第七章　解线性方程组的迭代法

迭代法的基本思想是用逐次逼近的方法求解线性方程组的解，是解线性方程组的重要方法.

一、内容要点

设线性方程组为

$$\boldsymbol{AX=b}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

本章讨论的线性方程组的系数矩阵都是非奇异阵，从而方程组 $\boldsymbol{AX=b}$ 有唯一解.

将方程组 $\boldsymbol{AX=b}$，改写成便于迭代的形式

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BX}+\boldsymbol{g}$$

建立迭代格式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{BX}^{(k)}+\boldsymbol{g}\quad (k=0,1,\cdots) \tag{7-1}$$

向量 $\boldsymbol{X}^{(0)}$事先给定，称为初始向量，用公式（7-1）逐步迭代求解的方法叫做迭代法.

如果由（7-1）产生的序列$\{\boldsymbol{X}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$收敛，则称迭代法（7-1）是收敛的，否则称为迭代法发散.

1．Jacobi 迭代法

若 $a_{ii}\neq 0$

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\quad (i=1,2,\cdots,n;\quad k=0,1,2,\cdots) \tag{7-2}$$

其中　$\boldsymbol{X}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$.

2．Gauss-Seidel 迭代法

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\quad (i=1,2,\cdots,n;\quad k=0,1,2,\cdots) \tag{7. 3}$$

其中 $\boldsymbol{X}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})$.

3．逐次超松驰（SOR）迭代法

$$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{\omega}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\quad(i=1,2,\cdots,n;\quad k=0,1,2,\cdots)\qquad（7\text{-}4）$$

其中，ω 称松驰因子.

当 ω=1 时，SOR 迭代法（7. 4）就是 Gauss-Seidel 迭代法（7-3）；

当 0<ω<1 时，SOR 迭代法（7. 4）称为低松驰法；

当 2>ω>1 时，SOR 迭代法（7. 4）称为超松驰法，可以用来加速收敛速度.

4．迭代公式的矩阵表示

将方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的系数 $\boldsymbol{A}$ 分解成

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}$$

其中，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对角线下方元素和上方元素组成的严格下三角阵与严格上三角阵.

Jacobi 迭代的矩阵表示为

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}\qquad（7\text{-}2）'$$

Gauss-Seidel 迭代的矩阵表示为

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}^{(k)}+(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}\qquad（7\text{-}3）'$$

SOR 迭代法的矩阵表示为

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}]\boldsymbol{X}^{(k)}+\omega(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}\qquad（7\text{-}4）'$$

（7-2）′，（7-3）′ 和（7-4）′ 均属于如下形式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{g}\qquad（7\text{-}5）$$

的迭代公式.

5．迭代法的收敛性

迭代法 $\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{g}$ 的收敛性与迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有关，而与右端向量 $\boldsymbol{g}$ 和初始向量 $\boldsymbol{X}^{(0)}$无关.

定理 7. 1 （迭代法的基本收敛定理）

设有方程组

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{g}$$

则对于任意初始向量 $\boldsymbol{X}^{(0)}$及右端向量 $\boldsymbol{g}$，解此方程组的迭代法（7-5）收敛的充要条

件是迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径

$$\rho(\boldsymbol{B})<1$$

并可以证明，$\rho(\boldsymbol{B})$ 愈小，收敛速度愈快.

定理 7．2　（迭代法收敛的充分条件）

若迭代法 $\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{g}$ 的迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\|\boldsymbol{B}\|=q<1$，则

（1）对于任意的初始向量 $\boldsymbol{X}^{(0)}$与右端向量 $\boldsymbol{g}$，迭代法收敛于方程组 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{g}$ 的精确 $\boldsymbol{X}^{*}$.

且有如下两个误差估计式：

（2）$\left\|\boldsymbol{X}^{*}-\boldsymbol{X}^{(k)}\right\|\le\dfrac{q}{1-q}\left\|\boldsymbol{X}^{(k)}-\boldsymbol{X}^{(k-1)}\right\|$　（7-6）

（3）$\left\|\boldsymbol{X}^{*}-\boldsymbol{X}^{(k)}\right\|\le\dfrac{q^{k}}{1-q}\left\|\boldsymbol{X}^{(1)}-\boldsymbol{X}^{(0)}\right\|$　（7-7）

由于 $\|\boldsymbol{B}\|_1$，$\|\boldsymbol{B}\|_\infty$ 都能很方便地用 $\boldsymbol{B}$ 的元素来表示，因此常用

①$\|\boldsymbol{B}\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|<1$

或　②$\|\boldsymbol{B}\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|b_{ij}\right|<1$

来作为判别迭代法是否收敛的充分条件：当 $\|\boldsymbol{B}\|<1$ 时，迭代必然收敛，不过要注意，$\|\boldsymbol{B}\|<1$ 仅是收敛的充分条件而不是必要条件.

[**判别条件**Ⅰ]　若线性代数方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的系数方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 满足下列条件一：

①按行（或按列）为严格对角占优；

②不可约且按行（或按列）为弱对角占优，则 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法都是收敛的.

[**判别条件**Ⅱ]　若线性代数方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定阵，则 Gauss-Seidel 迭代法收敛.

[**判别条件**Ⅲ]　若线性代数方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定阵，且 $2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$ 也为对称正定阵，则 Jacobi 迭代法收敛；若 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定阵而 $2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$ 为非正定阵，则 Jacobi 迭代法发散（其中，$\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对角元组成的对角阵，所以，$2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 只是非对角元的符号不同）.

定理 7.3　逐次超松驰迭代法收敛的必要条件是松驰因子满足

$$0 < \omega < 2 \tag{7-8}$$

[判别条件Ⅳ] 若线性代数方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定阵，则当 $0<\omega<2$ 时，逐次超松驰迭代法收敛.

[判别条件Ⅴ] 若线性代数方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵，则当 $0<\omega\le 1$ 时，逐次超松驰迭代法收敛.

二、题型分析与解题方法

例 1 分别用雅可比（Jacobi）迭代法与高斯-赛德尔（Gauss-Seidel）迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 20x_1+2x_2+3x_3=24 \\ x_1+8x_2+x_3=12 \\ 2x_1-3x_2+15x_3=30 \end{cases}$$

取初值 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,0)^T$，精确到小数点后四位，并要求分别写出其迭代法的分量形式和矩阵形式.

分析 这是常规计算题. 首先写出 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代公式，然后进行计算. 本题的方程组是严格对角占优方程组，其 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代均收敛.

解 （1）用 Jacobi 迭代法，其迭代法的分量形式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{20}(24-2x_2^{(k)}-3x_3^{(k)})=1.2-0.1x_2^{(k)}-0.15x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{8}(12-x_1^{(k)}-x_3^{(k)})=1.5-0.125x_1^{(k)}-0.125x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{15}(30-2x_1^{(k)}+3x_2^{(k)})=2-0.133\,3x_1^{(k)}+0.2x_2^{(k)} \\ \hfill (k=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

迭代法的矩阵形式为

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$$

其中

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{20}&0&0\\0&\frac{1}{8}&0\\0&0&\frac{1}{15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20&2&3\\1&8&1\\2&-3&15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-0.1&-0.15\\-0.125&0&-0.125\\-0.1333&0.2&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\frac{1}{20}&&\\&\frac{1}{8}&\\&&\frac{1}{15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}24\\12\\30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.2\\1.5\\2\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}x_1^{(k+1)}\\x_2^{(k+2)}\\x_3^{(k+1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-0.1&-0.15\\-0.125&0&-0.125\\-0.1333&0.2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2\\1.5\\2.0\end{bmatrix}$$

取初值 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,0)^T$，迭代可得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^{(1)}&=(1.200\,000,1.500\,000,2.000\,000)^T,\\
\boldsymbol{X}^{(2)}&=(0.750\,000,1.100\,000,2.140\,000)^T,\\
\boldsymbol{X}^{(3)}&=(0.769\,000,1.138\,750,2.120\,000)^T,\\
\boldsymbol{X}^{(4)}&=(0.768\,125,1.138\,875,2.125\,217)^T,\\
\boldsymbol{X}^{(5)}&=(0.767\,330,1.138\,332,2.125\,358)^T,\\
\boldsymbol{X}^{(6)}&=(0.767\,363,1.138\,414,2.125\,356)^T,\\
\boldsymbol{X}^{(7)}&=(0.767\,355,1.138\,410,2.125\,368)^T,
\end{aligned}$$

迭代 7 次，得近似值 $\boldsymbol{X}\approx(0.767\,355,1.138\,410,2.125\,368)^T$.

（2）用 Gauss-Seidel 迭代法，其迭代法的分量形式为

$$\begin{cases}
x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{20}(24-2x_2^{(k)}-3x_3^{(k)})=1.2-0.1x_2^{(k)}-0.15x_3^{(k)}\\
x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{8}(12-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)})=1.5-0.125x_1^{(k+1)}-0.125x_3^{(k)}\\
x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{15}(30-2x_1^{(k+1)}+3x_2^{(k+1)})=2-0.1333x_1^{(k+1)}+0.2x_2^{(k+1)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(k=0,1,2,\cdots)
\end{cases}$$

其迭代法的矩阵形式为

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)} = -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}^{(k)} + (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$$

其中

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 2 & -3 & 15 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{160} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{19}{2\,400} & \frac{1}{40} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$$

$$-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{160} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{19}{2\,400} & \frac{1}{40} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.15 \\ 0 & 0.012\,5 & -0.106\,25 \\ 0 & 0.158\,333 & -0.001\,25 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{160} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{19}{2400} & \frac{1}{40} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.35 \\ 2.11 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & -0.15 \\ 0 & 0.012\,5 & -0.106\,25 \\ 0 & 0.158\,333 & -0.001\,25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.35 \\ 2.11 \end{bmatrix}$$

取初值 $\boldsymbol{X}^{(0)} = (0,0,0)^T$，迭代可得

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=(1.200\,000,1.350\,000,2.110\,000)^T,$$
$$\boldsymbol{X}^{(2)}=(0.748\,500,1.142\,688,2.128\,738)^T,$$
$$\boldsymbol{X}^{(3)}=(0.766\,421,1.138\,105,2.125\,432)^T,$$
$$\boldsymbol{X}^{(4)}=(0.767\,375,1.138\,399,2.125\,363)^T,$$
$$\boldsymbol{X}^{(5)}=(0.767\,356,1.138\,410,2.125\,368)^T.$$

迭代 5 次，得近似值 $\boldsymbol{X}\approx(0.767\,356,1.138\,410,2.125\,37)^T$.

同样取初值 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,0)^T$ 迭代 5 次就得到了与 Jacobi 迭代法迭代 7 次得到的相同的近似值，从而可见本题用 Gauss-Seidel 迭代法显然比 Jocobi 迭代法收敛快.

例 2　用逐次超松驰迭代法（SOR 法）解方程组（取 $\omega=0.9,\quad \boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,0)^T$ ）

$$\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=12\\-x_1+4x_2+2x_3=20\\2x_1-3x_2+10x_3=3\end{cases}$$

精确到小数点后四位.

分析　本题松驰因子已确定,（事实上，不同的松驰因子会对收敛速度有不同的影响. 求解方程组时选取最佳的松驰因子 ω 并不是一件容易的事），先写出 SOR 法的计算格式，然后再计算. 本题的方程组是按行严格对角占优的，故逐次超松驰法是收敛的。

解　迭代公式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}+\dfrac{0.9}{5}(-12-5x_1^{(k)}-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)})\\x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}+\dfrac{0.9}{4}(20+x_1^{(k+1)}-4x_2^{(k)}-2x_3^{(k)})\\x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}+\dfrac{0.9}{10}(3-2x_1^{(k+1)}+3x_2^{(k+1)}-10x_3^{(k)})\end{cases}$$
$$(k=0,1,2,\cdots)$$

取初值 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,0)^T$，迭代可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^{(1)} &= (-2.160\,00, 4.014\,00, 1.742\,58)^T, \\
\boldsymbol{X}^{(2)} &= (-4.134\,70, 3.186\,93, 2.048\,98)^T, \\
\boldsymbol{X}^{(3)} &= (-4.089\,58, 2.976\,50, 2.014\,68)^T, \\
\boldsymbol{X}^{(4)} &= (-4.003\,14, 2.990\,34, 1.999\,42)^T, \\
\boldsymbol{X}^{(5)} &= (-3.996\,73, 3.000\,03, 1.999\,36)^T, \\
\boldsymbol{X}^{(6)} &= (-3.999\,57, 3.000\,39, 1.999\,96)^T, \\
\boldsymbol{X}^{(7)} &= (-4.000\,09, 3.000\,04, 2.000\,02)^T, \\
\boldsymbol{X}^{(8)} &= (-4.000\,03, 2.999\,99, 2.000\,00)^T.
\end{aligned}
$$

迭代 8 次，得 $\boldsymbol{X} \approx (-4.000\,03, 2.999\,99, 2.000\,00)^T$.

例 3　对方程组

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
2x_1 + x_2 + x_3 = 3
\end{cases}
$$

分别讨论用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解的收敛性.

分析　一般要证明某一种迭代法是收敛的，可利用学过的多种充分条件，也可用充要条件，但若要证明某一种迭代法是发散的，则只能用充要条件. 观察本题的系数阵的特点，它既不严格对角占优，也不正定对称，因此应首先分别写出 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$，可利用迭代法收敛的充要条件，即通过谱半径 $\rho(\boldsymbol{B})$ 是否小于 1 来判定收敛性.

解　由迭代法的基本收敛定理 7. 1 知，迭代法是否收敛等价于迭代矩阵的谱半径 $\rho(\boldsymbol{B})$ 是否小于 1，为此，下面先分别求迭代矩阵.

由系数矩阵

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
= \boldsymbol{D} + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}
$$

所以
$$
\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}
$$

则 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_J=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\1&\lambda&1\\2&2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3=0$$

因此有 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，即 $\rho(\boldsymbol{B}_J)=0<1$，所以 Jacobi 迭代法收敛.

而对于 Gauss-Seidel 迭代法，由

$$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{bmatrix}$$

容易求得
$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

则 Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_G=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}=-\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&2\\0&2&-3\\0&0&2\end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}_G|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\0&\lambda-2&3\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$$

因此有 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$，即 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=2>1$，所以 Gauss-Seidel 迭代法发散.

例 4 设方程组 $\boldsymbol{AX=b}$ 中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

分别讨论用 Jacobi 迭代法、Gauss-seidel 迭代法和逐次超松驰迭代法（$0<\omega<2$）求解的收敛性.

分析 本题方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的系数阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称的，如果它还是正定的则由[**判别条件**Ⅱ]Gauss-Seidel 迭代收敛，由[判别条件 IV]可知方程组的 SOR 方法也是收敛的. 本题可通过 Jocobi 迭代矩阵 $\boldsymbol{B}_J$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{B})$ 是否小于 1 来讨论 Jacobi 迭代的收敛性或通过[判别条件Ⅲ]来判定 Jacobi 迭代的收敛性.

解 显然 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵. 现考虑 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式

$$\Delta_1 = |1| = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} > 0$$

因而 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，从而 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定阵，由[判断条件 II]知 Gauss-Seidel 迭代法收敛.

又由已知 $0 < \omega < 2$，且 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，由[判别条件 IV]知，逐次超松驰迭代法也是收敛的.

但因

$$2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

的 $\Delta_3 = |2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}| = 0$. 所以 $2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$ 是非正定阵，由[判断条件Ⅲ]知，Jacobi 迭代法不收敛，也即发散. 或也可由 $\rho(\boldsymbol{B}_J) = 1$ 不小于零得 Jacobi 迭代法发散.

总结 由题 3 与题 4 可见，对有些方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 作 Jacobi 迭代收敛，而作 Gauss-Seidel 迭代则发散；而对有些方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 作 Gauss-Seidel 迭代法收敛，而作 Jacobi 迭代则发散.

例 5 分别讨论用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法解线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的收敛性

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$

分析 显然 $\boldsymbol{A}$ 不可约且弱对角写优，利用[**判别条件** I]直接得出结论.

解 由系数阵 $\boldsymbol{A}$ 是不可约且弱对角写优的. 由[**判别条件** I]知 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代均收敛.

例 6 设有方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&2\\0&2&1\\1&0&2\end{bmatrix}$$

用此例说明[判别条件 I]对 Jacobi 迭代法来说只是一个充分条件而不是必要条件.

分析 [判断条件 I]是判别 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代收敛的充分条件，当方程组的系数阵 $\boldsymbol{A}$ 不满足[判别条件 I]的条件时不一定是发散的，本题可利用迭代矩阵的谱半径来说明了这一点.

解 显然，$\boldsymbol{A}$ 不满足[判别条件 I]，但其 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_J=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&2\\0&2&1\\1&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&0\end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$
|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}_J|=\begin{vmatrix} \lambda & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-\frac{\lambda}{3}+\frac{1}{6}=0
$$

所以，其谱半径 $\rho(\boldsymbol{B}_J)=0.7461<1$，故用 Jacobi 迭代法是收敛的.

这说明[判别条件 I]对 Jacobi 迭代法来说只是一个充分条件而不是必要条件.

例 7 讨论用 Jacobi 法和 Gauss-Seidel 方法解方程组 $\boldsymbol{AX=b}$ 时的收敛性，如果收敛，并比较哪种方法收敛较快，其中

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

分析 如果要证明一种方法发散，则一般应求迭代矩阵的谱半径，说明它大于 1；如果两种方法收敛，但要比较收敛速度一般也应求谱半径. 总之，应该求迭代矩阵的谱半径.

解 （1）对 Jacobi 方法，迭代矩阵

$$
\boldsymbol{B_J}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}
$$

$\rho(\boldsymbol{B_J})=\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}<1$，方法收敛.

（2）对 Gauss-Seidel 方法，迭代矩阵

$$
\boldsymbol{B}_G=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}=-\begin{bmatrix} 3 & & \\ 0 & 2 & \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{12} \end{bmatrix}
$$

$\rho(\boldsymbol{B_G})=\dfrac{11}{12}<1$，方法收敛.

因为$\dfrac{11}{12}<\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{12}}$，故 Gauss-Seidel 方法较 Jacobi 方法收敛快.

例 8 分别用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法解方程组

$$\begin{cases}20x_1+2x_2+3x_3=24\\x_1+8x_2+x_3=12\\2x_1-3x_2+15x_3=30\end{cases}$$

取 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,0)^T$，问迭代法是否收敛？若收敛，需要迭代多少次，才能保证各分量的误差绝对值小于 10^{-6}？

分析 判断 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代是否收敛，首先应先虑比较方便的充分条件，本题方程组的系数阵是严格对角占优的，故 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代一定收敛. 为了达到一定的精度而求需迭代的次数，应用估计式（7-7）.

解 由于系数阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}20&2&3\\1&8&1\\2&-3&15\end{bmatrix}$$

是严格对角占优的，故 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代均收敛.

Jacobi 迭代法的迭代公式的分量形式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{20}(-2x_2^{(k)}-3x_3^{(k)}+24)\\x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{8}(-x_1^{(k)}-x_3^{(k)}+12)\\x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{15}(-2x_1^{(k)}+3x_2^{(k)}+30)\end{cases}$$

若取 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,0)^T$，经一次迭代得 $\boldsymbol{X}^{(1)}=\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{3}{2},2\right)^T$，则 $\left\|\boldsymbol{X}^{(1)}-\boldsymbol{X}^{(0)}\right\|_\infty=2$.

又由例 1 的计算结果知 Jacobi 迭代法的迭代矩阵 $G_J=I-D^{-1}A$，$\|G\|_\infty=\dfrac{1}{3}$. 由公式(7-7)可得

$$k > \left[\ln \frac{10^{-6}(1-\frac{1}{3})}{2} / \ln \frac{1}{3} \right] = 13.5754$$

也即，要保证各分量误差绝对值小于 10^{-6}，需要迭代 14 次.

Gauss-Seidel 迭代法的迭代公式的分量形式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{20}(-2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)} + 24) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(-x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} + 12) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{15}(-2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)} + 30) \end{cases}$$

取 $\boldsymbol{X}^{(0)} = (0,0,0)^T$，经一次迭代得 $\boldsymbol{X}^{(1)} = (1.2, 1.35, 2.11)^T$，则 $\left\| \boldsymbol{X}^{(1)} - \boldsymbol{X}^{(0)} \right\|_\infty$ =2.11. 由例 1 计算结果知 Gauss-seidel 迭代法的迭代矩阵 $G_J = -(D+L)^{-1}U$，$\|G_J\|_\infty = 0.25$. 由公式（7-6）可得

$$m > \left[\ln \frac{10^{-6}(1-0.25)}{2.11} / \ln 0.25 \right] = 10.7119$$

也即，要保证各分量误差绝对小于 10^{-6}，只要迭代 11 次.

例 9 设线性代数方程组 ***AX=b*** 的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

证明（1）当 $-0.5 < a < 1$ 时，用 Gauss-Seidel 迭代法求解 ***AX=b*** 收敛；

（2）$-0.5 < a < 0.5$ 时，用 Jacobi 迭代法求解 ***AX=b*** 收敛.

分析 首先应考虑方便的充分条件，利用判定条件得出结论.

证 当 $-0.5 < a < 1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的三个顺序主子式均大于零，即

$$\Delta_1 = 1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2a^3 - 3a^2 = (a-1)^2(2a+1) > 0$$

所以，***A*** 是对称正定的，由[判别条件Ⅱ]知，用 Gauss-Seidel 迭代法求解 ***AX=b*** 是一定收敛的.

当 $-0.5 < a < 0.5$ 时，***A*** 为按行严格对角占优. 由[判别条件Ⅰ]知，用 Jacobi 迭代法求解 ***AX=b*** 是一定收敛的，且若用 Gauss-Seidel 迭代法也一定收敛.

此题中，若取 a=0.8，则 Gauss-Seidel 迭代收敛，而 Jacobi 迭代发散. 这是因为 2***D***−***A*** 不是正定的，由[判别条件Ⅲ]即得.

例 10　对方程组

$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 - 33x_3 = 1 \\ -22x_1 + 11x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

通过调整方程的次序，建立收敛的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式.

分析　Jacobi 方法和 Gauss-Seidel 方法的收敛条件不止一种，首先应该考虑比较方便的充分条件. 观察此方程组可以发现，有几个系数绝对值较大，这使得经过调整方程组中各方程的次序后使方程组化为与它同解的对角占优方程组，从而 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛.

解　将第二个方程调到第一行、第三个方程调到第二行、第一个方程调到第三行后有同解方程组

$$\begin{cases} -22x_1 + 11x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 11x_1 - 3x_2 - 33x_3 = 1 \end{cases}$$

这是按行严格对角占优方程组，故 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法都一定收敛.

Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{2}x_2^{(k)} + \dfrac{1}{22}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}x_1^{(k)} + \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} - \dfrac{1}{4} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}x_1^{(k)} - \dfrac{1}{11}x_2^{(k)} - \dfrac{1}{33} \end{cases}$$

Gauss-Seidel 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{2}x_2^{(k)} + \dfrac{1}{22}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)} + \dfrac{1}{2}x_3^{(k)} - \dfrac{1}{4} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{3}x_1^{(k+1)} - \dfrac{1}{11}x_2^{(k+1)} - \dfrac{1}{33} \end{cases}$$

例 11 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times2}$是二阶矩阵，且$a_{11}a_{22}\neq 0$. 试证：求解方程组 ***AX=b*** 的 Jacobi 方法与 Gauss-Seidel 方法同时收敛或发散.

分析 只要说明 Jacobi 迭代矩阵与 Gauss-Seidel 迭代矩阵有相同的谱半径或者虽然谱半径不同但同时小于 1 或大于等于 1 即可.

证 Jacobi 方法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{bmatrix}$$

其谱半径为$\rho(\boldsymbol{B}_1)=\sqrt{\dfrac{|a_{12}a_{21}|}{|a_{11}a_{22}|}}$；而 Gauss-Seidel 方法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{bmatrix}$$

故其谱半径为$\rho(\boldsymbol{B}_2)=\left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{12}}\right|$. 显然$\rho(\boldsymbol{B}_1)$与$\rho(\boldsymbol{B}_2)$同时小于、等于或大于 1，因而 Jacobi 方法和 Gauss-Seidel 方法具有相同的敛散性.

例 12 设线性方程组 ***AX=b*** 的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ -3 & 2 & a \end{bmatrix}$$

试求能使 Jacobi 方法收敛的 a 的取值范围.

分析 本题实际上也是说 a 在什么范围以外不收敛，只要涉及到发散，一般总要按收敛的充要条件去讨论，因此首先应求迭代矩阵的谱半径.

解　当 $a\neq 0$ 时，Jacobi 方法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{3}{a} \\ -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{2}{a} \\ \frac{3}{a} & -\frac{2}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

由 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=0$ 得 $\lambda_1=0,\quad \lambda_{2,3}=\pm\dfrac{2i}{|a|}$，故 $\rho(\boldsymbol{B})=\dfrac{2}{|a|}$. 由 $\rho(\boldsymbol{B})<1$ 得 $|a|>2$，即 $|a|>2$ 时 $\rho(\boldsymbol{B})<1$，Jacobi 方法收敛.

例 13　设有迭代格式

$$\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{(k-1)}+\boldsymbol{g}\quad (k=1,2,\cdots)$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{g}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

试证该迭代格式收敛，并取 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0\quad 0\quad 0)^T$，计算 $\boldsymbol{x}^{(4)}$.

分析　此迭代格式的迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 $\infty-$范数和 1−范数显然不小于 1，于是我们考虑 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径.

证明　迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值方程 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=0$，即

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3=0$$

故 $\rho(\boldsymbol{B})=0<1$，从而该迭代格式收敛. 由 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0\quad 0\quad 0)^T$，经计算得

$$X^{(1)}=(-\frac{1}{2}\quad \lambda \quad -\frac{1}{2})^T$$
$$X^{(2)}=(\frac{1}{2\sqrt{2}}\quad \frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2\sqrt{2}})^T$$
$$X^{(3)}=(0\quad 1\quad 0)^T$$
$$X^{(4)}=(0\quad 1\quad 0)^T$$

注：由于 $\rho(\boldsymbol{B})=0$，我们发现仅三次就收敛到了精确解. 事实上这个例子隐含了一个普遍性的结论，请读者阅例 28.

例 14　给定线性方程组 $\boldsymbol{AX=b}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$. 用迭代公式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{X}^{(k)}+\alpha(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}^{(k)})\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

求解 $\boldsymbol{AX=b}$. 问取什么实数 α 可使迭代收敛？什么 α 可使迭代收敛最快？

解　所给迭代公式的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\alpha\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-3\alpha & -2\alpha\\ -\alpha & 1-2\alpha\end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-(1-3\alpha) & 2\alpha\\ \alpha & \lambda-(1-2\alpha)\end{vmatrix}=0$$

即

$$\lambda^2-(2-5\alpha)\lambda+1-5\alpha+4\alpha^2=0$$
$$\lambda^2-(2-5\alpha)\lambda+(1-\alpha)(1-4\alpha)=0$$
$$[\lambda-(1-\alpha)][\lambda-(1-4\alpha)]=0$$
$$\lambda_1=1-\alpha,\quad \lambda_2=1-4\alpha$$

$$\rho(\boldsymbol{B})=\max\{|1-\alpha|,|1-4\alpha|\}=\begin{cases}1-4\alpha & 当\alpha\le 0\\ 1-\alpha & 当0<\alpha<\dfrac{2}{5}\\ 4\alpha-1 & 当\alpha\ge\dfrac{2}{5}\end{cases}$$

$\rho(\boldsymbol{B})<1$ 当且仅当 $0<\alpha<\frac{1}{2}$. 所以取 $0<\alpha<\frac{1}{2}$，迭代收敛. 当 $\alpha=\frac{2}{5}$ 时，$\rho(\boldsymbol{B})$

达到最小值$\dfrac{3}{5}$. 所以当$\alpha=\dfrac{2}{5}$时迭代收敛最快.

例 15　设线性代数方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中，$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$为对称正定阵（且设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值$\lambda(\boldsymbol{A})$满足：$0<\alpha\le\lambda(\boldsymbol{A})\le\beta$），则有迭代公式为

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{X}^{(k)}+\omega(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}^{(k)})\qquad(k=0,1,2,\cdots)$$

证明　当$0<\omega<\dfrac{2}{\beta}$时，上述迭代法收敛.

分析　本题应考虑利用迭代收敛的充要条件来处理.

证　由迭代公式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{X}^{(k)}+\omega(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{AX}^{(k)})$$

得

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=(\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}^{(k)}+\omega\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}_\omega\boldsymbol{X}^{(k)}+\omega\boldsymbol{b}$$

其中$\boldsymbol{B}_\omega=\boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{A}$. 设$\lambda_i(\boldsymbol{A})$为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定阵，且其特征值满足$0<\alpha\le\lambda_i(\boldsymbol{A})\le\beta$，又由设$0<\omega<\dfrac{2}{\beta}$，于是有$0<\omega\alpha\le\omega\lambda_i(\boldsymbol{A})\le\omega\beta<2$，即$0<\omega\lambda_i(\boldsymbol{A})<2$成立，从而$\left|1-\omega\lambda_i(A)\right|<1$，　$\rho(\boldsymbol{B}_\omega)=\max\limits_i\left|1-\omega\lambda_i(\boldsymbol{A})\right|<1$，由迭代法收敛的充要条件（定理 7.1）知上述迭代法收敛.

例 16　设求解方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的简单迭代法

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{BX}^{(k)}+\boldsymbol{g}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

收敛. 求证：对$0<\omega<1$，迭代法.

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=[(1-\omega)\boldsymbol{I}+\omega\boldsymbol{B}]\boldsymbol{X}^{(k)}+\omega\boldsymbol{g}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

收敛.

分析　由于已知$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{BX}^{(k)}+\boldsymbol{g}\quad(k=0,1,2,\cdots)$收敛，故谱半径$\rho(\boldsymbol{B})<1$，如果把第二个迭代法的迭代矩阵的特征值和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值联系起来，推得第二个迭代法的谱半径小于 1，则能完成证明.

证　设$\boldsymbol{C}=(1-\omega)\boldsymbol{I}+\omega\boldsymbol{B}$, $\lambda(\boldsymbol{C})$和$\lambda(\boldsymbol{B})$分别为 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，则显然，

$$\lambda(\boldsymbol{C})=(1-\omega)+\omega\lambda(\boldsymbol{B})$$

因为$0<\omega<1$，$\lambda(\boldsymbol{C})$是 1 和$\lambda(\boldsymbol{B})$的加权平均，且由迭代法

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{BX}^{(k)}+\boldsymbol{g}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

收敛知$\left|\lambda(\boldsymbol{B})\right|<1$，故$\left|\lambda(\boldsymbol{C})\right|<1$，从而$\rho(\boldsymbol{C})<1$，即迭代法

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^{(k)} + \boldsymbol{g} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

收敛.

例 17 设有迭代格式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(k)} + \boldsymbol{g} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值全为正数，试证：该迭代格式收敛.

分析 本题主要是根据 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 之间的特征值的关系设法导出 $\rho(\boldsymbol{B})<1$，从而说明迭代格式收敛.

证 因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$，故 $\lambda(\boldsymbol{B})=1-\lambda(\boldsymbol{A})$，$\lambda(\boldsymbol{A})+\lambda(\boldsymbol{B})=1$，由于已知 $\lambda(\boldsymbol{A})$ 和 $\lambda(\boldsymbol{B})$ 全为正数，故 $0<\lambda(\boldsymbol{B})<1$，从而 $\rho(\boldsymbol{B})<1$，所以该迭代格式收敛.

例 18 证明：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定阵，且 $0<\omega<2$，则解线性代数方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的逐次超松驰迭代方法收敛.

分析 本题应考虑利用迭代收敛的充要条件来处理. 设 λ 为逐次超松驰法的迭代矩阵 $\boldsymbol{B}_\omega$ 的任一特征值，若能证明 $|\lambda|<1$，则就有 $\rho(\boldsymbol{B}_\omega)<1$，则逐次超松驰方法收敛.

证 设 λ 为逐次超松驰法的迭代矩阵 $\boldsymbol{B}_\omega$ 的任一特征值，$\boldsymbol{Y}$ 为应于 λ 的 $\boldsymbol{B}_\omega$ 的特征向量，则有 $\boldsymbol{B}_\omega\boldsymbol{Y}=\lambda\boldsymbol{Y}$，此处 $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots y_n)^T\neq\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{B}_\omega = (\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}]$$

有

$$(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}]\boldsymbol{Y} = \lambda\boldsymbol{Y}$$

也即

$$[(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}]\boldsymbol{Y} = \lambda(\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})\boldsymbol{Y}$$

为了找出 λ 的表达式，考虑上式两边与 $\boldsymbol{Y}$ 作内积，有

$$([(1-\omega)\boldsymbol{D}-\omega\boldsymbol{U}]\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}) = \lambda((\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L})\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y})$$

则

$$\lambda = \frac{(\boldsymbol{DY},\boldsymbol{Y})-\omega(\boldsymbol{DY},\boldsymbol{Y})-\omega(\boldsymbol{UY},\boldsymbol{Y})}{(\boldsymbol{DY},\boldsymbol{Y})+\omega(\boldsymbol{LY},\boldsymbol{Y})}$$

显然

$$(\boldsymbol{DY},\boldsymbol{Y}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|y_i|^2 \equiv d > 0 \qquad (1)$$

这是由于系数矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是对称正定的，所以 $a_{ii}>0$.

记 $(\boldsymbol{LY},\boldsymbol{Y})=\alpha+i\beta$（$\alpha,\beta$ 为实数）. 由于 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{L}^T$，从而

$$(\boldsymbol{UY},\boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{Y},\boldsymbol{LY}) = \overline{(\boldsymbol{LY},\boldsymbol{Y})} = \alpha-i\beta$$

再利用 $\boldsymbol{A}$ 的正定性，则有

$$0<(\boldsymbol{AY},\boldsymbol{Y})=[(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}]=d+2\alpha \tag{2}$$

从而

$$\lambda=\frac{(d-\omega d-\omega\alpha)+i\omega\beta}{(d+\omega\alpha)+i\omega\beta}$$

$$|\lambda|^2=\frac{(d-\omega d-\omega\alpha)^2+\omega^2\beta^2}{(d+\omega\alpha)^2+\omega^2\beta^2}$$

当 $0<\omega<2$ 时，利用式（1）和式（2），有

$$(d-\omega d-\omega\alpha)^2-(d+\omega\alpha)^2=\omega d(d+2\alpha)(\omega-2)<0$$

故 $|\lambda|^2<1$，即 $|\lambda|<1$. 从而 $\rho(\boldsymbol{B}_\omega)<1$，逐次超松驰方法收敛.

例 19　试解释为什么 Gauss-Seidel 迭代矩阵 $\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$ 至少有一个特征值为零.

分析　只要能找到 $\boldsymbol{B}$ 的一个特征值为零就可以.

解　因为 $|\boldsymbol{U}|=0$，所以

$$|0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}|=|(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}|\cdot|\boldsymbol{U}|=0$$

即 0 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

例 20　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，试证：用 Gauss-Seidel 方法求解 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 时是收敛的.

分析　系数阵 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 的对称性显然，若能证明 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 正定，即可说明 Gauss-Seidel 迭代法收敛.

证　设 $\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}$，则因 $\boldsymbol{A}$ 非奇异有 $\boldsymbol{AY}\neq\boldsymbol{0}$，从而

$$\boldsymbol{Y}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{AY})^T(\boldsymbol{AY})>0$$

即 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 正定，故 Gauss-Seidel 方法求解 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 时收敛.

例 21　设 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵，$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$，求证：用 Gauss-Seidel 方法求解线性方程组 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{b}$ 时必收敛.

分析　系数阵 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$ 对称性显然，只要能证明 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$ 正定即可说明 Gauss-Seidel 方法收敛.

证　因 $\boldsymbol{A}$ 是正交阵，故 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量，则有

$$\boldsymbol{AY}=\lambda\boldsymbol{Y}$$

从而

$$(\boldsymbol{AY})^T(\boldsymbol{AY})=(\lambda\boldsymbol{Y})^T(\lambda\boldsymbol{Y})=\lambda^2\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}$$

又

$$(\boldsymbol{AY})^T(\boldsymbol{AY})=\boldsymbol{Y}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{IY}=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}$$

故

$$\lambda^2\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}$$

即

$$(\lambda^2-1)\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}=0$$

由 $\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y}>0$，所以 $|\lambda|=1$. 又 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $2-\lambda$，故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值不为零，从而 $\boldsymbol{B}$ 非奇异，由例 20 知 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$ 正定，所以 Gauss-Seidel 方法收敛.

例 22 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为对称正定矩阵，$\boldsymbol{D}$=diag(a_{ii})，求证：Gauss-Seidel 方法求解方程组

$$\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{AD}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$$

必收敛.

分析 由于 $\boldsymbol{A}$ 对称正定. 对角阵 $\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}=diag(1/\sqrt{a_{ii}})$ 显然也对称正定，从而 $\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{AD}^{-\frac{1}{2}}$ 的对称性是无疑的. 只要能根据线性代数理论由 $\boldsymbol{A}$ 的正定性推出 $\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{AD}^{-\frac{1}{2}}$ 的正定性，即可说明 Gauss-Seidel 方法的收敛性.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定，故 $\boldsymbol{A}$ 一定有分解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S}\text{（}\boldsymbol{S}\text{ 为非奇异下三角阵）}$$

从而

$$\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{AD}^{-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{SD}^{-\frac{1}{2}}=(\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}})^T\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{SD}^{-\frac{1}{2}}=(\boldsymbol{SD}^{-\frac{1}{2}})^T(\boldsymbol{SD}^{-\frac{1}{2}})$$

显然 $\boldsymbol{SD}^{-\frac{1}{2}}$ 非奇异，于是由例 20 知 $(\boldsymbol{SD}^{-\frac{1}{2}})^T(\boldsymbol{SD}^{-\frac{1}{2}})$ 对称正定，即系阵 $\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{AD}^{-\frac{1}{2}}$ 对称正定，从而 Gauss-Seidel 方法收敛.

例 23 设有对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{D}$=diag($a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$)，其中 a_{ii}>0（i=1,2,⋯,n）. 求证：若 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{AD}^{-\frac{1}{2}}$ 正定，则用 Gauss-Seidel 方法求解方程组 $(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 必收敛.

分析 由于 $\boldsymbol{A}$ 对称，故系数阵 $2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$ 的对称性是显然的. 如果能证 $2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$ 正定，则可知 Gauss-Seidel 方法收敛. 而为证 $2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$ 正定，可把它和 $2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{AD}^{-\frac{1}{2}}$ 的正定性联系起来.

证　任给非零向量$\alpha \neq \mathbf{0}$，令$\beta = \boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\alpha$，因 $a_{ii}>0$，故$\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}$非奇异，$\beta \neq \mathbf{0}$，从而

$$\begin{aligned}\alpha^T(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\alpha &= (\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\beta)^T(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\beta)\\ &= \beta^T\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\beta\\ &= \beta^T(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}})\beta\end{aligned}$$

由于$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}$对称正定，故上式右端大于零，从而$\alpha^T(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\alpha>0$，即$2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$正定，所以 Gauss-Seidel 方法解$(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$必收敛.

例 24　设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},a_{33},\cdots,a_{nn})$. 试证：若$2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$正定，则 Jacobi 迭代法求解方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$必收敛.

分析　Jacobi 迭代法的迭代矩阵为$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}$，应设法把它和$2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$联系起来，这只需通过简单的矩阵运算就可以做到.

证　设 Jacobi 法的迭代矩阵$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda$，相应的特征向量为$\boldsymbol{Y}\neq\mathbf{0}$，则$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}=\lambda\boldsymbol{Y}$，两边左乘 $\boldsymbol{D}$ 有$(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}=\lambda\boldsymbol{DY}$，两边加 $\boldsymbol{DY}$ 有$(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}=(\lambda+1)\boldsymbol{DY}$，于是

$$\boldsymbol{Y}^T(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}=(\lambda+1)\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{DY}$$

$$\lambda+1=\frac{\boldsymbol{Y}^T(2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{DY}}=\frac{2\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{DY}-\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{AY})}{\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{DY}} \qquad (1)$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，故 $a_{ii}>0$（$i=1,2,\cdots,n$），从而 $\boldsymbol{D}$ 也正定. 又$2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$正定，故式（1）右端为正，即$\lambda>-1$. 再由式（1），因 $\boldsymbol{A}$ 正定而有$\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{AY}>0$，故

$$\lambda+1<\frac{2\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{DY}-0}{\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{DY}}=2$$

从而$\lambda<1$. 所以$|\lambda|<1$，$\rho(\boldsymbol{B})<1$，故 Jacobi 迭代方法收敛.

例 25　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵，求证：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解总能通过 Gauss-Seidel 迭代法得到.

分析　注意本题的含义，Gauss-Seidel 方法只是能得到解 $\boldsymbol{X}$，但未必解的就是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 本身，完全可能是求解一个和 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的方程组. 因此虽然 $\boldsymbol{A}$ 未必对称正定，但可设法把方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 转化为适合 Gauss-Seidel 迭代法收敛条件的同解方程组，这样就可以用 Gauss-Seidel 方法了.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 与$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$一定是同解方程组. 由例 20 知，Gauss-Seidel 方法求解对称正定方程组$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$一定收敛，即 Gauss-Seidel 方

法一定能得到 $\boldsymbol{AX=b}$ 的解.

例 26 设求解方程组 $\boldsymbol{AX=b}$ 的 Jacobi 方法的迭代矩阵为 $\boldsymbol{B}=\tilde{\boldsymbol{L}}+\tilde{\boldsymbol{U}}$（$\tilde{\boldsymbol{L}}$，$\tilde{\boldsymbol{U}}$ 分别为严格下、上三角矩阵）. 求证：当 $\|\tilde{\boldsymbol{L}}\|+\|\tilde{\boldsymbol{U}}\|<1$ 时相应的 Gauss-Seidel 方法收敛.

分析 本题应该把 Gauss-Seidel 方法用 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{U}}$ 的形式表示出来，这样才容易和条件 $\|\tilde{\boldsymbol{L}}\|+\|\tilde{\boldsymbol{U}}\|<1$ 联系起来.

证 Gauss-Seidel 迭代公式可表示为

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{X}^{(k+1)}+\tilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{g}\quad(k=0,1,2,\cdots)\tag{1}$$

方程组 $\boldsymbol{AX=b}$ 的解 $\boldsymbol{X}^*$ 自然也满足

$$\boldsymbol{X}^*=\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{X}^*+\tilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{X}^*+\boldsymbol{g}\tag{2}$$

式（2）与式（1）相减，则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k+1)}\|&=\|\tilde{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k+1)})+\tilde{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k)})\|\\&\le\|\tilde{\boldsymbol{L}}\|\cdot\|\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k+1)}\|+\|\tilde{\boldsymbol{U}}\|\cdot\|\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k)}\|\end{aligned}$$

从而

$$\|\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k+1)}\|\le\frac{\|\tilde{\boldsymbol{U}}\|}{1-\|\tilde{\boldsymbol{L}}\|}\|\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k)}\|\le\cdots\le[\frac{\|\tilde{\boldsymbol{U}}\|}{1-\|\tilde{\boldsymbol{L}}\|}]^{k+1}\|\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(0)}\|$$

因 $\|\tilde{\boldsymbol{L}}\|+\|\tilde{\boldsymbol{U}}\|<1$，故 $\|\tilde{\boldsymbol{U}}\|<1-\|\tilde{\boldsymbol{L}}\|$，$0<\dfrac{\|\tilde{\boldsymbol{U}}\|}{1-\|\tilde{\boldsymbol{L}}\|}<1$，从而

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k+1)}\|\le\lim_{k\to\infty}[\frac{\|\tilde{\boldsymbol{U}}\|}{1-\|\tilde{\boldsymbol{L}}\|}]^{k+1}\|\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(0)}\|=0$$

即 $\boldsymbol{X}^{(k+1)}$ 收敛到解 $\boldsymbol{X}^*$，从而 Gauss-Seidel 方法收敛.

例 27 设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BX}+\boldsymbol{g}$ 有唯一解 $\boldsymbol{X}^*$. 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{B})>1$，但 $\boldsymbol{B}$ 有一个特征值 λ 满足 $|\lambda|<1$，求证：存在初始向量 $\boldsymbol{X}^{(0)}$，使得由迭代格式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{BX}^{(k)}+\boldsymbol{g}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

产生的序列 $\{\boldsymbol{X}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 $\boldsymbol{X}^*$.

分析 $\rho(\boldsymbol{B})>1$，则简单迭代法发散，其具体含义应理解为不是对任意初始向量都收敛，即也可能存在使简单迭代法收敛的初始向量，事实上本题已明确说明了这一点. 为证明该结论，应将特征值 λ 和误差 $|\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k+1)}|$ 联系起来，这是因为已无

法再按 $\rho(\boldsymbol{B})<1$ 来判断收敛了.

证 因 $\boldsymbol{X}^*$ 是解，故 $\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^*+\boldsymbol{g}$，与 $\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{g}$ 相减有

$$\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k)})=\cdots=\boldsymbol{B}^{k+1}(\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(0)})$$

设 $\boldsymbol{B}$ 的与 λ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{Y}$，则

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}=\lambda\boldsymbol{Y},\quad \boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{Y}=\lambda^{k+1}\boldsymbol{Y}$$

若取初始向量 $\boldsymbol{X}^{(0)}=\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{Y}$，则

$$\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}^{k+1}\boldsymbol{Y}=\lambda^{k+1}\boldsymbol{Y}$$

从而

$$\left\|\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k+1)}\right\|=\left|\lambda^{k+1}\right|\cdot\|\boldsymbol{Y}\|$$

因为 $|\lambda|<1$，故

$$\left\|\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k+1)}\right\|\to 0，\text{当 } k\to\infty \text{ 时}$$

所以存在初始向 $\boldsymbol{X}^{(0)}$，使上述迭代法收敛.

例 28 对迭代格式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{g}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

求证：如果迭代矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{B})=0$，则对任意初始向量 $\boldsymbol{X}^{(0)},\boldsymbol{X}^{(n)}$ 一定是

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{g}$$

的解向量，其中 n 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的阶数.

分析 $\rho(\boldsymbol{B})=0<1$，则该迭代格式收敛，这是无疑的，但仅迭代有限步骤就能得到精确解，这就需要在 $\boldsymbol{B}$ 的特征值全为零上下功夫，比如设法把 $\boldsymbol{B}$ 用其特征值的某种形式表示出来. 由于 $\boldsymbol{B}$ 未必相似于对角阵（即特征值构成的对角阵），于是自然想到 $\boldsymbol{B}$ 的 Jordan 标准形.

证 由线性代数理论可知，$\boldsymbol{B}$ 一定相似于它的 Jordan 标准形 $\boldsymbol{J}$，即有可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 的特征值全为 0，故 $\boldsymbol{J}$ 一定有如下形式：

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&0&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{bmatrix}$$

方程组 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{g}$ 等价于 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{g}$，由于 $\lambda(\boldsymbol{B})=0$，故 $\lambda(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=1-$

$\lambda(\boldsymbol{B})=1\neq 0$，从而 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 非奇异，因此 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{g}$ 有唯一解 $\boldsymbol{X}^*$. 于是

$$\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^*+\boldsymbol{g}$$

与所述迭代格式相减有

$$\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(k)})$$

于是

$$\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(n)}=\boldsymbol{B}^n(\boldsymbol{X}^*-\boldsymbol{X}^{(0)})$$

注意到 $\boldsymbol{J}$ 的形式，则 $\boldsymbol{J}^n=\boldsymbol{0}$，于是

$$\boldsymbol{B}^n=P^{-1}\boldsymbol{J}^nP=\boldsymbol{0}$$

即

$$\boldsymbol{X}^{(n)}-\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{0}$$

从而

$$\boldsymbol{X}^{(n)}=\boldsymbol{X}^*$$

注：简单迭代法 $\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{g}\quad(k=0,1,2,\cdots)$ 收敛的快慢与 $\rho(\boldsymbol{B})$ 的大小有关，$\rho(\boldsymbol{B})$ 越小，收敛越快，$\rho(\boldsymbol{B})=0$ 时已达最小，故收敛应最快. 本题说明 $\rho(\boldsymbol{B})=0$ 时仅经过有限步（n 步）就一定得到精确解.

例 29　设 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵. 考虑迭代格式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{X}^{(k)}-\omega[\boldsymbol{A}(\frac{\boldsymbol{X}^{(k+1)}+\boldsymbol{X}^{(k)}}{2})-\boldsymbol{b}]\quad(\omega>0)$$
$$(k=0,1,2,\cdots)$$

求证：（1）对任意初始向量 $\boldsymbol{X}^{(0)}$，$\left\{\boldsymbol{X}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛；

（2）$\left\{\boldsymbol{X}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解.

分析　从所给格式的形式看，首先应把它整理成格式 $\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{g}$ 的形式，然后讨论 $\boldsymbol{B}$ 的特征值的大小，这主要是根据 $\boldsymbol{A}$ 的正定性来进行.

证　（1）因为 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，而 $\omega>0$，对任意向量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}+\frac{\omega}{2}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$

$=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}+\frac{\omega}{2}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}>0$，故 $\boldsymbol{I}+\frac{\omega}{2}\boldsymbol{A}$ 也对称正定，从而 $(\boldsymbol{I}+\frac{\omega}{2}\boldsymbol{A})$ 可逆.

将所给格式化为

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=(\boldsymbol{I}+\frac{\omega}{2}\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\frac{\omega}{2}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}^{(k)}+\omega(\boldsymbol{I}+\frac{\omega}{2}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$$

设迭代矩阵

$$B=(I+\frac{\omega}{2}A)^{-1}(I-\frac{\omega}{2}A)$$

的特征值为λ，$Y\neq 0$为相应的特征向量，有

$$BY=\lambda Y$$

即

$$(I-\frac{\omega}{2}A)Y=\lambda(I+\frac{\omega}{2}A)Y$$

两边左乘 Y^T 有

$$Y^T(I-\frac{\omega}{2}A)Y=\lambda Y^T(I+\frac{\omega}{2}A)Y$$

$$\lambda=\frac{Y^T(I-\frac{\omega}{2}A)Y}{Y^T(I+\frac{\omega}{2}A)Y}=\frac{Y^TY-\frac{\omega}{2}Y^TAY}{Y^TY+\frac{\omega}{2}Y^TAY}$$

因 A 正定，故$Y^TAY>0$，于是显然$|\lambda|<1,\ \rho(B)<1$，从而迭代格式收敛；

（2）设$\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$收敛到 X^*，则

$$X^*=X^*-\omega[A(\frac{X^*+X^*}{2})-b]$$

即 $AX^*=b$，即$\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$收敛到 $AX=b$ 的解.

例 30　设 B 为 n 阶实对称矩阵，A 为 n 阶对称正定矩阵. 考虑迭代格式

$$X^{(k+1)}=BX^{(k)}+g\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

如果 $A-BAB$ 正定，求证：此格式从任意初始向量 $X^{(0)}$出发都收敛.

分析　本题应设法证明$\rho(B)<1$，为此应把 B 的特征值的定义$BY=\lambda Y$ 和 $A-BAB$的正定性联系起来.

证　设λ为 B 的任一特征值，$Y\neq 0$为相应的特征向量，则$BY=\lambda Y$，从而

$$\begin{aligned}Y^T(A-BAB)Y&=Y^TAY-Y^T(BAB)Y=Y^TAY-(BY)^TA(BY)\\&=Y^TAY-(\lambda Y)^TA(\lambda Y)=(1-\lambda^2)(Y^TAY)\end{aligned}$$

因为$A-BAB$和 A 正定，故$Y^T(A-BAB)Y^T=(1-\lambda^2)Y^TAY>0$，即$\lambda^2<1$，$|\lambda|<1$，$\rho(B)<1$，从而此格式对任意初始向量 $X^{(0)}$都收敛.

例 31 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对称正定. 考虑迭代格式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{X}^{(k)}-\tau(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(k)}-\boldsymbol{b})\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

为使 $\boldsymbol{X}^{(k+1)}$收敛到 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解 $\boldsymbol{X}^*$，试讨论参数 τ 的取值范围.

分析 首先应把所给格式整理为规范的迭代格式的形式，然后再讨论迭代矩阵的谱半径的大小.

解 所述格式可写为

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=(\boldsymbol{I}-\tau\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}^{(k)}+\tau\boldsymbol{b}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，故其特征值为正，不妨设为 $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$. 迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\tau\boldsymbol{A}$$

的特征值为$1-\tau\lambda_i$. 为使格式收敛，应

$$|1-\tau\lambda_i|<1$$

由此解得 $0<\tau<\dfrac{2}{\lambda_i}(i=1,2,\cdots,n)$，公共解为

$$0<\tau<\frac{2}{\lambda_n}$$

这就是所求的 τ 的取值范围. 由于

$$\lambda_n\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

故实用可取 $\tau<2/\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$.

例 32 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 非奇异. 考虑如下方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{BX}+\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{b}_2\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\in\boldsymbol{R}^n$ 是已知向量， $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{R}^n$ 是未知向量. 求证：如果 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})<1$，则下列迭代格式

$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}^{(k+1)}=-\boldsymbol{BY}^{(k)}+\boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{AY}^{(k+1)}=-\boldsymbol{BX}^{(k)}+\boldsymbol{b}_2\end{cases}\qquad(k=0,1,2,\cdots)$$

必收敛.

分析 本题中方程组里的每个方程实际还是一个方程组，借用矩阵的分块表示方法，我们可以把该方程组统一在一起而写成一个大方程组，这是讨论这种方程组

的最基本的思路.

证 原方程组可写为如下分块矩阵的表达形式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$$

而迭代格式可写为相应形式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}^{(k+1)} \\ \boldsymbol{Y}^{(k+1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}^{(k)} \\ \boldsymbol{Y}^{(k)} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$$

其中的 $\boldsymbol{O}$ 为 n 阶零矩阵. 该格式的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$

设其特征值为 λ，相应的特征向量为

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 \\ \boldsymbol{Z}_2 \end{bmatrix}\neq \boldsymbol{0}$$

其中 $\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{Z}_2\in \boldsymbol{R}^n$. 于是

$$\boldsymbol{CZ}=\lambda\boldsymbol{Z}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 \\ \boldsymbol{Z}_2 \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_1 \\ \boldsymbol{Z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}_2=(-\lambda)\boldsymbol{Z}_1 \qquad （1）$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_1=(-\lambda)\boldsymbol{z}_2 \qquad （2）$$

如果 $\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{Z}_2$，则方程（1）或（2）说明 $-\lambda$ 就是 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值（注意 $\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{Z}_2\neq\boldsymbol{0}$）；如果 $\boldsymbol{Z}_1\neq\boldsymbol{Z}_2$，则（2）-（1）有

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Z}_1-\boldsymbol{Z}_2)=\lambda(\boldsymbol{Z}_1-\boldsymbol{Z}_2)$$

这说明 λ 一定是 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的特征值. 因为 $\rho(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})<1$，于是 $|\lambda|<1$，从而 $\rho(\boldsymbol{C})<1$，所述格式收敛.

例 33 设 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$，证明：$\lim\limits_{\mathbf{k}\to\infty}\boldsymbol{A}^{\mathbf{k}}=\boldsymbol{0}$ 的充分必要条件为 $\rho(\boldsymbol{A})<1$.

分析 本题应充分利用线性代数理论，考虑将 $\boldsymbol{A}$ 用其特征值表示出来，再加以讨论.

证 由线性代数理论，存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_r\end{bmatrix}\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & 0 & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}$$

这里 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{J}_i$ 为若当块. 于是有

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1^k & & & \\ & \boldsymbol{J}_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_r^k\end{bmatrix}\boldsymbol{P}$$

容易验证，若 $\boldsymbol{J}_i$ 为 l 阶阵，则

$$\boldsymbol{J}_i^k=\begin{bmatrix}\lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & 0 & \cdots & C_k^{l-1}\lambda_i^{k-l+1} \\ & \lambda_i^k & C_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{l-2}\lambda_i^{k-l+2} \\ & & \lambda_i^k & \cdots & C_k^{l-3}\lambda_i^{k-l+3} \\ & & & & \vdots \\ & & & \ddots & C_k^1\lambda_i^{k-1} \\ & & & & \lambda_i^k\end{bmatrix}$$

这里约定 $m>k$ 时，二项系数 $C_k^m=0$.

不难看出 $\lim\limits_{\mathbf{k}\to\infty}\boldsymbol{J}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{k}}=\mathbf{0}$ 的充分必要条件为 $|\lambda_i|<1$. 又 $\lim\limits_{\mathbf{k}\to\infty}\boldsymbol{A}^{\mathbf{k}}=\mathbf{0}$ 的充分必要条件为 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{J}_i^k=\mathbf{0},\ i=1,2,\cdots,r$. 故 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\mathbf{0}$ 的充分必要条件为 $|\lambda_i|<1,\ i=1,2,\cdots,r$，即 $\rho(\boldsymbol{A})<1$.

例 34 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个非奇异矩阵，矩阵序列 $\{\boldsymbol{C}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$\boldsymbol{C}_{k+1}=\boldsymbol{C}_k(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_k)\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

证明：当 $\rho(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0)<1$ 时 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{C}_k=\boldsymbol{A}^{-1}$.

证 由

$$\boldsymbol{C}_{k+1}=\boldsymbol{C}_k(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_k)$$

得

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{k+1}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_k(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_k)=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_k)^2\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_k &= (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{k-1})^2 = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{k-2})^{2^2} \\ &= (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{k-3})^{2^3} = \cdots = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0)^{2^k}\end{aligned}$$

解得

$$\boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0)^{2^k}] \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

当 $\rho(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0)<1$时，由例 33 知

$$\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0)^{2^k} = \boldsymbol{0}$$

因而

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{k}\to\infty}\boldsymbol{C}_{\mathbf{k}} &= \lim_{\mathbf{k}\to\infty}\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0)^{2^{\mathbf{k}}}] \\ &= \boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{E}-\lim_{\mathbf{k}\to\infty}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0)^{2^{\mathbf{k}}}] = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{A}^{-1}\end{aligned}$$

三、综合复习题

1．分别用 Jacobi 迭代法与 Gauss-Seidel 迭代法求解方程组

$$\begin{cases}10x_1+3x_2+x_3=14 \\ 2x_1-10x_2+3x_3=-5 \\ x_1+3x_2+10x_3=14\end{cases}$$

取初值 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,0)^T$，精确到小数后四位.

2．分别用 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法及逐次超松驰迭代法计算线性代数方程组

$$\begin{cases}-4x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2-4x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3-4x_4=1\end{cases}$$

取初值 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(0,0,0)^T$，精确到 10^{-5}.

3．给定线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$，证明：Jacobi 迭代法收敛，而 Gauss-Seidel 迭代法发散.

4．给定方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

证明 Jacobi 迭代发散而 Gauss-Seidel 方法收敛.

5．给定方程组

$$\begin{cases} 10x_1 \qquad + x_3 - 5x_4 = -7 \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 \qquad = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + x_4 = 23 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 17 \end{cases}$$

1）写出 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式；

2）考察 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式的收敛性.

6．分别取松驰因子 $\omega = 1.03,\quad \omega_1 = 1$ 和 $\omega = 1.1$，用 SOR 法解方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

要求 $\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \le 10^{-5}$ 时迭代终止.

7．求证：矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

当 $-0.5 < a < 1$ 时正定，当 $-0.5 < a < 0$ 时 Jacobi 迭代法解线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 收敛.

8．设 $\boldsymbol{A} \in R^{n \times n}$ 有 n 个正的实的特征值 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$,求证: 当 $0 < \alpha < \dfrac{2}{\lambda_1}$ 时，迭代公式

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)} = \boldsymbol{X}^{(k)} + \alpha(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{AX}^{(k)})$$

收敛.

9．证明：若 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优的，则 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法均收敛.

10．用下面的例子说明 Gauss-seidel 迭代法的收敛、发散性质可能因方程组中方程或未知元编号的改变而改变.

（1）$\begin{cases}3x+y+2z=6\\4y+z=8\\x+2z=2\end{cases}$；（2）$\begin{cases}2z+y+3x=6\\z+4y=8\\2z+x=2\end{cases}$

四、复习题答案

1．精确解为 $(1,1,1)^T$

2．精确解为 $(-1,-1,-1,-1)^T$

6．精确解为 $(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})^T$