第六章　解线性方程组的直接解法

直接解法是解线性方程组的重要方法．它是指通过有限步的算术运算求出精确解的方法（若计算过程没有舍入误差）．其基本思想是通过等价变换将线性方程组化为结构简单、易于求解的形式，从而求解．

一、内容要点

对于线性方程组

$$\boldsymbol{AX=b}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

若系数阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，则方程组有唯一解．本章给出了此唯一解的直接解法．

1．消去法

（1）Jordan 消去法

对 $k=1,2,\cdots,(n-1),n$，依次计算

$$\begin{cases} a_{kj}^{(k)}=a_{kj}^{(k-1)} \\ b_k^{(k)}=b_k^{(k-1)} \end{cases} \qquad (j=k,k+1,\cdots,n)$$

$$\begin{cases} l_{ik}=a_{ik}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} \\ a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}-l_{ik}a_{kj}^{(k-1)} & (j=k+1,k+2,\cdots,n) \\ b_i^{(k)}=b_i^{(k-1)}-l_{ik}b_k^{(k-1)} & (i=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n) \end{cases} \tag{6-1}$$

$$x_i=b_i^{(n)}/a_{ii}^{(n)} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{6-2}$$

（2）Gauss 消去法

1° 消元过程

对 $k=1,2,\cdots,(n-1)$，依次计算

$$\begin{cases} l_{ik} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik} a_{kj}^{(k-1)} \\ b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - l_{ik} b_k^{(k-1)} \end{cases} \qquad (i, j = k+1, k+2, \cdots, n) \tag{6-3}$$

2° 回代过程

$$x_i = (b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j) / a_{ii}^{(i-1)} \quad (i = n, n-1, \cdots, 1) \tag{6-4}$$

（3）选列主元的 Gauss 消去法

Gauss 消去法能够进行到底的条件是各步的主元素 $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. 另外既使主元素 $a_{kk}^{(k-1)}$ 不为零，但如果主元素 $a_{kk}^{(k-1)}$ 的绝对值很小，用它作除数，势必造成舍入误差的严重扩散，以致于方程组的解的精度受到严重影响，为此引入选列主元的方法，选列主元的具体方法如下：

对方程组 ***AX=b*** 仍按 $x_1, x_2, \cdots$ 的顺序依次消元，只是在每一步消元前都增加一步按列选主元的工作，如第 k 步消元前，就所有 $a_{\mu k}^{(k-1)} (\mu = k, k+1, \cdots, n)$，取绝对值最大值，设 $\left|a_{lk}^{(k-1)}\right| = \max\limits_{k \le \mu \le n} \left|a_{\mu k}^{(k-1)}\right|$，将第 l 个方程与第 k 个方程互换位置，这样 $a_{lk}^{(k-1)}$ 成为第 k 步的主元素，然后进行第 k 步消元. 每步消元都如此，最后再进行回代过程，得出方程组的解.

选列主元的 Gauss 消去法能压制计算过程中舍入误差的增长，减少舍入误差对计算结果的影响.

2. 矩阵三角分解法

定理 6.1　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$，$\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式均不等于零 $\Leftrightarrow$ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 存在唯一的分解式

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LDR}$$

其中 ***L*** 是单位下三角阵，***R*** 是单位上三角阵，***D*** 是对角阵. 这种分解称为 ***A*** 的 ***LDR*** 分解.

1° 若把 ***D*** 并入 ***R***，则有分解

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{DR}) = \boldsymbol{LU}$$

其中 ***L*** 是单位下三角阵，***U*** 是上三角阵. 称此分解为 A 的 Doolittle 分解.

2° 若把 ***D*** 并入到 ***L*** 中，则有分解

$$\boldsymbol{A} = \tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{U}}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 是下三角阵，$\tilde{\boldsymbol{U}}$ 为单位上三角阵，这种分解称为矩阵 ***A*** 的 Crout 分解.

3° 如果 ***A*** 是对称的，则 ***A*** 可分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDL}^T$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 为单位下三角阵，$\boldsymbol{D}$ 为对角阵.

4° 如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定对称的，则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为

$$\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{L}}^T$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 为对角元全为正的下三角阵，称此分解为平方根分解或 Cholesky 分解.

（1）直接三角分解法

i）分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$，其中 $\boldsymbol{L}$ 为单位下三角阵，$\boldsymbol{U}$ 为上三角阵. 其分解公式为

对 $k=1,2,3,\cdots,n$，计算

$$\begin{cases} u_{kj}=a_{kj}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj} & (j=k,k+1,\cdots,n) \\ l_{ik}=(a_{ik}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk})\Big/u_{kk} & (i=k+1,k+2,\cdots,n) \end{cases} \tag{6-5}$$

其中 $\sum\limits_{1}^{0}=0$.

ii）求解方程组 $\boldsymbol{LY}=\boldsymbol{b}$，其计算公式为

$$y_k=b_k-\sum_{r=1}^{k-1}l_{kr}y_r \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{6-6}$$

其中 $\sum\limits_{1}^{0}=0$.

iii）求解方程组 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{Y}$，其计算公式为

$$x_k=(y_k-\sum_{r=k+1}^{n}u_{kr}x_r)\Big/u_{kk} \quad (k=n,n-1,\cdots,2,1) \tag{6-7}$$

其中 $\sum\limits_{n+1}^{n}=0$.

（2）平方根（Cholesky 分解）法

平方根法是用于解系数矩阵为对称正定矩阵的线性代数方程组，其计算步骤如下：

i）对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行 Cholesky 分解 $\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{L}}^T$，其分解公式为

对 $k=1,2,\cdots,n$，计算

$$\begin{cases} \tilde{l}_{kk} = (a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} \tilde{L}_{kr}^2)^{1/2} \\ ?\tilde{l}_{ik} = \ a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} \tilde{l}_{ir}\tilde{l}_{kr}) / \tilde{l}_{kk} \quad (i = k+1, k+2, \cdots, n) \end{cases} \tag{6-8}$$

其中 $\sum_{1}^{0} = 0$

这里 $\tilde{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & & & \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tilde{l}_{n1} & \tilde{l}_{n2} & \cdots & \tilde{l}_{nn} \end{bmatrix}$

ii）求解方程组 $\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{b}$．即

$$y_k = \left(b_k - \sum_{r=1}^{k-1} \tilde{l}_{kr} y_r \right) \Big/ \tilde{l}_{kk} \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{6-9}$$

其中 $\sum_{r=1}^{0} = 0$

iii）求解方程组 $\tilde{\boldsymbol{L}}^T \boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$．即

$$x_k = (y_k - \sum_{r=k+1}^{n} \tilde{l}_{rk} x_r) \Big/ \tilde{l}_{kk} \quad (k = n, n-1, \cdots, 2, 1) \tag{6-10}$$

其中 $\sum_{r=n+1}^{n} = 0$

（3）解三对角方程组的追赶法

设方程组

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{d}$$

它的系数方阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个阶数较高的三对角方阵.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & c_n \end{bmatrix}$$

简记 $\boldsymbol{A}=[a_i,b_i,c_i]_1^n$，上述方程组称为三对角方程组.

i）对 $\boldsymbol{A}$ 进行分解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$$

其中

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ \alpha_2 & 1 & & & \\ & \alpha_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_n & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_1 & & & \\ & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ & & & & \beta_n\end{bmatrix}$$

计算 α_i， β_i， γ_i 的计算公式为

$$\begin{cases}\beta_1=b_1,\ \gamma_i=c_i,\quad (i=1,2,\cdots,n-1) \\ \alpha_i=\dfrac{a_i}{\beta_{i-1}},\ \beta_i=b_i-\alpha_i\gamma_{i-1}\quad (i=2,\cdots,n)\end{cases} \tag{6-11}$$

ii）求解 $\boldsymbol{LY}=\boldsymbol{d}$. 即

$$\begin{aligned}&y_1=d_1 \\ &y_i=d_i-\alpha_i y_{i-1}\quad (i=2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{6-12}$$

iii）解 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{Y}$. 即

$$\begin{aligned}&x_n=y_n/\beta_n \\ &x_i=(y_i-c_i x_{i+1})/\beta_i\quad (i=n-1,n-2,\cdots,1)\end{aligned} \tag{6-13}$$

3．向量、矩阵的范数及方程组的性态

（1）向量的范数

若对任一 n 维向量 X，对应一个实数 $\|\boldsymbol{X}\|$，满足如下条件

（Ⅰ）非负性：$\|\boldsymbol{X}\|\geq 0$ 且 $\|\boldsymbol{X}\|=0\Leftrightarrow \boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$；

（Ⅱ）齐次性：$\|\lambda\boldsymbol{X}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{X}\|\quad(\forall\lambda\in\boldsymbol{R})$；

（Ⅲ）三角不等式：$\|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\|\leq\|\boldsymbol{X}\|+\|\boldsymbol{Y}\|\quad(\forall\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{R}^{n})$

则称 $\|\boldsymbol{X}\|$ 为向量 $\boldsymbol{X}$ 的一种范数.

设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，最常用的向量范数是 p 一范数 $\|\boldsymbol{X}\|_p\ (p=1,2,\infty)$

其中

1-范数：$\|\boldsymbol{X}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

2-范数：$\|\boldsymbol{X}\|_2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

∞-范数：$\|\boldsymbol{X}\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

（2）矩阵的范数

若对任一 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，对应一个实数 $\|\boldsymbol{A}\|$，满足以下条件

（Ⅰ）非负性：$\|\boldsymbol{A}\|\ge 0$，且 $\|\boldsymbol{A}\|=0\Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$；

（Ⅱ）齐次性：$\|\lambda\boldsymbol{A}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{A}\|\quad(\forall\lambda\in R)$；

（Ⅲ）三角不等式：$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\le\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|$ （$\forall n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$）；

（Ⅳ）$\|\boldsymbol{AB}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|$.

则称 $\|\boldsymbol{A}\|$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一种范数.

考虑到矩阵范数总是与向量范数联系在一起的. 对于给定向量范数 $\|\cdot\|$ 和矩阵范数 $\|\square\|$，如果对任一个 n 维向量和任一 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，都有不等式

$$\|\boldsymbol{AX}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{X}\|$$

成立，则称所给的矩阵范数与向量范数是相容的.

下面给出一种定义矩阵范数的方法，它是由向量范数诱导出来的，且这种矩阵范数与向量范数是相容的.

设 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 和 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，且给定一种向量范数 $\|\boldsymbol{X}\|$，则定义

$$\|\boldsymbol{A}\|_p=\max_{\boldsymbol{X}\ne 0}\frac{\|\boldsymbol{AX}\|_p}{\|\boldsymbol{X}\|_p}\quad\text{或}\quad\|\boldsymbol{A}\|_p=\max_{\|\boldsymbol{X}\|=1}\|\boldsymbol{AX}\|_p$$

为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的范数，并称为 $\boldsymbol{A}$ 的算子范数.

与向量 1-范数，2-范数，∞-范数相容的三种常用方阵范数分别为

定理 6.2 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，则

1-范数：$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

2-范数：$\|\boldsymbol{A}\|_2=(\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}))^{\frac{1}{2}}$

∞-范数：$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

其中 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

（3）矩阵的谱半径

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则称

$$\rho(\boldsymbol{A})=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径（$|\lambda_i|$ 为 λ_i 的模）.

定理 6.3 对于 $\|\cdot\|_p\ (p=1,2,\infty)$，都有

$$\rho(\boldsymbol{A})\le\|\boldsymbol{A}\|_p$$

（4）矩阵的条件数

设 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，称数

$$\boldsymbol{cond}(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数.

对于一个确定的线性方程组，系数矩阵的条件数较小（接近 1）时，方程组是良态的；反之，条件数较大（>>1）时，则称方程组是病态的. 条件数越大，则病态越严重. 条件数的值刻划了方程组病态的程度. 用一个稳定的方法去解一个良态方程组，必然得到精度很高的解. 同样，用一个稳定的方法去解一个病态方程组，结果就可能很差.

二、题型分析与解题方法

例 1 用 Jordan 消去法解方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&-2\\-2&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

解 Jordan 消元过程用矩阵表示为

$$\left[\boldsymbol{A}^{(0)}\vdots\boldsymbol{b}^{(0)}\right]=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\1&2&-2&0\\-2&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{第一步}}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&-1\\0&3&-1&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二步}}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&-1&-1\\0&0&2&6\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{第三步}}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&2\\0&0&2&6\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{A}^{(3)}\vdots\boldsymbol{b}^{(3)}\right]$$

故得 $x_1=2$，$x_2=2$，$x_3=3$，即 $\boldsymbol{X}=(2, 2, 3)^{\mathrm{T}}$

例 2 利用（顺序）Gauss 消去法求解方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1&-2\\2&5&3&-2\\-2&-2&3&5\\1&2&2&4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\7\\-1\\0\end{bmatrix}$$

解 （1）消元过程用矩阵表示为

$$\left[\boldsymbol{A}^{(0)}\vdots\boldsymbol{b}^{(0)}\right]=\begin{bmatrix}1&2&1&-2&4\\2&5&3&-2&7\\-2&-2&3&5&-1\\1&2&2&4&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-2r_1\\r_3+2r_1\\r_4-r_1}]{\text{第一步}}\begin{bmatrix}1&2&1&-2&4\\0&1&1&2&-1\\0&2&5&1&7\\0&0&1&6&-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{\text{第二步}}\begin{bmatrix}1&2&1&-2&4\\0&1&1&2&-1\\0&0&3&-3&9\\0&0&1&6&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-\frac{1}{3}r_3]{\text{第三步}}\begin{bmatrix}1&2&1&-2&4\\0&1&1&2&-1\\0&0&3&-3&9\\0&0&0&7&-7\end{bmatrix}$$

$$=\left[\boldsymbol{A}^{(3)}\vdots\boldsymbol{b}^{(3)}\right]$$

经三步消元后；原方程组化为同解的上三角形方程组 $\boldsymbol{A}^{(3)}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}^{(3)}$.

（2）回代过程

对方程组 $\boldsymbol{A}^{(3)}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}^{(3)}$ 自下而上按未知元 x_i 的下标逆序逐步回代得原方程组的解为 $x_4=-1, x_3=2, x_2=-1, x_1=2$，即 $\boldsymbol{X}=(2,-1,2,-1)^T$.

例 3 以二元线性方程组

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$$

为例，说明用 Gauss 消去法求解时为什么要选主元？

解 设 $a_{11}\neq 0$. Gauss 消去法过程如下：

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+(-l)r_1}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\0&a_{22}-la_{12}&b_2-lb_1\end{bmatrix}$$

其中 $l=\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$.

如果 a_{12} 有一个误差 ε_1，b_1 有一个误差 ε_2，则 Gauss 消去法结果如下

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}+\varepsilon_1&b_1+\varepsilon_2\\a_{21}&a_{22}&b_2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+(-l)r_1}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}+\varepsilon_1&b_1+\varepsilon_2\\&a_{22}-la_{12}-l\varepsilon_1&b_2-lb_1-l\varepsilon_2\end{bmatrix}$$

比较以上两式可知第 1 行的误差 ε_1、ε_2 放大了 l 倍传到第 2 行．如果 $|l|>1$，则误差放大了，且有可能造成大数“吃掉”小数的现象．所以在消元过程中要设法使得 $|l|\le 1$．具体来说，在消元之前，先比较增广矩阵第 1 列的两个元素．如果 $|a_{21}|>|a_{11}|$，则将增广矩阵的第 1 行元素和第 2 行元素互换，交换之后再进行消元．此时 $|l|\le 1$．

例 4　用选列主元素的 Gauss 法解下列方程组

（1）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}$

（2）$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 4 \\ -18 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

解　（1）消元过程用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ \boxed{2} & 4 & 1 & 13 \end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_1]{\text{选主元}}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+\left(-\frac{1}{2}\right)r_1]{\text{第一步消元}}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

得同解三角方程组

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3=13 \\ \qquad x_2+2x_3=8 \\ \qquad\quad \frac{5}{2}x_3=\frac{15}{2} \end{cases}$$

回代求解得

$$x_3=\left(\frac{15}{2}\right)\Big/\left(\frac{5}{2}\right)=3$$

$$x_2=8-2x_3=8-2\times 3=2$$

$$x_1=(13-4x_2-x_3)/2=(13-4\times 2-3)/2=1$$

即 $\boldsymbol{X}=(1,2,3)^T$

（2）消元过程用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 & 4 & 15 \\ \boxed{-18} & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_1]{\text{选主元}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 4 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+\frac{1}{18}r_1 \\ r_4+\frac{1}{6}r_1}]{\substack{\text{第一步消元} \\ r_2+\frac{2}{3}r_1}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & \frac{10}{3} & 5 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & \boxed{\frac{3}{2}} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 \leftrightarrow r_2]{\text{选主元}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & \frac{10}{3} & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+(-\frac{7}{9})r_2 \\ r_4+\frac{2}{3}r_2}]{\text{第二步消元}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{50}{27}} & \frac{8}{27} & \frac{50}{9} \\ 0 & 0 & \frac{14}{9} & \frac{35}{9} & \frac{14}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+(-\frac{21}{25})r_3]{\text{第三步消元}} \begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -1 & -15 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{50}{27} & \frac{8}{27} & \frac{50}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{91}{25} & 0 \end{bmatrix}$$

得同解上三角方程组

$$\begin{cases} -18x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -15 \\ \frac{3}{2}x_2 - \frac{7}{6}x_3 + \frac{5}{6}x_4 = -\frac{1}{2} \\ \frac{50}{27}x_3 + \frac{8}{27}x_4 = \frac{50}{9} \\ \frac{91}{25}x_4 = 0 \end{cases}$$

回代求解得 $x_4 = 0,\quad x_3 = 3,\quad x_2 = 2,\quad x_1 = 1$. 即 $\boldsymbol{X} = (1, 2, 3, 0)^T$

例 5 试用选列主元 Gauss 消去法求矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

的行列式.

分析 按列选主元后再用 Gauss 消去法化 $\boldsymbol{A}$ 为上三角阵，是求行列式的实用可靠方法.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ \boxed{4} & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_1]{\text{选主元}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2+(-\frac{1}{2})r_1 \\ r_4+(-\frac{1}{4})r_1}]{\text{第一步消元}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \boxed{3} & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_2]{\text{选主元}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{17}{4} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+(-\frac{1}{3})r_2 \\ r_4+(-\frac{1}{3})r_2}]{\text{第二步消元}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{13}{6}} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & \frac{5}{12} & \frac{59}{12} \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+(-\frac{5}{26})r_3]{\text{第三步消元}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{6} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{66}{13} \end{bmatrix}$$

所以 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^2\times 4\times 3\times(-\dfrac{13}{6})\times\dfrac{66}{13}=-132$

例 6 用 Jordan 消去法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆. 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

分析 对 $\boldsymbol{A}$ 及单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 同时施行消元过程，当 Jordan 消元过程结束时 $\boldsymbol{A}$ 化为对角阵，进而化为单位阵时，$\boldsymbol{I}$ 也就化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 由 Jordan 消元过程得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2+(-r_1) \\ r_3+2r_1}]{\text{第一步}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & \vdots & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+(-r_2) \\ r_3+(-3r_2)}]{\text{第二步}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+\frac{1}{2}r_3]{\text{第三步}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

故
$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

例 7 设系数矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $a_{11}\neq 0$. 经过 Gauss 消去法一步以后 $\boldsymbol{A}$ 化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{\alpha}^T \\ 0 & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $n-1$ 维列向量，$\boldsymbol{A}_2$ 为 $n-1$ 阶方阵. 证明：

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}_2$ 也为对称矩阵；

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵，则 A_2 也是严格对角占优矩阵；

（3）若 $\boldsymbol{A}$ 为对称的严格对角占优矩阵，则选列主元 Gauss 消去法就是（顺序）Gauss 消去法.

分析 本题应把 Gauss 消元一步后 $\boldsymbol{A}_2$ 的元素计算出来，然后再利用对称、严格对角占优阵的定义证明.

证 （1）经 Gauss 消元一步后，$\boldsymbol{A}_2$ 的元素为

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \quad (i, j = 2, 3, \cdots, n)$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 对称，故 $a_{ij}=a_{ji}$，从而

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ji}-\frac{a_{1i}}{a_{11}}a_{j1}=a_{ji}-\frac{a_{j1}}{a_{11}}a_{1i}=a_{ji}^{(1)}$$

因此 $\boldsymbol{A}_2$ 为对称矩阵.

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 是（按行）严格对角占优矩阵，即有

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1}$$

（按列严格对角占优可类似考虑）则

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}^{(1)}\right|&=\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}\right|\le\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|+\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}\right|\\&=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|-|a_{i1}|+\left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right|\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}|a_{1j}|<|a_{ii}|-|a_{i1}|+\left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right|\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}|a_{1j}|\\&=|a_{ii}|-\left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right|\left(|a_{11}|-\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}|+|a_{1i}|\right)<|a_{ii}|-\left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right|(0+|a_{1i}|)\\&\le\left|a_{ii}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1i}\right|=\left|a_{ii}^{(1)}\right|\quad(i=2,3,\cdots,n)\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{A}_2$ 是严格对角占优矩阵.

（3）由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称的严格对角占优矩阵，所以

$$|a_{11}|>\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}|,\quad|a_{i1}|=|a_{1i}|\quad(i=2,3,\cdots,n)$$

因而

$$|a_{11}|>|a_{1i}|=|a_{i1}|\quad(i=2,3,\cdots,n)$$

即第一步消元 a_{11} 为主元素. 由（1）、（2）知 $\boldsymbol{A}_2$ 是对称的严格对角占优矩阵.
记

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}&\cdots&a_{2n}^{(1)}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}^{(1)}&a_{n3}^{(1)}&\cdots&a_{nn}^{(1)}\end{bmatrix}$$

则第二步消元 $a_{22}^{(1)}$ 为主元素. 依次类推，选列主元 Gauss 消去法就是（顺序）Gauss 消去法.

例 8　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶对称正定方阵，证明：

（1）对任意 $i\neq j$ 都有 $|a_{ij}|<(a_{ii}a_{jj})^{\frac{1}{2}}$；

（2）$\boldsymbol{A}$ 之绝对值为最大的元素必在主对角线上；

（3）经过 Gauss 消去法第一步后，$\boldsymbol{A}$ 化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{A}_2$ 是对称正定的.

（4）$a_{ii}^{(1)}\leq a_{ii}\quad (i=2,3,\cdots,n)$

（5）$\max\limits_{2\leq i,j\leq n}\left|a_{ij}^{(1)}\right|\leq \max\limits_{1\leq i,j\leq n}\left|a_{ij}\right|$

分析　本题要充分利用有关正定矩阵的结论和 Gauss 消去法第一步消元的计算公式.

证　（1）利用反证法：设存在 k，l ($k<l$)，使得 $|a_{kl}|\geq(a_{kk}a_{ll})^{\frac{1}{2}}$

由 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则对任意非零 $\boldsymbol{X}\in R^n$，有 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$

对任意数 y，z 作向量 $\boldsymbol{X}=(0,\cdots,0,\underset{\underset{k}{\downarrow}}{y},0;\cdots 0,\underset{\underset{l}{\downarrow}}{z},0\cdots 0)^T$，有

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=a_{kk}y^2+a_{ll}z^2+2a_{kl}yz>0$$

即二次型

$$g=a_{kk}y^2+a_{ll}z^2+2a_{kl}yz$$

正定.

从而

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{kk} & a_{kl} \\ a_{lk} & a_{ll} \end{bmatrix}$$

正定.

故

$$|\boldsymbol{B}|=a_{kk}a_{ll}-a_{kl}^2>0$$

即

$$a_{kl}^2<a_{kk}a_{ll}$$

与假设矛盾，所以对任意 i，j 都有 $|a_{ij}|<(a_{ii}a_{jj})^{\frac{1}{2}}$

（2）假设 $\boldsymbol{A}$ 的绝对值最大元不在主对角线上，即设 $|a_{st}| = \max\limits_{1\le i,j\le n}\{|a_{ij}|\} \quad (s \ne t)$

则 $|a_{st}|^2 > |a_{ss}||a_{tt}|$，与（1）的结论矛盾，从而 $\boldsymbol{A}$ 的绝对值最大元必在主对角线上.

（3）经 Gauss 消元一步后，$\boldsymbol{A}_2$ 的元素为

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \quad (i, j = 2, 2, \cdots, n)$$

对于 $\boldsymbol{A}_2$ 的对称性例 7 已证，下面只证 $\boldsymbol{A}_2$ 的正定性. 利用等式

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j - a_{11}[(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{a_{i1}}{a_{11}} x_i)^2] \qquad (1)$$

来证 $\boldsymbol{A}_2$ 的正定性.

对任意 $n-1$ 维向量 $\boldsymbol{X} = (x_2, x_3, \cdots, x_n)^T \ne \boldsymbol{0}$，有 n 维向量 $\bar{\boldsymbol{X}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \ne \boldsymbol{0}$，

特别取 $x_1 = -\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{a_{i1}}{a_{11}} x_i$，由 $\boldsymbol{A}$ 的正定性知

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0$$

从而由（1）式知

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)} x_i x_j > 0$$

$\boldsymbol{A}_2$ 的正定性得证.

（4）由 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，知 $a_{ij} = a_{ji}$ 且 $a_{11} > 0$

$$a_{ii}^{(1)} = a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{i1} = a_{ii} - \frac{a_{i1}^2}{a_{11}} < a_{ii}$$

（5）由（3）的结论知 $\boldsymbol{A}_2$ 对称正定，知 $a_{jj}^{(1)} > 0 \quad (j = 2, 3, \cdots, n)$. 再由（2）知 $\boldsymbol{A}_2$ 的绝对值最大元在主对角线上，从而

$$\max_{2\le i,j\le n}|a_{ij}^{(1)}| = \max_{2\le j\le n}|a_{jj}^{(1)}| = \max_{2\le j\le n} a_{jj}^{(1)} \le \max_{2\le j\le n} a_{jj} \le \max_{1\le j\le n} a_{jj} = \max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|$$

例 9　用直接三角分解法求解方程组

$$\begin{cases}2x_1+4x_2+2x_3+6x_4=9\\4x_1+9x_2+6x_3+15x_4=23\\2x_1+6x_2+9x_3+18x_4=22\\6x_1+15x_2+18x_3+40x_4=47\end{cases}$$

解 方程组的系数矩阵和右端项分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&4&2&6\\4&9&6&15\\2&6&9&18\\6&15&18&40\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}9\\23\\22\\47\end{bmatrix}$$

（1）分解 ***A***=***LU***

由公式（6-5）得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&&&\\2&1&&\\1&2&1&\\3&3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&2&6\\&1&2&3\\&&3&6\\&&&1\end{bmatrix}$$

（2）求解 ***LY***=***b***，即

$$\begin{bmatrix}1&&&\\2&1&&\\1&2&1&\\3&3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\23\\22\\47\end{bmatrix}$$

由公式（6-6）解得 $\boldsymbol{Y}=(9,5,3,-1)^T$

（3）求解 ***UX***=***Y***，即

$$\begin{bmatrix}2&4&2&6\\&1&2&3\\&&3&6\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\5\\3\\-1\end{bmatrix}$$

由公式（6-7）解得 $\boldsymbol{X}=(0.5,2,3,-1)^T$

例 10 用直接三角分解法求解两个有相同系数矩阵的方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}_2$.

其中 $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\\1&16&81&256\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}4\\10\\28\\82\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}2\\12\\56\\240\end{bmatrix}$$

分析　用系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 直接三角分解法求解方程组时，由于把对系数矩阵的计算和对右端项的计算分开了，这就使我们在计算系数矩阵相同而右端项不同的若干方程组

$$\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m)$$

时显得方便(其中 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 是各方程组的右端向量)，只须做一次矩阵分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$，然后解 m 个三角形方程组

$$\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{Y}_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

且每多解一个方程组仅需增加大约 n^2 次乘（除）法运算.

又由于 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解规则不仅能用于分解 $\boldsymbol{A}$，而且能用于在把 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 消元化成 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{Y}$ 时从 $\boldsymbol{b}$ 算出 $\boldsymbol{Y}$. 这不妨把 $\boldsymbol{b}$ 看作在 $\boldsymbol{A}$ 右边的另一个列，并按照对待 $\boldsymbol{A}$ 的元 $a_{ij}(i<j)$ 的分解办法一样来处理. 也就是说，按

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & y_1 \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & & u_{nn} & y_n \end{bmatrix}$$

计算即可.

解　由 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ 组成 4×6 阶矩阵

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 10 & 12 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 28 & 56 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 82 & 240 \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{分解得}]{\text{由公式(6−5),(6−6)}}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 12 & \vdots & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 6 & 24 & \vdots & 6 & 24 \\ 1 & 7 & 6 & 24 & \vdots & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

即得

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 6 & 12 \\ & & 6 & 24 \\ & & & 24 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Y}_1=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Y}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 24 \\ 24 \end{bmatrix}$$

再用回代分别求解 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{Y}_1$，$\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{Y}_2$，可得题中两个方程组的解分别为

$$\boldsymbol{X}_1=(1,0,1,0)^T,\boldsymbol{X}_2=(0,-1,0,1)^T$$

例 11　用系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Crout 分解求解线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$. 其中，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6&2&1&-1\\2&4&1&0\\1&1&4&-1\\-1&0&-1&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}6\\-1\\5\\-5\end{bmatrix}$$

解　（1）对 $\boldsymbol{A}$ 进行 Crout 分解：$\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{U}}$，其中 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 是下三角阵，$\tilde{\boldsymbol{U}}$ 是单位上三角阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\tilde{l}_{11}&&&\\\tilde{l}_{21}&\tilde{l}_{22}&&\\\tilde{l}_{31}&\tilde{l}_{32}&\tilde{l}_{33}&\\\tilde{l}_{41}&\tilde{l}_{42}&\tilde{l}_{43}&\tilde{l}_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\tilde{u}_{12}&\tilde{u}_{13}&\tilde{u}_{14}\\&1&\tilde{u}_{23}&\tilde{u}_{24}\\&&1&\tilde{u}_{34}\\&&&1\end{bmatrix}$$

利用矩阵乘法比较两边元素，得

$$\tilde{\boldsymbol{L}}=\begin{bmatrix}6&&&\\2&\frac{10}{3}&&\\1&\frac{2}{3}&\frac{37}{10}&\\-1&\frac{1}{3}&-\frac{9}{10}&\frac{191}{74}\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{U}}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\0&1&\frac{1}{5}&\frac{1}{10}\\0&0&1&-\frac{9}{37}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

（2）求解下三角形方程组 $\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{b}$

自上而下可逐个求得 $\boldsymbol{Y}$ 的全部分量，得 $\boldsymbol{Y}=\left(1,-\frac{9}{10},\frac{46}{37},-1\right)^T$

（3）求解上三角形方程组 $\tilde{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$

自下而上回代可得　$\boldsymbol{X}=(1,-1,1,-1)^T$

例 12　用平方根法（Cholesky 分解）解方程组

$$\begin{bmatrix}3&2&3\\2&2&0\\3&0&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\7\end{bmatrix}$$

分析　由于系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，故一定有分解形式 $\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{L}}^T$，其中 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 为下三角阵.

解　（1）对系数矩阵进行 Cholesky 分解：$\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{L}}^T$，即

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & & \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{31} \\ & \tilde{l}_{22} & \tilde{l}_{32} \\ & & \tilde{l}_{33} \end{bmatrix}$$

由公式（6-8）得

$$\tilde{l}_{11} = \sqrt{3}, \quad \tilde{l}_{21} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \tilde{l}_{31} = \sqrt{3}$$

$$\tilde{l}_{22} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \tilde{l}_{32} = -\sqrt{6}, \quad \tilde{l}_{33} = \sqrt{3}$$

（2）解下三角方程组 $\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{b}$，即

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & & \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \\ \sqrt{3} & -\sqrt{6} & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

由公式（6-9）自下而上解得 $\boldsymbol{Y} = (\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T$.

（3）解上三角方程组 $\tilde{\boldsymbol{L}}^T \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$，即

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} \\ & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{6} \\ & & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

由公式（6-10）自下而上回代解得 $\boldsymbol{X} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})^T$.

例 13　用平方根法求解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 12 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$$

分析　系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 显然是对称正定的，可用平方根法求解.

解　（1）对 $\boldsymbol{A}$ 进行 Cholesky 分解：$\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{L}}^T$

由公式（6-8），确定下三角阵 $\tilde{\boldsymbol{L}}$，可得

$$\tilde{\boldsymbol{L}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

（2）求下三角形方程组 $\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{b}$．即

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\9\\12\\14\\15\end{bmatrix}$$

由公式（6-9）自上而下可求得　$\boldsymbol{Y}=(5,4,3,2,1)^T$．

（3）求解上三角形方程组 $\tilde{\boldsymbol{L}}^T\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$．即

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

由公式（6-10）自下而上逐步回代可求得　$\boldsymbol{X}=(1,1,1,1,1)^T$．

例 14　用 $\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解法解方程组

$$\begin{bmatrix}3&3&5\\3&5&9\\5&9&17\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\16\\30\end{bmatrix}$$

分析　系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称的，故 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{LDL}^{\boldsymbol{T}}$，这只需要按 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$ 的分解形式去严格计算.

解　（1）设有分解

$$\begin{bmatrix}3&3&5\\3&5&9\\5&9&17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\l_{21}&1&\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&&\\&d_2&\\&&d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&l_{21}&l_{31}\\&1&l_{32}\\&&1\end{bmatrix}$$

由矩阵乘法解得

$$d_1=3,\quad l_{21}=1,\quad l_{31}=\frac{5}{3}$$

$$d_2=2,\quad l_{32}=2,\quad d_3=\frac{2}{3}$$

（2）解方程组

$$\begin{bmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ \frac{5}{3} & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 16\\ 30\end{bmatrix}$$

自上而下求解得

$$\boldsymbol{Y}=(10,6,\frac{4}{3})^T$$

（3）解方程组

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & \frac{5}{3}\\ & 1 & 2\\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1^{-1} & & \\ & d_2^{-1} & \\ & & d_3^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 6\\ \frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

自下而上回代求得 $\boldsymbol{X}=(1,-1,2)^T$.

例 15　用追赶法求解三对角线性代数方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1\\ & & 2 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$$

分析　追赶法是求解三对角方程组的有效方法.

解　（1）设 $\boldsymbol{A}$ 有分解

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1\\ & & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ \alpha_2 & 1 & & \\ & \alpha_3 & 1 & \\ & & \alpha_4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_1 & & \\ & \beta_2 & \gamma_2 & \\ & & \beta_3 & \gamma_3\\ & & & \beta_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{LU}$$

由公式（6-11）得　　$\beta_1=2,\quad \gamma_1=1,\quad \gamma_2=1,\quad \gamma_3=1$

$$\alpha_2=\frac{1}{2},\quad \beta_2=3-\frac{1}{2}\times1=\frac{5}{2}$$

$$\alpha_3=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5},\quad \beta_3=1-\frac{2}{5}\times1=\frac{3}{5}$$

$$\alpha_4=\frac{2}{\frac{3}{5}}=\frac{10}{3},\quad \beta_4=1-\frac{10}{3}\times1=-\frac{7}{3}$$

从而

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&&&\\ \frac{1}{2}&1&&\\ &\frac{2}{5}&1&\\ &&\frac{10}{3}&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}2&1&&\\ &\frac{5}{2}&1&\\ &&\frac{3}{5}&1\\ &&&-\frac{7}{3}\end{bmatrix}$$

（2）解方程组 $\boldsymbol{LY}=\boldsymbol{b}$

由公式（6-12）得　$\boldsymbol{Y}=(1,\frac{3}{2},\frac{7}{5},-\frac{14}{3})^T$

（3）解方程组 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{Y}$，

由公式（6-13）得　$\boldsymbol{X}=(0,1,-1,2)^T$，即为此方程组的解.

例 16　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵，且有三角分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$，其中 $\boldsymbol{L}$ 为单位下三角阵，$\boldsymbol{U}$ 为上三角阵. 求证 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式均不为零.

分析　因为要证 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式均不为零，故把 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 按分块的形式写出比较好，再由 $\boldsymbol{A}$ 的非奇异性即可推证.

证　设

$$\boldsymbol{A}_k=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_k=\begin{bmatrix}1&&&\\ l_{21}&1&&\\ \vdots&\vdots&\ddots&\\ l_{k1}&l_{k2}&\cdots&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}_k=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&\cdots&u_{1k}\\ &u_{22}&\cdots&u_{2k}\\ &&\ddots&\vdots\\ &&&u_{kk}\end{bmatrix}$$

将 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$ 按分块形式写出则有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_k & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_k & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{L}_{21} & \boldsymbol{L}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_k & \boldsymbol{U}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{U}_{22} \end{bmatrix}$$

从而由矩阵的分块乘法有

$$\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{L}_k \boldsymbol{U}_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

因为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{L}_n \boldsymbol{U}_n$ 非奇异，故

$$\det\boldsymbol{A} = \det\boldsymbol{L}_n \cdot \det\boldsymbol{U}_n = \det\boldsymbol{U}_n = \boldsymbol{u}_{11}\boldsymbol{u}_{22}\cdots\boldsymbol{u}_{nn} \neq 0$$

从而 $\det\boldsymbol{A} = \det\boldsymbol{L}_k \cdot \det\boldsymbol{U}_k = \det\boldsymbol{U}_k = \boldsymbol{u}_{11}\boldsymbol{u}_{22}\cdots\boldsymbol{u}_{kk} \neq 0$

$\boldsymbol{A}_k$ 非奇异，$\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式不为零.

例 17　非奇异矩阵不一定都有 $\boldsymbol{LU}$ 分解.

分析　这只需要举一个例子就行了. 一般举例子尽量要简单.

解　令

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，若 $\boldsymbol{A}$ 有 $\boldsymbol{LU}$ 分解，则有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & d \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & d \\ ab & ad + c \end{bmatrix}$$

比较等式两边元素得 b=0，ab=1，显然矛盾，故该非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不存在 $\boldsymbol{LU}$ 分解，所以说并非非奇异矩阵都有 $\boldsymbol{LU}$ 分解.

例 18　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶上三角阵，且对角元 $a_{ii} \neq 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$. 试证 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 仍为上三角阵，并给出求逆算法（给出求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的元素的计算公式）.

分析　$\boldsymbol{A}^{-1}$ 有表达公式 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{A^*}{\det \boldsymbol{A}}$，由此再利用 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线以下为零的特征可以证明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的对角线以下的元素也为零；而求逆算法可类似矩阵的三解分解法，先设出所求矩阵的元素，再按照矩阵的乘法运算确定元素，当然计算顺序上应特别注意三角阵的特点.

解　（1）设 $\boldsymbol{A}^{-1}$=$\boldsymbol{B}$. 由公式，$\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{A}^*}{\det \boldsymbol{A}}$，其中

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 因为 $\boldsymbol{A}$ 为上三角阵，故 $i>j$ 时 a_{ij}=0，从而当 $i<j$ 时 A_{ij}=0，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是上三角阵.

（2）设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$， $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$，于是

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法显然有 $a_{11}b_{11}=1$，故 $b_{11}=\dfrac{1}{a_{11}}$，根据这里的特点，我们将 $\boldsymbol{B}$ 按列求其元素，并且各列是从下向上求，每次先求对角元.

设 $\boldsymbol{B}$ 的前 $j-1$ 列已求出，现求 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列，由 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列有 $a_{jj}\cdot b_{jj}=1$，于是

$$b_{jj}=\frac{1}{a_{jj}}$$

再求 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列中的元素 $b_{ij}(i=j-1,j-2,\cdots,1)$. $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列得

$$a_{ii}b_{ij}+a_{i,i+1}b_{i+1,j}+\cdots+a_{ij}b_{jj}=0$$

于是

$$b_{ij}=-\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{k=i+1}^{j}a_{ik}b_{kj}\right)$$

最后得求逆算法.

$$\begin{cases} b_{11}=\dfrac{1}{a_{11}} \\ b_{jj}=\dfrac{1}{a_{jj}} \\ b_{ij}=-\dfrac{1}{a_{ii}}\left(\displaystyle\sum_{k=i+1}^{j}a_{ik}b_{kj}\right) \quad (i=j-1,j-2,\cdots,1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (j=2,3,\cdots,n) \end{cases}$$

例 19 $\boldsymbol{X}=(3,-1,5,8)^T$，求 $\|\boldsymbol{X}\|_1,\|\boldsymbol{X}\|_2,\|\boldsymbol{X}\|_\infty$

解 $\|\boldsymbol{X}\|_1=|3|+|-1|+|5|+|8|=17$

$\|\boldsymbol{X}\|_2=\sqrt{3^2+(-1)^2+5^2+8^2}=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$

$\|\boldsymbol{X}\|_\infty=\max\{|3|,|-1|,|5|,|8|\}=8$

例 20 计算方阵

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$的三种常用范数 $\|\boldsymbol{A}\|_p\ (p=1,2,\infty)$

解 $\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max\limits_{1\le j\le 3}\sum\limits_{i=1}^{3}|a_{ij}| = \max\{1,4,8\} = 8$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le 3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}| = \max\{1,6,6\} = 6$$

由 $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}$，先计算

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 32\end{bmatrix}$$

所以 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = 32$，

从而 $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

例 21 设 $\boldsymbol{X}\in R^n$，证明

（1）$\|\boldsymbol{X}\|_\infty \le \|\boldsymbol{X}\|_1 \le n\|\boldsymbol{X}\|_\infty$，

（2）$\|\boldsymbol{X}\|_\infty \le \|\boldsymbol{X}\|_2 \le \sqrt{n}\|\boldsymbol{X}\|_\infty$.

分析 由定义 $\|\boldsymbol{X}\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$，所以应尽量把 $\|\boldsymbol{X}\|_p$ $(\boldsymbol{p}=1,2)$ 中和式通过不等式与 $\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$ 联系起来.

证：（1）因为

$$\|\boldsymbol{X}\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i| \ge \max_{1\le i\le n}|x_i| = \|\boldsymbol{X}\|_\infty$$

$$\|\boldsymbol{X}\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i| \le \sum_{i=1}^{n}\max_{1\le j\le n}|x_j| = n\max_{1\le j\le n}|x_j| = n\|\boldsymbol{X}\|_\infty$$

所以

$$\|\boldsymbol{X}\|_\infty \le \|\boldsymbol{X}\|_1 \le n\|\boldsymbol{X}\|_\infty$$

2）因为

$$\|\boldsymbol{X}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} \ge \sqrt{\max_{1\le i\le n}\{|x_i|\}^2} = \|\boldsymbol{X}\|_\infty$$

$$\|\boldsymbol{X}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\max_{1\le j\le n}|x_j|)^2} = \sqrt{n(\max_{1\le j\le n}|x_j|)^2} = \sqrt{n}\|\boldsymbol{X}\|_\infty$$

所以

$$\|\boldsymbol{X}\|_\infty \le \|\boldsymbol{X}\|_2 \le \sqrt{n}\|\boldsymbol{X}\|_\infty$$

例 22 记 $\|\boldsymbol{X}\|_p = (|\boldsymbol{X}_1|^p + |\boldsymbol{X}_2|^p + \cdots + |\boldsymbol{X}_n|^p)^{\frac{1}{p}}$，其中 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$. 试证：当 $p\to\infty$ 时，$\|\boldsymbol{X}\|_p \to \|\boldsymbol{X}\|_\infty$.

分析 由定义 $\|\boldsymbol{X}\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$，所以应尽量把 $\|\boldsymbol{X}\|_p$ 中和式通过不等式与 $\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$ 联系起来.

证 显然

$$\|\boldsymbol{X}\|_\infty^p=\max_{1\le i\le n}|x_i|^p\le\sum_{i=1}^n|x_i|^p\le n\cdot\max_{1\le i\le n}|x_i|^p=n\cdot\|\boldsymbol{X}\|_\infty^p$$

两边开 p 次方有

$$\|\boldsymbol{X}\|_\infty\le\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le n^{\frac{1}{p}}\|\boldsymbol{X}\|_\infty$$

因 $\lim\limits_{p\to\infty}n^{\frac{1}{p}}=1$，故 $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|\boldsymbol{X}\|_\infty$

即当 $p\to\infty$ 时，$\|\boldsymbol{X}\|_p\to\|\boldsymbol{X}\|_\infty$.

例 23 设矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 对称正定，则 $f(X)=\sqrt{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QX}}$ 是向量 $\boldsymbol{X}$ 的一种范数.

分析 这可以首先检验 $f(\boldsymbol{X})$是否满足向量范数的定义，在具体检验过程中再考虑是否要用到其它的数学结论.

证 （1）因 $\boldsymbol{Q}$ 对称正定，故对任意 $\boldsymbol{X}$ 有 $f(\boldsymbol{X})=\sqrt{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QX}}\ge 0$，且仅当 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 时 $f(\boldsymbol{X})=0$；

（2）设 λ 为任意实数，

$$f(\lambda\boldsymbol{X})=\sqrt{(\lambda\boldsymbol{X})^T\boldsymbol{Q}(\lambda\boldsymbol{X})}=\sqrt{\lambda^2(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QX})}=|\lambda|\sqrt{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QX}}=|\lambda|\,f(\boldsymbol{X})$$

（3）下边检验三角不等式 $f(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\le f(\boldsymbol{X})+f(\boldsymbol{Y})$

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})&=\sqrt{(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})}=\sqrt{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QX}+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{QY}+\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QY}+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{QX}}\\&=\sqrt{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QX}+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{QY}+2\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QY}}\end{aligned}$$

因 $\boldsymbol{Q}$ 对称正定，故 $\boldsymbol{Q}$ 一定有表示式

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\text{（}\boldsymbol{B}\text{ 是可逆矩阵）}$$

从而 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QY}=(\boldsymbol{BX})^T(\boldsymbol{BY})$，由数学分析中熟知的 Schwartz 不等式有

$$\left|\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QY}\right|=\left|(\boldsymbol{BX})^T(\boldsymbol{BY})\right|\le\sqrt{(\boldsymbol{BX})^T(\boldsymbol{BX})}\cdot\sqrt{(\boldsymbol{BY})^T(\boldsymbol{BY})}$$

代入上式有

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})&\le\sqrt{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QX}+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{QY}+2\sqrt{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{BX}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{BY}}}\\&=\sqrt{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QX}+\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{QY}+2\sqrt{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QX}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{QY}}}\\&=\sqrt{\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{QX}}+\sqrt{\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{QY}}=f(\boldsymbol{X})+f(\boldsymbol{Y})\end{aligned}$$

所以 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的一种范数.

例 24 若 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵，求证：$\rho(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2$

分析 本题应充分利用有关对称矩阵的数学结论. 由谱半径 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的定义，应考虑从实对称阵有 n 个实特征值和一组标准正交向量系出发，结合矩阵 2−范数的定义以便得出结论.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 是称的，所以 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个实特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 和一组标准正交特征向量系 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\lambda_i\boldsymbol{X}_i,\quad \|\boldsymbol{X}_i\|_2=1,\quad i=1,2,\cdots,n$$

不妨设

$$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$$

则

$$\rho(\boldsymbol{A})=|\lambda_1|$$

任一向量 $\boldsymbol{X}$ 可表示为

$$\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{X}_i$$

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i\boldsymbol{X}_i$$

$$\|\boldsymbol{X}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2},\quad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\|_2=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\alpha_i^2\lambda_i^2}$$

设 $\|\boldsymbol{X}\|_2=1$，则

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\lambda_i^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\lambda_1^2}=|\lambda_1|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}=|\lambda_1|$$

又因为

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1\|_2=\|\lambda_1\boldsymbol{X}_1\|_2=|\lambda_1|\cdot\|\boldsymbol{X}_1\|_2=|\lambda_1|$$

所以

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\max_{\|\boldsymbol{X}\|_2=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\|_2=|\lambda_1|=\rho(\boldsymbol{A})$$

例 25 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是实的 n 阶方阵，证明

$$\max_{1\le i,j\le n}\left|a_{ij}\right|\le\|\boldsymbol{A}\|_2\le n\cdot\max_{1\le i,j\le n}\left|a_{ij}\right| \tag{1}$$

分析 本题应考虑利用向量和矩阵的范数定义及有关数学结论来证明.

证

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\max_{\|\boldsymbol{X}\|_2=1}\|\boldsymbol{AX}\|_2$$

对任意 $\boldsymbol{X}\in R^n$，$\|\boldsymbol{X}\|_2=1$，由 Cauchy-Schwartz 不等式，有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{AX}\|_2^2&=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)^2\le\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\le n^2\max_{1\le i,j\le n}a_{ij}^2=\left(n\max_{1\le i,j\le n}\left|a_{ij}\right|\right)^2\end{aligned}$$

两边开方，得

$$\|\boldsymbol{AX}\|_2\le n\max_{1\le i,j\le n}\left|a_{ij}\right|$$

于是

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\max_{\|X\|_2=1}\|\boldsymbol{AX}\|_2\le n\cdot\max_{1\le i,j\le n}\left|a_{ij}\right| \tag{2}$$

即（1）的右边不等式成立.

下面证左边不等式. 设

$$\left|a_{i_o j_o}\right|=\max_{1\le i,j\le n}\left|a_{ij}\right|$$

令 $\overline{\boldsymbol{X}}=(0,0,\cdots,0,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{第 } j_0 \text{ 个元素}}}{1},0,\cdots,0)^T$，则

$$\|\overline{\boldsymbol{X}}\|_2=1,\quad \boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}}=(a_{1j_o},a_{2j_o},\cdots,a_{nj_o})^T$$

$$\|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij_o}^2}\ge\left|a_{i_o j_o}\right|=\max_{1\le i,j\le n}\left|a_{ij}\right|$$

因而

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\max_{\|\boldsymbol{X}\|_2=1}\|\boldsymbol{AX}\|_2\ge\|\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}}\|_2=\max_{1\le i,j\le n}\left|a_{ij}\right| \tag{3}$$

即（1）的左边不等式成立

由（2）和（3）知（1）成立.

例 26 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵，试证：

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_F \le \|\boldsymbol{A}\|_2 \le \|\boldsymbol{A}\|_F$$

这里矩阵的 F−范数为 $\|\boldsymbol{A}\|_F = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

分析 利用矩阵的 2−范数的定义及矩阵中有关特征值的一些重要结论（$\|\boldsymbol{A}\|_2$ 与特征值有关），如对矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{n}b_{ii} \quad \text{（特征值之和等于对角元之和）}$$

则将容易推证上述不等式

证 （1）由范数定义有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\|_2^2 = \lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) &\le \lambda_1(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})+\lambda_2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})+\cdots+\lambda_n(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\\ &= \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\ \text{的对角元之和}\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_{i1}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{i2}^2+\cdots+\sum_{i=1}^{n}a_{in}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=\|\boldsymbol{A}\|_F^2\end{aligned}$$

（2）显然

$$\|\boldsymbol{A}\|_2^2=\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\ge\frac{1}{n}[\lambda_1(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})+\lambda_2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})+\cdots+\lambda_n(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})]=\frac{1}{n}\|\boldsymbol{A}\|_F^2$$

从而

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_F \le \|\boldsymbol{A}\|_2 \le \|\boldsymbol{A}\|_F$$

注：由此可看到矩阵的 2−范数可由 F−范数得到控制.

例 27 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，试证：

$$\|\boldsymbol{A}\|_F=(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

分析 与上题相同. 仍要利用矩阵中有关特征值的一些结论，并考虑到 $\boldsymbol{A}$ 的对称性.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 对称，故

$$\lambda(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=\lambda(\boldsymbol{A}^2)=[\lambda(\boldsymbol{A})]^2$$

从而

$$\lambda_1(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})+\lambda_2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})+\cdots+\lambda_n(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i(\boldsymbol{A})]^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

又

$\lambda_1(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})+\lambda_2(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})+\cdots+\lambda_n(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 的对角元之和

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{i2}^2+\cdots+\sum_{i=1}^{n}a_{in}^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2=\|\boldsymbol{A}\|_F^2 .$$

故

$$\|\boldsymbol{A}\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

例 28 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶非奇异矩阵，$\|\cdot\|$表示矩阵的任何一种算子范数，试证

（1）$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\geq\dfrac{1}{\|\boldsymbol{A}\|}$

（2）$\|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}\|\leq\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{B}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|$

分析 由矩阵范数的基本性质即可推证.

证明 （1）$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，因为$\|\cdot\|$是算子范数，故

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\|=\|\boldsymbol{I}\|=1$$

又
$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\|\leq\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{A}\|$$

故
$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{A}\|\geq 1$$

即
$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\geq\frac{1}{\|\boldsymbol{A}\|}$$

（2）$\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}$，从而

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}\|=\|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1}\|\leq\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}^{-1}\|$$

即
$$\|\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}\|\leq\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{B}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|$$

例 29 求三阶 Hilbert 矩阵

$$\boldsymbol{H}_3=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

的条件数 $\mathrm{Cond}_\infty(\boldsymbol{H}_3)$.

解　$\boldsymbol{H}_3=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{H}_3^{-1}=\begin{bmatrix}9 & -36 & 30\\ -36 & 192 & -180\\ 30 & -180 & 180\end{bmatrix}$

于是 $\mathrm{Cond}_\infty(\boldsymbol{H}_3)=\|\boldsymbol{H}_3\|_\infty\cdot\|\boldsymbol{H}_3^{-1}\|_\infty=748$.

例 30　设 $\boldsymbol{A}$ 为正交阵，试证：$\mathrm{Cond}_2(\boldsymbol{A})=1$.

分析　由正交矩阵和条件数的定义便可推得.

解　因为 $\boldsymbol{A}$ 正交阵，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，　$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，从而

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}=\sqrt{\rho(\boldsymbol{I})}=1$$

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2=\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\|_2=\sqrt{\rho(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}=\sqrt{\rho(\boldsymbol{I})}=1$$

故

$$\mathrm{Cond}_2(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2=1$$

例 31　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，试证

$$\mathrm{Cond}(\boldsymbol{AB})\le\mathrm{Cond}(\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{Cond}(\boldsymbol{B})$$

分析　由条件数定义和矩阵范数的性质即可证明.

证

$$\begin{aligned}\mathrm{Cond}(\boldsymbol{AB})&=\|\boldsymbol{AB}\|\cdot\|(\boldsymbol{AB})^{-1}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{B}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\\&=\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{B}^{-1}\|=\mathrm{Cond}(\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{Cond}(\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

例 32　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{\delta A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的误差矩阵，证明：当 $\|\boldsymbol{\delta A}\|<\dfrac{1}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}$ 时 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\delta A}$ 也可逆.

证　要证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\delta A}$ 可逆，只需证明齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\delta A})\boldsymbol{X}=0 \tag{1}$$

只有零解. 现用反证法证明.

设（1）有非零解 $\bar{\boldsymbol{X}}$，则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\delta A})\bar{\boldsymbol{X}}=0$$

移项，得

$$\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}} = -\delta \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}}$$

两边乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$\bar{\boldsymbol{X}} = -\boldsymbol{A}^{-1}\delta \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}}$$

两边取范数，有

$$\left\|\bar{\boldsymbol{X}}\right\| = \left\|-\boldsymbol{A}^{-1}\delta \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}}\right\| \le \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\| \cdot \left\|\delta \boldsymbol{A}\right\| \cdot \left\|\bar{\boldsymbol{X}}\right\|$$

由于 $\left\|\bar{\boldsymbol{X}}\right\| \ne 0$，两边约去 $\left\|\bar{\boldsymbol{X}}\right\|$，得

$$1 \le \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\| \cdot \left\|\delta \boldsymbol{A}\right\|$$

即

$$\left\|\delta \boldsymbol{A}\right\| \ge \frac{1}{\left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|}$$

与条件

$$\left\|\delta \mathbf{A}\right\| < \frac{1}{\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|}$$

矛盾. 因而（1）只有零解，从而 $\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A}$ 可逆.

例 33　用五位浮点十进制求解线性代数方程组：$\begin{cases} x_1 + 10^5 x_2 = 10^5 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

解　显然，本题的精确解为 $x_1 = 1, x_2 = 1$，系数矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 10^5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，在一般情况下，条件数 Cond($\boldsymbol{A}$)很大的方阵 $\boldsymbol{A}$ 为病态阵，以病态阵为系数矩阵的方程组叫做病态方程组，在病态方程组求解时，解对于初始数据是非常敏感的. 本题中，因

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{10^5 - 1}\begin{bmatrix} -1 & 10^5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

从而条件数 $\mathrm{Cond}_1(\boldsymbol{A}) = \dfrac{(10^5+1)^2}{10^5 - 1} \approx 10^5$ 非常大，所以方程组是病态方程组，即使按选列主元的 Gauss 消去法计算，最终求得的解是 $x_1=0$，$x_2=1$，严重失真.

对于病态方程组的解法，应用上，一般可用高精度的算术运算，以减轻病态矩阵对解的影响. 有时，若选取一个适当的数去乘方程组中的某个方程，以达到改变系数矩阵的条件数，则其解的精度可能会有所改善.

本题中若用 10^{-5} 乘第一个方程，则方程组的系数矩阵变为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}10^{-5} & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{1-10^{-5}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -10^{-5}\end{bmatrix}$$

从而条件数 $\mathrm{Cond}_1(\boldsymbol{B})=\dfrac{4}{1-10^{-5}}\approx 4$，比原方程组的条件数大大减少，若用按选列主元的 Gauss 消去法求解，可得 $x_1=1$，$x_2=1$，与精确解比较，显然是一个很好的数值解.

例 34　设有方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

已知它有解 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3}\\ 0\end{bmatrix}$，如果右端有小扰动 $\|\delta\boldsymbol{b}\|_\infty=\dfrac{1}{2}\times10^{-6}$，试估计由此引起的解的相对误差.

分析　本题是讨论方程组右端顶的小误差所引起的解的相对误差的估计问题，这与系数矩阵的条件数有关，只要求出 $\mathrm{Cond}_\infty(\boldsymbol{A})$，再由有关误差估计式即可算得结果.

解　容易求得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1.5\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

从而 $\mathrm{Cond}_\infty(\boldsymbol{A})=22.5$.

由公式

$$\frac{\|\delta \boldsymbol{X}\|}{\|\boldsymbol{X}\|_{\infty}} \le \mathrm{Cond}_{\infty}(\boldsymbol{A}) \cdot \frac{\|\delta \boldsymbol{b}\|_{\infty}}{\|\boldsymbol{b}\|_{\infty}}$$

有

$$\frac{\|\delta \boldsymbol{X}\|_{\infty}}{\|\boldsymbol{X}\|_{\infty}} \le 22.5 \times \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-6}}{2/3} = 1.687\,5 \times 10^{-5}$$

三、综合复习题

1．分别用 Jordan 消去法和 Gauss 消去法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$$

2．用选列主元的 Gauss 消去法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 10x_4 = -2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 14 \\ -3x_1 - 5x_2 + 15x_4 = -6 \end{cases}$$

3．用 Jordan 方法求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵

4．用选列主元 Gauss 消去法求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

的行列式.

5．用矩阵的直接三角分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$，求解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{bmatrix}$$

6．试用矩阵的直接分解法，导出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Crout 分解 $\boldsymbol{A}=\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{U}}$ 的计算公式，其中，$\tilde{\boldsymbol{L}}$ 是下三角阵，$\tilde{\boldsymbol{U}}$ 是单位上三角阵.

7．用 $\boldsymbol{LDL}^T$ 分解法求解方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

8．用平方根法（Cholesky 分解）求解方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

9．用追赶法解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

10．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$，求 $\|\boldsymbol{A}\|_1$，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty$，$\|\boldsymbol{A}\|_2$.

11．求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数 Cond($\boldsymbol{A}$)，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix}$$

12．证明：对任意 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$，成立

$$\big|\,\|\boldsymbol{X}\|-\|\boldsymbol{Y}\|\,\big| \le \|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|$$

13．设矩阵 $\boldsymbol{P}\in R^{n\times n}$ 非奇异，$\|\boldsymbol{X}\|$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一向量范数，定义 $\|\boldsymbol{X}\|_p=\|p\boldsymbol{X}\|$，试证明：$\|\boldsymbol{X}\|_p$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一种向量范数.

14．设 $\|\boldsymbol{X}\|$ 是 $\boldsymbol{X}\in R^n$ 的范数，试证：$\|\boldsymbol{X}\|$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的连续函数.

15．设线性方程组为

$$\begin{cases}7x_1+10x_2=1\\5x_1+7x_2=0.7\end{cases}$$

（1）试求系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数 $\mathrm{Cond}_{\infty}(\boldsymbol{A})$；

（2）若右端向量有扰动 $\delta\boldsymbol{b}=(0.01,-0.01)^T$，试估计解的相对误差.

四、复习题答案

1． $\boldsymbol{X}_1=(1,-1,1)^T$

2． $\boldsymbol{X}_1=(2,3,2,1)^T$

3． $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{bmatrix}$

4．det$\boldsymbol{A}$=−28

5． $\boldsymbol{X}=(-1,1,-1,1)^T$

6．对 $k=1,2,\cdots,n$，计算 $\begin{cases}l_{ik}=a_{ik}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk} & (i=k,k+1,\cdots,n)\\u_{kj}=\left(a_{kj}-\sum\limits_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj}\right)\Big/l_{kk} & (j=k+1,k+2,\cdots,n)\end{cases}$

其中 $\sum\limits_{1}^{0}=0$

7． $\boldsymbol{X}=(1,1,1,1)^T$

8． $\boldsymbol{X}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})^T$

9． $\boldsymbol{X}=(\frac{77}{60},\frac{47}{30},\frac{27}{20},\frac{4}{5})^T$

10． $\|\boldsymbol{A}\|_1=9,\quad \|\boldsymbol{A}\|_\infty=7,\quad \|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{31+2\sqrt{130}}$

11．$\mathrm{Cond}_1(\boldsymbol{A})=10^{10}$

12．提示：由向量范数的三角不等式可证得.

13．由向量范数的定义.

14．由 12 题的结论及连续函数的定义.

15．（1）$\mathrm{Cond}_{\infty}(\boldsymbol{A})=289$

（2）$\dfrac{\|\delta \boldsymbol{X}\|_{\infty}}{\|\boldsymbol{X}\|_{\infty}} \le 2.89$