第三章　数值积分

数值积分是数值计算的重要部分，它是求定积分的一种近似方法.

一、内容要点

1．数值求积公式和它的代数精度

公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \tag{3-1}$$

叫做数值求积公式.其中 $A_i(i=0,1,\cdots,n)$ 称为求积系数， $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 称为求积节点.

$Q[f]=\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 称为求积算式，

$R[f]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 称为求积公式的余项.

若求积公式（3-1）对所有次数不超过 m 的代数多项式都精确成立，而对于某个 m+1 次多项式不能精确成立，则称此求积公式具有 m 次代数精度.

上述定义等价于：若求积公式（3-1）对 $f(x)=1,x,x^2,\cdots,x^m$，均精确成立，而对 $f(x)=x^{m+1}$ 不精确成立.

求积公式的代数精度概念是衡量公式逼近好坏的标准之一.

称公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$，其中，$A_i=\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\mathrm{d}x$ 为插值型求积公式.

其余项

$$R[f]=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\mathrm{d}x \tag{3-2}$$

若公式（3-1）是插值型求积公式，则它至少具有 n 次代数精度.

2．Newton-Cotes 求积公式

称等距节点的插值型求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i) \tag{3-3}$$

为 n 阶牛顿—柯特斯 Newton-Cotes 求积公式. 其中 $x_i=a+ih \quad (i=0,1,\cdots,n)$, $h=\dfrac{b-a}{n}$,

$$C_i^{(n)}=\frac{(-1)^{n-i}}{n\cdot i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(t-j)\mathrm{d}t,\quad (i=0,1,2,\cdots,n) \tag{3-4}$$

称为 Cotes 系数.

定理 3.1 对于 n 阶的 Newton-Cotes 求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx(b-a)\sum_{i=0}^{n}C_i^{(n)}f(x_i)$$

当 n 为奇数时，至少具有 n 次代数精度；当 n 为偶数时，至少具有 n+1 次代数精度.

几种低阶的 Newton-Cotes 求积公式：

（1）当 n=1 时，求积公式（3-3）为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=T \tag{3-5}$$

称为梯形求积公式.

梯形求积公式的代数精度为 1，其余项是

$$R_T(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)\qquad \eta\in[a,b]$$

（2）当 n=2 时，求积公式（3-3）为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=S \tag{3-6}$$

称为抛物线求积公式或 Simpson 求积公式.

抛物线求积公式的代数精度为 3，其余项是

$$\begin{aligned}R_s(f)&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]\\&=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)\qquad \eta\in[a,b]\end{aligned}$$

（3）当 n=4 时，求积公式（3-3）为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)] \tag{3-7}$$

称为 Cotes 公式.

Cotes 公式的代数精度为 5.

3．复化求积公式

将区间$[a, b]$$n$ 等份，其分点为 $x_i=a+ih\quad (i=0,1,\cdots,n),\quad h=\dfrac{b-a}{n}$.

（1）复化梯形求积公式

$$T_n=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)] \tag{3-8}$$

其误差为

$$R(f;T_n)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-T_n=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta),\quad \eta\in[a,b] \tag{3-9}$$

（2）复化抛物线求积公式：

$$S_n=\frac{h}{6}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(b)] \tag{3-10}$$

其中 $x_{i+\frac{1}{2}}$ 是区间$[x_i, x_{i+1}]$的中点.其误差是

$$R(f;S_n)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-S_n=-\frac{b-a}{2880}h^4f^{(4)}(\eta),\quad \eta\in[a,b] \tag{3-11}$$

若记 T_{2n} 为将区间$[a, b]$$2n$ 等分的复化梯形求积公式，则有递推式

$$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}}) \tag{3-12}$$

4．Romberg 求积算法

将区间$[a, b]$一步一步对分，即依次作 2^0、2^1、2^2、…等分，记 $h_i=\frac{b-a}{2^i}$ $(i=0,1,2,\cdots)$，按复化梯形求积公式（3-8）算得的值相应地记为$T_0^{(0)},T_0^{(1)},T_0^{(2)},\cdots$.

由公式

$$T_m^{(k)}=\frac{4^mT_{m-1}^{(k+1)}-T_{m-1}^{(k)}}{4^m-1}$$

递推计算数表

$$\begin{array}{lllll}
T_0^{(0)} & & & & \\
T_0^{(1)} & T_1^{(0)} & & & \\
T_0^{(2)} & T_1^{(1)} & T_2^{(0)} & & \\
T_0^{(3)} & T_1^{(2)} & T_2^{(1)} & T_3^{(0)} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

用$T_m^{(k)}$或$T_m^{(0)}$作为定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值.

5．Gauss 型求积公式

（1）不带权函数的 Gauss 型求积公式

若一组节点 x_0，x_1，…，$x_n\in[a,b]$，使插值型求积公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$

具有最高代数精度 $2n+1$，则称相应的求积公式为 Gauss 型求积公式，求积节点为 Gauss 点.

定理 3.2 插值型求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 中，求积节点 $x_k(k=0$，1, 2, …, $n)$是 Gauss 点的充分必要条件是：在区间$[a, b]$上以这组节点为零点的 $n+1$ 次多项式

$$\pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

与一切次数$\leq n$ 的多项式 $P(x)$正交，即成立

$$\int_a^b x^k \pi_{n+1}(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

当$[a, b]$取$[-1, 1]$时相应的 Gauss 型求积公式称为 Gauss-Legendre 公式或简称为 Gauss 求积公式.

两点 Gauss-Legendre 公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

三点 Gauss-Legendre 公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$

我们可以通过变量替换将区间$[a, b]$上的积分转化为区间$[-1, 1]$上的积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b-a)\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2})\mathrm{d}t$$

然后通过 Gauss-Legendre 求积分公式计算出它的近似值.

定理 3.3 1° Gauss 型求积分公式中的求积系数 $A_k>0$ （$k=0, 1, 2, \cdots, n$），因此该求积公式是数值稳定的；

2° 若 $f^{(2n+2)}(x)$ 在区间$[a, b]$上连续，则 Gauss 型求积公式的余项

$$R(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b [\pi_{n+1}(x)]^2\mathrm{d}x \quad (\eta\in[a,b])$$

3° 对$[a, b]$上的连续函数 $f(x)$，Gauss 型求积公式是收敛的，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

（2）带权函数的 Gauss 型求积公式

考虑带权函数 $\rho(x)$ 的求积公式 $\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} B_i f(x_i)$.带权函数的 Gauss 型求积公式的定义与结论只要把（1）中积分内加一个 $\rho(x)$，并把正交改为对权 $\rho(x)$ 正交，A_i 改为 B_i 便可得到.

二、题型分析与解题方法

例 1 指出下列数值积分公式的代数精度，并问那些是插值型求积公式？

（1）$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$；

（2）$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9}f(-\frac{\sqrt{15}}{5})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\frac{\sqrt{15}}{5})$；

（3）$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx 2f(0)$；

（4）$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$.

分析 本题利用求积公式代数精度和插值型求积公式的定义便可得出结论.

解 （1）$\int_{-1}^{1} l_0(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}\mathrm{d}x=1$，$\int_{-1}^{1} l_1(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{x+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}\mathrm{d}x=1$

故 f 是插值型求积公式，公式对 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 精确成立，而对 $f(x)=x^4$ 不能精确成立.故其代数精度为 3.

（2）类似于（1）的推导是插值型求积公式，代数精度为 5.

（3）公式用 $f(0)$ 近似代替 $f(x)$ 得到的，$f(0)$ 近似代替 $f(x)$ 是零次插值，故是插值型的.对 $f(x)=1$，x 精确成立，而对 $f(x)=x^2$ 不精确成立，故代数精度为 1.

（4）$\int_{-1}^{1} l_0(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{x(x-1)}{(-1)(-1-1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$，$\int_{-1}^{1} l_1(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$

$\int_{-1}^{1} l_2(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{(x+1)\cdot x}{(1+1)(1-0)}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$，故是插值型求积公式，公式对 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 准确成立，而对 $f(x)=x^4$ 不准确成立，故公式具有 3 次代数精度.

例 2 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精确度尽量高，并指明求积公式所具有代数精度.

（1）$\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$

（2）$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$

（3）$\int_{0}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\alpha h^2[f'(0)-f'(h)]$

分析 求解这类题目，一般都应按照求积公式代数精度的定义去作.即先列出参

数满足的代数方程组，解出这些待定参数，然后用所确定的求积公式判断所具有的代数精度.

解　（1）求积分公式中含有三个待参数，即 A_{-1}, A_0, A_1.令求积公式对 $f(x)=1,x,x^2$ 精确成立，即

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=2h \\ -h(A_{-1}-A_1)=0 \\ h^2(A_{-1}+A_1)=\dfrac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

解得 $A_{-1}=A_1=\dfrac{1}{3}h,\quad A_0=\dfrac{4}{3}h$.所求公式至少具有 2 次代数精确度.又将 $f(x)=x^3,x^4$ 代入所确定的求积公式，有

$$\int_{-h}^{h} x^3\mathrm{d}x=0=\frac{h}{3}(-h)^3+\frac{h}{3}(h^3)$$

$$\int_{-h}^{h} x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}h^5\neq\frac{h}{3}(-h)^4+\frac{h}{3}h^4$$

故 $\int_{-h}^{h} f(x)dx\approx\dfrac{h}{3}f(-h)+\dfrac{4h}{3}f(0)+\dfrac{h}{3}f(h)$ 具有 3 次代数精度.

（2）求积公式中含两个待定参数 x_1，x_2，当 $f(x)=1$ 时，易知有

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$$

故令求积公式对 $f(x)=x$，x^2 精确成立，即

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=1 \\ 2x_1^2+3x_2^2=1 \end{cases}$$

由第一式解得　$x_1=(1-3x_2)/2$，代入第二式，得

$$15x_2^2-6x_2-1=0$$

最后解出

$$\begin{cases} x_1=0.689\,90 \\ x_2=-0.126\,60 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1=-0.289\,90 \\ x_2=0.526\,60 \end{cases}$$

将 $f(x)=x^3$ 代入已确定之求积公式，有

$$\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x=0\neq\frac{1}{3}[-1+2x_1^3+3x_2^3]$$

故所建立求积公式具有 2 次代数精度，所求节点为 $x_1=0.689\ 90$，$x_2=-0.126\ 60$ 或 $x_1=-0.289\ 90$，$x_2=0.526\ 60$ 两组.

（3）求积公式中只含有一个待定参数α，当 $f(x)$=1，x 时，有

$$\int_0^h 1\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[1+1]+0$$

$$\int_0^h x\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[0+h]+\alpha h^2(1-1)$$

故令 $f(x)=x^2$ 时求积公式精确成立，即

$$\int_0^h x^2 dx = \frac{h}{2}[0+h^2]+\alpha h^2[2\times 0-2h]$$

解得 $\alpha = \frac{1}{12}$.

将 $f(x)=x^3$ 代入上述确定的求积公式，有

$$\int_0^h x^3 dx = \frac{h}{2}[0+h^3]+\frac{h^2}{12}[0-3h^2]$$

这说明求积公式至少具有 3 次代数精确度.再令 $f(x)=x^4$，代入求积公式时有

$$\int_0^h x^4 dx \neq \frac{h}{2}[0+h^4]+\frac{h^2}{12}[0-4h^3]$$

故所建立求积公式具有 3 次代数精度.

例 3 求三个不同的节点 x_1，x_2，x_3 和常数 c 使求积公式

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \approx c[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)] \qquad (1)$$

具有尽可能高的代数精度.

分析 本题的思路类似例 2.

解 不妨设 $x_0<x_1<x_2$.

本题有 4 个待定参数c, x_0, x_1, x_2，令求积公式对 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 精确成立，即有

$$\begin{cases} 3c=2 & (2) \\ c(x_0+x_1+x_2)=0 & (3) \\ c(x_0^2+x_1^2+x_2^2)=\frac{2}{3} & (4) \\ c(x_0^3+x_1^3+x_2^3)=0 & (5) \end{cases}$$

由（2）得

$$c=\frac{2}{3}$$

于是（3）~（5）变为

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 & (6) \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 & (7) \\ x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0 & (8) \end{cases}$$

由（6）得

$$x_1 = -(x_0 + x_2) \tag{9}$$

将其代入（7）和（8）得

$$\begin{cases} x_0^2 + (x_0 + x_2)^2 + x_2^2 = 1 \\ x_0^3 - (x_0 + x_2)^3 + x_2^3 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_0^2 + x_0 x_2 + x_2^2 = \dfrac{1}{2} & (10) \\ x_0 x_2 (x_0 + x_2) = 0 & (11) \end{cases}$$

由（11）得，$x_0=0$ 或 $x_2=0$ 或 $x_0+x_2=0$.

当 $x_0=0$ 时，由（10）得 $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，再由（9）得 $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，与 $x_0<x_1$ 矛盾；

当 $x_2=0$ 时，由（10）得 $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，再由（9）得 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，与 $x_1<x_2$ 矛盾；

当 $x_0+x_2=0$ 时，由（10）得 $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$，$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，再由（9）得 $x_1=0$.

综上要使求积公式（1）至少具有 3 次代数精度当且仅当取

$$c = \frac{2}{3}, \quad x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

此时求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] \tag{12}$$

将 $f(x) = x^4$ 代入（12）有 $\int_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{3}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + 0^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \right] = \frac{1}{3}$.所以求积公式（12）的代数精度为 3.

例 4　用代数精度定义直接验证抛物线求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

具有 3 次代数精度.

分析 n 为偶数时的 Newton-Cotes 求积公式的代数精度至少是 n+1.利用代数精度的定义证明即可.

解 设 $I[f]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $Q[f]=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$. 由代数精度定义，分别取 $f(x)=1,x,x^2,x^3,x^4$ 代入 $I[f]$和 $Q[f]$如下：

对 $f(x)=1$

$$I[1]=\int_a^b 1\mathrm{d}x=b-a$$

$$Q[1]=\frac{b-a}{6}[1+4\times1+1]=b-a$$

所以 $I[f]=Q[f]$.

对 $f(x)=x$

$$I[x]=\int_a^b x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$Q[x]=\frac{b-a}{6}\left[a+4\cdot\frac{a+b}{2}+b\right]=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

所以 $I[f]=Q[f]$.

对 $f(x)=x^2$

$$I[x^2]=\int_a^b x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$Q[x^2]=\frac{b-a}{6}\left[a^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+b^2\right]=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

所以 $I[f]=Q[f]$.

对 $f(x)=x^3$

$$I[x^3]=\int_a^b x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

$$Q[x^3]=\frac{b-a}{6}\left[a^3+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right]=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

所以 $I[f]=Q[f]$.

对 $f(x)=x^4$

$$I[x^4]=\int_a^b x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}(b^5-a^5)$$

而 $$Q[x^4]=\frac{b-a}{6}\left[a^4+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^4+b^4\right]$$

显然，$I[x^4]\neq Q[x^4]$.

所以抛物线求积公式具有 3 次代数精度.

例 5 用梯形求积公式和 Simpson 公式计算积分

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

并估计误差.

分析 这是一道常规计算题.按照公式求解即可.

解 记 $a=0,b=1,f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则 $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$，$f''(x)=e^{-x}$，$f'''(x)=-e^{-x}$，$f^{(4)}(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

$$T=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{1-0}{2}(\mathrm{e}^{-0}+\mathrm{e}^{-1})=0.683\,939\,7$$

$$R_T(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)=-\frac{1}{12}\mathrm{e}^{-\eta},\quad \eta\in[0,1]$$

$$|R_T(f)|\leq\frac{1}{12}=0.083\,333$$

$$S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$
$$=\frac{1-0}{6}(\mathrm{e}^{-0}+4\mathrm{e}^{-0.5}+\mathrm{e}^{-1})=0.632\,333\,7$$

$$R_S(f)=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)=-\frac{1}{2880}\mathrm{e}^{-\eta},\quad \eta\in[0,1]$$

$$|R_S(f)|\leq\frac{1}{2880}=0.000\,347\,2$$

例 6 若 $f''(x)>0$，证明用梯形求积公式计算积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 所得结果比准确值大，并说明几何意义.

分析 本题显然是通过讨论梯形求积公式余项来处理的题.

证 梯形求积公式的余项

$$R_T(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)\quad \eta\in[a,b]$$

若 $f''(x)>0$，则 $f''(\eta)>0$，所以 $R_T(f)<0$，

即当 $f''(x)>0$ 时，用梯形求积公式计算积分

图 3-1

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 所得的结果比准确值大.

其几何意义：当 $f''(x)>0$ 时，曲线 $y=f(x)$是向上凹的，由图 3-1 可见，梯形 *abCD* 的面积 $\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ 大于曲边梯形的面积 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

例 7 写出 n=3 的 Newton-cotes 公式，并求出其代数精度，利用此公式计算积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的近似值.

解 将区间[a, b]三等分，其分点为 $x_i = a + i\frac{b-a}{3}(i=0,1,2,3)$. 当 n=3 时的 Newton-Cotes 求积公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]$$

由于上述公式是等距节点的插值型求积公式，所以至少具有 3 次代数精度，为进一步确定它的精度，可令 $f(x)=x^4$ 代入求积公式，则

左边= $\int_a^b x^4\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(b^5-a^5)$

右边= $\frac{b-a}{8}\left[a^4+3\left(a+\frac{b-a}{3}\right)^4+3\left(a+2\times\frac{b-a}{3}\right)^4+\left(a+3\times\frac{b-a}{3}\right)^4\right]$

显然，左边≠右边，所以该求积公式具有 3 次代数精度.

计算积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的近似值

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \approx \frac{1}{8}\left[f(0)+3f\left(\frac{1}{3}\right)+3f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)\right] \approx 0.784\,62$$

例 8 推导下列三种矩形求积公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(a)+\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2 \qquad \text{（左矩形公式）}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(b)-\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2 \qquad \text{（右矩形公式）}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}f''(\eta)(b-a)^3 \qquad \text{（中矩形公式）}$$

分析 本题三个求积公式的节点与系数都已知，观察本题的特点.可考虑用 Taylor 展开或微分中值定理及积分中值定理来推导.

解 （1）左矩形公式

将 $f(x)$在 a 处展开，得

$$f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a),\quad \xi\in(a,x)$$

两边在[a, b]上积分，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a)\mathrm{d}x+\int_a^b f'(\xi)(x-a)\mathrm{d}x$$
$$=(b-a)f(a)+\int_a^b f'(\xi)(x-a)dx$$

由于 $x-a$ 在[a, b]上不变号，故有 $\eta\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(a)+f'(\eta)\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x$$

从而得 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(a)+\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2,\quad \eta\in[a,b]$$

（2）右矩形公式

将 $f(x)$在 b 处展开，并积分，即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(b)-\frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2,\quad \eta\in[a,b]$$

（3）中矩形公式

将 $f(x)$在 $\frac{a+b}{2}$ 处展开，得

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\quad \xi\in(a,b)$$

两边积分，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2\mathrm{d}x$$

由于 $(x-\frac{a+b}{2})^2$ 在[a, b]上不变号，故有 $\eta\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2\mathrm{d}x$$
$$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}f''(\eta)(b-a)^3,\quad \eta\in[a,b]$$

例 9 利用 Hermite 插值公式推导带有导数值的求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+\frac{(b-a)^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right]+\frac{(b-a)^5}{720}f^{(4)}(\eta),\quad \eta\in[a,b]$$

解 作三次多项式 $H(x)$满足如下插值条件：

$$H(a)=f(a),H(b)=f(b),H'(a)=f'(a),H'(b)=f'(b)$$

则

$$H(x)=f(a)h_0(x)+f(b)h_1(x)+f'(a)\bar{h}_0(x)+f'(b)\bar{h}_1(x) \qquad (1)$$

且

$$f(x)=H(x)+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2,\quad \xi\in(a,b) \qquad (2)$$

其中

$$h_0(x)=\left[1+\frac{2(x-a)}{b-a}\right]\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2,\quad h_1(x)=\left[1+\frac{2(x-b)}{a-b}\right]\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2$$

$$\bar{h}_0(x)=(x-a)\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2,\quad \bar{h}_1(x)=(x-b)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2$$

直接计算得

$$\int_a^b h_0(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2},\quad \int_a^b h_1(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}$$

$$\int_a^b \bar{h}_0(x)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{12},\quad \int_a^b \bar{h}_1(x)\mathrm{d}x=-\frac{(b-a)^2}{12} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2\mathrm{d}x&=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\mathrm{d}x\\&=\frac{(b-a)^5}{720}f^{(4)}(\eta),\quad \eta\in[a,b] \qquad (4)\end{aligned}$$

对（2）两边在区间$[a, b]$上积分，并利用（1）、（3）、（4）得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=f(a)\int_a^b h_0(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_a^b h_1(x)\mathrm{d}x+f'(a)\int_a^b \bar{h}_0(x)\mathrm{d}x\\&\quad+f'(b)\int_a^b \bar{h}_1(x)\mathrm{d}x+\int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2\mathrm{d}x\\&=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{(b-a)^2}{12}[f'(a)-f'(b)]\\&\quad+\frac{(b-a)^5}{720}f^{(4)}(\eta),\quad \eta\in[a,b]\end{aligned}$$

例 10　试分别用复化梯形求积公式和复化抛物线求积公式计算下列积分，并比较结果.

（1）$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x \quad (n=8)$

（2）$\int_1^9 \sqrt{x}\mathrm{d}x \quad (n=4)$

解　（1）将区间[0, 1]8 等分，分点 $x_i=0+ih \quad (i=0,1,\cdots,8)$，$h=\frac{1}{8}$，令 $f(x)$

$=\dfrac{x}{4+x^2}$，可计算得下表

x_i	0	1/8	1/4	3/8	1/2
$f(x_i)$	0	0.031 128 4	0.061 538 5	0.090 566 0	0.117 647 1
x_i		5/8	3/4	7/8	1
$f(x_i)$		0.142 348 8	0.164 383 6	0.183 606 6	0.200 00

由复化梯形求积公式得

$$T_8=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\left[f(0)+2\sum_{i=1}^{7}f(x_i)+f(1)\right]$$
$$=\frac{1}{16}\left[f(0)+2f(\frac{1}{8})+2f(\frac{1}{4})+2f(\frac{3}{8})+2f(\frac{1}{2})+2f(\frac{5}{8})+2f(\frac{3}{4})+2f(\frac{7}{8})+f(1)\right]$$
$$\approx 0.111\,402\,4$$

若将区间 4 等分，则 $h=\dfrac{1}{4}$.

由复化抛物线求积公式得

$$S_4=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\left\{f(0)+2\left[f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{3}{4})\right]+4\left[f(\frac{1}{8})+f(\frac{3}{8})+f(\frac{5}{8})+f(\frac{7}{8})\right]+f(1)\right\}$$
$$\approx 0.111\,572\,4$$

与积分的精确值 $\int_0^1\dfrac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln(4+x^2)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}=0.111\,571\,7$ 比较，显然复化抛物线求积法比复化梯形求法精确得多.

（2）将区间[1, 9]4 等分，分点 $x_i=0+ih\quad(i=0,1,\cdots,4)$，$h$=2，令 $f(x)=\sqrt{x}$，可计算得下表.

x_i	1	3	5	7	9
$f(x_i)$	1	1.732 050 8	2.236 068	2.645 751 3	3

由复化梯形求积公式得

$$T_4=\frac{1}{2}\times 2\{f(1)+2[f(3)+f(5)+f(7)]+f(9)\}$$
$$\approx 17.227\,74$$

若将区间 2 等分，则 h=4 用复化抛物线求积公式，得

$$S_2=\frac{1}{6}\times 4\{f(1)+2f(5)+4[f(3)+f(7)]+f(9)\}\approx 17.322\,23.$$

与积分的精确值 $\int_1^9 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = 17.333\,33$ 比较，同样可见复化抛物线法比复化梯形法精确.

例 11 若用复化梯形求积公式求 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}$ 的近似值，问要将积分区间[0, 1]分成多少等份才能保证计算结果有四位有效数字？若用复化抛物线求积公式呢？

分析 这是一道关于求积公式余项的讨论题.结合复化梯形求积公式和复化抛物线求积公式的余项公式与有效数字的概念即可得出结论.

解 记 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$，则 $f''(x) = f^{(4)}(x) = \mathrm{e}^{-x}$. $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的真值具有零位整数，所以要求计算结果有四位有效数字，即要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$.

由复化梯形求积公式的误差 $R(f;T_n) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$，其中：$b-a = 1-0 = 1$，$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$，$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

所以，要使 $\left|R(f;T_n)\right| = \frac{h^2}{12}f''(\eta) = \frac{1}{12n^2}\mathrm{e}^{-\eta} \le \frac{1}{12n^2} \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$，只要 $n^2 \ge \frac{1}{6}\times 10^4$，开平方得 $n \ge 40.8$，取 n=41.

因此，若用复化梯形公式求 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的近似值，必需将区间[0, 1]分成 41 等分才能保证计算结果有四位有效数字.

若用复化抛物线求积公式，则由其误差估计式（3-11）知，要使

$$\left|R(f;S_n)\right| = \left|-\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)\right| = \frac{h^4}{2880}e^{-\eta} \le \frac{1}{2880n^4} \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

只要 $n \ge 2$，因此用复化抛物线求积公式计算，只需将区间[0, 1]分成 2 等分.

以上计算结果表明，为达到相同的精度，用复化抛物线求积公式所需的计算量比复化梯形求积公式少.

例 12 给定积分 $\int_1^3 \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x$.当要求误差小于 10^{-6} 时，用复化梯形求积公式及复化 Simpson 公式计算时所需节点数及步长分别为多少？

解 设 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$，$a=1, b=3, \varepsilon = 10^{-6}$.

将区间[1, 3]n 等分，$h = \frac{2}{n}$，则

$$R(f;T_n) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta) = -\frac{3-1}{12}\left(\frac{2}{n}\right)^2 f''(\eta) = -\frac{2}{3}\times\frac{1}{n^2}\times f''(\eta) \qquad （1）$$

$$R(f;S_n) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^4(\eta) = -\frac{3-1}{2880}\left(\frac{2}{n}\right)^4 f^{(4)}(\eta) = -\frac{1}{90}\times\frac{1}{n^4}\times f^{(4)}(\eta) \qquad （2）$$

对 $f(x)$求导得

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$f''(x) = \sqrt{2}e^x\left[\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4})\right] = 2e^x \sin(x + \frac{\pi}{2}) = 2e^x \cos x$$

$$f'''(x) = 2e^x\left[\sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(x + \frac{\pi}{2})\right] = (\sqrt{2})^3 e^x \sin(x + \frac{3\pi}{4})$$

$$f^{(4)}(x) = (\sqrt{2})^3 e^x\left[\sin(x + \frac{3\pi}{4}) + \cos(x + \frac{3\pi}{4})\right] = 4e^x \sin(x + \pi) = -4e^x \sin x$$

因而

$$\max_{1\le x\le 3}\left|f''(x)\right| = \max_{1\le x\le 3}\left|2e^x \cos x\right| \le 2e^3 \qquad (3)$$

$$\max_{1\le x\le 3}\left|f^{(4)}(x)\right| = \max_{1\le x\le 3}\left|-4e^x \sin x\right| \le 4e^3 \qquad (4)$$

由（1）和（3），得

$$\left|R(f;T_n)\right| \le \frac{2}{3} \times \frac{1}{n^2} \times 2e^3 = \frac{4e^3}{3n^2}$$

要使

$$\left|R(f;T_n)\right| < \varepsilon$$

只需

$$\frac{4e^3}{3n^2} < \varepsilon \qquad (5)$$

由（5）解得

$$n > \sqrt{\frac{4e^3}{3\varepsilon}} = 2e\sqrt{\frac{e}{3}} \times 10^3 = 5175.01$$

因而取 n=5176，即取 5177 个节点，步长为 $\frac{2}{5176}$时，用复化梯形求积公式计算误差小于 10^{-6}.

由（2）和（4），得

$$\left|R(f;S_n)\right| \le \frac{1}{90} \times \frac{1}{n^4} \times 4e^3 = \frac{2e^3}{45n^4}$$

要使

$$\left|R(f;S_n)\right| < \varepsilon$$

只需

$$\frac{2e^3}{45n^4}<\varepsilon \tag{6}$$

解（6）得 $n>\sqrt[4]{\frac{2e^3}{45\varepsilon}}=30.74$

因而取 n=31，即取 $31\times 2+1=63$ 个节点，步长为 $\frac{2}{31}$ 时，用复化 Simpson 公式计算误差小于 10^{-6}.

例 13　给定积分 $S_i(1)=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，

（1）利用复化梯形求积公式计算上述积分值，使其截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-3}$；

（2)利用同样的求积节点,改用复化抛物线求积公式计算时,截断误差是多少？

（3）要求截断误差不超过 10^{-6}，如果用复化抛物线求积公式，应取多少个函数值？

分析　本题是关于复化求积公式及其截断误差估计的问题.

解　由于 $f(x)=\frac{\sin x}{x}=\int_0^1\cos(xt)\mathrm{d}t$，所以

$$f^{(k)}(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\cos(xt)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^k\cos(xt+\frac{k\pi}{2})\mathrm{d}t$$

故

$$\left|f^{(k)}(x)\right|\le\int_0^1 t^k\left|\cos(xt+\frac{k\pi}{2})\right|\mathrm{d}t\le\int_0^1 t^k\mathrm{d}t=\frac{1}{k+1}$$

（1）为使复化梯形求积公式满足误差要求，只需 $\left|R(f;T_n)\right|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi)\right|\le\frac{1}{12}h^2\frac{1}{3}\le\frac{1}{2}\times 10^{-3}$ 即可.这只需 $h\le 0.134\,2$，$n\ge\frac{b-a}{0.134\,2}=\frac{1}{0.134\,2}=7.451\,6$，故只需 8 等份即可，此时 $h=\frac{1}{8}$. 令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，并定义 $f(0)=1$，可计算得下表

x_i	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
$f(x_i)$	1	0.997 397 9	0.989 615 8	0.976 726 7	0.958 851 1
x_i	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	

$f(x_i)$	0.936 155 6	0.908 851 7	0.877 192 6	0.841 471 0	

按此步长使用复化梯形求积公式有

$$I \approx T_8 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8}\{1 + 2(0.997\,397\,9 + 0.989\,615\,8 + 0.976\,726\,7 + 0.958\,8511 + 0.936\,155\,6 + 0.908\,851\,7 + 0.877\,192\,6) + 0.841\,471\,0\} = 0.945\,6911$$

（2）利用同样求积节点数用复化抛物线求积公式时，$h = \dfrac{1}{4}$，其截断误差为

$$|R(f;S_n)| = \left| -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta) \right| \le \frac{1}{2880}(\frac{1}{4})^4 \times \frac{1}{5} = 0.000\,000\,271 = 0.271 \times 10^{-6}$$

（3）为使在使用复化抛物线求积公式时误差不超过 10^{-6}，只需

$$|R(f;S_n)| = \left| -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{(4)}(\eta) \right| \le \frac{1}{2880} h^4 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{2880 \times 5}(\frac{1}{n})^4 \le 10^{-6}$$

解得　　$n^4 \ge 69.444\,444, \quad n \ge 2.886\,75$

故至少需将[0, 1]三等份，即取 $2\times3+1=7$ 个求积节点处的函数值.

例 14　设 $f(x)$在$[a,\ b]$上可积，证明：对于积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的复化梯形求积公式及复化抛物线求积公式，当 $n \to \infty$ 时收敛敛于 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

分析　本题应从复化求积公式和定积分的定义着手来处理.

证　由 $f(x)$在$[a, b]$上可积，则按定积分定义，对于区间$[a, b]$的任意分划和 ξ_i 的任意选取，都有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，式中，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, 2, \cdots, n)$，$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$，$\lambda = \max\{\Delta x_i\}$.则

（1）对于积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的复化梯形求积公式

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})h\right]$$

此式可看作为定积分的积分区间作等距分划 $h = \Delta x_i$,且特殊分别取 $\xi_i = x_i$ 和 $\xi_i = x_{i+1}$ 的积分和，所以当 $n \to \infty$ 时，取极限，当然有

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})h\right] = \frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

即　当 $n \to \infty$ 时，复化梯形求积公式收敛于 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

（2）对于积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的复化抛物线求积公式

$$S_n=\frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)h+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})h+\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+1})h\right]$$

类似于（1）的证明，有

$$\lim S_n=\frac{1}{6}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)h+4\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})h+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+1})h\right]$$
$$=\frac{1}{6}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+4\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

例 15　验证复化梯形求积公式、复化 Simpson 求积公式和复化 Cotes 求积公式之间有关系

$$S_n=\frac{1}{3}(4T_{2n}-T_n),\quad C_n=\frac{1}{15}(16S_{2n}-S_n)$$

其中 T_n，S_n，C_n 分别为将 $[a, b]$ n 等分，每个小区间上分别用梯形求积公式、Simpson 公式和 Cotes 公式所得的复化结果.

分析　应考虑直接利用公式进行推导.

证　考虑积分 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.将区间 $[a, b]$ 作 n 等分，并记 $h=\dfrac{b-a}{n}$， $x_i=a+ih$，$x_{i+\frac{1}{4}}=x_i+\dfrac{1}{4}h$， $x_{i+\frac{1}{2}}=x_i+\dfrac{1}{2}h$， $x_{i+\frac{3}{4}}=x_i+\dfrac{3}{4}h$，则

$$T_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}\times h[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

$$T_{2n}=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+\frac{1}{2}})]+\frac{1}{2}\times\frac{h}{2}[f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]\right\}$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{4}[f(x_i)+2f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]$$

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{6}\times h[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]$$

$$S_{2n}=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{1}{6}\times\frac{h}{2}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{4}})+f(x_{i+\frac{1}{2}})]+\frac{1}{6}\times\frac{h}{2}[f(x_{i+\frac{1}{2}})+4f(x_{i+\frac{3}{4}})+f(x_{i+1})]\right\}$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{12}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{4}})+2f(x_{i+\frac{1}{2}})+4f(x_{i+\frac{3}{4}})+f(x_{i+1})]$$

$$C_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{90}[7f(x_i)+32f(x_{i+\frac{1}{4}})+12f(x_{i+\frac{1}{2}})+32f(x_{i+\frac{3}{4}})+7f(x_{i+1})]$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(4T_{2n}-T_n)&=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n\\&=\frac{4}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{4}[f(x_i)+2f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]-\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{h}{3}[f(x_i)+2f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]-\frac{h}{6}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\right\}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]=S_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{15}(16S_{2n}-S_n)&=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n\\&=\frac{16}{15}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{12}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{4}})+2f(x_{i+\frac{1}{2}})+4f(x_{i+\frac{3}{4}})\\&\qquad+f(x_{i+1})]-\frac{1}{15}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{8h}{90}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{4}})+2f(x_{i+\frac{1}{2}})+4f(x_{i+\frac{3}{4}})\right.\\&\qquad\left.+f(x_{i+1})]-\frac{h}{90}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]\right\}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{90}[7f(x_i)+32f(x_{i+\frac{1}{4}})+12f(x_{i+\frac{1}{2}})+32f(x_{i+\frac{3}{4}})+7f(x_{i+1})]\\&=C_n\end{aligned}$$

例 16 用 Romberg 求积法求积分

$$I=\int_0^1\frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

的近似值，要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-4}$.

分析 直接套用龙贝格求积算法，注意误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-4}$.

解 记 $f(x)=\frac{4}{1+x^2}$， $a=0,\quad b=1.$

$$f(0)=\frac{4}{1+0^2}=4,\quad f(1)=\frac{4}{1+1^2}=2$$

$$T_0^{(0)}=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{1-0}{2}[f(0)+f(1)]=3$$

$$f(0.5)=\frac{4}{1+0.5^2}=3.2$$

$$T_0^{(1)}=\frac{1}{2}[T_0^{(0)}+f(0.5)]=\frac{1}{2}(3+3.2)=3.1$$

$$f(0.25)=\frac{4}{1+0.25^2}=3.764\,705\,9,\quad f(0.75)=\frac{4}{1+0.75^2}=2.560\,000\,0$$

$$T_0^{(2)}=\frac{1}{2}\{T_0^{(1)}+\frac{1}{2}\times[f(0.25)+f(0.75)]\}=3.131\,176\,5$$

$$f(0.125)=\frac{4}{1+0.125^2}=3.938\,461\,5\qquad f(0.375)=\frac{4}{1+0.375^2}=3.506\,849\,3$$

$$f(0.625)=\frac{4}{1+0.625^2}=2.876\,404\,5\qquad f(0.875)=\frac{4}{1+0.875^2}=2.265\,486\,7$$

$$T_0^{(3)}=\frac{1}{2}\{T_0^{(2)}+\frac{1}{4}\times[f(0.125)+f(0.375)+f(0.625)+f(0.875)]\}=3.138\,988\,5$$

$$T_0^{(4)}=\frac{1}{2}\left[T_0^{(3)}+\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}f\left((2k-1)\frac{b-a}{16}\right)=3.140\,941\,6\right]$$

由递推算式

$$T_m^{(k)}=\frac{4^{(m)}T_{m-1}^{(k+1)}-T_{m-1}^{(k)}}{4^m-1}$$

计算得下表

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k-1)}$	$T_2^{(k-2)}$	$T_3^{(k-3)}$	$T_4^{(k-4)}$
0	3.000 000 0				
1	3.100 000 0	3.133 333 3			
2	3.131 176 5	3.141 568 7	3.142 117 6		
3	3.138 988 5	3.141 592 5	3.141 594 1	3.141 585 8	
4	3.140 941 6	3.141 592 65	3.141 592 66	3.141 592 64	3.141 592 665

$$\left|T_4^{(0)}-T_3^{(0)}\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

取 $T_4^{(0)}$ 作为 $\int_0^1\frac{4}{1+x^2}$ 的近似值，即 $\int_0^1\frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x\approx3.141\,592\,7$．这一结果与准确值

$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x = 4\arctan x\Big|_0^1 = \pi$ 相比较已有较好的效果.

例 17　用 Romberg 方法求 $I = \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$，使其具有六位有效数字.

分析　类似例 16 题，本题解法直接套用 Romberg 算法，需要注意的是结果要有 6 位有效数字，即绝对误差限应不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-5}$.

解　类似例 16 题使用 T 数表计算如下：

K	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k-1)}$	$T_2^{(k-2)}$	$T_3^{(k-3)}$
0	1.859 140 9			
1	1.753 931 1	1.718 861 2		
2	1.727 221 9	1.718 318 8	1.718 282 7	
3	1.720 518 6	1.718 284 2	1.718 281 8	1.718 281 8

由于 $\left|T_3^{(0)} - T_2^{(0)}\right| = 9\times 10^{-7} < \frac{1}{2}\times 10^{-5}$，而 $1 < \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x < \mathrm{e}$，故取 $T_3^{(0)}$ =1.718 28 作为 I 的近似值，它具有 6 位有效数字.

事实上，$I = \int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 1.718\,281\,828\cdots$，且 $\left|I - T_3^{(0)}\right| = 0.182\,8\times 10^{-5} < \frac{1}{2}\times 10^{-5}$.即 $T_3^{(0)} = 1.718\,28$ 为 I 的具有 6 位有效数字的近似值.

例 18　用 Gauss-Legendre 求积公式（节点数 n=2, 3）计算定积分

$$I = \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

分析　利用 Gauss-Legendre 公式直接计算即可

解　Gauss-Legendre 公式的求积节点 x_i 与系数 A_i 如下表：

求积节点和系数表

节点数	节点 x_i	系数 A_i
1	0.000 000 0	2.000 000 0
2	±0.577 350 3	1.000 000 0
3	±0.774 596 7 0.000 000 0	0.555 555 6 0.888 888 9

本题所给积分区间为[0，1]，所以，必须先作变量替换 $x = \frac{1}{2}(1+t)$，则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$ 于是

$$I=\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\left[\frac{1}{2}(t+1)\right]^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1+t)}\mathrm{d}t$$

当 n=2 时，用表中的 Gauss 点和求积系数，可得

$$\begin{aligned}I&\approx\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1}A_i f(x_i)\\&=\frac{1}{8}[(1+0.577\,350\,3)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1+0.577\,350\,3)}+(1-0.577\,350\,3)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1-0.577\,350\,3)}]\\&\approx 0.711\,941\,8\end{aligned}$$

当 n=3 时，用表中的高斯点和求积系数，可得

$$\begin{aligned}I&\approx\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2}A_i f(x_i)\\&=\frac{1}{8}[(0.555\,555\,6)\times(1+0.774\,596\,7)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1+0.774\,596\,7)}+0.888\,888\,9\\&\quad\times(1+0.000\,000\,0)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1+0.000\,000\,0)}+0.555\,555\,6\times(1-0.774\,596\,7)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1-0.774\,596\,7)}\\&\approx 0.718\,251\,9\end{aligned}$$

容易计算出定积分的精确值：

$$I=\mathrm{e}-2\approx 0.718\,281\,8$$

例 19　试用下述算法计算积分

$$I=\int_1^3\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

（1）利用龙贝格（Romberg）求积公式（计算到 $T_4^{(0)}$ 为止）；

（2）利用三点及五点高斯（Gauss）求积公式计算；

（3）将积分区间分成四等分，在每一段用两点高斯（Gauss）求积公式，然后累加得 I 的值（I 之精确值是 1.098 612）.

分析　直接按照所要求的算法计算即可.

解　（1）记 $f(y)=\dfrac{1}{y},\quad a=1,\quad b=3$，则

$$T_0^{(0)}=\frac{3-1}{2}[f(1)+f(3)]\approx 1.333\,333\,3$$

$$T_0^{(1)}=\frac{1}{2}[T_0^{(0)}+2f(2)]\approx 1.166\,666\,7$$

$$T_0^{(2)}=\frac{1}{2}\{T_0^{(1)}+[f(\frac{3}{2})+f(\frac{5}{2})]\}\approx 1.116\,666\,7$$

$$T_0^{(3)}=\frac{1}{2}\{T_0^{(2)}+\frac{1}{2}[f(\frac{5}{4})+f(\frac{7}{4})+f(\frac{9}{4})+f(\frac{11}{4})]\}\approx 1.103\,210\,7$$

利用递推算式

$$T_m^{(k)}=\frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)}-T_{m-1}^{(k)}}{4^m-1}$$

得 T 数表

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k-1)}$	$T_2^{(k-2)}$	$T_3^{(k-3)}$
0	1.333 3333			
1	1.166 666 7	1.111 111 1		
2	1.116 666 7	1.100 000 0	1.099 259 3	
3	1.103 210 7	1.098 725 3	1.098 640 4	1.098 630 5

所以 $\int_1^3 \frac{1}{y}\mathrm{d}x \approx 1.098\,630\,5$

I 的精确值为 $\int_1^3 \frac{1}{y}\mathrm{d}y=\ln y\Big|_1^3=1.098\,612\,3$

（2）先对求积区间[1，3]作如下变量替换：

$$y=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a)t=t+2$$

则当 $y\in[1,3]$ 时，$t\in[-1,1]$，且 $dy=\mathrm{d}t$，$\int_1^3 \frac{1}{\mathrm{y}}\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 \frac{1}{t+2}\mathrm{d}t$.

（a）三点高斯公式：

$$\int_1^3 \frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 \frac{1}{t+2}\mathrm{d}t \approx 0.555\,555\,6(\frac{1}{2+0.774\,596\,7}+\frac{1}{2-0.774\,596\,7})$$

$$+0.888\,888\,9\times\frac{1}{2+0}=1.098\,039\,283$$

（b）五点高斯公式：

$$\int_1^3 \frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 \frac{1}{t+2}\mathrm{d}t \approx 0.236\,926\,9(\frac{1}{2-0.906\,179\,8}+\frac{1}{2+0.906\,179\,8})+0.478\,628\,9$$

$$\times(\frac{1}{2-0.538\,469\,3}+\frac{1}{2+0.538\,469\,3})+0.568\,888\,9\times\frac{1}{2}=1.098\,609\,289$$

（3）将[1，3]四等分，每份分别为[1, 1.5]，[1.5, 2]，[2, 2.5]，[2.5, 3].在每个小区间上用两点高斯公式，得

$$I_1=\int_1^{1.5}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 \frac{0.5}{2.5+0.5t}\mathrm{d}t \approx 0.5[\frac{1}{2.5+0.5\times(-1/\sqrt{3})}+\frac{1}{2.5+0.5\times(1/\sqrt{3})}]$$

$$=0.405\,405\,406$$

$$I_2=\int_{1.5}^{2}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{0.5}{3.5+0.5t}\mathrm{d}t\approx 0.5[\frac{1}{3.5-(0.5/\sqrt{3})}+\frac{1}{3.5+(0.5/\sqrt{3})}]$$
$$=0.287\,671\,233$$

$$I_3=\int_{2}^{2.5}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{0.5}{4.5+0.5t}\mathrm{d}t\approx 0.5[\frac{1}{4.5-(0.5/\sqrt{3})}+\frac{1}{4.5+(0.5/\sqrt{3})}]$$
$$=0.223\,140\,496$$

$$I_4=\int_{2.5}^{3}\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{0.5}{5.5+0.5t}\mathrm{d}t\approx 0.5[\frac{1}{5.5-(0.5/\sqrt{3})}+\frac{1}{5.5+(0.5/\sqrt{3})}]$$
$$=0.182\,320\,442$$

故　$I=I_1+I_2+I_3+I_4\approx 1.098\,537\,577$.积分真值为 $I=\ln 3=1.098\,612\,289$.

例 20　建立 Gauss 型求积公式

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

分析　本题是求 x_0，x_1，A_0，A_1 使求积公式成为 Gauss 型求积公式.本题是带权函数的 Gauss 型求积公式，可考虑用 Gauss 型求积公式所具有的代数精度来确定节点 x_0、x_1 和求积系数 A_1、A_2.

解　所求 Gauss 型求积公式应具有 3 次代数精度，故对 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 都能精确成立，即有

$$\begin{cases} A_0+A_1=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2 & (1)\\ x_0A_0+x_1A_1=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3} & (2)\\ x_0^2A_0+x_1^2A_1=\int_0^1\sqrt{x}x\mathrm{d}x=\frac{2}{5} & (3)\\ x_0^3A_0+x_1^3A_1=\int_0^1\sqrt{x}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{7} & (4)\end{cases}$$

（3）+（2）$\times\alpha$+（1）$\times\beta$，得

$$A_0(x_0^2+\alpha x_0+\beta)+A_1(x_1^2+\alpha x_1+\beta)=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\alpha+2\beta$$

（4）+（3）$\times\alpha$+（2）$\times\beta$，得

$$A_0x_0(x_0^2+\alpha x_0+\beta)+A_1x_1(x_1^2+\alpha x_1+\beta)=\frac{2}{7}+\frac{2}{5}\alpha+\frac{2}{3}\beta$$

取 x_0，x_1 为 $x^2+\alpha x+\beta=0$ 的根，有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}\alpha+\beta=0\\ \dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{5}\alpha+\dfrac{1}{3}\beta=0\end{cases}$$

解得　$\alpha=-\dfrac{6}{7}$，$\beta=\dfrac{3}{35}$，从而有

$$x^2-\frac{6}{7}x+\frac{3}{35}=0$$

解此方程，得

$$x_0=\frac{3}{7}-\frac{2\sqrt{6}}{7\sqrt{5}},\quad x_1=\frac{3}{7}+\frac{2\sqrt{6}}{7\sqrt{5}}$$

再由（1）和（2）解得

$$A_0=1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}},\quad A_1=1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}$$

注记：构造 Gauss 求积公式的题目很多，本题利用的是最基本做法，需要解代数方程组.

例 21　验证 Gauss 型求积公式

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

的求积系数及节点分别为

$$A_0=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}},\quad A_1=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$
$$x_0=2-\sqrt{2},\quad x_1=2+\sqrt{2}$$

分析　本题是带权函数 e^x 的 Gauss 型求积公式，类似例 20 题，可利用 Gauss 型求积公式的代数精度来验证 A_i、$x_i(i=0,1)$.

证　所给 Gauss 型求积公式的代数精度为 3，故对 $f(x)=1, x, x^2, x^3$ 均能精确成立，即有

$$\begin{cases}A_0+A_1=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1\\ x_0A_0+x_1A_1=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x\mathrm{d}x=1\\ x_0^2A_0+x_1^2A_1=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^2\mathrm{d}x=2\\ x_0^3A_0+x_1^3A_1=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^3\mathrm{d}x=6\end{cases}$$

用类似于例 20 的解法解得

$$A_0=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}},\quad A_1=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$x_0=2-\sqrt{2},\quad x_1=2+\sqrt{2}$$

即公式得到验证.

例 22 用反证法证明：不存在 A_k、x_k (k=0, 1, 2, …, n)，使得求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

的代数精度超过 2n+1 次.

分析 只要能找到一个 2n+2 次的多项式，使求积公式不能精确成立即可. 而具有 2n+1 次代数精度的求积公式的求积节点是[a, b]上带权函数 $\rho(x)$ 的正交多项式的零点 x_k (k=0, 1, 2, …, n)，因此自然以 $\pi_{n+1}^2(x)=\prod\limits_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$ 作为首先考察对象.

证 利用反证法来证. 构造一个多项式 $Q(x)=\pi_{n+1}^2(x)=(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$，并令 $f(x)=Q(x)$，代入题中积分公式，则左端有

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)Q(x)\mathrm{d}x>0$$

右端有

$$\sum_{k=0}^{n}A_kQ(x_k)=0$$

故左端≠右端.这说明不存在具有 2n+2 次代数精度的求积公式.故 Gauss 型求积公式是具有最高次代数精度的求积公式.

例 23 证明：若 $f^{(2n+2)}(x)$ 在区间[a, b]上连续，则不带权函数的 Gauss 型求积公式的余项为

$$R(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b[\pi_{n+1}x]^2\mathrm{d}x$$

其中 $\eta\in[a,b]$.

分析 由于 Gauss 型求积公式的代数精度为 2n+1 及要证的余项式特点，因此应考虑到能否设法利用 Hermite 插值来处理.

证 以 x_0，x_1，…，x_n 为节点构造 $f(x)$的次数不超过 2n+1 次的 Hermite 插值多项式 $H(x)$，使满足条件

$$H(x_i)=f(x_i),\quad H'(x_i)=f'(x_i)\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

则有

$$f(x)-H(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}[\pi_{n+1}(x)]^2$$

其中$\xi\in(a,b)$，由于 Gauss 型求积公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$具有 2$n$+1 次代数精度，所以它对 2$n$+1 次 Hermite 插值多项式 $H(x)$能精确成立，即：

$$\int_a^b H(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}A_i H(x_i)$$

又由插值条件

$$H(x_i)=f(x_i)$$

有

$$\int_a^b H(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$$

则 Gauss 型求积公式的余项为

$$\begin{aligned}R(f)&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b H(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b[f(x)-H(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}[\pi_{n+1}(x)]^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为 $f^{(2n+2)}(x)$在$[a,\ b]$上连续，$[\pi_{n+1}(x)]^2$在$[a,\ b]$上可积且不变号，由积分中值定理，必有$\eta\in[a,b]$使

$$R(f)=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b[\pi_{n+1}(x)]^2\mathrm{d}x$$

例 24　对于 Gauss 型求积公式$\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$，证明：

（1）对积系数 $A_k>0,(k=0,1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{k=0}^{n}A_k=\int_a^b\rho(x)\mathrm{d}x$；

（2）求积系数 $A_k=\int_a^b\rho(x)l_k(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\rho(x)l_k^2(x)\mathrm{d}x$，其中 $l_k(x)$ 是以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点的 Lagrange 插值基函数.（$k=0,1,2,\cdots,n$）

分析　题目中涉及到 Gauss 型求积公式，就应该把求积公式的代数精度，节点的特征及插值基函数的性质等联系起来.经过一定的论证，有可能得到题中结论.下题中证明思想也是这样.

证　（1）求积公式是 Gauss 型的，故它的代数精度是 2n+1 次的.因此，对 2n 次的多项式 $l_k^2(x)\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$，求积公式是精确成立的，即有

$$\int_a^b\rho(x)l_k^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}A_i l_k^2(x_i)$$

由于 $l_k(x)$ 是 Lagrange 插值基函数，满足 $l_k(x_i)=\delta_{ki}=\begin{cases}1 & k=i\\0 & k\neq i\end{cases}$，所以有 $\int_a^b \rho(x)l_k^2(x)\mathrm{d}x=A_k>0 \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$.

特别当 $f(x)\equiv 1$ 时，求积公式准确成立，有

$$\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}A_k$$

这就证明了（1）的结论.

（2）这只要证明 $\int_a^b \rho(x)[l_k(x)-1]l_k(x)\mathrm{d}x=0$ 就行了.因 x_k 使 $l_k(x)-1=0$，所以 $[l_k(x)-1]/(x-x_k)$ 是一个 $n-1$ 次多项式.又

$$[l_k(x)-1]l_k(x)=[l_k(x)-1]\frac{\pi_{n+1}(x)}{(x-x_k)\pi'_{n+1}(x_k)}=\frac{l_k(x)-1}{(x-x_k)\pi'_{n+1}(x_k)}\pi_{n+1}(x)$$

由 Gauss 点的特征知 $\pi_{n+1}(x)$ 与任意次数 $\leq n$ 的多项式正交，从而

$$\int_a^b \rho(x)[l_k(x)-1]l_k(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)\frac{l_k(x)-1}{(x-x_k)\pi'(x_k)}\pi_{n+1}(x)\mathrm{d}x=0$$

即

$$A_k=\int_a^b \rho(x)l_k^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)l_k(x)\mathrm{d}x$$

例 25 设 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $[a,\ b]$ 上带权函数 $\rho(x)$ 的正交多项式序列，$x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 为 $\varphi_{n+1}(x)$ 的零点，$l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 是以 $x_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 为 Gauss 型求积公式，证明：

（1）当 $0\leq k,\quad l\leq n,\quad k\neq l$ 时 $\sum_{i=0}^{n}A_i\varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i)=0$；

（2）$\int_a^b \rho(x)l_k(x)l_j(x)\mathrm{d}x=0,\quad k\neq j$；

（3）$\sum_{k=0}^{n}\int_a^b \rho(x)l_k^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$.

证 （1）因 $\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 是 Gauss 型求积公式，故对于 $f(x)$ 是次数 $\leq 2n+1$ 次的多项式都能精确成立.由于 $\varphi_k(x)\varphi_l(x)$ 是 $k+l$ 次的多项式，$k+l\leq 2n$，故对于 $\varphi_k(x)\varphi_l(x)$，求积公式也精确成立，即有

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}A_i\varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i)$$

又由于 $k\neq l$ 时，$\varphi_k(x)$ 与 $\varphi_l(x)$ 关于 $\rho(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上正交，因此

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)\mathrm{d}x = 0$$

所以 $\sum_{i=0}^{n} A_i\varphi_k(x_i)\varphi_l(x_i) = 0, \quad k \ne l, \quad 0 \le k, l \le n$.

（2）$l_k(x)$、$l_j(x)$是 n 次 lagrange 插值多项式的插值基函数，满足 $l_k(x_i) = \delta_{ki}$，$l_j(x_i) = \delta_{ji}$，且 $l_k(x)l_j(x)$ 是 $2n$ 次多项式，故

$$\int_a^b \rho(x)l_k(x)l_j(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i l_k(x_i)l_j(x_i)$$

当 $k \ne j$ 时，$l_k(x_i)l_j(x_i) = 0 (i = 0,1,2,\cdots,n)$.因此

$$\int_a^b \rho(x)l_k(x)l_j(x)\mathrm{d}x = 0$$

（3）由例 24 题知，有

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \sum_{k=0}^{n}\int_a^b \rho(x)l_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_a^b \rho(x)l_k^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$$

例 26 试证 Gauss 型求积公式的收敛性：设 $f(x)$是区间$[a, b]$上的连续函数，对任意的 $\varepsilon > 0$，总存在 $N>0$，当 $n \ge N$ 时

$$\left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)\right| < \varepsilon$$

其中 $x_k (k = 0,1,2,\cdots,n)$ 是 Gauss 型求积公式的求积节点，A_k 为求积系数.

分析 本题需要是用到逼近连续函数 $f(x)$的 Weiestrass 定理，以及一些极限存在性的证明技巧.

证 因 $f(x)$在$[a, b]$上连续，由 Weiestrass 定理知，对任意的 $\varepsilon > 0, \quad x \in [a,b]$，总存在多项式 $P(x)$（设其为 m 次），满足

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2T}$$

其中 $T = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x > 0$，由权函数定义知，$T$ 是有限正数.

这样

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)\right| &= \left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \rho(x)P(x)\mathrm{d}x\right. \\ &\quad \left. + \int_a^b \rho(x)P(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k P(x_k) + \sum_{k=0}^{n} A_k P(x_k) - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)\right| \\ &\le \left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b \rho(x)P(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b \rho(x)P(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k P(x_k)\right| \\ &\quad + \left|\sum_{k=0}^{n} A_k P(x_k) - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)\right|\end{aligned}$$

对于上不等式右端第一项，有

$$\left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b \rho(x)P(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b \rho(x)\left|f(x)-P(x)\right|\mathrm{d}x\le\frac{\varepsilon}{2T}\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{2}$$

第二项由于 $P(x)$是 m 次多项式，故当$m\le 2n+1$时，即$n\ge\frac{1}{2}(m-1)$时，Gauss 型求积公式精确成立，有

$$\left|\int_a^b \rho(x)P(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n}A_kP(x_k)\right|=0$$

对于第三项，我们有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}A_kP(x_k)-\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)\right|&\le\sum_{k=0}^{n}A_k\left|P(x_k)-f(x_k)\right|\\&\le\frac{\varepsilon}{2T}\sum_{k=0}^{n}A_k=\frac{\varepsilon}{2}\quad(\sum_{k=0}^{n}A_k=\int_a^b\rho(x)\mathrm{d}x=T)\end{aligned}$$

由上述估计知，对任意的$\varepsilon>0$,　存在自然数$N>\frac{m-1}{2}$，当$n\ge N$时

$$\left|\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)\right|<\varepsilon$$

根据极限定义知，Gauss 型求积公式是收敛的.

二、综合复习题

1. 数值积分公式$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{3}{2}[f(1)+f(2)]$是否为插值型求积公式？为什么？其代数精度是多少？

2．确定下列求积公式中的待定系数，使其代数精度尽量高，并指出其所具有的代数精度.

（1）$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(0)+A_1f(1)+A_2f(2)$

（2）$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(a)+A_1f(b)+B_0f'(a)$

3．确定求积公式

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+B_0f'(x_0)+B_1f'(x_1)+B_2f'(x_2)$$

中的待定系数 A_k、$B_k(k=0,1,2)$，使其代数精度尽可能高.

4．将区间 10 等份，分别用复化梯形求积公式和复化抛物线求积公式计算积分

（1）$I=\int_0^1(1-\mathrm{e}^{-x})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$

（2）$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

5．应用复化 simpson 公式计算 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 精确到 0.0001.

6．取 11 个点的函数值，分别用复化梯形求积公式，复化 simpson 公式计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

7．计算积分 $I=\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$，要求保证有五位有效数字

（1）问若用复化梯形公式，n 应取多少？

（2）问若用复化 Simpson 公式，n 应取多少？

8．积分 $\int_2^8 \frac{\mathrm{d}x}{x}=2\ln 2$ 计算 ln2，为使误差的绝对值不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-5}$，问用复化梯形求积公式至少要取多少个节点.

9．计算积分 $\int_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x$，若用复化抛物线求积公式，问积分区间要多少等份才能保证误差不超过 2×10^{-5}？

10．用 Romerg 求积算法，计算积分

（1）$I=\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x$　　（2）$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

（计算到 $T_3^{(0)}$ 为止）

11．用两点及三点 Gauss—Legendre 公式计算积分

（1）$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$　　（2）$\int_1^3 \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x$

12．求 Gauss 型求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$$

的系数 A_0，A_1 及节点 x_0，x_1.

三、复习题答案

1．是.代数精度为 1.

2．（1）$A_0=\frac{1}{3},\quad A_1=\frac{4}{3},\quad A_2=\frac{1}{3}$，3 次代数精度

（2）$A_0=\frac{2}{3}(b-a),\quad A_1=\frac{1}{3}(b-a),\quad B_0=\frac{(b-a)^2}{6}$，2 次代数精度.

3． $A_0=\frac{7}{15}h,\quad A_1=\frac{16}{15}h,\quad A_2=\frac{7}{15}h,\quad B_0=\frac{1}{15}h^2,\quad B_1=0,\quad B_2=-\frac{1}{15}h^2$，其中 $h=x_i-x_{i-1}$.

4．（1）T_{10}=0.573 595 9，S_{10}=0.579 047 2

（2）T_{10}=0.784 981 5，S_{10}=0.785 398 2

5．0.746 826 1

6．T_{10}=1.035 712 8，S_5=1.035 763 9

7．（1）68 等份，（2）3 等份

8．多于 671 个节点即可

9．10 等份就能保证，$\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x\approx 2.000\,007$

10．（1）$T_3^{(0)}=-12.070\,419$；（2）$T_3^{(0)}=0.946\,083$

11．（1）$I\approx 0.946\,0411\quad (n=2)\quad 0.946\,083\,2\quad (n=3)$

（2）$I=11.141\,494\quad (n=2)\quad I=10.948\,402\,8\quad (n=3)$

12．x_0=0.821 162，x_1=0.289 949

A_0=0.389 111，A_1=0.277 556