r}$，$H = 200\ \text{A/m}$

磁感应强度：$B = \mu_r \mu_0 H$，$B = \dfrac{\mu_r \mu_0 NI}{2\pi r}$，$B = 3.36\pi \times 10^{-1}\ \text{T}$