计　算　方　法

实验一 Lagrange 插值

姓名　　郭茁宁

学号　　1183710109

院系　　计算机科学与技术学院

专业　　软件工程

哈尔滨工业大学

实验报告一

1.题目（摘要）

利用拉格朗日插值多项式$P_n(x)$求$f(x)$的近似值

输　　入：$n+1$个数据点$(x_k,f(x_k))$，$k=0,1,\cdots,n$；插值点x

输　　出：$f(x)$在插值点x的近似值$P_n(x)$

- 问题 1：拉格朗日插值多项式的次数n越大越好吗？
- 问题 2：插值区间越小越好吗？
- 问题 3：在区间$[-1,1]$考虑拉格朗日插值问题，为了使得插值误差较小，应如何选取插值节点？
- 问题 4：考虑拉格朗日插值问题，内插比外推更可靠吗？

2.前言（目的和意义）

目的：利用拉格朗日插值多项式$P_n(x)$求$f(x)$的近似值

意义：学习根据实际问题建立的数学模型，针对数学模型的特点确定适当的计算方法，编制出计算机能够执行的计算程序，输入计算机，进行调试，完成运算等数值计算的过程。不只会套用教科书中的标准程序进行数值计算，独立地将学过的数值算法编制成计算机程序，灵活应用已经掌握的算法求解综合性较大的课题。理解数值计算程序结构化的思想，提高编程能力，加深对“计算方法”课程内容的理解和掌握，进一步奠定从事数值计算工作的基础。具体可以利用所掌握的“高级语言”顺利地编制出计算机程序，上机实习，完成实验环节的教学要求。不简单地套用现成的标准程序完成实验题目，把重点放在对算法的理解、程序的优化设计、上机调试和计算结果分析上，达到实验课的目的。

3.数学原理

给定平面上$n+1$个不同的数据点$(x_k, f(x_k))$，$k=0,1,\cdots,n$，$x_i \neq x_j$，$i \neq j$；则满足条件

$$P_n(x_k) = f(x_k), \qquad k=0,1,\cdots,n$$

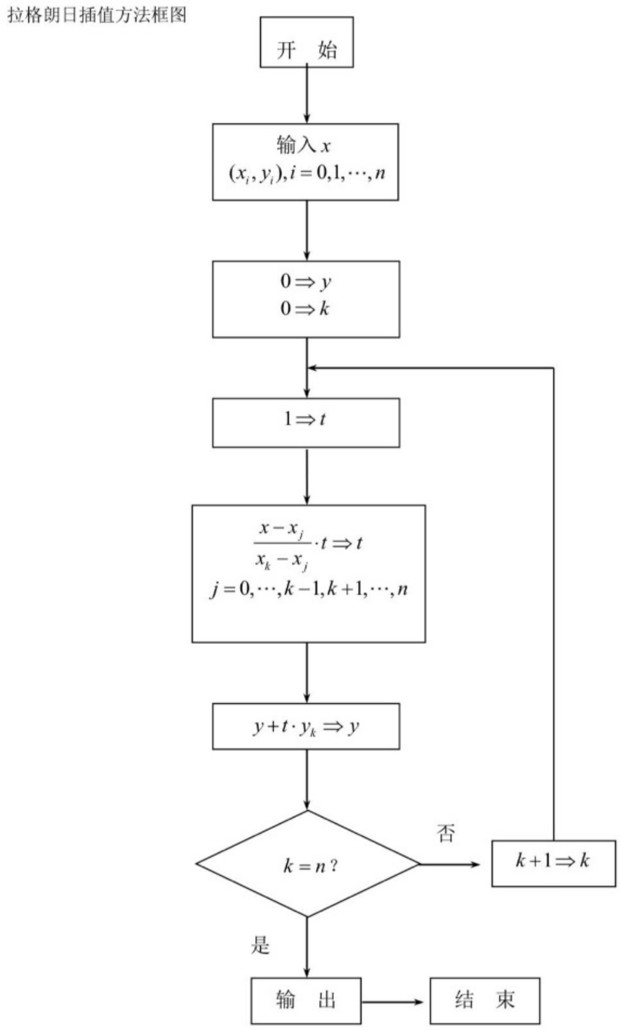
的n次拉格朗日插值多项式

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_k(x)$$

是存在唯一的。若$x_k \in [a,b], k=0,1,\cdots,n$，且函数$f(x)$充分光滑，则当$x \in [a,b]$时，有误差估计式

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \qquad \xi \in [a,b]$$

4.程序设计流程



核心代码：

```
    double x, y = 0.0;
    scanf("%lf", &x);
    double a[N + 1], b[N + 1];
    int n = 0;
    while (scanf("%lf%lf", &a[n], &b[n]) >= 2) n++;
    n--;
    for (int k = 0; k <= n; k++) {
        double l = 1.0;
        for (int j = 0; j <= n; j++) {
            if (j != k) l *= (x - a[j]) / (a[k] - a[j]);
        }
        y += l * b[k];
    }
    printf("x = %.3lf\ny = %.3lf", x, y);
```

测试框架（批量分析）：

```cpp
#include <cmath>
#include <cstdio>
#define N1 3   // n amount
#define N2 4   // x amount
#define N3 20  // n max
int Ns[N1] = {5, 10, 20};
double x[N2] = {-0.95, -0.05, 0.05, 0.95};
double l = -1.0;
double r = 1.0;
double X(int k, int n) {
    double h = (r - l) / n;
    return l + k * h;
}
double Y(double x) { return pow(2.718281828459, x); }
int main() {
    for (int i = 0; i < N2; i++) printf("\tx=%.2lf", x[i]);
    printf("\n");
    for (int i = 0; i < N1; i++) {
        double a[N3 + 1], b[N3 + 1];
        int n = Ns[i];
        for (int k = 0; k <= n; k++) {
            a[k] = X(k, n);  // x
            b[k] = Y(a[k]);  // y
        }
        printf("n=%d", n);
        for (int p = 0; p < N2; p++) {
            double y = 0.0;
            for (int k = 0; k <= n; k++) {
                double l = 1.0;
                for (int j = 0; j <= n; j++) {
                    if (j != k) l *= (x[p] - a[j]) / (a[k] - a[j]);
                }
                y += l * b[k];
            }
            printf("\t%.6lf", y);
        }
        printf("\n");
    }
    printf("Actual");
    for (int p = 0; p < N2; p++) printf("\t%.6lf", Y(x[p]));
    return 0;
}
```

5.实验结果、结论与讨论

问题 1

- 拉格朗日插值多项式的次数n越大越好吗？

（1）设$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$x\in[-5,5]$，考虑等距节点的拉格朗日插值多项式$P_n(x)$，即将区间$[-5,5]$进行n等分，记$h=\frac{10.0}{n}$，$x_k=-5.0+k\cdot h$，$k=0,1,\cdots,n$，构造$P_n(x)$，利用拉格朗日插值多项式$P_n(x)$作为$f(x)$的近似值。分别取$n=5$，$n=10$，$n=20$，同时计算$P_n(x)$在$x=0.75$，$x=1.75$，$x=2.75$，$x=3.75$，$x=4.75$处的函数值。

	$x=0.75$	$x=1.75$	$x=2.75$	$x=3.75$	$x=4.75$
$n=5$	0.528974	0.373325	0.153733	−0.025954	−0.015738
$n=10$	0.678990	0.190580	0.215592	−0.231462	1.923631
$n=20$	0.636755	0.238446	0.080660	−0.447052	−39.952449
$Actual$	0.640000	0.246154	0.116788	0.066390	0.042440

（2）设$f(x)=e^x$，$x\in[-1,1]$，考虑等距节点的拉格朗日插值多项式$P_n(x)$，即将区间$[-1,1]$进行n等分，记$h=\frac{2.0}{n}$，$x_k=-1.0+k\cdot h$，$k=0,1,\cdots,n$，构造$P_n(x)$，利用拉格朗日插值多项式$P_n(x)$作为$f(x)$的近似值。分别取$n=5$，$n=10$，$n=20$，同时计算$P_n(x)$在$x=-0.95$，$x=-0.05$，$x=0.05$，$x=0.95$处的函数值。

	$x=-0.95$	$x=-0.05$	$x=0.05$	$x=0.95$
$n=5$	0.386798	0.951248	1.051290	2.585785
$n=10$	0.386741	0.951229	1.051271	2.585710
$n=20$	0.386741	0.951229	1.051271	2.585710
$Actual$	0.386741	0.951229	1.051271	2.585710

结论：

拉格朗日插值多项式的次数不是越多越好。在上述实验中$n=5$或$n=10$的匹配效果也不错。根据定义，插值点可以在节点处与实际函数匹配，但不能保证在节点之间逼近实际函数，插值次数越高，插值结果越偏离原函数的现象称为多项式摆动 Runge 现象。

问题 2

- 插值区间越小越好吗？

（1）设$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in[-1,1]$，考虑等距节点的拉格朗日插值多项式$P_n(x)$，即将区间$[-1,1]$进行n等分，记$h=\frac{2.0}{n}$，$x_k=-1.0+k\cdot h$，$k=0,1,\cdots,n$，构造$P_n(x)$，利用拉格朗日插值多项式$P_n(x)$作为$f(x)$的近似值。分别取$n=5$，$n=10$，$n=20$，同时计算$P_n(x)$在$x=-0.95$，$x=-0.05$，$x=0.05$，$x=0.95$处的函数值。

	$x=-0.95$	$x=-0.05$	$x=0.05$	$x=0.95$
$n=5$	0.517147	0.992791	0.992791	0.517147
$n=10$	0.526408	0.997507	0.997507	0.526408
$n=20$	0.525620	0.997506	0.997506	0.525620
$Actual$	0.525624	0.997506	0.997506	0.525624

（2）设$f(x)=e^x$，$x\in[-5,5]$，考虑等距节点的拉格朗日插值多项式$P_n(x)$，即将区间$[-5,5]$进行n等分，记$h=\frac{2.0}{n}$，$x_k=-1.0+k\cdot h$，$k=0,1,\cdots,n$，构造$P_n(x)$，利用拉格朗日插值多项式$P_n(x)$作为$f(x)$的近似值。分别取$n=5$，$n=10$，$n=20$，同时计算$P_n(x)$在$x=-4.75$，$x=-0.25$，$x=0.25$，$x=4.75$处的函数值。

	$x=-4.75$	$x=-0.25$	$x=0.25$	$x=4.75$
$n=5$	1.147035	2.449187	4.290398	123.911405
$n=10$	−0.001957	0.776730	2.060874	117.668234
$n=20$	0.008652	0.787452	2.071478	117.655762
$Actual$	0.008652	0.778801	1.284025	115.584285

结论：

在分段段数相同的情况下，插值区间越大，误差越大；原因是在较大的区间里，相较于更小的空间变化更大，因此越小的区间函数摆动较小、误差较小。

问题 3

- 在区间$[-1,1]$考虑拉格朗日插值问题，为了使得插值误差较小，应如何选取插值节点？

（1）设$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$x\in[-1,1]$，考虑非等距节点的拉格朗日插值多项式$P_n(x)$，记$x_k=cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$，$k=0,1,\cdots,n$，构造$P_n(x)$，利用拉格朗日插值多项式$P_n(x)$作为$f(x)$的近似值。分别取$n=5$，$n=10$，$n=20$，同时计算$P_n(x)$在$x=-0.95$，$x=-0.05$，$x=0.05$，$x=0.95$处的函数值。

	$x=-0.95$	$x=-0.05$	$x=0.05$	$x=0.95$
$n=5$	0.523881	0.987881	0.987881	0.523881
$n=10$	0.525682	0.997509	0.997509	0.525682
$n=20$	0.525624	0.997506	0.997506	0.525624
Actual	0.525624	0.997506	0.997506	0.525624

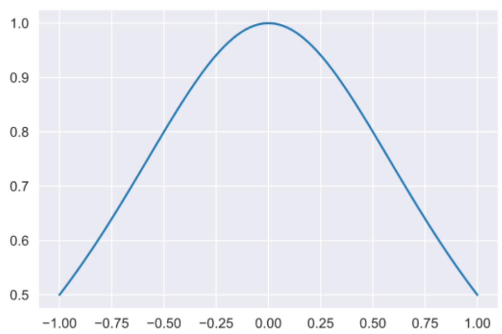
（2）设$f(x)=e^x$，$x\in[-1,1]$，考虑非等距节点的拉格朗日插值多项式$P_n(x)$，记$x_k=cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$，$k=0,1,\cdots,n$，构造$P_n(x)$，利用拉格朗日插值多项式$P_n(x)$作为$f(x)$的近似值。分别取$n=5$，$n=10$，$n=20$，同时计算$P_n(x)$在$x=-0.95$，$x=-0.05$，$x=0.05$，$x=0.95$处的函数值。

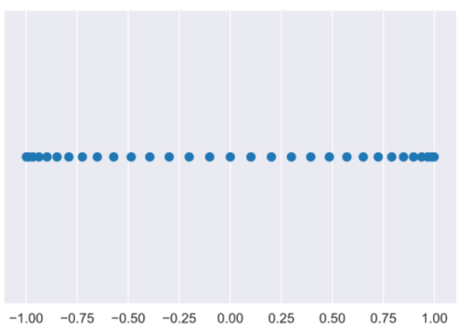
	$x=-0.95$	$x=-0.05$	$x=0.05$	$x=0.95$
$n=5$	0.386754	0.951272	1.051314	2.585727
$n=10$	0.386741	0.951229	1.051271	2.585710
$n=20$	0.386741	0.951229	1.051271	2.585710
Actual	0.386741	0.951229	1.051271	2.585710

结论：

两个函数的插值效果都很好，以第一个函数为例。

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$函数和$x_k=cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$函数图像如下：





可以看出在$f(x)$变化较快（斜率较大）的区间内，x_k取值较多，因此插值效果较好。第二个函数同理。

问题 4

（1）设$f(x)=\sqrt{x}$，关于以$x_0=1$，$x_1=4$，$x_2=9$为节点的拉格朗日插值多项式$P_2(x)$，利用拉格朗日插值多项式$P_2(x)$作为$f(x)$的近似值。同时计算$P_2(x)$在$x=5$，$x=50$，$x=115$，$x=185$处的函数值。

	$x=5.00$	$x=50.00$	$x=115.00$	$x=185.00$
Estimate	2.253968	53.111111	892.642857	4159.253968
Actual	2.236068	7.071068	10.723805	13.601471

（2）设$f(x)=\sqrt{x}$，关于以$x_0=36$，$x_1=49$，$x_2=64$为节点的拉格朗日插值多项式$P_2(x)$，利用拉格朗日插值多项式$P_2(x)$作为$f(x)$的近似值。同时计算$P_2(x)$在$x=5$，$x=50$，$x=115$，$x=185$处的函数值。

	$x=5.00$	$x=50.00$	$x=115.00$	$x=185.00$
Estimate	2.898998	7.071267	10.883242	16.642857
Actual	2.236068	7.071068	10.723805	13.601471

（3）设$f(x)=\sqrt{x}$，关于以$x_0=100$，$x_1=121$，$x_2=144$为节点的拉格朗日插值多项式$P_2(x)$，利用拉格朗日插值多项式$P_2(x)$作为$f(x)$的近似值。同时计算$P_2(x)$在$x=5$，$x=50$，$x=115$，$x=185$处的函数值。

	$x=5.00$	$x=50.00$	$x=115.00$	$x=185.00$
Estimate	3.958598	7.180281	10.723574	13.605634
Actual	2.236068	7.071068	10.723805	13.601471

（4）设$f(x)=\sqrt{x}$，关于以$x_0=169$，$x_1=196$，$x_2=225$为节点的拉格朗日插值多项式$P_2(x)$，利用拉格朗日插值多项式$P_2(x)$作为$f(x)$的近似值。同时计算$P_2(x)$在$x=5$，$x=50$，$x=115$，$x=185$处的函数值。

	$x=5.00$	$x=50.00$	$x=115.00$	$x=185.00$
Estimate	4.821202	7.501888	10.753297	13.601311
Actual	2.236068	7.071068	10.723805	13.601471

结论：

由对比可知，内插时插值收敛于实际函数值，超出内插范围插值会发散，且距离插值区间越远外推误差越大；不同取值时外推的插值也差别巨大，说明外推具有极大不确定性。