第二章 插值与逼近

为了计算函数值或分析函数的性态，必须首先由实验或观测数据找出函数关系的一个近似表达式.插值与逼近就是用简单函数为各种离散数据建立连续的数学模型，使其既能达到精度要求，又使计算量尽可能小.插值与逼近理论是数值计算的最基本内容.

一、内容要点

（一）插值方法

1．代数插值的概念

设函数 $y=f(x)$在区间$[a, b]$上有定义，且已知它在$[a, b]$上 $n+1$ 个互异点$\{x_i\}_{i=0}^n$上的函数值为$\{y_i\}_{i=0}^n$，求一个次数$\le n$的多项式 $P_n(x)$，满足条件

$$P_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,n) \tag{2-1}$$

称这类问题为 n 次代数插值问题，称 $P_n(x)$为函数 $f(x)$的 n 次代数插值多项式，称点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值节点，称（1）为插值条件.

定理 2.1　满足条件（2-1）的 n 次代数插值多项式 $P_n(x)$是存在且唯一的.

Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$和 Newton 插值多项式 $N_n(x)$是 n 次代数插值问题的解 $P_n(x)$的两种表示形式.

2．Lagrange 插值多项式

$$\boxed{L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)}$$

其中 $\boxed{l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}}$ 称为以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值节点的 n 次 Lagrange 插值基函数.

定理 2.2　设 $L_n(x)$是过点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的 n 次 Lagrange 插值多项式，若 $f(x)$在$[a, b]$上存在 $n+1$ 阶导数，则对任意给定的 $x\in[a,b]$，总存在一点$\xi\in(a,b)$（依赖于 x）使

$$\boxed{R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}$$

3．Newton 插值多项式

（1）差商的概念

称 $f[x_i,x_j]=\dfrac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_i，x_j 处的一阶差商；

称 $f[x_i,x_j,x_k]=\dfrac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_i-x_k}$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_i，x_j，x_k 处的二阶差商；

一般地，称 $f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\dfrac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]-f[x_1,x_2,\cdots,x_k]}{x_0-x_k}$ 为函数 $f(x)$ 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 处的 k 阶差商.

规定 $f[x_i]=f(x_i)$ 为 $f(x)$ 在点 x_i 处的零阶差商.

（2）差商的性质

1° n 次多项式 $P(x)$ 的 k 阶差商 $P[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x]$，当 $k\le n$ 时是一个 $n-k$ 次多项式；而当 $k>n$ 时恒等于 0；

2° 差商可表示为函数值的线性组合：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{w'_{n+1}(x_i)}f(x_i)\qquad 其中\ w_{n+1}(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

3° 差商关于所含节点是对称的；

4° 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 阶导数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

（3）差商表

（4）Newton 插值多项式

$$N_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

其余项为

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

（5）差分与等距节点插值公式

1° 差分记号

设与等距节点 $x_i=x_0+ih\ \ (i=0,1,2,\cdots,n)$ 相应的函数值为 $f_i=f(x_i)$，称 $\Delta f_i=f_{i+1}-f_i$ 为 $f(x)$ 在点 x_i 处的一阶向前差分；

称 $\Delta^2 f_i=\Delta(\Delta f_i)=\Delta f_{i+1}-\Delta f_i$ 为函数在点 x_i 处的二阶向前差分；

一般地，称 $\Delta^m f_i=\Delta(\Delta^{m-1}f_i)=\Delta^{m-1}f_{i+1}-\Delta^{m-1}f_i\quad(m=2,3,\cdots)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_i 处的 m 阶向前差分.

规定 $\Delta^0 f_i=f_i$ 为 $f(x)$ 在点 x_i 处的零阶差分.

称 $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ 为 $f(x)$在点 x_i 处的一阶向后差分；

称 $\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$ 为 $f(x)$在点 x_i 处的二阶向后差分；

称 $\nabla^m f_i = \nabla(\nabla^{m-1} f_i) = \nabla^{m-1} f_i - \nabla^{m-1} f_{i-1} \quad (m = 2, 3, \cdots)$ 为 $f(x)$在点 x_i 处的 m 阶向后差分.

2° 等距节点的插值公式

Newton 向前插值公式

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th) = f_0 + \frac{t}{1!}\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

其余项为

$$R_n(x) = R_n(x_0 + th) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}t(t-1)\cdots(t-n)\cdot f^{(n+1)}(\xi)$$

Newton 向后插值公式

$$N_n(x) = N_n(x_n + th) = f_n + \frac{t}{1!}\nabla f_n + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \cdots + \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

余项为

$$R_n(x) = R_n(x_n + th) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}t(t+1)\cdots(t+n) f^{(n+1)}(\xi)$$

4．分段线性插值

设在区间[a, b]上给定 n+1 个插值节点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

和相应的函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$，求作一个插值函数 $\varphi(x)$，具有性质

1° $\varphi(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$；

2° $\varphi(x)$ 在每个小区间[x_i, x_{i+1}]（i=0, 1, …, n−1）上是线性函数.

5．Hermite 插值

设已知函数 $f(x)$在插值区间[a, b]上 n+1 个互异的节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值 $y_i = f(x_i)$及一阶导数值 $m_i = f'(x_i) \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$，构造一个插值函数 $H_{2n+1}(x)$，使满足条件

1° $H_{2n+1}(x)$是次数 $\le 2n+1$ 的多项式

2° $H(x_i) = y_i, \quad H'(x_i) = m_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$ （2-2）

称这类插值问题为 Hermite 插值问题.

定理 2.3 满足条件（2-2）的 Hermite 插值问题的解 H_{2n+1} 是存在且唯一的，其表达式为

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}[1-2l_i'(x_i)(x-x_i)]l_i^2(x)y_i+\sum_{i=0}^{n}(x-x_i)l_i^2(x)m_i$$

定理 2.4 若 $f(x)$在$[a, b]$上有 $2n+2$ 阶导数，则对任意 $x\in[a,b]$，总存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$$

6．分段三次 Hermite 插值

设在区间$[a, b]$上给定 $n+1$ 个插值节点

$$a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_n=b$$

和相应的函数值 $y_i=f(x_i)$ 及导数值 $m_i=f'(x_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$，构造一个插值函数 $H(x)$，满足条件

1° $H(x_i)=y_i$, $H'(x_i)=m_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$；

2° 在每个子区间$[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$上是三次多项式.

7．三次样条插值

（1）三次样条插值函数的概念

设在区间$[a, b]$上取 $n+1$ 个节点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

给定这些点上的函数值 $y_i=f(x_i)$.

若函数 $S(x)$满足条件：

1° $S(x_i)=y_i$ $i=0,1,2,\cdots,n$；

2° 在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$上是一个三次多项式；

3° $S(x)\in C^2[a,b]$.

则称 $S(x)$为三次样条插值函数.

（2）常见的边界条件

1° $S'(a)$, $S'(b)$ 取给定值；

2° $S''(a)$, $S''(b)$ 取给定值；

3° $S^{(p)}(a+0)=S^{(p)}(b-0)$ $p=0,1,2$.

（二）函数的平方逼近

1．预备知识

（1）内积

设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，定义

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

称为函数 $f(x)$与 $g(x)$在$[a, b]$上带权 $\rho(x)$ 的内积.

（2）正交

设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，且满足

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$$

则称 $f(x)$与 $g(x)$在区间$[a, b]$上带权 $\rho(x)$ 正交.

（3）正交函数系

设$\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$是区间$[a, b]$上的连续函数序列，若它们满足

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\begin{cases}0 & j\neq k\\ r_k>0 & j=k\end{cases}$$

则称函数序列$\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$是区间$[a, b]$上带权 $\rho(x)$ 的正交函数系.

特别当$(\varphi_j,\varphi_k)=\delta_{ik} \quad =\begin{cases}0 & j\neq k\\ 1 & j=k\end{cases}$时，称$\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$为标准正交函数系.

（4）Gram-Schmidt 正交化方法

（5）函数的 2-范数

设 $f(x)\in C[a,b]$，称

$$\|f\|_2=(f,f)^{1/2}=(\int_a^b \rho(x)f^2(x)\mathrm{d}x)^{1/2}$$

为 f 的加权 2-范数.

2．函数的最佳平方逼近

设 $f(x)\in C[a,b]$, $\varphi_i(x)\ (i=0,1,\cdots,n)$ 是 $C[a,\ b]$中的一组线性无关的函数. $\Phi=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$。若存在$S^*(x)\in\Phi$，使得

$$\|f-S^*\|_2^2=\inf_{S\in\Phi}\|f-S\|_2^2=\inf_{S\in\Phi}\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2\mathrm{d}x$$

则称$S^*(x)$是 $f(x)$在$\Phi\subset C[a,b]$中最佳平方逼近函数。

定理 2.5 设 $f(x)\in C[a,b]$，$\Phi=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}\subset C[a,b]$，则 $f(x)$在Φ中最佳平方逼近函数是存在唯一的.

设最佳平方逼近函数$S^*(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i^*\varphi_i(x)$，则$S^*(x)$的系数$a_i^*(i=0,1,\cdots,n)$满足正则方程组

$$\sum_{i=0}^{n}(\varphi_k,\varphi_i)a_i^*=(\varphi_k,f)\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$$

逼近误差 $\delta=f(x)-S^*(x)$ 满足关系式

$$\|\delta\|_2^2=(f-S^*,f-S^*)=\|f\|_2^2-\sum_{i=0}^{n}a_i^*(\varphi_i,f)$$

当 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是带权 $\rho(x)$ 正交时，直接有

$$a_i^*=\frac{(\varphi_i,f)}{(\varphi_i,\varphi_i)}\quad(i=0,1,2,\cdots,n)$$

当 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$ 是正交系时，有对应于 $f(x)$的关于正交系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 的广义 Fourier 级数.

$$f(x)\sim\sum_{i=0}^{\infty}a_i^*\varphi_i(x)$$

其中 Fourier 系数 $a_i^*=\dfrac{(\varphi_i,f)}{(\varphi_i,\varphi_i)}\quad(i=0,1,2,\cdots)$

3．正交多项式

（1）正交多项式及其性质

对于多项式序列 $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$，若它们满足

$$(g_j,g_k)=\int_a^b\rho(x)g_j(x)g_k(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & j\neq k\\ r_k>0 & j=k\end{cases}$$

则称多项式序列 $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是在[a, b]上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式系，并称 $g_n(x)$为[a, b]上带权 $\rho(x)$ 的 n 次正交多项式，若 $r_j=1\,(j=0,1,\cdots)$，则称 $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 为标准正交的.

正交多项式具有如下性质：

1° 线性无关性；

2° 设 $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是[a, b]上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式系，则 $g_n(x)$在（a, b）内有 n 个实的、互异的零点；

3° 设 $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是[a, b]上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式系，$g_n(x)$的首项系数为 A_n，次项系数为 B_n，且 $r_n=(g_n,g_n)=\int_a^b\rho(x)g_n^2(x)\mathrm{d}x$，则正交多项系$\{g_n\}$中任何相继的三个 $g_{n-1}(x),g_n(x),g_{n+1}(x)$ 都有如下的三项递推关系

$$g_{n+1}(x)=(a_nx+b_n)g_n(x)-c_ng_{n-1}(x)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

其中 a_n, b_n, c_n 都是与 x 无关的常数，且

$$a_n=\frac{A_{n+1}}{A_n},\quad b_n=\frac{A_{n+1}}{A_n}\left(\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}-\frac{B_n}{A_n}\right),$$

$$c_n=\frac{a_n r_n}{a_{n-1}r_{n-1}}=\frac{A_{n+1}A_{n-1}r_n}{A_n^2 r_{n-1}}$$

常用的正交多项多有 Chebyshev 多项式，Legendre 多项式，Laguerre 多项式和 Hermite 多项式，将它们归纳为下表

正交多项式 $g_n(x)$的名称	区间	权函数	记号与表示式	首次系数 A_n	次项系数 B_n	$r_n=(g_n,g_n)$	三项递推公式
Chebyshev (切比雪夫)正交多项式	$[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$	2^{n-1}	0	π 或 $\frac{\pi}{2}$	$T_{n+1}=2xT_n-T_{n-1}$
Legendre (勒让德)正交多项式	$[-1,1]$	1	$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$	$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$	0	$\frac{2}{2n+1}$	$p_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xp_n(x)-\frac{n}{n+1}p_{n-1}(x)$
Laguerre (拉盖尔)正交多项式	$[0,\infty]$	e^{-x}	$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}\cdot n^2$	$(n!)^2$	$L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$
Hermite (埃尔米特)正交多项式	$(-\infty,+\infty)$	e^{-x^2}	$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$	2^n	0	$2^n(n!)\sqrt{\pi}$	$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$

定理 2.6 在所有首项系数为 1 的 n 次多项式中，首项系数为 1 的 n 次 Legendre 多项式 $\tilde{P}_n(x)$ 在$[-1, 1]$上与零的平方逼近误差最小，即

$$\|Q_n\|_2^2=\int_{-1}^{1}Q_n^2(x)\mathrm{d}x\ge\|\tilde{P}_n\|_2^2$$

（三）曲线拟合的最小二乘法

1．直线拟合

对于给定的一组数据 $(x_i,y_i)\quad(i=1,2,\cdots,N)$，求作一个一次式 $y=a+bx$，使 $Q=\sum_{i=1}^{N}[y_i-(a+bx_i)]^2$ 最小.

对于直线拟合，a、b 应满足的条件是

$$\begin{cases}aN+b\Sigma x_i=\Sigma y_i\\ a\Sigma x_i+b\Sigma x_i^2=\Sigma x_i y_i\end{cases}$$

其中 Σ 表示下标 i 从 1 到 N 求和。

2．多项式拟合

对于给定的一组数据 $(x_i, y_i)\quad (i=1,2,\cdots,N)$，求作 m 次式（$m \ll N$）$y=\sum_{j=0}^{m} a_j x^j$

使

$$Q=\sum_{i=1}^{N}(y_i-\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j)^2$$

最小.

对于多项拟合，$a_k\quad (k=0,1,\cdots,m)$ 应满足

$$\begin{cases} a_0 N + a_1 \Sigma x_i + \cdots + a_m \Sigma x_i^m = \Sigma y_i \\ a_0 \Sigma x_i + a_1 \Sigma x_i^2 + \cdots + a_m \Sigma x_i^{m+1} = \Sigma x_i y_i \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_0 \Sigma x_i^m + a_1 \Sigma x_i^{m+1} + \cdots + a_m \Sigma x_i^{2m} = \Sigma x_i^m y_i \end{cases}$$

式中 Σ 表示下标 i 从 1 到 N 求和.

二、题型分析与解题方法

例 1　已知 $\sqrt{100}=10,\quad \sqrt{121}=11,\quad \sqrt{144}=12$，试利用插值法近似计算 $\sqrt{115}$.

分析　由题中已知条件本题可利用三点二次 Lagrange 插值，也可利用三点二次 Newton 插值，它们所得结果相同.

解　利用三点二次 Lagrange 插值.

记 $f(x)=\sqrt{x}, x_0=100, x_1=121, x_2=144, y_0=10, y_1=11,\quad y_2=12$，则 $f(x)$ 的二次 Lagrange 插值多项式为

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=10\times\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}+11\times\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}+12\times\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}$$

$$f(115)=\sqrt{155}\approx L_2(115)$$

$$=10\times\frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)}+11\times\frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)}$$

$$+12\times\frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)}\approx 10.722\,756$$

因为　$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$，$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$.

$$R_2(x)=f(x)-L_2(x)=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\quad \xi\in(100,144)$$

所以

$$|R_2(x)|=|f(115)-L_2(115)|=\left|\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}\xi^{-\frac{5}{2}}\times(115-100)(115-121)(115-144)\right|$$

$$\leq\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}\times100^{-\frac{5}{2}}\times15\times6\times29=0.163125\times10^{-2}$$

例 2 已知 $y=f(x)$的函数表

x_i	0	1	2
y_i	8	−7.5	−18

求函数 $f(x)$在[0, 2]之间的零点近似值.

分析 一般情况下，先求出 $f(x)$在[0, 2]上的插值函数 $P(x)$，然后求 $P(x)$的零点，把此零点作为 $f(x)$的近似零点.特别地，若 $f(x)$的反函数存在，记为 $x=\varphi(y)$，那么，求 $f(x)$的零点问题就变成求函数值 $\varphi(0)$ 的问题了.利用插值法构造出 $\varphi(y)$ 的插值函数，从而求出 $f(x)$的零点 $\varphi(0)$ 的近似值，这类问题称为反插值问题.利用反插值时，必须注意反插值条件，即函数 $y=f(x)$必须有反函数，也即要求 $y=f(x)$单调.本题 y_i 是严格单调下降排列，可利用反插值法.

解 将原函数表变成反函数表

y_i	8	−7.5	−18
x_i	0	1	2

利用三点二次 Lagrange 插值，由上反函数表构造 $y=f(x)$的反函数 $x=\varphi(y)$ 的二次 Lagrange 插值多项式.

令 $y_0=8$，$y_1=-7.5$，$y_2=-18$，$x_0=0$，$x_1=1$，$x_2=2$，则 $x=\varphi(y)$ 的二次 Lagrange 插值多项式为

$$L_2(y)=x_0\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}+x_1\frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)}+x_2\frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)}$$

函数 $y=f(x)$的近似零点为

$$L_2(0)=0\times\frac{(0+7.5)(0+18)}{(8+7.5)(8+18)}+1\times\frac{(0-8)(0+18)}{(-7.5-8)(-7.5+18)}=2\times\frac{(0-8)(0+7.5)}{(-18-8)(-18+7.5)}$$

$$\approx 0.445\,232$$

例 3 设 $f(x)=x^4$，试用 Lagrange 插值余项定理写出以−1，0，1，2 为插值节点的三次插值多项式.

解 设 $f(x)$以−1，0，1，2 为插值节点的三次 Lagrange 插值多项式为 $L_3(x)$，由 Lagrange 插值余项定理有

$$R_3(x)=f(x)-L_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)$$
$$=(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)$$

因而

$$L_3(x)=f(x)-(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)$$
$$=x^4-x(x+1)(x-1)(x-2)=2x^3+x^2-2x$$

例 4 设 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 是以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，试证：

（1）$\sum\limits_{k=0}^{n}l_k(x)=1$；

（2）$\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^j l_k(x)=x^j \quad (j=0,1,\cdots,n)$；

（3）$\sum\limits_{k=0}^{n}(x_k-x)^j l_k(x)=0 \quad (j=0,1,\cdots,n)$；

（4）$\sum\limits_{k=0}^{n}l_k(0)x_k^j=\begin{cases}1, & j=0\\ 0, & j=1,2,\cdots,n\\ (-1)^n x_0x_1\cdots x_n, & j=n+1\end{cases}$

分析 本题是关于 Lagrange 插值基函数 $l_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n)$的性质问题，观察要证明的结论，应考虑对常数 1 和 x^j 进行插值入手，通过插值余项为 0 得到结论.

证 （1）设 $f(x)=1$，则 $f(x)$以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点的 n 次 Lagrange 插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)l_k(x)=\sum_{k=0}^{n}l_k(x)$$

由插值余项定理知

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)=0$$

从而

$$L_n(x)=f(x)$$

即

$$\sum_{k=0}^{n}l_k(x)=1$$

（2）设 $f(x)=x^j \quad (j=0,1,\cdots,n)$，则 $f(x)$ 以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点的 n 次 Lagrange 插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)=\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)$$

由插值余项定理

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)}\omega_{n+1}(x)=0$$

从而

$$L_n(x)=f(x)$$

即

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)=x^j \quad (j=0,1,\cdots,n)$$

（3）将 $(x_k-x)^j$ 按二项式展开，得

$$(x_k-x)^j=\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i x_k^{j-i}x^i$$

代入左端，得

$$\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^j l_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i x_k^{j-i}x^i\right]l_k(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i x^i\sum_{k=0}^{n}x_k^{j-i}l_k(x)$$

利用（2）的结论，有

$$\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^j l_k(x)=\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i x^i x^{j-i}=(x-x)^j=0$$

（4）当 j=0 时，由（1）的结论知

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(0)x_k^j=\sum_{k=0}^{n} l_k(0)=1$$

当 j=1, 2, …, n 时，由（2）的结论知

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(0)x_k^j=x^j\Big|_{x=0}=0$$

当 j=n+1 时，令 $f(x)=x^{n+1}$，有 $f^{(n+1)}(x)=(n+1)!$

$f(x)$以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点的 n 次 Lagrange 插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1}l_k(x)$$

由插值余项定理知

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)=\omega_{n+1}(x)$$

从而

$$L_n(x)=f(x)-\omega_{n+1}(x)$$

即

$$\sum_{k=0}^{n}x_k^{n+1}l_k(x)=x^{n+1}-(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

令 x=0，有

$$\sum_{k=0}^{n}x_k^{n+1}l_k(0)=(-1)^n x_0x_1\cdots x_n$$

例 5 设 $f(x)\in C^2[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0$，求证

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

分析 本章内容是代数插值，而题设 $f(a)=f(b)=0$，易知若用线性插值，线性插值函数只能为 0，且误差为 $\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-a)(x-b)$，这样利用余项估计式可直接把 $f(x)$与 $f''(x)$ 联系起来.

证 以 a，b 为插值节点进行线性插值，其线性插值多项式为

$$L_1(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)=0$$

线性插值余项为

$$f(x)-L_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)\quad \xi\in(a,b)$$

从而

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)$$

由于 $|(x-a)(x-b)|$ 在 $x=\frac{1}{2}(a+b)$ 处取最大值，故

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\cdot\max_{a\le x\le b}|(x-a)(x-b)|=\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

例 6 证明：由下列插值条件

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	−1	−0.75	0	1.25	3	5.25

所确定的 Lagrange 插值多项式是一个二次多项式.该例说明了什么问题？

分析 本题是关于 Lagrange 插值问题，由已知数据表构造 Lagrange 插值多项式便可得出结论.

解　令 $x_0=0 \quad x_1=0.5 \quad x_2=1 \quad x_3=1.5 \quad x_4=2 \quad x_5=2.5$

$y_0=-1 \quad y_1=-0.75 \quad y_2=0 \quad y_3=1.25 \quad y_4=3 \quad y_5=5.25$

以 x_0，x_2，x_4 为插值节点作 $f(x)$的二次插值多项式 $L_2(x)$，则

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_2)(x-x_4)}{(x_0-x_2)(x_0-x_4)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_4)}+y_4\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_4-x_0)(x_4-x_2)}$$
$$=(-1)\times\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}+0\times\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}+3\times\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$
$$=x^2-1$$

易验证 $L_2(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,5)$.因而满足插值条件

$$L(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,5) \tag{1}$$

的 Lagrange 插值多项式为 $P(x)=x^2-1$.

由插值多项式的存在唯一性定理知满足条件（1）的 5 次插值多项式是存在且唯一的，但该 5 次多项式并不一定是真正的 5 次多项式，而是次数≤ 5的多项式.

例 7　对于任意实数 $\lambda\ne 0$ 以及任意正整数 r, s，多项式

$$q(x)=\lambda(x-x_0)^r(x-x_1)^s+(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})f(x_1)+(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})f(x_0)$$

是 $r+s$ 次多项式，且满足 $q(x_0)=f(x_0), q(x_1)=f(x_1)$.本题说明了什么问题？

解　本题说明由两个插值条件 $q(x_0)=f(x_0)$，$q(x_1)=f(x_1)$ 构造大于 1 次的插值多项式，答案是不唯一的，类似地，由 n+1 插值条件构造大于 n 次的插值多项式，答案也是不唯一的.

例 8　估计用 $\sin 30°=0.5, \quad \sin 45°=0.7071, \quad \sin 60°=0.8660$，作二次插值，求 $\sin 40°$ 时的误差.

分析　本题显然是利用 Lagrange 插值余项定理

解　设 $f(x)=\sin x, \quad f'(x)=\cos x, \quad f''(x)=-\sin x, \quad f'''(x)=-\cos x$

令　$x_0=30°=0.5236, \quad x_1=45°=0.7854, \quad x_2=60°=1.0472, \quad x=40°=0.6981$

其插值余项为

$$R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

从而

$$|R_2(40°)|=R_2(0.6981)=\left|\frac{-\cos(\xi)}{3!}(0.6981-0.5236)(0.6981-0.7854)(0.6981-1.0472)\right|$$
$$\le\frac{1}{6}\times 0.1745\times 0.0873\times 0.3491\approx 0.000886$$

例 9　已知 x=0, 2, 3, 5 对应的函数值为 y=1, 3, 2, 5，作三次 Newton 插值多项式.

如再增加 x=6 时的函数数值为 6，作四次 Newton 插值多项式.

分析 本题是一道常规计算题.

解 首先构造差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	$\underline{1}$			
2	3	$\underline{1}$		
3	2	−1	$\underline{-2/3}$	
5	5	3/2	5/6	$\underline{3/10}$

三次 Newton 插值多项式为

$$N_3(x)=1+x-\frac{2}{3}x(x-2)+\frac{3}{10}x(x-2)(x-3)$$

增加 x_4=6，$f(x_4)$=6 作差商表

x_I	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	$\underline{1}$				
2	3	$\underline{1}$			
3	2	−1	$\underline{-2/3}$		
5	5	3/2	5/6	$\underline{3/10}$	
6	6	1	−1/6	−1/4	$\underline{-11/120}$

四次 Newton 插值多项为

$$N_4(x)=1+x-\frac{2}{3}x(x-2)+\frac{3}{10}x(x-2)(x-3)-\frac{11}{120}x(x-2)(x-3)(x-5)$$

例 10 已知 $f(x)=x^7+x^4+3x+1$，求 $f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$ 及 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$.

分析 本题 $f(x)$是一个多项式，故应利用差商的性质.

解 由差商与导数之间的关系 $f[x_0,\cdots,x_n]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)$ 及 $f^{(7)}(x)=7!$, $f^{(8)}(x)=0$ 知

$$f[2^\circ,2',\cdots,2^7]=\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\frac{7!}{7!}=1$$

$$f[2^\circ,2',\cdots,2^8]=\frac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=\frac{0}{8!}=0$$

例 11 若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 有 n 个相异的实根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0 & 0\le k\le n-2\\ a_n^{(-1)} & k=n-1\end{cases}$$

分析　$f(x)$有 n 个相异实根，故 $f(x)$可表示成$a_n\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)$，考察本题要证明的结论和 $f(x)$的特点，应考虑利用差商可表示为函数值的线性组合这一性质.

证　由于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $f(x)$的 n 个互异的零点，所以

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

$$f'(x_j)=a_n\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_n\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)}=\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)} \tag{1}$$

记　$g_k(x)=x^k$，则

$$g_k^{(n-1)}(x)=\begin{cases}0 & 0\le k\le n-2\\ (n-1)! & k=n-1\end{cases} \tag{2}$$

由（1）、（2）得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{g_k(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}(x_j-x_i)}=\frac{1}{a_n}g_k[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\frac{1}{a_n}\frac{g_k^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}=\begin{cases}0 & 0\le k\le n-2\\ \dfrac{1}{a_n} & k=n-1\end{cases}$$

例 12　设 $f(x)=\dfrac{1}{a-x}$，且 $a,x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 互不相同，证明

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{1}{(a-x_0)(a-x_1)\cdots(a-x_k)}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

并写出 $f(x)$的 n 次 Newton 插值多项式.

分析　利用差商的定义可证得.

证　用数学归纳法证明

当 k=1 时

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{1}{x_0-x_1}\left[\frac{1}{a-x_0}-\frac{1}{a-x_1}\right]=\frac{1}{(a-x_0)(a-x_1)}$$

假设当 k=m 时，结论成立，即有

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_m]=\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{m}(a-x_i)},\quad f[x_1,x_2,\cdots,x_{m+1}]=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{m+1}(a-x_i)}$$

那么

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_m,x_{m+1}]=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_m]-f[x_1,x_2,\cdots,x_{m+1}]}{x_0-x_{m+1}}$$

$$=\frac{1}{x_0-x_{m+1}}\left[\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{m}(a-x_i)}-\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{m+1}(a-x_i)}\right]$$

$$=\frac{1}{x_0-x_{m+1}}\frac{(a-x_{m+1})-(a-x_0)}{\prod\limits_{i=0}^{m+1}(a-x_i)}=\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{m+1}(a-x_i)}$$

即当 $k=m+1$ 时，结论成立.

由数学归纳法知对任意 k，结论是成立的.

$f(x)$以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为插值节点的 n 次 Newton 插值多项式为

$$N_n(x)=\frac{1}{a-x_0}+\frac{(x-x_0)}{(a-x_0)(a-x_1)}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(a-x_0)(a-x_1)\cdots(a-x_n)}$$

例 13 设 $f(x)\in C^1[a,b],\quad x_0\in(a,b)$ 定义

$$f[x_0,x_0]=\lim_{x\to x_0}f[x,x_0]$$

证明： $f[x_0,x_0]=f'(x_0)$.

分析 本题应利用差商的概念和微分中值定理将差商与导数联系起来.

证 由微分中值定理有

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0+\theta(x-x_0)),\quad 0<\theta<1$$

所以

$$f[x_0,x_0]=\lim_{x\to x_0}f[x,x_0]=\lim_{x\to x_0}f'(x_0+\theta(x-x_0))=f'(x_0)$$

例 14 设 $f(x)=a_nx^n+a_nx^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，且 $a_n\neq 0$，试证

$$\Delta^n f(x)=n!a_nh^n$$

其中 h 为等距节点步长.

分析 由于 $f(x)$是多项式，因此应考虑用差商的性质和差商与差分的联系来证明.

证 记

$$x_i=x+ih\quad(i=0,1,2,\cdots,n)$$

$$\frac{\Delta^n f(x)}{n!h^n}=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}=\frac{n!a_n}{n!}=a_n$$

所以 $$\Delta^n f(x)=n!a_nh^n$$

例 15　已知函数 y=f(x)的函数表

X	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1.00	1.32	1.68	2.08	2.52	3.00

试列出相应的向前差分表，并写出 Newton 向前插值公式.

分析　这是常规计算题，按照公式计算即可.

解　构造向前差分表

x_i	$f(x_i)$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0.0	<u>1.00</u>	<u>0.32</u>	<u>0.04</u>	<u>0.00</u>
0.1	1.32	0.36	0.04	0.00
0.2	1.68	0.40	0.04	0.00
0.3	2.08	0.44	0.04	
0.4	2.52	0.48		
0.5	3.00			

$f(x)$的 Newton 向前插值公式为

$$N_5(x)=N_5(0.0+0.1t)=f_0+\frac{t}{1!}\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta f_0^2=0.02t^2+0.30t+1.00\quad t\in[0,1]$$

例 16　给出 $f(x)=\ln x$ 的数据表

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$l_n(x)$	−0.916 29	−0.693 147	−0.510 826	−0.356 675	−0.223 144	−0.105 361

（1）用线性插值及二次插值计算 ln0.54 的近似值.

（2）用 Newton 向后插值公式求 ln0.78 的近似值，并估计误差.

分析　本题属于常规计算题，按照公式计算即可.

解　（1）线性插值，取 x_0=0.5，x_1=0.6，则

$$\ln 0.54\approx(-0.693147)\times\frac{0.54-0.6}{0.5-0.6}+(-0.510\,826)\times\frac{0.54-0.5}{0.6-0.5}=-0.620\,219$$

二次插值，取 x_0=0.5，x_1=0.6，x_2=0.7 则

$$\ln 0.54\approx(-0.693147)\frac{(0.54-0.6)(0.54-0.7)}{(0.5-0.6)(0.5-0.7)}+(-0.510\,826)\times\frac{(0.54-0.5)(0.54-0.7)}{(0.6-0.5)(0.6-0.7)}$$

$$+(-0.356\,675)\times\frac{(0.54-0.5)(0.54-0.6)}{(0.7-0.5)(0.7-0.6)}=-0.616\,838\,2$$

也可取 $x_0=0.4$，$x_1=0.5$，$x_2=0.6$ 进行二次插值得

$$\ln 0.54 \approx -0.615\,319\,8$$

记 $x_0=0.4$，$x_1=0.5$，$x_2=0.6$，$x_3=0.7$，$x_4=0.8$，$x_5=0.9$

（2）构造向后差分表

x_i	$f(x_i)$	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^4 f_i$	$\nabla^5 f_i$
0.4	−0.916 291					
0.5	−0.693 147	0.223 144				
0.6	−0.510 826	0.182 321	−0.040 823			
0.7	−0.356 675	0.154 151	−0.028 170	0.012 653		
0.8	−0.223 144	0.133 531	−0.020 620	0.007 550	−0.005 103	
0.9	−0.105 361	0.117 783	−0.015 748	0.004 872	−0.002 678	0.002 425

由 Newton 向后插值公式

$$N_n(x)=N_n(x_n+th)=f_n+t\nabla f_n+\frac{1}{2!}t(t+1)\nabla^2 f_n+\cdots+\frac{1}{n!}t(t+1)\cdots(t+n-1)\nabla^n f_n$$

由于 $x=x_n+th$，当 $x=0.78$，$n=4$ 时，$t=(0.78-0.8)/0.1=-0.2$，故

$$\begin{aligned}\ln 0.78 \approx N_4(0.78) &= -0.223\,144+0.133\,531\times(-0.2)+\frac{1}{2!}(-0.2)(-0.2+1)(-0.020\,620)\\&+\frac{1}{3!}(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2)(0.007\,550)\\&+\frac{1}{4!}(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2)(-0.2+3)(-0.005\,103)\\&\approx -0.248\,453\end{aligned}$$

由插值余项

$$R_4(x)=f(x)-N_4(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}t(t+1)\cdots(t+4)h^5$$

知

$$\begin{aligned}|R_4(0.78)| &\le \frac{h^5}{5!}|t(t+1)\cdots(t+4)|\max_{x\in[x_0,x_4]}\left|f^{(5)}(x)\right|\\&\le \frac{0.1^5}{5!}\times|(-0.2)(-0.2+1)(-0.2+2)(-0.2+3)(-0.2+4)|\times\frac{4!}{0.4^5}\\&=5.985\times 10^{-4}\end{aligned}$$

例 17　假设对函数 $f(x)$在步长为 h 的等距节点上造函数表，且$|f'(x)|\le M$.证明

在表中任意相邻两点间做线性插值时误差不超过$\frac{1}{8}Mh^2$.若取 $f(x)$=sin$x$，问 h 定取多大才能保证线性插值的误差不大于$\frac{1}{2}\times10^{-6}$.

分析　这是一个分段线性插值问题，对分段线性插值余项的估计式进行分析，便可推得结论和在精度要求内 h 的取值范围.

证　设任意两相邻节点取为 x_i，x_{i+1}，则其线性插值的误差为

$$R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\quad \xi\in(x_i,x_{i+1})$$

而　$x_{i+1}=x_i+h$，所以

$$\left|(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|\le\frac{h^2}{4}$$

又已知　$\left|f''(x)\right|\le M$，从而有

$$\left|R_1(x)\right|=\frac{1}{2}\left|f''(\xi)\right|\left|(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|\le\frac{1}{2}M\times\frac{1}{4}h^2=\frac{1}{8}Mh^2$$

若 $f(x)$=sin$x$，则$\left|f''(x)\right|\le1$，为了使$\left|R_1(x)\right|\le\frac{1}{8}h^2<\frac{1}{2}\times10^{-6}$，只要取 h=0.002 就能保证线性插值的误差不大于$\frac{1}{2}\times10^{-6}$.

例 18　设给出了 cos$x$ 的函数表$(0\le x\le2\pi)$，其步长为$h=1'=(1/60)^\circ=\pi/(180\times60)$.研究用进行线性插值求 cos 近似值的最大截断误差界.

分析　利用分段线性插值的余项估计式及 $f(x)$的特点便可推出.

解　设 $f(x)$=cos$x$ 是一个以 2π 为周期的函数，只要给出一个周期内的数据即可.

取等距节点 $x_i=ih\quad 0\le i\le2\times180\times60$

则任给 $x\in[0,2\pi]$，一定存在 i 使得 $x\in[x_i,x_{i+1}]$

以 x_i，x_{i+1} 为插值节点作 $f(x)$的一次插值多项式

$$L_1(x)=f(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

由于 $\max\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left|f''(x)\right|\le1$， $\max\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left|(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|\le\frac{1}{4}h^2$.

因而

$$\left|f(x)-L_1(x)\right|\le\frac{1}{2}\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left|f''(x)\right|\cdot\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left|(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|\le\frac{1}{8}h^2$$
$$=\frac{1}{8}\times\left(\frac{\pi}{180\times 60}\right)^2=0.105\,769\,93\times 10^{-7}$$

例 19 若 $f(x)\in C[a,b]$，把区间$[a,\ b]$分为 n 等份，记 $h=\dfrac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$ $(i=0,1,\ \cdots,n)$，设 $\varphi_n(x)$ 为以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为节点所作 $f(x)$的分段线性插值函数.证明：当 $n\to\infty$ 时，$\varphi_n(x)$ 在$[a,\ b]$上一致收敛到 $f(x)$.

分析 闭区间上的连续函数一定是一致连续的，利用这一点可证明题中结论.

证 $f(x)\in C[a,b]$，则 $f(x)$为$[a,\ b]$上的一致连续函数.任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $\left|\bar{x}-\tilde{x}\right|<\delta\quad(\bar{x}\in[a,b],\quad \tilde{x}\in[a,b])$ 就有

$$\left|f(\bar{x})-f(\tilde{x})\right|<\varepsilon$$

对上述 δ 必存在 N，当 $n\ge N$ 时，$h=\dfrac{b-a}{n}<\delta$，于是当 $n\ge N$ 时

$$\begin{aligned}\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-\varphi_n(x)\right|&=\max_{0\le i\le n-1}\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left|f(x)-\varphi_n(x)\right|\\&=\max_{0\le i\le n-1}\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left|f(x)-[f(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}]\right|\\&=\max_{0\le i\le n-1}\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\left|[f(x)-f(x_i)]\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+[f(x)-f(x_{i+1})]\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right|\\&\le\max_{0\le i\le n-1}\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\varepsilon\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+\varepsilon\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}=\varepsilon\end{aligned}$$

由定义知 $n\to\infty$，$\varphi_n(x)$ 在$[a,\ b]$上一致性收敛于 $f(x)$.

例 20 在 $-4\le x\le 4$ 上给出 $f(x)=e^x$ 的等距节点函数表，若用等距节点的二次插值求 e^x 的近似值，要使截断误差不超过 10^{-6}，问使用函数表的步长应取多长？

分析 本题是关于分段线性插值的余项问题，对分段线性插值的余项估计式进行分析便可确定满足一定精度要求的步长 h.

解 设插值节点为 x_{k-1},x_k,x_{k+1}，这里 $x_{k-1}=x_k-h,\quad x_{k+1}=x_k+h$

由误差公式

$$R_2(x)=\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi)(x-x_k+h)(x-x_k)(x-x_k-h)$$
$$=\frac{1}{3!}e^{\xi}(x-x_k+h)(x-x_k)(x-x_k-h)$$

令 $g(x)=(x-x_k+h)(x-x_k)(x-x_k-h)$，由 $g'(x)=0$，即 $3(x-x_k)^2-h^2=0$ 得 $g(x)$ 的驻点为 $\tilde{x}=x_k\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}h$.故

$$\max_{x\in[x_{k-1},x_{k+1}]}|g(x)|=\max\{|g(x_{k-1})|,|g(x_k)|,|g(x_{k+1})|,|g(\tilde{x})|\}=|g(\tilde{x})|=\frac{2}{9}\sqrt{3}h^3$$

所以

$$|R_2(x)|\le\frac{1}{3!}e^4\frac{2}{9}\sqrt{3}h^3$$

令 $\dfrac{1}{3!}e^4\dfrac{2}{9}\sqrt{3}h^3<10^{-6}$，解得 $h\le 6.585\times10^{-3}$

例 21 已知 $\sin 30°=0.5$， $\sin 45°=0.7071$， $\sin'(30°)=\cos 30°=0.8660$， $\sin'(45°)=\cos 45°=0.7071$，求 $\sin 40°$.

分析 本题不仅给出两点上的函数值，而且还给出了导数值，因此应利用两点三次 Hermite 插值.

解 利用两点三次 Hermte 插值

$$\begin{aligned}\sin 40°\approx H_3(40°)=H_3\left(\frac{2}{9}\pi\right)&=\left(1+2\times\frac{2\pi/9-\pi/6}{\pi/4-\pi/6}\right)\left(\frac{2\pi/9-\pi/4}{\pi/6-\pi/4}\right)^2\times0.5\\&+\left(1+2\frac{2\pi/9-\pi/4}{\pi/6-\pi/4}\right)\left(\frac{2\pi/9-\pi/6}{\pi/4-\pi/6}\right)^2\times0.7071\\&+\left(\frac{2\pi}{9}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{2\pi/9-\pi/4}{\pi/6-\pi/4}\right)^2\times0.8660\\&+\left(\frac{2\pi}{9}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{2\pi/9-\pi/6}{\pi/4-\pi/6}\right)^2\times0.7071\\&=0.6428\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|R\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right|&=\left|\frac{\sin^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\frac{2\pi}{9}-\frac{\pi}{6}\right)^2\left(\frac{2\pi}{9}-\frac{\pi}{4}\right)^2\right|\\&\le\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2\left(-\frac{\pi}{36}\right)^2\le0.00001\end{aligned}$$

例 22 已知自然对数 ln$x$ 和它的导数 1/x 的数表.

x	0.40	0.50	0.70	0.80
Lnx	−0.916 291	−0.693 147	−0.356 675	−0.223 144
$\dfrac{1}{x}$	2.50	2.00	1.43	1.25

（1）利用 Lagrange 插值公式，求 ln0.60；

（2）利用 Hermite 插值公式，求 ln0.60.

分析 本题属常规计算题，按有关公式计算即可.

解 记 x_0=0.40，x_1=0.50，x_2=0.70，x_3=0.80.

首先列表计算 $l_i(0.60),\quad l_i'(x_i)\quad (i=0,1,2,3)$

i	$l_i(x)$	$l_i(0.60)$	$l_i'(x_i)$
0	$\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq 0}}^{3}\dfrac{x-x_j}{x_0-x_j}$	−0.166 667	$\sum\limits_{\substack{j=0\\j\neq 0}}^{3}\dfrac{1}{x_0-x_j}=-15.833\,333$
1	$\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq 1}}^{3}\dfrac{x-x_j}{x_1-x_j}$	0.666 667	$\sum\limits_{\substack{j=0\\j\neq 1}}^{3}\dfrac{1}{x_1-x_j}=1.666\,667$
2	$\sum\limits_{\substack{j=0\\j\neq 2}}^{3}\dfrac{x-x_j}{x_1-x_j}$	0.666 667	$\sum\limits_{\substack{j=0\\j\neq 2}}^{3}\dfrac{1}{x_2-x_j}=-1.666\,667$
3	$\sum\limits_{\substack{j=0\\j\neq 3}}^{3}\dfrac{x-x_j}{x_3-x_j}$	−0.166 667	$\sum\limits_{\substack{j=0\\j\neq 3}}^{3}\dfrac{1}{x_3-x_j}=15.833\,333$

（1）利用 Lagrange 插值公式，有

$$\begin{aligned}\ln 0.60 \approx L_3(0.60) &= \sum_{i=0}^{3} l_i(0.6)f(x_i) = (-0.166\,667)\times(-0.916\,291)\\ &\quad +0.666\,667\times(-0.693\,147)+0.666\,667\times(-0.356\,675)+(-0.166\,667)\times(-0.223\,144)\\ &=0.509\,976\end{aligned}$$

（2）利用 Hermite 插值公式，有

$$H_7(x)=\sum_{i=0}^{3}\{[1-2(x-x_i)l_i'(x_i)]l_i^2(x)f(x_i)+(x-x_i)l_i^2(x)f'(x_i)\}$$

从而 $\ln(0.60)\approx H_7(0.60)=-0.510\,889$

注：本题的真解 $\ln 0.60=-0.510\,825\,623$，可以看出 Hermite 插值所得结果要比 Lagrange 插值结果精确得多.

例 23 设已知 x_0，x_1，x_2 是$[a, b]$上三个互异的节点，函数 $f(x)$在$[a, b]$上具有连续的四阶导数，而 $H_3(x)$是满足下列条件的三次多项式

$$H(x_i)=f(x_i)\quad (i=0,1,2)$$
$$H'(x_1)=f'(x_1)$$

（1）写出 $H_3(x)$的表达式；

（2）证明：$f(x)-H_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)\quad \xi\in(a,b)$

分析　这是带导数的插值问题，但又不是 Hermite 插值问题.要求我们灵活运用插值方法，解决这类问题的方法较多，常用的有以下两种解法.

（1）**解法一**　用插值法加待定系数法来做.

设 $N_2(x)$为满足插值条件 $N_2(x_i)=f(x_i)\quad(i=0,1,2)$ 的二次式，由插值条件可设 $H_3(x)$的形式为

$$
\begin{aligned}
H_3(x)&=N_2(x)+A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
&=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]\\
&\quad+A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)
\end{aligned}\tag{1}
$$

其中 A 为待定系数.显然由（1）确定的 $H_3(x)$满足 $H_3(x_i)=f(x_i)\quad(i=0,1,2)$，待定系数 A 可由插值条件 $H_3'(x_1)=f'(x_1)$ 来确定，为此对（1）式两边求导数

$$
\begin{aligned}
H_3'(x)=&f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+(x-x_0)f[x_0,x_1,x_2]+\\
&A[(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_1)]
\end{aligned}
$$

令 $x=x_1$，并利用插值条件 $H_3'(x_1)=f'(x_1)$ 有

$$f'(x_1)=f[x_0,x_1]+(x_1-x_0)f[x_0,x_1,x_2]+A(x_1-x_0)(x_1-x_2)$$

于是

$$A=\frac{f'(x_1)-f[x_0,x_1]-(x_1-x_0)f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

从而

$$
\begin{aligned}
H_3(x)=&f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]\\
&+\frac{f'(x_1)-f[x_0,x_1]-(x_1-x_0)f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)
\end{aligned}
$$

解法二　用插值基函数来构造.

首先构造四个三次插值基函数 $h_0(x),h_1(x),h_2(x),\bar{h}_1(x)$ 使其满足条件

$$
\begin{aligned}
&h_0(x_0)=1,\quad h_0(x_1)=0,\quad h_0(x_2)=0,\quad h_0'(x_1)=0\\
&h_1(x_0)=0,\quad h_1(x_1)=1,\quad h_1(x_2)=0,\quad h_1'(x_1)=0\\
&h_2(x_0)=0,\quad h_2(x_1)=0,\quad h_2(x_2)=1,\quad h_2'(x_1)=0\\
&\bar{h}_1(x_0)=0,\quad \bar{h}_1(x_1)=0,\quad \bar{h}_1(x_2)=0,\quad \bar{h}_1'(x_1)=1
\end{aligned}
$$

由 $h_0(x)$所满足的条件，可设 $h_0(x)=A(x-x_1)^2(x-x_2)$，其中 A 为待定系数，由 $h_0(x_0)=1$，得 $A=\dfrac{1}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}$，故有

$$h_0(x)=\frac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}$$

同理可得

$$h_2(x)=\frac{(x-x_1)^2(x-x_0)}{(x_2-x_1)^2(x_2-x_0)}$$

由 $\bar{h}_1(x)$ 满足的条件，可设 $\bar{h}_1(x)=C(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$，其中 C 为待定系数.由 $\bar{h}_1'(x_1)=1$，得 $C=\dfrac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$，故有

$$\bar{h}_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

下面求 $h_1(x)$，由 $h_1(x)$满足的条件，设 $h_1(x)=(ax+b)\dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$，其中 a，b 为待定系数.

利用 $h_1(x_1)=1$，$h_1'(x_1)=0$ 得

$$\begin{cases} ax_1+b=1 \\ a+(ax_1+b)\dfrac{1}{x_1-x_0}+(ax_1+b)\dfrac{1}{x_1-x_2}=0 \end{cases}$$

由此得

$$a=\frac{(x_0+x_2)-2x_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$b=1-\frac{[(x_0+x_2)-2x_1]x_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

所以

$$\bar{h}_1(x)=\frac{\{[(x_0+x_2)-2x_1](x-x_1)+(x_1-x_0)(x_1-x_2)\}(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)^2(x_1-x_2)^2}$$

易验证 $H_3(x)=f(x_0)h_0(x)+f(x_1)h_1(x)+f(x_2)h_2(x)+f'(x_1)\bar{h}_1(x)$

（2）**证** 当 x 为插值节点 x_0，x_1，x_2 中任一点时，结论显然成立.下面设 x 异于 x_0，x_1，x_2

由于 $R_3(x)=f(x)-H_3(x)$ 满足

$$R_3(x_0)=0,\quad R_3(x_1)=0,\quad R_3(x_2)=0,\quad R_3'(x_1)=0$$

故可设 $R_3(x)=K(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$，其中 K 为依赖于 x 的待定系数.

固定 x，作辅助函数

$$G(t)=f(t)-H_3(t)-K(t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$$

显然 $G(t)$在$[a, b]$上有四个零点 x，x_0，x_1，x_2；其中 x_1 为二重零点.

利用 Rolly 定理，知 $G'(t)$ 在 x_0，x_1，x_2，x 组成的三个小区间内至少各有一个零点，记为 η_1,η_2,η_3，加上 x_1，$G'(t)$ 在$[a, b]$上至少有 4 个零点.反复利用 Rolly 定理：

$G''(t)$ 在$[a, b]$内至少有 3 个零点；

$G^{(3)}(t)$ 在$[a, b]$内至少有 2 个零点；

$G^{(4)}(t)$ 在$[a, b]$内至少有 1 个零点，即存在一点ξ，使$G^{(4)}(\xi)=0$.

由于$G^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-4!K$，从而求得$K=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$，所以

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

例 24 求一个次数≤ 4的多项式 $P_4(x)$，使它满足$P_4(0)=P_4'(0)=0$，$P_4(1)=P_4'(1)=1$，$P_4(2)=1$

分析 这又是一个非标准插值问题，我们可以照上题中的各种解法的思路去做.但上题解法一在这里又可按下面两种方法去做：一种是先求 Newton 或 Lagrange 型插值，再通过待定系数法求 $P_4(x)$；另一种是先求 Hermite 插值，再通过待定系数法确定 $P_4(x)$.下面给出常用的三种做法

解法一 先构造满足$P_2(0)=0,\quad P_2(1)=1,\quad P_2(2)=1$的插值多项式 $P_2(x)$，易得

$$P_2(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$$

设$P_4(x)=P_2(x)+(Ax+B)(x-0)(x-1)(x-2)$，其中 A，B 为待定系数.

显然 $P_4(x)$满足 $P_2(x)$的插值条件，利用两个导数条件确定系数 A、B.

由

$$\begin{cases} P_4'(0)=\dfrac{3}{2}+2B=0 \\ P_4'(1)=\dfrac{1}{2}-(A+B)=1 \end{cases}$$

解得$A=1/4,\quad B=-3/4$.故

$$P_4(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(x-3)x(x-1)(x-2)=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$

解法二 先构造满足$H_3(0)=H_3'(0)=0,\quad H_3(1)=H_3'(1)=1$的三次 Hermite 插值多项式

$$H_3(x)=h_0(x)y_0+h_1(x)y_1+\bar{h}_0(x)m_0+\bar{h}_1(x)m_1$$

由于$y_0=m_0=0$，故只需求$h_1(x),\bar{h}_1(x)$即可，而

$$h_1(x)=\left[1+2\frac{(x-x_1)}{x_0-x_1}\right]\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=(3-2x)x^2$$

$$\bar{h}_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=x^2(x-1)$$

故

$$H_3(x)=(3-2x)x^2+x^2(x-1)=x^2(2-x)$$

设 $P_4(x)=H_3(x)+A(x-1)^2x^2$，则 $P_4(x)$满足：$P_4(0)=P_4'(0)=0$，$P_4(1)=P_4'(1)=1$，由 $P_4(2)=H_3(2)+4A=1$及 $H_3(2)=0$，得 $A=1/4$.因此

$$P_4(x)=x^2(2-x)+\frac{1}{4}(x-1)^2x^2=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$

解法三　用构造插值基函数的办法求 $P_4(x)$.

记　$x_0=0,\quad x_1=1,\quad x_2=2$，并设所求多项式为

$$P_4(x)=h_0(x)y_0+h_1(x)y_1+h_2(x)y_2+\bar{h}_0(x)m_0+\bar{h}_1(x)m_1$$

其中 $h_0(x)$、$h_1(x)$、$h_2(x)$、$\bar{h}_0(x)$、$\bar{h}_1(x)$ 均为 4 次多项式且满足如下条件：

$$\begin{aligned}
&h_0(x_0)=1, h_0(x_1)=0, h_0(x_2)=0, h_0'(x_0)=0, h_0'(x_1)=0\\
&h_1(x_0)=0, h_1(x_1)=1, h_1(x_2)=0, h_1'(x_0)=0, h_1'(x_1)=0\\
&h_2(x_0)=0, h_2(x_1)=0, h_2(x_2)=1, h_2'(x_0)=0, h_2'(x_1)=0\\
&\bar{h}_0(x_0)=0, \bar{h}_0(x_1)=0, \bar{h}_0(x_2)=0, \bar{h}_0'(x_0)=1, \bar{h}_0'(x_1)=0\\
&\bar{h}_1(x_0)=0, \bar{h}_1(x_1)=0, \bar{h}_1(x_2)=0, \bar{h}_1'(x_0)=0, \bar{h}_1'(x_1)=1
\end{aligned}$$

设

$$\begin{aligned}
&h_0(x)=(ax+b)(x-1)^2(x-2)\\
&\bar{h}_0(x)=Ax(x-1)^2(x-2)\\
&h_1(x)=(cx+d)x^2(x-2)\\
&\bar{h}_1(x)=Bx^2(x-1)(x-2)\\
&h_2(x)=ex^2(x-1)^2
\end{aligned}$$

由各自应满足的条件，解得

$$\begin{aligned}
&h_0(x)=(-\frac{5}{4}x-\frac{1}{2})(x-1)^2(x-2)\\
&\bar{h}_0(x)=-\frac{1}{2}x(x-1)^2(x-2)\\
&h_1(x)=x^2(x-2)^2,\\
&\bar{h}_1(x)=-x^2(x-1)(x-2)\\
&h_2(x)=\frac{1}{4}x^2(x-1)^2
\end{aligned}$$

从而

$$P_4(x)=\sum_{i=0}^{2}h_i(x)y_i+\sum_{i=0}^{1}\bar{h}_i(x)m_i$$

$$=x^2(x-2)^2y_1+\frac{1}{4}x^2(x-1)^2y_2-x^2(x-1)(x-2)m_1$$

$$=x^2(x-2)^2+\frac{1}{4}x^2(x-1)^2-x^2(x-1)(x-2)$$

$$=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$

注：①本题因 $y_0=m_0=0$，故可不求 $h_0(x)$和 $\bar{h}_0(x)$；

②其它类型的非规则插值问题可仿照上述方法去做.

例 25　设 $h_j(x)$，$\bar{h}_j(x)$（j=0,1,⋯,n）是以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点的 Hermite 插值基函数.求证

（1）$\sum_{j=0}^{n}h_j(x)\equiv 1$

（2）$\sum_{j=0}^{n}[h_j(x)x_j+\bar{h}_j(x)]=x$

分析　本题是关于 Hermite 插值基函数的性质问题，观察要证明的结论应考虑对 1 和 x 进行插值入手，通过插值余项为 0 得出结论.

证　（1）设 $f(x)$=1，有 $f(x_j)=1,\quad f'(x_j)=0$.从而 $f(x)$以 x_0, ⋯, x_n 为节点的 $2n$+1 次 Hermite 插值多项式为

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}h_j(x)f(x_j)+\sum_{j=0}^{n}\bar{h}_j(x)f'(x_j)=\sum_{j=0}^{n}h_j(x)$$

由余项定理

$$f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)=0$$

从而

$$H_{2n+1}(x)=f(x)$$

即

$$\sum_{j=0}^{n}h_j(x)=1$$

（2）设 $f(x)$=x，有 $f(x_j)=x_j,\quad f'(x_j)=1$，从而 $f(x)$以 x_0, ⋯, x_n 为节点的 $2n$+1

次 Hermite 插值多项式为

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}h_j(x)f(x_j)+\sum_{j=0}^{n}\bar{h}_j(x)f'(x_j)=\sum_{j=0}^{n}[h_j(x)x_j+\bar{h}_j(x)]$$

由插值余项定理

$$f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)=0$$

从而

$$H_{2n+1}(x)=f(x)$$

即

$$\sum_{j=0}^{n}[h_j(x)x_j+\bar{h}_j(x)]=x$$

例 26　试判断下面的函数是否为三次样条函数：

（1）$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ \sin x & x<0\end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases}0 & -1\leq x<0\\ x^3 & 0\leq x<1\\ x^3+(x-1)^2 & 1\leq x\leq 2\end{cases}$

（3）$f(x)=\begin{cases}x^3+2x+1 & -1\leq x<0\\ 2x^3+2x+1 & 0\leq x\leq 1\end{cases}$

解　由三次样条函数的定义，可验证

（1）由 $\sin x$ 不是三次式，故 $f(x)$不是三次样条函数；

（2）$f'(x)=\begin{cases}0 & -1\leq x<0\\ 3x^2 & 0\leq x<1\\ 3x^2+2(x-1) & 1\leq x\leq 2\end{cases}$

$$f''(x)=\begin{cases}0 & -1\leq x<0\\ 6x & 0\leq x<1\\ 6x+2 & 1\leq x\leq 2\end{cases}$$

$f''(x)$ 在 x=1 处不连续，故 $f(x)$不是三次样条函数.

（3）$f(x)$在[−1, 1]上连续；

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+2 & -1\leq x<0\\ 6x^2+2 & 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

$f'(x)$ 在[−1, 1]上连续；

$$f''(x)=\begin{cases}6x & -1\le x<0\\ 12x & 0\le x\le 1\end{cases}$$

$f''(x)$ 在[−1, 1]上连续.

即 $f(x)\in C^2[-1,1]$.

又 $f(x)$在每段上都是三项式，故 $f(x)$是三次样条插值函数.

例 27 对于给定插值条件

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	1	0

试分别求出满足下列边界条件的三次样条函数 $S(x)$：

（1） $S'(0)=1,\quad S'(3)=2$

（2） $S''(0)=1,\quad S''(3)=2$

分析 这是三次样条插值问题，给出了两种边界条件，我们按样条插值的求解方法即能求得问题的解.

解 记 $x_0=0$，$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$

$y_0=0$，$y_1=1$，$y_2=1$，$y_3=0$，

计算二阶差商

i	x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
0	0	0		
1	1	1	1	
2	2	1	0	$-\frac{1}{2}$
3	3	0	−1	$-\frac{1}{2}$

$$x_1-x_0=x_2-x_1=x_3-x_2=h=1$$

$$\mu_j=\lambda_j=\frac{1}{2},\quad j=1,2$$

三次样条插值函数的表达式为

$$S(x)=\frac{1}{6}M_j(x_{j+1}-x)^3+\frac{1}{6}M_{j+1}(x-x_j)^3$$
$$+(y_i-\frac{1}{6}M_j)(x_{j+1}-x)+(y_{j+1}-\frac{1}{6}M_{j+1})(x-x_j)$$

$$x\in[x_j,x_{j+1}],\quad j=0,1,2 \tag{1}$$

（1） $d_0=6\times\{f[x_0,x_1]-1\}=6\times(1-1)=0$

$d_3=6\times\{2-f[x_2,x_3]\}=6\times(2+1)=18$

$d_1=6f[x_0,x_1,x_2]=6\times(-\frac{1}{2})=-3$

$d_2=6f[x_1,x_2,x_3]=6\times(-\frac{1}{2})=-3$

关于 M_0，M_1，M_2，M_3 的方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

解得

$$M_0=0.266\,7,\quad M_1=-0.533\,3,\quad M_2=-4.133\,3,\quad M_3=11.066\,7 \qquad (2)$$

将数据（2）代入（1）得所求三次样条插值函数为

当 $x\in[0,1]$ 时

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{1}{6}\times0.266\,7(1-x)^3+\frac{1}{6}\times(-0.533\,3)(x-0)^3\\&+(0-\frac{1}{6}\times0.266\,7)(1-x)+(1-\frac{1}{6}\times(-0.533\,3))(x-0)\\&=0.444\,5(1-x)^3-0.088\,88x^3-0.044\,5(1-x)+1.088\,88x\end{aligned}$$

当 $x\in[1,2]$ 时，

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{1}{6}\times(-0.533\,3)(2-x)^3+\frac{1}{6}\times(-4.133\,3)(x-1)^3\\&+(1-\frac{1}{6}\times(-0.533\,3))(2-x)+(1-\frac{1}{6}\times(-4.133\,3))(x-1)\\&=-0.088\,88(2-x)^3-0.688\,88(x-1)^3+1.088\,88(2-x)+1.688\,88(x-1)\end{aligned}$$

当 $x\in[2,3]$ 时

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{1}{6}\times(-4.133\,3)(3-x)^3+\frac{1}{6}\times11.066\,7)(x-2)^3\\&+(1-\frac{1}{6}\times(-4.133\,3))(3-x)+(0-\frac{1}{6}\times11.066\,7)(x-2)\\&=-0.688\,88(3-x)^3+1.844\,5(x-2)^3+1.688\,88(3-x)-1.844\,45(x-2)\end{aligned}$$

（2）$M_0=1$，$M_3=2$ （3）

关于 M_1 和 M_2 的方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ -4 \end{bmatrix}$$

解得

$$M_1=-1.333\,3,\quad M_2=-1.666\,7 \tag{4}$$

将（3）和（4）代入（1）得所求三次样条插值函数为

当 $x\in[0,1]$ 时，

$$\begin{aligned} S(x)=&\frac{1}{6}(1-x)^3+\frac{1}{6}\times(-1.333\,3)(x-0)^3 \\ &+(0-\frac{1}{6})(1-x)+(1-\frac{1}{6}\times(-1.333\,3))(x-0) \\ =&0.166\,67(1-x)^3-0.222\,22x^3-0.166\,67(1-x)+1.222\,22x \end{aligned}$$

当 $x\in[1,2]$ 时

$$\begin{aligned} S(x)=&\frac{1}{6}\times(-1.333\,3)(2-x)^3+\frac{1}{6}\times(-1.666\,7)(x-1)^3 \\ &+(1-\frac{1}{6}\times(-1.333\,3))(2-x)+(1-\frac{1}{6}\times(-1.666\,7))(x-1) \\ =&-0.222\,22(2-x)^3-0.277\,78(x-1)^3+1.222\,22(2-x)+1.277\,78(x-1) \end{aligned}$$

当 $x\in[2,3]$ 时

$$\begin{aligned} S(x)=&\frac{1}{6}\times(-1.666\,7)(3-x)^3+\frac{1}{6}\times 2(x-2)^3 \\ &+(1-\frac{1}{6}\times(-1.666\,7))(3-x)+(0-\frac{1}{6}\times 2)(x-2) \\ =&-0.277\,78(3-x)^3-0.333\,33(x-2)^3+1.277\,78(3-x)-0.333\,33(x-2) \end{aligned}$$

例 28 用正交化方法确定[0, 1]上带权 $\rho(x)=\ln(\frac{1}{x})$ 的前三个正交多项式.

分析 直接利用正交化方法

解 $\rho(x)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$

令

$$g_0(x)=1$$
$$g_1(x)=x+c_{10}g_0(x)$$
$$g_2(x)=x^2+c_{20}g_0(x)+c_{21}g_1(x)$$

由 $(g_0,g_1)=0$ 得 $c_{10}=-\dfrac{1}{4}$，从而

$$g_1(x)=x-\frac{1}{4}$$

由 $(g_0,g_2)=2$ 得 $c_{20}=-\dfrac{1}{9}$

由 $(g_1,g_2)=0$ 得 $c_{21}=-\dfrac{5}{7}$

从而

$$g_2(x)=x^2-\frac{1}{9}-\frac{5}{7}(x-\frac{1}{4})=x^2-\frac{5}{7}x+\frac{17}{252}$$

例 29 求 a, b，使 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[ax+b-\sin x]^2\mathrm{d}x$ 为最小.

分析 本题实际上是在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上，用 $ax+b$ 逼近 $\sin x$ 的最佳平方逼近问题，即在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上求 $S^*(x)=b+ax\in\Phi\in\mathrm{span}\{1,x)$，使其成为 $\sin x$ 的最佳平方逼近多项式.

解 设 $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$, $S^*(x)=b+ax\in\Phi=span\{\varphi_0,\varphi_1\}$

a、b 满足正则方程组

$$\begin{cases}b(\varphi_0,\varphi_0)+a(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_0,\sin x)\\ b(\varphi_1,\varphi_0)+a(\varphi_1,\varphi_1)=(\varphi_1,\sin x)\end{cases}$$

计算有

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad (\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{24},\quad (\varphi_0,\sin x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1,\quad (\varphi_1,\sin x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=1$$

故有

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}b+\dfrac{\pi^2}{8}a=1\\ \dfrac{\pi^2}{8}b+\dfrac{\pi^3}{24}a=1\end{cases}$$

解得 $a \approx 0.664\,438\,97$, $b \approx 0.114\,770\,64$

例 30 设 $\Phi_1 = \mathrm{span}\{1, x\}$，$\Phi_2 = \mathrm{span}\{x^{100}, x^{101}\}$，分别在 Φ_1、Φ_2 上求一元素使其为 $f(x) = x^2 \in C[0,1]$ 的最佳平方逼近，并比较其均方误差.

分析 本题实际上是两个题，分别在 Φ_1 和 Φ_2 中求 x^2 的最佳平方逼近函数 $\varphi_1^* = a_0^* + a_1^* x$ 和 $\varphi_2^*(x) = b_0^* x^{100} + b_1^* x^{101}$.

解 设 $\varphi_1^* = a_0^* + a_1^* x$，因

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1^2 \mathrm{d}x = 1, \quad (\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \quad (\varphi_1, \varphi_0) = (\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2}$$

$$(\varphi_0, f) = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \quad (\varphi_1, f) = \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

故正则方程组为

$$\begin{cases} a_0^* + \dfrac{1}{2} a_1^* = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{2} a_0^* + \dfrac{1}{3} a_1^* = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

解得 $a_0^* = -\dfrac{1}{6}, a_1^* = 1, \varphi_1^*(x) = -\dfrac{1}{6} + x$.

其平方逼近误差为

$$\|\delta_1\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{i=0}^{1} a_i^* (\varphi_i, f) \approx 0.005\,56$$

设 $\varphi_2^*(x) = b_0^* x^{100} + b_1^* x^{101}$，因

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 (x^{100})^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{201}$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = \int_0^1 x^{100} \cdot x^{101} \mathrm{d}x = \frac{1}{202}$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 (x^{101})^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{203}$$

$$(\varphi_0, f) = \int_0^1 x^{102} \mathrm{d}x = \frac{1}{103}$$

$$(\varphi_1, f) = \int_0^1 x^{103} \mathrm{d}x = \frac{1}{104}$$

所以由正则方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{201}b_0^*+\dfrac{1}{202}b_1^*=\dfrac{1}{103}\\ \dfrac{1}{202}b_0^*+\dfrac{1}{203}b_1^*=\dfrac{1}{104}\end{cases}$$

得
$$b_0^*\approx 375.242\,53,\quad b_1^*\approx -375.148\,25$$
$$\varphi_2^*(x)=375.242\,53x^{100}-375.148\,25x^{101}$$

平方逼近误差为

$$\begin{aligned}\|\delta_2\|_2^2&=\|f\|_2^2-\sum_{i=0}^{1}b_i^*(\varphi_i,f)a\\&=\int_0^1 x^4dx-[375.242\,53\times\frac{1}{103}-375.148\,5\times\frac{1}{104}]\approx 0.164\,06\end{aligned}$$

显然，在平方逼近意义下，（1）比（2）好.

例 31 试用 Legendre 多项式构造 $f(x)=x^4$ 在[−1，1]上的二次最佳平方逼近多项，并估计平方逼近误差 $\|\delta\|_2^2$.

分析 本题选取 Legendre 多项式为基函数，此时正则方程组的系数矩阵为对角阵，直接可解得 $\alpha_i^*=\dfrac{1}{2}(2i+1)(P_i,f),\quad i=0,1,2$.

解 由 $P_0(x)=1,P_1(x)=x,P_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1)$，得

$$(P_0,f)=\int_{-1}^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$$
$$(P_1,f)=\int_{-1}^1 x\cdot x^4\mathrm{d}x=0$$
$$(P_2,f)=\int_{-1}^1\frac{1}{2}(3x^2-1)x^4\mathrm{d}x=\frac{8}{35}$$

由 $a_i^*=\dfrac{2i+1}{2}(P_i,f)\quad(i=0,1,2)$，得

$$a_0^*=\frac{1}{2}(P_0,f)=\frac{1}{5}$$

$$a_1^*=\frac{3}{2}(P_1,f)=0$$

$$a_2^*=\frac{5}{2}(P_2,f)=\frac{4}{7}$$

从而 $f(x)=x^4$ 在[−1，1]上的二次最佳平方逼近多项式为

$$S_2^*(x)=\frac{1}{5}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{6}{7}x^2-\frac{3}{35}$$

$$\|\delta\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{i=0}^{2}\frac{2}{2i+1}(a_i^*)^2=\int_{-1}^{1}x^8\mathrm{d}x-[2\times(-\frac{1}{5})^2+\frac{2}{5}(\frac{4}{7})^2]$$
$$\approx 0.011\,609\,977$$

例 32 求 $f(x)=e^x$ 在[0，1]上一次最佳平方逼近多项式，其中权函数 $\rho(x)=1$.

分析 本题的定义区间为[0，1]，其解法一般有三种：一种是直接在 $\Phi=\mathrm{span}\{1,x\}$ 中求；另一种是将[0，1]转化为[−1，1]，用 Legendre 多项式来求；第三种是在[0，1]上构造正交多项式，然后去求解.

解一 设 $\varphi_0(x)=1,\quad \varphi_1(x)=x,\quad \Phi=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1\}$，所求函数为 $S_1^*(x)=a_0^*+a_1^*x$，则

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1$$
$$(\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$
$$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$
$$(\varphi_0,f)=\int_0^1 e^x\mathrm{d}x=e-1$$
$$(\varphi_1,f)=\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x=1$$

正则方程组为

$$a_0^*+\frac{1}{2}a_1^*=e-1$$
$$\frac{1}{2}a_0^*+\frac{1}{3}a_1^*=1$$

解得

$$a_0^*=4e-10\approx 0.873\,127\,31,\quad a_1^*=18-6e\approx 1.690\,309\,03$$

从而一次最佳平方逼近多项式

$$S_1^*(x)=0.873\,127\,31+1.690\,309\,03x$$

解法二 作变量替换 $x=\frac{1}{2}(t+1)$，将[0，1]变换到[−1，1]，函数 $f(x)=e^x,\ x\in[0,1]$，变为 $y=e^{\frac{t+1}{2}},t\in[-1,1]$. 由于 Legendre 多项式在[−1，1]上正交，且 $P_0(t)=1,P_1(t)=t$，故

$$(P_0, f) = \int_{-1}^{1} e^{\frac{t+1}{2}} \mathrm{d}t = 2(e-1)$$

$$(P_1, f) = \int_{-1}^{1} te^{\frac{t+1}{2}} \mathrm{d}t = 6-2e$$

从而

$$a_0^* = \frac{(P_0, f)}{(a_0, a_0)} = e-1 \approx 1.718\,281\,83, \quad a_1^* = \frac{(P_1, f)}{(a_1, a_1)} = 9-3e \approx 0,845\,154\,52$$

所求最佳平方逼近多项式为

$$S_1^*(t) = 1.718\,281\,83 + 0,845\,154\,52t$$

即

$$S_1^*(x) = 1.718\,281\,83 + 0.845\,154\,52(2x-1)$$

解三 直接在[0, 1]上构造正交多项式

令

$$g_0(x) = 1$$
$$g_1(x) = x + c_{10} g_0(x)$$

由 $c_{10} = -(x, g_0) = -\int_0^1 x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$，有

$$g_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

因此可在 $\Phi = \mathrm{span}\{1, x-\frac{1}{2}\}$ 中构造一次最佳平方逼近.多项式 $S_1^*(x) = a_0^* + a_1^* g_1(x)$.

由

$$(g_0, g_0) = \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1, (g_1, g_1) = \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12}$$

$$(g_0, f) = \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e-1, (g_1, f) = \int_0^1 (x-\frac{1}{2})e^x \mathrm{d}x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e$$

有

$$a_0^* = \frac{(g_0, f)}{(g_0, g_0)} = e-1 \approx 1.718\,281\,83, a_1^* = \frac{(g_1, f)}{(g_1, g_1)} = 18-6e \approx 1.690\,309\,03$$

从而

$$S_1^*(x) = 1.718\,281\,83 + 1.690\,309\,03(x-\frac{1}{2})$$

例 33 设 $L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$.

（1）求证 $L_n(x)$ 是首项系数 $A_n=(-1)^n$ 的 n 次多项式；

（2）证明：$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx=\begin{cases}0 & m \neq n \\ (n!)^2 & m=n\end{cases}$.

分析　利用微分法则证（1），分部积分法则证明正交性.

证　（1）$L_n(x)=e^x \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$

将右端微商算出知 $L_n(x)$是 n 次多项式

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_n^k n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k}$$

首项系数　$A_n=(-1)^n$

（2）记 $U_n(x)=x^n e^{-x}$，则它的逐次微商满足条件

$$U_n^{(k)}(0)=U_n^{(k)}(+\infty)=0 \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

由分部积分法则有

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) \mathrm{d}x=[U_n^{(n-1)} L_m-U_n^{(n-2)} L_m^{(1)}+\cdots+(-1)^{n-1} U_n L_m^{(n-1)}]_0^{\infty}+(-1)^n \int_0^{\infty} U_n L_m^{(n)} \mathrm{d}x$$

$$=(-1)^n \int_0^{\infty} U_n L_m^{(n)} \mathrm{d}x \qquad (1)$$

当 $m<n$ 时，$L_m^{(n)}=0$，故

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) \mathrm{d}x=0$$

当 $m=n$ 时，$L_m^{(n)}(x)=(-1)^n n!$，将其代入（1）式有

$$\int_0^{\infty} e^{-x}[L_n(x)]^2 \mathrm{d}x=(-1)^n \int_0^{\infty} U_n(x)[(-1)^n n!] \mathrm{d}x$$

$$=n! \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x=(n!)^2$$

例 34　设 $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})$

（1）求证：$H_n(x)$是首项系数 $A_n=2^n$ 的 n 次多项式；

（2）证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) \mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m \neq n \\ 2^n \cdot n! \sqrt{\pi}, & m=n\end{cases}$$

分析　利用微分法则证（1），分部积分法则证明正交性.

证 （1） $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})$

记 $U(x)=e^{-x^2}$

当 n=1 时， $H_1(x)=-e^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=2x$ 是首项系数为 2 的一次式；

当 n=2 时， $H_2(x)=e^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}=(-2)^2x^2-2$ 是首项系数为 2^2 的二次式；

假设当 $n=k-1$ 时， $H_{k-1}(x)$ 是首项系数为 2^{k-1} 的 k−1 次式；

当 n=k 时

$$H_k(x)=(-1)^k e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^kU}{\mathrm{d}x^k}=(-1)^k[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{x^2}\frac{d^{k-1}U}{dx^{k-1}})-2xe^{x^2}\frac{d^{k-1}U}{dx^{k-1}}]$$

由假设 $(-1)^{k-1}e^{x^2}\dfrac{d^{k-1}U}{dx^{k-1}}$ 是首项系数为 2^{k-1} 的 k−1 次多项式知 $(-1)^k(-2)xe^{x^2}\dfrac{d^{k-1}U}{dx^{k-1}}$ 是首次系数为 2^k 的 k 次式， $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{x^2}\dfrac{d^{k-1}U}{dx^{k-1}})$ 是 k−2 次多项式，故 $H_k(x)$是首项系数为 2^k 的 k 次式.

由数学归纳法知 $L_n(x)$是首项系数为 2^n 的 n 次式.

（2） $U^{(k)}(-\infty)=U^{(k)}(+\infty)=0 \quad (k=0,1,2,\cdots)$

由分部积分法则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\mathrm{d}x=[U^{(n-1)}H_m-U^{n-2}H_m^{(1)}+\cdots+(-1)^{n-1}UH_m^{(n-1)}]_{-\infty}^{+\infty}+(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}UH_m^{(n)}\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_m^{(n)}\mathrm{d}x$$

当 $m<n$ 时，上式右端为零

当 $m=n$ 时， $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}[H_n(x)]^2\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(2^n)n!\mathrm{d}x=2^n n!\sqrt{\pi}$

例 35 设在 $[-1,1]$, $\varphi(x)=1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{3}{24}x^3-\dfrac{15}{384}x^4-\dfrac{105}{3\,840}x^5$，试将 $\varphi(x)$ 按 Chebyshev 多项式降为三次多项式，并估计误差.

分析 用 Chebyshev 多项式降低已知多项式的次数，就是用 $T_k(x)$来表示 x^k，然后舍去高次 Chebyshev 多项式所在的项，即可降低多项式的次数.

解

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{24}x^3-\frac{15}{384}x^4-\frac{105}{3\,840}x^5 \\
&= 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{24}x^3-\frac{15}{384}\times\frac{1}{8}(3T_0+4T_2+T_4) \\
&\quad -\frac{105}{3\,840}\times\frac{1}{16}(10T_1+5T_3+T_5) \\
&= 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{24}x^3-\frac{15}{384\times 8}(3+8x^2-4+T_4)- \\
&\quad \frac{105}{3\,840\times 16}(10x+20x^3-15x+T_5)
\end{aligned}
$$

舍去含有 $T_4(x)$、$T_5(x)$的项，得三次多项式

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= (1+\frac{15}{384\times 8})+(-\frac{1}{2}+\frac{105\times 5}{3\,840\times 16})x+(-\frac{1}{8}-\frac{15}{384})x^2+(-\frac{1}{8}-\frac{105\times 20}{3\,840\times 16})x^3 \\
&= 1.004\,882\,8-0.491\,455\,1x-0.164\,062\,5x^2-0.159\,179\,7x^3
\end{aligned}
$$

误差之绝对值为

$$
\begin{aligned}
|R(x)| &= |\varphi(x)-P_3(x)| \\
&= \left|-\frac{15}{384\times 8}T_4-\frac{105}{3\,840\times 16}T_5\right| \\
&\le \frac{15}{384\times 8}+\frac{105}{3\,840\times 16}\approx 0.006\,6
\end{aligned}
$$

例 36 设在 $0\le x\le 1$上给定 $P(x)=1-x+x^2-x^3+x^4$，试在允许误差为 0.008 的要求下降低 $P(x)$的次数.

分析 本题是在[0，1]上考虑问题的. 要降低多项式的次数，一般用 Chebyshev 多项式来做，因此必须将[0，1]变换到[-1，1].

解 令 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$，则当 $x\in[0,1]$时，$t\in[-1,1]$. 由

$$T_0=1,\quad T_1=t$$

$$t^2=\frac{1}{2}(T_0+T_2),\quad t^3=\frac{1}{4}(3T_1+T_3)$$

$$t^4=\frac{1}{8}(3T_0+4T_2+T_4)$$

得

$$
\begin{aligned}
P(x)=f(t)&=1-\frac{1}{2}(t+1)+[\frac{1}{2}(t+1)]^2-(\frac{t+1}{2})^3+(\frac{t+1}{2})^4\\
&=(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4})+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2^3}+\frac{1}{2^2})t\\
&\quad+(\frac{1}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^3})t^2+(-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2})t^3+\frac{1}{2^4}t^4\\
&=\frac{11}{16}T_0+(-\frac{1}{8})T_1+\frac{1}{8}(T_0+T_2)+\frac{1}{32}(3T_1+T_3)+\frac{1}{27}(3T_0+4T_2+T_4)\\
&=\frac{107}{128}T_0-\frac{1}{32}T_1+\frac{5}{32}T_2+\frac{1}{32}T_3+\frac{1}{128}T_4
\end{aligned}
$$

因为 $\frac{1}{128}<0.008, \frac{1}{32}+\frac{1}{128}>0.008$，故去掉含 T_4 的末项，不影响允许误差，所以

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(t)&=\frac{107}{128}-\frac{1}{32}t+\frac{5}{32}(2t^2-1)+\frac{1}{32}(4t^3-3t)\\
&=\frac{87}{128}-\frac{1}{8}t+\frac{5}{16}t^2+\frac{1}{8}t^3, t\in[-1,1]
\end{aligned}
$$

将 $t=2x-1$ 代入上式，得[0，1]上的允许误差为 0.008 的近似多项式

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}(x)&=\frac{87}{128}-\frac{1}{8}(2x-1)+\frac{5}{16}(2x-1)^2+\frac{1}{8}(2x-1)^3\\
&=\frac{127}{128}-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}x^2+x^3 \qquad x\in[0,1]
\end{aligned}
$$

例 37 设有某实验数据如下：

x	1.36	1.73	1.95	2.28
y	14.094	16.844	18.475	20.963

试按最小二乘法求一次多项式拟合以上数据.

分析 这是直线拟合问题，直接按照直线拟合的最小二乘法去做即可.

解 记

x_1=1.36，x_2=1.73，x_3=1.95，x_4=2.28

y_1=14.094，y_2=16.844，y_3=18.475，y_4=20.963

设一次拟合多项为 $y=a+bx$，则正则方程组为

$$\begin{cases} aN+b\sum_{i=1}^{4}x_i=\sum_{i=1}^{4}y_i \\ a\sum_{i=1}^{4}x_i+b\sum_{i=1}^{4}x_i^2=\sum_{i=1}^{4}x_iy_i \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$N=4,\quad \sum_{i=1}^{4}x_i=7.32,\quad \sum_{i=1}^{4}x_i^2=13.8434,$$

$$\sum_{i=1}^{4}y_i=70.376,\quad \sum_{i=1}^{4}x_iy_i=132.12985$$

将以上数据代入（1）得

$$\begin{cases} 4a \quad +7.32b=70.376 \\ 7.32a+13.8434b=132.12985 \end{cases}$$

解得

$$a=3.937\,4，b=7.462\,6$$

从而

$$y=3.937\,4+7.462\,6x$$

例 38　用最小二乘法求一个形如用最小二乘法求一个形如 $y=a+bx^2$ 的经验公式.使它与下列数据相拟合.

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

分析　这是利用最小二乘法进行曲线拟合的问题.

解　记 $x_1=19,\quad x_2=25,\quad x_3=31,\quad x_4=38,\quad x_5=44$

$y_1=19,\quad y_2=32.3,\quad y_3=49.0,\quad y_4=73.3,\quad y_5=97.8$

这样

$$N=5,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i^2=5\,327,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i^4=7\,277\,699,\quad \sum_{i=1}^{5}y_i=271.4,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i^2y_i=369\,321.5$$

所以正则方程组为

$$\begin{cases} 5a+5\,327b=271.4 \\ 5\,327a+7\,277\,699b=369\,321.5 \end{cases}$$

解得 $a=0.972\,578\,7$，$b=0.050\,035\,1$

故经验公式为

$$y=0.972\,578\,7+0.050\,035\,1x^2$$

例 39　已知数据表如下，试用二次多项式来拟合

x_I	0	1	2	3	4	5	6
y_I	15	14	14	14	14	15	16

分析　这是多项式拟合问题，利用多项式拟合的最小二乘法来处理.本题中 y_i 的数据比较特殊，可用平移变换将数据变得容易处理.

解　设 $y-14=\bar{y}$, $x-3=\bar{x}$，则上表可化为

$\bar{x}_i$	−3	−2	−1	0	1	2	3
$\bar{y}_i$	1	0	0	0	0	1	2

由上表得

$$N=7,\quad \sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i=0,\quad \sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i^2=28,\quad \sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i^3=0,\quad \sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i^4=196,$$

$$\sum_{i=-3}^{3}\bar{y}_i=4,\quad \sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i\bar{y}_i=5,\quad \sum_{i=-3}^{3}\bar{x}_i^2\bar{y}_i=31$$

设二次拟合多项式为 $\bar{y}=a_0^*+a_1^*\bar{x}+a_2^*\bar{x}^2$，有正则方程组如下

$$\begin{cases}7a_0^*+28a_2^*=4\\28a_1^*=5\\28a_0^*+196a_2^*=31\end{cases}$$

解得

$$a_0^*=-\frac{1}{7},\quad a_1^*=\frac{5}{28},\quad a_2^*=\frac{5}{28}$$

从而

$$\bar{y}=-\frac{1}{7}+\frac{5}{28}\bar{x}+\frac{5}{28}\bar{x}^2$$

亦即

$$y-14=-\frac{1}{7}+\frac{5}{28}(x-3)+\frac{5}{28}(x-3)^2$$

例 40　求形如 $y=ae^{bx}$（a，b 为常数且 a>0）的经验公式，使它能和下表数据相似合：

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

分析　经验公式 $y=ae^{bx}$ 不是多项式，应设法将其变为多项式，本题可通过取对数的办法将 $y=ae^{bx}$ 变为 $\ln y=\ln a+bx$，若令 $\bar{y}=\ln y$, $A=\ln a$，则有 $\bar{y}=A+bx$，通过直线拟合的最小二乘法求出 $\bar{y}=A+bx$ 后，再变回 $y=ae^{bx}$ 即可.

解　对经验公式 $y=ae^{bx}$ 两边取对数，得

$$\ln y=\ln a+bx$$

作变换 $\bar{y}=\ln y,\quad A=\ln a$，则有 $\bar{y}=A+bx$，为了用最小二乘法求出 A、b，需将（x_i, y_i）转化为 $(x_i,\bar{y}_i)$，现将转化数值表列出：

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$\bar{y}_i$	1.629	1.756	1.876	2.008	2.135

$$N=5,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i=7.5,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i^2=11.875,\quad \sum_{i=1}^{5}\bar{y}_i=9.404,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i\bar{y}_i=14.422$$

故有正则方程组

$$\begin{cases}5A\quad+7.5b=9.404\\7.5A+11.875b=14.422\end{cases}$$

解得　$A=1.122\,4$，$b=0.505\,6$，$a=e^A=3.072$，于是得最小二乘拟合曲线

$$y=3.072e^{0.505\,6x}$$

例 32　求超定方程组

$$\begin{cases}2x_1+4x_2=11\\3x_1-5x_2=3\\x_1+2x_2=6\\2x_1+x_2=7\end{cases}\tag{1}$$

的最小二乘解，并求误差平方和.

分析　求解矛盾方程组 $\boldsymbol{AX=b}$，可直接求解正则方程组 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$.

解　方程组（1）写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}2&4\\3&-5\\1&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\3\\6\\7\end{bmatrix}$$

正规方程组为

$$\begin{bmatrix}2&3&1&2\\4&-5&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\3&-5\\1&2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&1&2\\4&-5&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\3\\6\\7\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}18&-3\\-3&46\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}51\\48\end{bmatrix}$$

解得

$$x_1 = 3.040\,3, \quad x_2 = 1.241\,8$$

误差平方和

$$E = (11-2x_1-4x_2)^2 + (3-3x_1+5x_2)^2 + (6-x_1-2x_2)^2 + (7-2x_1-x_2)^2$$
$$= 0.340\,66$$

三、综合复习题

1．已知 $\sqrt{4}=2,\quad \sqrt{9}=3,\quad \sqrt{16}=4$，求 $\sqrt{7}$ 的近似值.

2．有下列正弦函数表

x	0.5	0.6	0.7
Sin$x$	0.479 43	0.564 64	0.644 22

试分别用线性插值与二次插值求 sin0.578 91 的近似值，并估计误差.

3．利用反插值法求方程 $x^4-6x^2+12x-8=0$ 在区间[1，2]内的根.

4．设 $f(x)=2x^4+x^3-1$，试用 Lagrange 插值余项定理写出以-1，0，1，2 为插值节点的三次插值多项式.

5．证明：对于 $f(x)$的以 x_0，x_1 为节点的一次插值多项式 $P_1(x)$，插值误差为

$$|f(x)-P_1(x)| \le \frac{(x_1-x_0)^2}{8}\max_{x\in[x_0,x_1]}|f''(x)|, \quad x\in[x_0,x_1]$$

6．若 $f(x)=x^7+x^3+1$，求 $[2^0,2^1,\cdots,2^7]$ 和 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$.

7．对任意的整数 $n>0$，$0\le k\le n-1$，证明恒等式

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{i^k}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}(i-j)}=0$$

8．给定数据表

x_i	1	2	4	6	7
$f(x_i)$	4	1	0	1	1

求 4 次 Newton 插值多项式，并写出插值余项.

9．有如下列表函数

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	3	6	11	18	27

试写出此列表函数的向前差分表，并写出 Newton 向前插值公式.

10．已知函数 $y=f(x)$的函数表

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1.00	1.32	1.68	2.08	2.52	3.00

试列出相应的向后差分表，并写出 Newton 向后插值公式，用其估值 $f(0.45)$.

11．证明：（1）$\Delta(f_i g_i)=f_i\Delta g_i+g_{i+1}\Delta f_i$

（2）$\Delta\left(\dfrac{f_i}{g_i}\right)=\dfrac{g_i\Delta f_i-f_i\Delta g_i}{g_i g_{i+1}}$

12．已知单调连续函数 $y=f(x)$的下列数据

x_i	−1.1	0.0	1.2	2.1
y_i	−2.20	−1.10	1.00	2.10

用插值法计算当 x 为何值时，$f(x)\approx 0$.

13．给出 $f(x)=\cos x$ 的等距节点函数表，如用线性插值计算 $f(x)$的近似值，使其误差不大于 $\dfrac{1}{2}\times 10^{-5}$，则函数表的步长应取多少？

14．设 x_0, x_1 为互不相同的节点，$f(x)$为已知函数，求不超过二次的多项式 $H_2(x)$，使满足条件：

$$H_2(x_0)=f(x_0),\quad H_2(x_1)=f(x_1),\quad H_2'(x_0)=f'(x_0)$$

并估计误差.

15．求一个次数≤3 的多项式 $H_3(x)$，满足插值条件：

x_i	1	2	3
y_i	2	4	12
y_i'		3	

并估计误差.

16．求一个三次多项式 $P_3(x)$，使在节点 $x_0=0$，$x_1=1$ 上满足条件 $P_3(0)=f(0)=0$，$P_3(1)=f(1)=1$，$P_3'(0)=f'(0)=-3$，$P_3'(1)=f'(1)=9$，并估计余项.

17．已知函数 $y=f(x)$的函数表如下：

x	0	1	4	5
$f(x)$	0	-2	-8	-4

在区间[0, 5]上求满足条件 $S'(0)=\dfrac{5}{2}$，$S'(5)=\dfrac{19}{4}$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并分别计算 $S(x)$在 $x=0.5, 3, 5$ 处的值.

18．判定函数 $1, x, x^2-\dfrac{1}{3}$ 在[−1，1]上两两正交，并求一个三次多项式，使其在

[−1，1]上与上述函数两两正交.

19．已知 Legendre 多项式 $P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，试在二次多项式类 $\Phi=\mathrm{span}\{1,x^2\}$ 中求一多项式 $\bar{P}_2(x)$，使其成为 $f(x)=e^x$ 在[−1，1]上的最佳平方逼近函数。

20．求函数 y=arctan$x$ 在[0, 1]上的一次最佳平方逼近多项式.

21．设在[−1，1]上，$\varphi(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5$，试将 $\varphi(x)$ 按 Chebyshev 多项式降为三次式，使估计误差.

22．给出数据表

x	−1.00	−0.75	−0.50	−0.25	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y	−0.220 9	0.329 5	0.882 6	1.439 2	2.000 3	2.564 5	3.133 4	3.706 1	4.283 6

希望用一次、二次和三次多项式，用最小二乘法拟合这些数据，并写出拟合法方程组.

23．单原子波函数的形式为 $y=ae^{-bx}$，试按最小二乘法决定参数 a，b. 已知数据如下：

x	0	1	2	3
y	2.010	1.210	0.740	0.450

四、复习题答案

1．$\sqrt{7}\approx 2.628\,6$

2．线性插值：取节点 x_0=0.5，x_1=0.6，$\sin 0.578\,91\approx 0.546\,67$，$|R_1(0.578\,91)| \le 4.7\times 10^{-4}$

二次插值：$\sin 0.578\,91\approx 0.547\,14$, $|R_2(0.578\,91)|<2.95\times 10^{-5}$

3．1.2361

4．$L_3(x)=5x^3+2x^2-4x-1$

6．$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=1$，$f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=0$

7．提示：仿照例 11 的证明.

8．$N_4(x)=4-3(x-1)+\frac{5}{6}(x-1)(x-2)-\frac{7}{60}(x-1)(x-2)(x-4)$

$$+\frac{1}{180}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)$$

插值余项 $f(x)-N_4(x)=\dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-1)(x-2)(x-4)(x-6)(x-7)$

9．向前差分表

i	x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0	0	3	3	2	0	0
1	1	6	5	2	0	
2	2	11	7	2		
3	3	18	9			
4	4	27				

$N_4(x)=N_4(x_0+th)=3+\dfrac{3}{1!}t+\dfrac{2}{2!}t(t-1)$

10．向后差分表为

i	x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^4 f_i$	$\nabla^5 f_i$
0	0.0	1.00					
1	0.1	1.32	0.32				
2	0.2	1.68	0.36	0.04			
3	0.3	2.08	0.40	0.04	0		
4	0.4	2.52	0.44	0.04	0	0	
5	0.5	3.00	0.48	0.04	0	0	0

Newton 向后插值公式为

$$N_4(x)=N_4(x_5+th)=N_4(0.5+0.1t)=3.00+0.48t+\frac{0.04}{2!}t(t+1)$$

$$=3+0.5t+0.02t^2$$

当 x=0.45 时，t=(0.45−0.5)/0.1=−0.5， $f(0.45)\approx N_4(0.45)=2.755$

12．x=0.65712

13． $h\le 2\sqrt{10}\times 10^{-3}$

14． $H_2(x)=f(x_0)\dfrac{(x_1-x)(x_1+x-2x_0)}{(x_1-x_0)^2}+f(x_1)(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0})^2+f'(x_0)\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)}$

$$R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^2(x-x_1)$$

15． $H_3(x)=2x^3-9x^2+15x-6,\quad R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)^2(x-3)$

16． $P_3(x)=4x^3-3x\quad R(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^2(x-1)^2$

17． $$S(x)=\begin{cases}\dfrac{9}{4}x^3-\dfrac{27}{4}x^2+\dfrac{5}{2}x & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{7}{2}x+2 & 1\le x<4\\ -\dfrac{3}{4}x^3+\dfrac{45}{4}x^2-\dfrac{103}{2}x+66 & 4\le x\le 5\end{cases}$$

$S(0.5)=-0.156\,25\quad S(3)=-8\quad S(5)=-191.5$

18． $P_3(x)=-\dfrac{3}{5}a_3x+a_3x^3$

19． $\bar{P}_2(x)=0.996\,3+0.536\,6x^2$

20． $S^*(x)=0.042\,909+0.791\,831x$

21． $P_3(x)=\dfrac{1}{384}(382+383x+208x^2+68x^3)$

$|R(x)|<0.005\,8$

22．用一次多项式 $P_1(x)=a_0+a_1x$ 拟合的正则方程组为

$$\begin{cases}9a_0=18.118\,3\\ \qquad 3.75a_1=8.443\,7\end{cases}$$

用二次多项式 $P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 拟合的正则方程组为

$$\begin{cases}9a_0 \qquad\qquad +3.75a_2=18.118\,3\\ \qquad 3.75a_1=8.443\,7\\ 3.75a_0 \qquad\qquad +2.765\,6a_2=7.586\,96\end{cases}$$

用三次多 $P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 拟合的法方程组为

$$\begin{cases}9a_0 \qquad\qquad +3.75a_2=18.118\,3\\ \qquad 3.75a_1 \qquad\qquad +2.765\,6a_3=8.443\,7\\ 3.75a_0 \qquad\qquad +2.765\,6a_2=7.586\,9\\ \qquad 2.765a_1 \qquad\qquad +2.387\,7a_3=6.282\,0\end{cases}$$

23．提示：对 $y=ae^{-bx}$ 两边取对数得 $\ln y=\ln a-bx$

记 $Y=\ln y$，$a_0=\ln a$，$a_1=-b$，则拟合函数变为 $Y=a_0+a_1x$

对数据表进行转化，进行直线拟合，得

$$Y=0.594\,6-0.369\,9x$$

$$y=e^Y=e^{0.594\,6-0.369\,9x}=1.812\,3e^{-0.369\,9x}$$