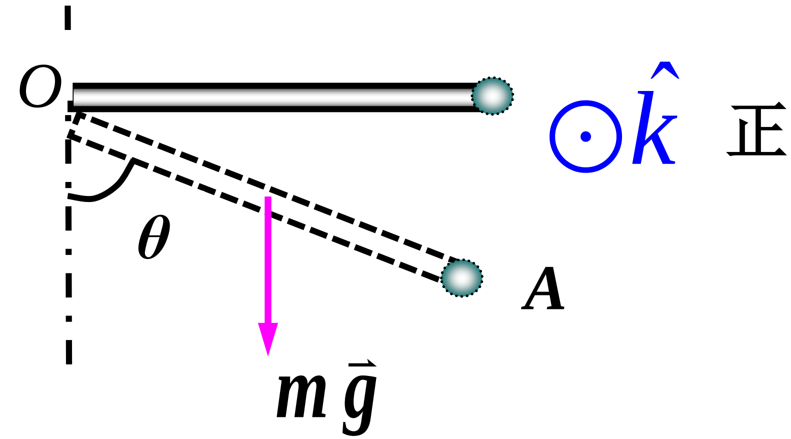
例1 长为L，质量为m的匀质细杆，可绕通过杆的端点O并与杆垂直的水平固定轴转动。杆从水平位置由静止开始自由下摆，忽略轴处的摩擦，当杆转到与竖直方向成θ角时，求A端的速度。

解： 运动物体为细棒，绕O轴作定轴转动，取垂直纸面向外为正。



解法一：定轴转动的转动定律

$$\vec{\beta}=\beta\hat{k}$$

$$\vec{M}=M\hat{k}=\vec{r}\times m\vec{g}=J\vec{\beta}=J\beta\hat{k}$$

$$M=-mgL\sin\theta/2=J\beta \qquad J=\frac{1}{3}mL^2$$

$$-mgL\sin\theta/2=\frac{1}{3}mL^2\beta$$

$$-mgL\sin\theta/2=\frac{1}{3}mL^2\beta$$

$$-\frac{3g}{2L}\sin\theta=\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}-\frac{3g}{2L}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega$$

$$\frac{1}{2}\omega^2=\frac{3g}{2L}\cos\theta$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g\cos\theta}{L}}$$

$$v=\sqrt{3gL\cos\theta}$$

解法二：刚体定轴转动的转动动能定理

$$A=\int \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{\theta}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}-\frac{1}{2}mgL\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}mgL\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}J\omega^2-0=\frac{1}{6}mL^2\omega^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g\cos\theta}{L}}$$

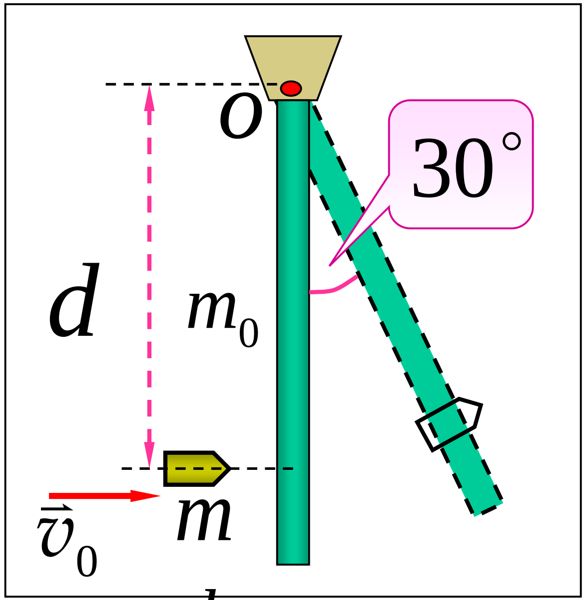
解法三：（杆+地球）机械能守恒，取竖直位置处为刚体势能的零点 $E=E_K+E_p=E_1=E_{1p}=\frac{1}{2}mgL$

$$=E_2=E_{2p}+E_{2K}=\frac{1}{2}mgL\left(1-\cos\theta\right)+\frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g\cos\theta}{L}}$$

例2 长为l，质量为m的匀质细杆，可绕支点O并与杆垂直的水平固定轴自由转动。一质量为 m_0、速率为 v_0的子弹射入竿内距支点为d处，使竿的偏转角为30°。问子弹的初速率为多少？

解: 子弹和杆系统，在子弹射入杆的过程角动量守恒



$$m_0 v_0 d = (\frac{1}{3} m l^2 + m_0 d^2)\omega$$

$$\omega = \frac{3m_0 v d}{3m_0 d^2 + ml^2}$$

射入杆后，以子弹、细杆和地球为系统，机械能守恒。

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2 + m_0 d^2)\omega^2 = m_0 g d\left(1-\cos 30^\circ\right) + mg\frac{l}{2}\left(1-\cos 30^\circ\right)$$

$$v = \frac{\sqrt{g\frac{(2-\sqrt{3})}{6}(ml+2m_0 d)(ml^2+3m_0 d^2)}}{m_0 d}$$