第四章　非线性方程的数值解法

非线性方程的数值解法是解非线性方程的实用可行方法，具有重要的实际意义.

一、内容要点

1．根的概念

给定方程 $f(x)=0$，如果有 α 使得 $f(\alpha)=0$，则称 α 为 $f(x)=0$ 的根或 $f(x)$的零点.设有正整数 m 使得

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$$

且 $g(\alpha)\neq 0$，则当 $m\geq 2$ 时，称 α 为 $f(x)=0$ 的 m 重根；当 $m=1$ 时，称 α 为 $f(x)=0$ 的单根.

本章只讨论实根的求法.

2．求根步骤

（1）确定所给方程存在多少个根.

（2）进行根的隔离，找出每个有根区间，有根区间内的任一点都可看成是该根的一个近似值.

（3）逐步把近似根精确化，直到足够精确为止.

3．二分法

二分法的基本思想是在平分有根区间的过程中，逐步缩小有根区间.设函数 $f(x)$ 在区间$[a,\ b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在（$a,\ b$）内至少有一个根.为简便起见，假定方程 $f(x)=0$ 在（a, b）内仅有一个根.这样（a, b）为有根区间这时可用下面的二分法求方程 $f(x)=0$ 的近似根.

二分法的具体步骤如下：

（1）取（a, b）的中点 $\frac{a+b}{2}$，计算 $f(\frac{a+b}{2})$的值.

若 $f(\frac{a+b}{2})=0$，则 $\frac{a+b}{2}$ 为方程 $f(x)=0$ 的根，计算结束.

若 $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$，如果 $f(\frac{a+b}{2})$与 $f(a)$同号，则记 $a_1=\frac{a+b}{2}$，$b_1=b$；如果 $f(\frac{a+b}{2})$ 与 $f(a)$异号，则记 $a_1=a$，$b_1=\frac{a+b}{2}$；$(a_1,\ b_1)$为新的有根区间，且 $(a_1,b_1)\subset(a,b)$，$b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$.进行下一步.

（2）取（a_1, b_1）的中点 $\frac{a_1+b_1}{2}$，计算 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$ 的值

若 $f(\frac{a_1+b_1}{2})=0$，则 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 为方程 $f(x)=0$ 的根，计算结束.

若 $f(\frac{a_1+b_1}{2})\neq 0$，如果 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$ 与 $f(a_1)$同号，则记 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=b_1$；如果 $f(\frac{a_1+b_1}{2})$ 与 $f(a_1)$异号，则记 $a_2=a_1$，$b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$.这时（a_2, b_2）为新的有根区间，且 $(a_2,b_2)\subset(a_1,b_1)\subset(a,b)$，$b_2-a_2=\frac{b-a}{2^2}$，进行下一步.

如此重复 k 次仍未找到方程的根，反复二分下去，则得一有根区间序列 $\{(a_k,b_k)\}_{k=0}^{\infty}$，满足

i）$(a,b)\supset(a_1,b_1)\supset(a_2,b_2)\supset\cdots\supset(a_k,b_k)\supset\cdots$

ii）$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}$

当 $n\to\infty$ 时（a_k, b_k）缩为一点 α，它显然是方程 $f(x)=0$ 的根，当 k 很大时，可取（a_k, b_k）的中点 $\alpha^*=\frac{a_k+b_k}{2}$ 作为方程 $f(x)=0$ 的根 α 的近似值.

$$\left|\alpha-\alpha^*\right|\leq\frac{b_k-a_k}{2}=\frac{b-a}{2^{k+1}}$$

二分法适用于求区间（a, b）内的单实根或奇重实根.

4．迭代法

迭代法是一种逐次逼近的方法，它的基本思想是利用某一固定公式反复校正根的近似值.

将方程 $f(x)=0$ 改写成等价形式

$$x=\varphi(x) \tag{4-1}$$

建立迭代公式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k) \tag{4-2}$$

在根 α 的附近任取一点 x_0，可得一序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$.若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\alpha$，且 $\varphi(x)$ 连续，则对（4-2）两端取极限有 $\alpha=\varphi(\alpha)$，可见 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的极限为方程（1）的根，这种求根算法称为迭代法. 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 发散，迭代法就失败.

5．迭代过程的收敛性

·迭代法的整体收敛性

定理 4.1 （迭代收敛定理）设 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的一阶导数，且

1° 对任意 $x \in [a,b]$，总有 $\varphi(x) \in [a,b]$；

2° 存在 $0 \le m < 1$，使对任意 $x \in (a,b)$，有 $|\varphi'(x)| \le m$.

则

1° 方程 $x = \varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 内有且仅有一根 α，且迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 对任意初值 $x_0 \in [a,b]$ 均收敛于方程 $x = \varphi(x)$ 的根 α.

2° 有估计式

$$|\alpha - x_k| \le \frac{1}{1-m}|x_{k+1} - x_k|$$

$$|\alpha - x_k| \le \frac{m^k}{1-m} \le |x_1 - x_0|$$

定理 4.2 设方程 $x = \varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内有根 α，且存在 $L \ge 1$，对任意的 $x \in (a,b)$，有 $|\varphi'(x)| \ge L$，则对任意初值 $x_0 \in [a,b]$，且 $x_0 \ne \alpha$，迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 发散.

· 迭代法的局部收敛性

如果存在 α 的某个邻域 $\Delta: |x-\alpha| \le \delta$，迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 对任意初值 $x_0 \in \Delta$ 均收敛，则称迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是局部收敛的.

定理 4.3 设 $\varphi(x)$ 在方程 $x = \varphi(x)$ 的根 α 邻近有连续的一阶导数.

若 $|\varphi'(\alpha)| < 1$ 则迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 具有局部收敛性

若 $|\varphi'(\alpha)| > 1$ 则迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 发散.

6．迭代过程的收敛速度

设迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 产生的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于方程 $x = \varphi(x)$ 的根 α，记 $e_k = \alpha - x_k$，若

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

式中 C 是不为零的常数.则称迭代过程是 p 阶收敛的.特别地，当 $p=1$ 时，称为线性收敛；当 $p>1$ 时，称为超线性收敛，当 $p=2$ 时，称为平方收敛. p 越大，收敛越快.

定理 4.4 设 $\varphi(x)$ 在方程 $x = \varphi(x)$ 的根 α 邻近有连续的二阶导数，且 $|\varphi'(\alpha)| < 1$

则当 $\varphi'(\alpha) \ne 0$ 时，迭代过数 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 为线性收敛；而当 $\varphi'(\alpha) = 0$，$\varphi''(\alpha) \ne 0$ 时为平方收敛.

7．Aitken 加速方法

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k) & \text{(迭代)} \\ \tilde{x}_{k+1} = \varphi(\bar{x}_{k+1}) & \text{(迭代)} \\ x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} - \dfrac{(\tilde{x}_{k+1} - \bar{x}_{k+1})^2}{\tilde{x}_{k+1} - 2\bar{x}_{k+1} + x_k} & \text{(加速)} \end{cases}$$

它是一个二阶收敛的方法，一般可以用来加速具有线性收敛序列的收敛速度.

8．Newton 迭代法

设有方程 $f(x)=0$，在 $f(x)=0$ 的根 α 附近任取一点 x_0 作为初始近似根，由迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0,1,2,\cdots) \tag{4-3}$$

逐次逼近方程 $f(x)=0$ 的根 α，这种求根算法称为 Newton 法（切线法），公式（4-3）称为 Newton 迭代公式.

Newton 法的迭代函数是

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

从而

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

由此知若 α 是 $f(x)=0$ 的一个单根，则在根 α 附近 Newton 法是局部收敛的，并且收敛速度是平方收敛的.但如果 α 是 $f(x)=0$ 的重根，则 Newton 法仅有线性收敛速度.

定理 4.5　设函数 $f(x)$在区间$[a, b]$上存在二阶导数，且满足条件：

1° $f(a)\cdot f(b)<0$;

2° $f'(x)$ 在$[a, b]$上不等于零；

3° $f''(x)$ 在$[a, b]$上不变号；

4° 在$[a, b]$上任意选取满足条件 $f(x_0)f''(x_0) > 0$ 的初始近似值 x_0.

则由 Newton 法产生的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 单调收敛于方程 $f(x)=0$ 在$[a, b]$上的唯一根.

9．弦截法

在方程 $f(x)=0$ 的根 α 附近任取两初始近似根 x_0，x_1，由迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \quad (k = 0,1,\cdots) \tag{4-4}$$

逐次逼近 $f(x)=0$ 的根 α，这种求根算法称为弦截法.

弦截法是局部收敛的，它具有超线性收敛速度，且收敛阶为 P=1.618.

10．含两个方程的方程组的简单迭代法

给定一个方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases} \tag{4-5}$$

将其化为如下形式

$$\begin{cases} x=\varphi_1(x,y) \\ y=\varphi_2(x,y) \end{cases}$$

函数 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 称为迭代函数.

建立迭代格式

$$\begin{cases} x_{k+1}=\varphi_1(x_k,y_k), \\ y_{k+1}=\varphi_2(x_k,y_k), \end{cases} \quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{4-6}$$

这里 x_0，y_0 是某个初始近似值.

定理 4.6 设方程组（4-5）在某个闭邻域 $R(a\le x\le A, b\le y\le B)$ 内有且仅有一个解 $x=\xi, y=\eta$．如果

（1）函数 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 在 R 中有定义且连续可微；

（2）初始近似值 x_0，y_0 和所有的逐次近似值 $x_k,y_k(k=1,2,\cdots)$ 都属于 R；

（3）下面的不等式在 R 中成立

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|\le q_1<1, \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|+\left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|\le q_2<1, \end{cases} \tag{4-7}$$

则迭代过程（4-6）收敛于方程组的解 $x=\xi, y=\eta$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi, \quad \lim_{n\to\infty}y_n=\eta .$$

如果把条件（5-7）式改成

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|\le q_1<1, \\ \left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|+\left|\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|\le q_2<1, \end{cases} \tag{4-8}$$

则此定理仍然成立.

11．含两个方程的方程组的 Newton 迭代法

给定一个方程组

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$$

由下式作逐次近似计算.

$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k-\dfrac{1}{J(x_k,y_k)}\begin{vmatrix} F(x_k,y_k) & F_y'(x_k,y_k) \\ G(x_k,y_k) & G_y'(x_k,y_k) \end{vmatrix}=x_k-\dfrac{\Delta_x^{(k)}}{J(x_k,y_k)} \\ y_{k+1}=y_k-\dfrac{1}{J(x_k,y_k)}\begin{vmatrix} F_x'(x_k,y_k) & F(x_k,y_k) \\ G_x'(x_k,y_k) & G(x_k,y_k) \end{vmatrix}=y_k-\dfrac{\Delta_y^{(k)}}{J(x_k,y_k)} \end{cases} \quad (4\text{-}9)$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

这里，

$$\Delta_x^{(k)}=\begin{vmatrix} F(x_k,y_k) & F_y'(x_k,y_k) \\ G(x_k,y_k) & G_y'(x_k,y_k) \end{vmatrix},\quad \Delta_y^{(k)}=\begin{vmatrix} F_x'(x_k,y_k) & F(x_k,y_k) \\ G'(x_k,y_k) & G(x_k,y_k) \end{vmatrix}$$

且 Jacobi 行列式

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} F_x'(x,y) & F_y'(x,y) \\ G_x'(x,y) & G_y'(x,y) \end{vmatrix}\neq 0$$

仅当初始近似值充分接近方程组的解时，Newton 法才是有效的.

二、题型分析与解题方法

例 1 判断下列方程有几个实根，并求出其隔根区间.

（1） $x^3-5x-3=0$

（2） $x=2-e^{-x}$

解 （1）设 $f(x)=x^3-5x-3$，则 $f'(x)=3x^2-5=3(x^2-\frac{5}{3})$

当 $|x|<\sqrt{\frac{5}{3}}$ 时， $f'(x)<0$，$f(x)$为单调递减函数；

当 $|x|>\frac{\sqrt{5}}{3}$ 时， $f'(x)>0$，$f(x)$为单调递增函数.

计算函数 $f(x)$在下列各点上的函数值，符号如下表：

x	-2	$-\sqrt{\frac{5}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	3
$f(x)$	−	+	−	−	+

由表可见 $f(x)$=0 有三个根：

$$\alpha_1 \in (-2,-\sqrt{\frac{5}{3}})，\quad \alpha_2 \in (-\sqrt{\frac{5}{3}},0)，\quad \alpha_3 \in (\sqrt{\frac{5}{3}},3).$$

（2）将原方程改写为 $2-x=e^{-x}$

记 $f_1(x)=2-x,\quad f_2(x)=e^{-x}$，作函数 $f_1(x)$和 $f_2(x)$的图像，由图 4-1 可知 $f_1(x)$与 $f_2(x)$ 有两个交点，其横坐标 $\alpha_1 \in (-2,-1)$，$\alpha_2 \in (1,2)$. 因而此方程有两个根 $\alpha_1 \in (-2,-1)$，$\alpha_2 \in (1,2)$.

例 2 设 $f(x)$=0 在[a, b]上有根 α，根的第 k 次近似值为 x_k，且 $x_k \in [a,b]$，证明：

$$|\alpha - x_k| \le \frac{f(x_k)}{m}$$

其中 $m=\min\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$

证 由 Taylor 展开式得

$$f(\alpha)=f(x_k)+f'(\xi_k)(\alpha-x_k)=0$$

其中 ξ_k 介于 x_k 和 α 之间，由上式得

$$\alpha - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)}$$

图 4-1

两边取绝对值有

$$|\alpha - x_k| = \frac{|f(x_k)|}{|f'(\xi_k)|} \le \frac{|f(x_k)|}{m}$$

例 3 用二分法求方程 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-\sin(\dfrac{\pi x}{2})=0$，在区间[0, 1]内的实根的近似值，要求误差不超过 $\dfrac{1}{2^5}$.

解 $f(0)$=1>0，$f(1)=\mathrm{e}^{-1}-1<0$，且 $f(x)$在[0, 1]上连续，故方程 $f(x)$=0 在[0, 1]上至少有一个根.又 $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{\pi}{2}\cos(\dfrac{\pi x}{2})$，当 $x\in[0,1]$时，$f'(x)<0$，从而 $f(x)$在[0, 1]内单调递减，故在区间[0, 1]内仅有方程 $f(x)$=0 的一个根.（0, 1）是方程 $f(x)$=0

的有根区间.这样本题可采用二分法，用二分法计算结果见下表：

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号
0	0	1	0.5	−
1	0	0.5	0.25	+
2	0.25	0.5	0.375	+
3	0.375	0.5	0.4375	+
4	0.4375	0.5		

取 $x^*=\frac{1}{2}(0.4375+0.5)=0.46875$，其误差限为

$$\left|\alpha-x^*\right|\le\frac{1}{2^5}$$

例 4 证明 $1-x-\sin x=0$ 在 $[0,\ 1]$ 内仅有一个根.使用二分法求误差不大于 $\frac{1}{2}\times10^{-4}$ 的根需要对分多少次？

解 设 $f(x)=1-x-\sin x$，则 $f(0)=1>0$，$f(1)=-\sin(1)<0$，且 $f(x)$在$[0,\ 1]$上连续，故方程 $f(x)=0$ 在$[0,\ 1]$内至少有一个根.又因为 $f'(x)=-1-\cos x<0,\quad x\in[0,1]$，故 $f(x)$在$[0, 1]$上单调递减，因此 $f(x)$在$[0, 1]$上有且仅有一个根.

使用二分法，使误差限为$\left|\alpha-x^*\right|\le\frac{1}{2^{k+1}}(b-a)=\ \frac{1}{2^{k+1}}\le\frac{1}{2}\times10^{-4}$，解得

$$2^k\ge10^4,\quad k\ge4\ln10/\ln2=13.287\,7$$

所以需对分 14 次即可.

例 5 使用二分法求 $x^3-2x-5=0$ 在区间$[2, 3]$上的根，要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-3}$.

解 设 $f(x)=x^3-2x-5,\quad f(2)=-1<0,\quad f(3)=16>0$，且 $f(x)$在$[2, 3]$上连续，故方程 $f(x)=0$ 在$[2, 3]$内至少有一个根.又 $f'(x)=3x^2-2$，当 $x\in[2,3]$时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$在$[2, 3]$上是单调递增函数，从而（2, 3）内仅有方程的一个求根.（2, 3）是 $f(x)=0$ 的有根区间.采用二分法，若使误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-3}$，则

$\left|\alpha-x^*\right|\le\frac{1}{2^{k+1}}\le\frac{1}{2}\times10^{-3}$，解得 $2^k\ge10^3,\quad k\ge3\ln10/\ln2$，即 $k\ge10$，从而二分 10 次使可达到要求.用二分法对分 10 次的计算结果如表

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$符号

0	2	3	2.5	+
1	2	2.5	2.25	+
2	2	2.25	2.125	+
3	2	2.125	2.062 5	−
4	2.062 5	2.125	2.093 75	−
5	2.093 75	2.125	2.109 375	+
6	2.093 75	2.109 375	2.101 562 5	+
7	2.093 75	2.101 562 5	2.097 656 25	+
8	2.093 75	2.097 656 25	2.095 703 125	+
9	2.093 75	2.095 703 125	2.094 726 562 5	+
10	2.093 75	2.094 726 562 5		

取 $x^* = \frac{1}{2}(2.093\,75 + 2.094\,726\,562\,5) = 2.094\,238\,281\,25$

其误差限为 $\left|\alpha - x^*\right| \le \frac{1}{2} \times 10^{-3}$.

例 6 能不能用迭代法求解下列方程，如果不能时，试将方程改写成能用迭代法求解的形式.

（1） $x = (\cos x + \sin x)/4$；（2）x=4−2^x.

分析 判断方程 $x = \varphi(x)$ 能否用迭代法求根，关键是看迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是否收敛，如果 $\varphi(x)$ 能满足收敛定理的条件，就能利用迭代法.

解 （1） $\varphi(x) = (\cos x + \sin x)/4$，对所有的 x，有

$$\left|\varphi'(x)\right| = \left|(-\sin x + \cos x)/4\right| \le \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

显然，迭代函数 $\varphi(x)$ 满足定理 4.1 的条件，故能用迭代法求根.

（2）方程为 $x - 4 + 2^x = 0$.设 $f(x) = x - 4 + 2^x$，则 $f(1)<0$，$f(2)>0$，故方程 $f(x)=0$ 在区间（1, 2）内有根.题中 $\varphi(x) = 4 - 2^x$，当 $x \in (1, 2)$ 时，$\left|\varphi'(x)\right| = \left|-2^x \ln 2\right| > 2\ln 2 > 1$，由定理 4.2 不能用 $x_{k+1} = 4 - 2^{x_k}$ 来迭代求根.

把原方程改写为 $x = \ln(4 - x)/\ln 2$，此时 $\varphi(x) = \ln(4 - x)/\ln 2$，则有

1° 当 $x \in [1,2]$ 时，$\varphi(x) \in [1, \ln 3/\ln 2] \subset [1,2]$

2° 对任意 $x \in (1, 2)$，有 $|\varphi'(x)| = \left|\dfrac{-1}{4-x} \cdot \dfrac{1}{\ln 2}\right| < \dfrac{1}{4-2} \cdot \dfrac{1}{\ln 2} = \dfrac{1}{2\ln 2} < 1$

由定理 4.1 知可用迭代公式

$$x_{k+1} = \ln(4 - x_k) / \ln 2$$

来求解（1, 2）区间内的唯一根.

例 7 证明：对任何初始值 $x_0 \in R$，由迭代公式

$$x_{k+1} = \cos x_k \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

所产生的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 都收敛于方程 $x = \cos x$ 的根.

分析 本题应考虑利用迭代收敛定理来证明。

证 设 $\varphi(x) = \cos x$，则 $\varphi'(x) = -\sin x$

1° 先考虑区间[−1, 1]，当 $x \in [-1,1]$ 时，$\varphi(x) = \cos x \in [-1,1]$，$|\varphi'(x)| \le \sin 1 < 1$，故对任意初值 $x_0 \in [-1,1]$，由迭代公式 $x_{k+1} = \cos x_k$ 产生的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 都收敛于方程 $x=\cos x$ 的根.

2° 对任意初值 $x_0 \in R$，有 $x_1 = \cos x_0 \in [-1,1]$，将 x_1 看成新的迭代初值，则由 1° 知，迭代公式 $x_{k+1} = \cos x_k$ 产生的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 都收敛于方程 $x = \cos x$ 的根.

例 8 求解方程 $x = \mathrm{e}^{-x}$ 的根，要求取 $x_0=0.5$，分别用简单迭代法、迭代法的加速方法：$\bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k),\quad x_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \dfrac{m}{1-m}(\bar{x}_{k+1} - x_k)$，以及 Aitken 方法求解，要求误差满足 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$.

解 （1）简单迭代法.此时迭代公式为

$$x_{k+1} = \mathrm{e}^{-x_k}, \quad x_0 = 0.5 \quad (k = 0,1,2\cdots)$$

计算结果如下：

k	x_k	k	x_k
0	0.5	10	0.566 907 2
1	0.606 530 7	11	0.567 277 2
2	0.545 239 2	12	0.567 067 4
3	0.579 703 1	13	0.567 186 4
4	0.560 064 6	14	0.567 118 9
5	0.571 172 1	15	0.567 157 1
6	0.564 863 0	16	0.567 135 4
7	0.568 438 1	17	0.567 147 8
8	0.566 409 5	18	0.567 140 8
9	0.567 559 6		

此时已满足$\left|x_{18}-x_{17}\right|<10^{-5}$，故取$x^*\approx x_{18}=0.567\,140\,8$.

（2）用加速技巧来做.在 x_0=0.5 附近，$(\mathrm{e}^{-x})'\approx -0.6$，故取 m=−0.6，此时迭代公式为

$$\begin{cases}\bar{x}_{k+1}=e^{-x_k}\\ x_{k+1}=\bar{x}_{k+1}-\dfrac{0.6}{1+0.6}(\bar{x}_{k+1}-x_k)\end{cases}\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

计算结果如下

k	$\bar{x}_k$	x_k	k	$\bar{x}_k$	x_k
0		0.5	3	0.567 149 8	0.567 143 1
1	0.606 530 7	0.566 581 7	4	0.567 143 4	0.567 143 3
2	0.567 461 9	0.567 131 8			

此时已满足$\left|x_4-x_3\right|<10^{-5}$，故$x^*\approx x^4=0.567\,143\,3$.

（3）用埃特金 Aitken 方法来做.此时迭代式为

$$\begin{cases}\bar{x}_{k+1}=\varphi(x_k)\\ \tilde{x}_{k+1}=\varphi(\bar{x}_{k+1})\\ x_{k+1}=\tilde{x}_{k+1}-\dfrac{(\tilde{x}_{k+1}-\bar{x}_{k+1})^2}{\tilde{x}_{k+1}-2\bar{x}_{k+1}+x_k}\end{cases}\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

计算结果如下

k	$\bar{x}_{k+1}$	$\tilde{x}_{k+1}$	x_k
0			0.5
1	0.606 530 7	0.545 239 2	0.567 623 9
2	0.566 870 8	0.567 297 9	0.567 143 3
3	0.567 143 3	0.567 143 3	

此时已达到精度要求，故取$x^*\approx x_2=0.567\,143\,3$.

例 9　为求方程$x^3-x^2-1=0$在 x_0=1.5 附近的一个根，设将方程改写为下列等价形式，并建立相应的迭代公式：

（1）$x=1+1/x^2$，迭代公式：$x_{k+1}=1+1/x_k^2$；

（2） $x^3=1+x^2$，迭代公式：$x_{k+1}=(1+x_k^2)^{1/3}$；

（3） $x^2=1/(x-1)$，迭代公式：$x_{k+1}=1/(x_k-1)^{1/2}$.

试分析每种迭代公式在 x_0=1.5 附近的收敛性，并估计收敛速度.取一种公式求出具有 4 位有效数字的近似根.

分析 这类题要利用判别收敛定理来分析敛散性.

解 令 $f(x)=x^3-x^2-1$，并取区间 $[1.4,\ 1.6]$，则 $x_0\in[1.4,1.6]$，显然 $f(1.4)\cdot f(1.6)<0$，从而方程 $f(x)=x^3-x^2-1=0$ 的根 $\alpha\in[1.4,1.6]$，对于迭代公式

（1） $\varphi(x)=1+1/x^2$, $\varphi'(x)=-2/x^3$, 在 $[1.4,\ 1.6]$ 上连续，且 $|\varphi'(\alpha)|\le 2/1.4^3=0.728\,86<1$ 故迭代公式（1）局部收敛.

又因为 $\varphi(x)=1+1/x^2$，在 $[1.4,\ 1.6]$ 内有连续二阶导数，且 $|\varphi'(\alpha)|<1$，$\varphi'(\alpha)\ne 0$，故迭代过程（1）线性收敛.

（2） $\varphi(x)=(1+x^2)^{1/3}$, $\varphi'(x)=2x/[3(1+x^2)^{2/3}]$ 在 $[1.4,\ 1.6]$ 上连续，且有 $\varphi'(\alpha)\le 2\times1.6/[3(1+1.4^2)]^{2/3}=0.517\,41<1$，故（2）也局部收敛.收敛速度是线性收敛.

（3） $\varphi(x)=1/\sqrt{x-1}$，$\varphi'(x)=-1/[2(x-1)^{3/2}]$ 在 $[1.4,\ 1.6]$ 上连续，且 $\varphi'(\alpha)\ge 1/[2(1.6-1)^{3/2}]>1$，故局部发散.

由于 $|\varphi'(x_0)|$ 越小，越快地收敛于 α，故取第（2）式来求根.计算结果如下：

k	x_k	k	x_k
0	1.5	5	1.466 243 01
1	1.481 248 03	6	1.465 876 82
2	1.472 705 73	7	1.465 710 24
3	1.468 817 31	8	1.465 634 47
4	1.467 047 97	9	1.465 600 00

由于 $|x_9-x_8|=0.000\,034\,47<\dfrac{1}{2}\times10^{-3}$，故可取 $\alpha\approx x_9\approx1.4656$.

例 10 给定函数 $f(x)$，设对一切 x, $f'(x)$ 存在且 $0<m\le f'(x)\le M$，试证明：对于 $0<\lambda<\dfrac{2}{M}$ 的任意 λ，迭代过程 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 均收敛于 $f(x)$=0 的根 α.

分析 此迭代过程可看作 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, $\varphi(x)=x-\lambda f(x)$.这样，要判断该迭代过程收敛，需对 $|\varphi'(x)|$ 进行考察，进而得出应有的结论.

证 设方程 $f(x)$=0 的等价形式为

$$x=x-\lambda f(x)$$

则

$$\varphi(x)=x-\lambda f(x)，\quad |\varphi'(x)|=|1-\lambda f'(x)|$$

因为$0<m\le f'(x)\le M$， $0<\lambda<\dfrac{2}{M}$，所以

$$0<\lambda m\le \lambda f'(x)\le \lambda M<2$$

$$-2<-\lambda f'(x)<0$$

$$-1<1-\lambda f'(x)<1,\quad |1-\lambda f'(x)|<1$$

因此迭代格式收敛于 $f(x)=0$ 的根α.

例 11 利用适当的迭代格式证明

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}=2$$

分析 本题应首先设法建立一个收敛的迭代格式$x_{k+1}=\varphi(x_k)$，使它收敛于方程$x=\varphi(x)$在[a, b]上的唯一根.

证 考虑迭代格式

$$\begin{cases}x_0=0\\ x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}\qquad (k=0,1,2,\cdots)\end{cases}\tag{1}$$

则

$$x_1=\sqrt{2}$$

$$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

………

$$x_k=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{k\text{个}2}$$

………

记$\varphi(x)=\sqrt{2+x}$， 则$\varphi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$， 当$x\in[0,2]$时， $\varphi(x)\in[\varphi(0),\varphi(2)]=\left[\sqrt{2},2\right]$ $\subset[0,2]$；$|\varphi'(x)|\le\varphi'(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}<1$，因而迭代格式（1）产生的序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$收敛于方程

$$x=\sqrt{2+x}$$

在[0, 2]内的唯一根$\alpha=2$，即：

$$\lim_{k\to\infty}x_k=2$$

例 12 设$\varphi(x)$在[a, b]上连续可微，且$0<\varphi'(x)<1$， $x=\varphi(x)$在[a, b]上有根α，$x_0\in[a,b]$，但$x_0\ne\alpha$，则由

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)\quad (k=0,1,2,\cdots)\tag{1}$$

产生的序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$单调收敛于α.

证　设$\alpha < x_0 \le b$，则由

$$x_1-\alpha=\varphi(x_0)-\varphi(\alpha)=\varphi'(\xi_0)(x_0-\alpha)$$

其中ξ_0在x_0和α之间及$0<\varphi'(x)<1$知

$$0<x_1-\alpha<x_0-\alpha$$

于是

$$\alpha<x_1<x_0$$

由归纳法得，若$\alpha<x_k\le b$，则$\alpha<x_{k+1}<x_k$.因而$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$单调下降，并以α为下界.因而$\lim\limits_{k\to\infty}x_k$存在，在（1）的两边取极限得

$$\lim_{k\to\infty}x_k=\varphi\left(\lim_{k\to\infty}x_k\right)$$

因而$\lim\limits_{k\to\infty}x_k$为方程

$$x=\varphi(x) \qquad （2）$$

的根.由定理 4.1 知方程（2）的根是唯一的，因而$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\alpha$.

例 13　设$F(x)=x+c(x^2-3)$，应如何选取 c 才能使迭代$x_{i+1}=F(x_i)$具有局部收敛性？c 取何值时，这个迭代收敛较快？

分析　本题应利用局部收敛条件来确定 c.

解　方程$x=F(x)$的根为$\alpha_1=-\sqrt{3},\quad \alpha_2=\sqrt{3}$，函数 $F(x)$在根附近具有连续一阶导数，又$F'(x)=1+2cx$，解$\left|F'(-\sqrt{3})\right|=\left|1-2\sqrt{3}c\right|<1$得$0<c<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$；解$\left|F'\sqrt{3}\right|=\left|1+2\sqrt{3}c\right|<1$得$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<c<0$.从而使迭代$x_{i+1}=F(x_i)$具有局部收敛性，则$|c|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，且$c\ne 0$.

令$F'(-\sqrt{3})=1-2\sqrt{3}c=0$　得$c=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$；令$F'(\sqrt{3})=1+2\sqrt{3}c=0,$　得$c=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.这时$F''(x)=2c\ne 0$为平方收敛.故当 c 取$\pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$时，这个迭代收敛较快.

例 14　设 $f(x)$=0 的单根α，$x=F(x)$是 $f(x)$=0 的等价方程，则 $F(x)$可表示为

$$F(x)=x-m(x)f(x)$$

证明：当$m(\alpha)\ne[f'(\alpha)]^{-1}$时，$F(x)$为一阶的；当$m(\alpha)=[f'(\alpha)]^{-1}$时，$F(x)$至少是二阶的.

分析　若$F'(\alpha)\ne 0$，则 $F(x)$为一阶的；若$F'(\alpha)$=0，则 $F(x)$至少二阶的，这样

本题应考察$F'(\alpha)$来得出结论.

证　由α是方程$f(x)=0$的单根，知$f(\alpha)=0$，$f'(\alpha)\neq 0$.

$$F'(x)=1-m'(x)f(x)-m(x)f'(x)$$

$$F'(\alpha)=1-m'(\alpha)f(\alpha)-m(\alpha)f'(\alpha)=1-m(\alpha)f'(\alpha)$$

当$m(\alpha)\neq[f'(\alpha)]^{-1}$时，$m(\alpha)f'(\alpha)\neq 1$，从而$F'(\alpha)\neq 0$，故$F(x)$为一阶的.

当$m(\alpha)=[f'(\alpha)]^{-1}$时，$m(\alpha)f'(\alpha)=1$，从而$F'(\alpha)=0$，故$F(x)$至少是二阶的.

例 15　设$a>0$，$x_0>0$，证明：迭代公式

$$x_{k+1}=\frac{x_k(x_k^2+3a)}{(3x_k^2+a)}$$

是计算$\sqrt{a}$的三阶方法.

分析　本题应说明$\{x_k\}$的极限为$\sqrt{a}$，并且$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(x_{k+1}-a)}{(x_k-a)^3}=C(\neq 0)$才行.

证　显然，当$a>0$，$x_0>0$时，$x_k>0$（$k=1,2,\cdots$）.令$\varphi(x)=x(x^2+3a)/(3x^2+a)$，则

$$\varphi'(x)=\frac{(3x^2+3a)(3x^2+a)-x(x^2+3a)\cdot 6x}{(3x^2+a)^2}=\frac{3(x^2-a)^2}{(3x^2+a)^2}$$

故对$\forall x>0,\quad |\varphi'(x)|<1$，即迭代收敛.设$\{x_k\}$的极限为$l$，则有

$$l=\frac{l(l^2+3a)}{(3l^2+a)}$$

解得　$l=0,\quad l=\pm\sqrt{a}$.由题知取$l=\sqrt{a}$.即迭代序列收敛于$\sqrt{a}$.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left[\sqrt{a}-(x_k^3+3ax_k)/(3x_k^2+a)\right]}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\lim_{k\to\infty}\frac{(\sqrt{a}-x_k)^3}{(\sqrt{a}-x_k)^3(3x_k^2+a)}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{3x_k^2+a}=\frac{1}{4a}\neq 0$$

故题中迭代式确是求$\sqrt{a}$的三阶方法.

例 16　已知$x=F(x)$在$[a,b]$内仅有一个根，而当$x\in[a,b]$时，$|F'(x)|\geq L>1$（L常数），试问如何将$x=F(x)$化为适合于迭代的形式.

将$x=\mathrm{tg}x$化为适合迭代的形式，并求方程最小正根（即求$x=4.5$（弧度）附近的根）.计算结果精确到6位有效数字.

解　注意到$\left[F^{-1}(x)\right]'=\dfrac{1}{F'(x)}$

则当$x\in[a,b]$时，$\left|\left[F^{-1}(x)\right]'\right|\leq\dfrac{1}{L}<1$，所以将方程$x=F(x)$写成等价形式$x=F^{-1}(x)$，构造迭代格式

$$x_{k+1}=F^{-1}(x_k)\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

可望收敛.上面几式中 $F^{-1}(x)$ 表示 $F(x)$的反函数.

对于方程 $x=\mathrm{tg}x$，在 4.5（弧度）附近写成等价形式

$$x=\pi+arctgx$$

作迭代公式

$$x_{k+1}=\pi+arctgx_k\quad(k=0,1,2,\cdots)\tag{1}$$

此时迭代函数为 $\varphi(x)=\pi+arctgx$，求导级 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$|\varphi'(4.5)|=\dfrac{1}{1+4.5^2}<1$，因此迭代格式（1）是局部收敛的.

取 x_0=4.5，计算结果如下表

k	0	1	2	3	4
x_k	4.5	4.493 72	4.493 42	4.493 41	4.493 41

例 17　用弦截法求 $f(x)=x^3+2x^2+10x-20=0$ 的根，要求 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-6}$.

解　因 $f'(x)=3x^2+4x+10$，令 $f'(x)=0$，则由于 $f'(x)=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac=16-4\times3\times10<0$，故 $f(x)$ 没有极值点.由于 $f(1)=-7<0$，$f(2)=12>0$，因此 $f(x)=0$ 在（1, 2）内仅有一根.

迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k)\quad(k=1,2,\cdots)$$

取 x_0=1，x_1=2，则有

k	x_k	k	x_k
0	1	4	1.369 013 326
1	2	5	1.368 807 460
2	1.304 347 826	6	1.368 808 108
3	1.357 912 305		

取 $\alpha\approx x_6=$1.368 808 108，可保证 $|x_5-x_4|<10^{-6}$.

注记：本题方程称为 Lenoardo 方程.Leonardo 于 1225 年研究了该方程，并得到了 x^*=1.368 808 107 的结果，这在当时是非常重要的结果，但无人知道他是用何法而得.这时 $f(x^*)\approx-0.000\,000\,009$.

例 18　用 Newton 求解 Leonardo 方程

$$x^3+2x^2+10x-20=0$$

要求$\left|x_{k+1}-x_k\right|<10^{-6}$.

解　由上题知，$f(x)=0$ 在（1, 2）内有一个根，且 $f''(x)>0$，$f(2)>0$，故取 $x_0=2$，利用牛顿迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)/f'(x_k)\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

计算结果如下

k	x_k	k	x_k
0	2	3	1.368 810 223
1	1.466 666 667	4	1.368 808 108
2	1.371 512 014	5	1.368 808 108

$\left|x_5-x_4\right|<10^{-6}$，故取$\alpha\approx x_5$=1.368 808 108.

例 19　设$\tau\in(0,1)$，考虑方程

$$f(x)=x+x^{1+\tau}=0$$

证明求解该方程的 Newton 法产生的迭代序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$（其中$0<x_0\ll 1$）是收敛的. 求β使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-0|}{|x_k-0|^{\beta}}=c>0$$

解　记 $f(x)=x(1+x^{\tau}),\quad g(x)=1+x^{\tau}$，则 $g(0)=1\neq 0$.所以$\alpha=0$为 $f(x)=0$ 的单根. $f'(x)=1+(\tau+1)x^{\tau}$，但 $f(x)$在α附近不存在二阶连续导数，所以 Newton 法的二阶局部收敛性的结论未必成立. Newton 迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)}=x_k-\frac{x_k(1+x_k^{\tau})}{1+(\tau+1)x_k^{\tau}}=\frac{\tau x_k^{1+\tau}}{1+(\tau+1)x_k^{\tau}}\qquad (k=0,1,2\cdots)\qquad（1）$$

易知若 $x_k>0$，则 $x_{k+1}>0$.另外

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{\tau x_k^{\tau}}{1+(\tau+1)x_k^{\tau}}<1$$

即$0<x_{k+1}<x_k$.因而$\{x_k\}_{k-0}^{\infty}$是一个单调下降以 0 为下界的序列，故$\lim\limits_{k\to\infty}x_k$存在，设其值为$\tilde{x}$，在（1）的两边令$k\to+\infty$，得$\tilde{x}=\tilde{x}-\dfrac{\tilde{x}(1+\tilde{x}^{\tau})}{1+(\tau+1)\tilde{x}^{\tau}}$.因而$\tilde{x}=0$.于是

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = 0 \tag{2}$$

由（1）可得

$$\frac{|x_{k+1}-0|}{|x_k-0|^{1+\tau}} = \frac{\tau}{1+(\tau+1)x_k^{\tau}} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

对上式两边取极限，并利用（2），得

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|x_{k+1}-0|}{|x_k-0|^{1+\tau}} = \lim_{k\to+\infty}\frac{\tau}{1+(\tau+1)x_k^{\tau}} = \tau$$

$$\beta = 1+\tau$$

例 20 设 a 为正实数，试建立求 $\frac{1}{a}$ 的 Newton 迭代公式，要求在迭代函数中不用除法运算，并要求当取初值 x_0 满足，$0 < x_0 < \frac{2}{a}$ 时，此算法是收敛的.

解 考虑方程

$$f(x) = \frac{1}{x} - a = 0$$

则 $\frac{1}{a}$ 为此方程的根，$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$，用 Newton 法求此方程根的迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k(2-ax_k) \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

迭代函数 $\varphi(x) = x(2-ax)$ 不含除法运算.

$$1-ax_{k+1} = 1-ax_k(2-ax_k) = (1-ax_k)^2 \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

递推可得

$$1-ax_k = (1-ax_0)^{2^k} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

解得

$$x_k = \frac{1}{a}[1-(1-ax_0)^{2^k}] \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

当 $0 < x_0 < \frac{2}{a}$ 时，$|1-ax_0| < 1$，从而 $\lim_{k\to\infty}(1-ax_0)^{2^k} = 0$，故 $\lim_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{a}$，此算法收敛.

例 21 研究求 $\sqrt{a}$ 的 Newton 公式

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}), x_0 > 0 \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

证明：对一切 $k=1,2,\cdots$， $x_k \ge \sqrt{a}$，且序列$\{x_k\}$是单调递减的，从而迭代过程收敛.

证 因 $a>0$，$x_0>0$，故 $x_k>0 \quad (k=1,2,\cdots)$.

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{x_k}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_k}})^2+\sqrt{a}\ge\sqrt{a}$$

因此对一切 $k\ge 1$，均有 $x_k\ge\sqrt{a}$.利用这一结果，得

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{2}\frac{x_k+a/x_k}{x_k}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2x_k^2}\le\frac{1}{2}+\frac{a}{2a}=1$$

故 $x_{k+1}\le x_k$，即$\{x_k\}$单调递减.根据单调有界原理知，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$收敛.

例 22 对于 Newton 迭代公式 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，证明：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}=-\frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

这里α为 $f(x)=0$ 的根.

分析 类似于 Newton 法的收敛性证明考虑应用 Taylor 展开.

证 因

$$x_k=x_{k-1}-\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

所以

$$x_k-x_{k-1}=-\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

故

$$\frac{(x_k-x_{k-1})}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}=-\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})(x_{k-1}-x_{k-2})^2}$$

根据 Taylor 展式

$$f(x_{k-1})=f(x_{k-2})+f'(x_{k-2})(x_{k-1}-x_{k-2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x_{k-1}-x_{k-2})^2$$

（ξ介于 x_{k-1}与 x_{k-2}之间），以及

$$x_{k-1}=x_{k-2}-\frac{f(x_{k-2})}{f'(x_{k-2})}$$

得

$$f(x_{k-1})=\frac{1}{2}f''(\xi)(x_{k-1}-x_{k-2})^2$$

因此有

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2} = -\frac{f''(\xi)(x_{k-1}-x_{k-2})^2}{2f'(x_{k-1})(x_{k-1}-x_{k-2})^2} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_{k-1})}$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(x_k - x_{k-1})}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{[2f'(\alpha)]}.$$

例 23 证明：对于 $f(x)=0$ 的多重根 α，Newton 法仅为线性收敛.

分析 要证明 Newton 法线性收敛，只需证明 $\frac{\alpha - x_{k+1}}{\alpha - x_k} \to C$（$C \neq 0$ 是常数）（$k\to\infty$）.若 α 是 $f(x)=0$ 的 m 重根，则 $f(x)=(x-\alpha)^m h(x),\quad h(\alpha)\neq 0$，$m \geq 2$，利用 $f(x)$的这一表达式可得出前述极限.

证 设 α 是 $f(x)=0$ 的 m 重根（$m\geq 2$），则 $f(x)$可以表达为

$$f(x)=(x-\alpha)^m h(x),\quad h(\alpha)\neq 0$$

所以

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x-\alpha)^{m-1}h(x)+(x-\alpha)^m h'(x) \\ &= (x-\alpha)^{m-1}[mh(x)+(x-\alpha)h'(x)] \end{aligned}$$

由 Newton 法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

得

$$\begin{aligned} x_{k+1}-\alpha &= x_k - \alpha - \frac{(x_k-\alpha)^m h(x_k)}{(x_k-\alpha)^{m-1}[mh(x_k)+(x_k-\alpha)h'(x_k)]} \\ &= x_k - \alpha - \frac{(x_k-\alpha)h(x_k)}{mh(x_k)+(x_k-\alpha)h'(x_k)} \\ &= (x_k-\alpha)[1-\frac{h(x_k)}{mh(x_k)+(x_k-\alpha)h'(x_k)}] \end{aligned}$$

所以

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = 1 - \frac{h(x_k)}{mh(x_k)+(x_k-\alpha)h'(x_k)}$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha - x_{k+1}}{\alpha - x_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = 1-\frac{h(\alpha)}{mh(\alpha)} = 1-\frac{1}{m}$$

当 $m\geq 2$ 时，$1-\frac{1}{m} = C \neq 0$，说明 Newton 法对重根是线性收敛的.

例 24 试给出简化 Newton 公式（单调弦割法）

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

收敛的一个充分条件.又设 $f(x)$在$[a,\ b]$内有单根α，证明：$\left|x_k-\alpha\right|\le\frac{1}{m}\left|f'(x_0)\right|\cdot$ $\left|x_{k+1}-x_k\right|$，其中$m=\min\limits_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|$.

分析　本题可看作是迭代函数为$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x_0)}$的简单迭代法.因而，可用简单迭代法收敛的充分条件来给本题方法的收敛性条件.

解　令 $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x_0)}$，则 $\left|\varphi'(x)\right|\le L<1$（在 α 的邻域内）是 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$收敛的一个充分条件，

即

$$\left|1-\frac{f'(x)}{f'(x_0)}\right|\le L<1$$

解得

$$0<1-L\le\frac{f'(x)}{f'(x_0)}\le1+L$$

或

$$\frac{1}{1+L}\le\left|\frac{f'(x_0)}{f'(x)}\right|\le\frac{1}{1-L}$$

因此，只要对给定的 x_0，存在 $0<L<1$，使对任何$x\in[a,b]$，上式都能成立的话，单调弦割法就收敛.

再由 $f(\alpha)=0,\quad f'(\alpha)\ne0$有

$$\begin{aligned}x_{k+1}-x_k&=-\frac{f(x_k)}{f'(x_0)}\\&=-\frac{f(x_k)-f(\alpha)}{f'(x_0)}=-\frac{f'(\xi)(x_k-\alpha)}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

ξ介于 x_k与α之间.

这样

$$x_k-\alpha=-\frac{f'(x_0)}{f'(\xi)}(x_{k+1}-x_k)$$

所以

$$\left|x_k-\alpha\right|\le\left|-\frac{f'(x_0)}{f'(\xi)}\right|\cdot\left|x_{k+1}-x_k\right|\le\frac{1}{m}\left|f'(x_0)\right|x_{k+1}-x_k\right|$$

例 25　已知方程 $f(x)=0$，

（1）导出迭代求根公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2f'(x_k)f(x_k)}{2[f'(x_k)]^2-f''(x_k)f(x_k)}$$

（2）证明：对 $f(x)=0$ 的单根，（1）的公式具有三阶收敛速度；

（3）讨论在 $f(x)=0$ 的重根附近，（1）的公式的收敛速度.

分析　这里要求直接导出迭代公式，故可先求出根 α 的近似表达式，然后令其值为 x_{n+1} 即可.为导出 α 的近似表达式可考虑 $f(x)$的 Taylor 展开式，想法导出所求公式.

解　（1）设 α 为 $f(x)=0$ 的单根，则 $f^{(k)}(\alpha)\neq 0,\quad k=1,2,\cdots$，不妨设在 α 的邻域内 $f^{(k)}(x)$ 均有界，则

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{1}{2!}f''(x_k)(x-x_k)^2+O((x-x_k)^3)$$

令 $x=\alpha$，我们有

$$f(x_k)+f'(x_k)(\alpha-x_k)+\frac{1}{2}f''(x_k)(\alpha-x_k)^2+O((\alpha-x_k)^3)=0$$

解出 $f'(x_k)(\alpha-x_k)$ 并乘以 $f'(x_k)$，得

$$[f'(x_k)]^2(\alpha-x_k)=-f(x_k)f'(x_k)-\frac{1}{2}f'(x_k)f''(x_k)(\alpha-x_k)^2+O((\alpha-x_k)^3)$$

上式右端第二项

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}f'(x_k)f''(x_k)(\alpha-x_k)^2\\&=-f'(x_k)(\alpha-x_k)\cdot\frac{1}{2}f''(x_k)(\alpha-x_k)\\&=[f(x_k)+\frac{1}{2}f''(x_k)(\alpha-x_k)^2+O((\alpha-x_k)^3)]\cdot\frac{1}{2}f''(x_k)(\alpha-x_k)\\&\qquad=\frac{1}{2}f(x_k)f''(x_k)(\alpha-x_k)+O((\alpha-x_k)^3)\end{aligned}$$

所以

$$[f'(x_k)]^2(\alpha - x_k) = -f(x_k)f'(x_k) - \frac{1}{2}f'(x_k)f''(x_k)(\alpha - x_k)^2 + O((\alpha - x_k)^3)$$

$$= -f(x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}f(x_k)f''(x_k)(\alpha - x_k) + O((\alpha - x_k)^3)$$

解出$\alpha - x_k$，得

$$\alpha - x_k = \frac{-f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - \frac{1}{2}f(x_k)f''(x_k)} + O((\alpha - x_k)^3)$$

即
$$\alpha = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)} + O((\alpha - x_k)^3)$$

略去高阶无穷小，得

$$\alpha \approx x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2[f'(x_k)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

（2）讨论收敛速度

$$\frac{\alpha - x_{k+1}}{(\alpha - x_k)^3} = \frac{\alpha - x_k + 2f(x_k)f'(x_k)/\{2[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)\}}{(\alpha - x_k)^3}$$

$$= \frac{O((\alpha - x_k))^3}{(\alpha - x_k)^3} = O(1)$$

故在单根附近，（1）的公式具有三阶收敛速度.

（3）仅就二重根的情况证明之，其余类似

利用 $f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) = 0$，作 Taylor 展开，得

$$f(x_k) = \frac{1}{2}f''(\alpha)(x_k - \alpha)^2 + O((x_k - \alpha)^3)$$

$$f'(x_k) = f''(\alpha)(x_k - \alpha) + O((x_k - \alpha)^2)$$

$$f''(x_k) = f''(\alpha) + O((x_k - \alpha))$$

于是

$$\frac{\alpha - x_{k+1}}{\alpha - x_k} = \frac{\alpha - x_k + 2f(x_k)f'(x_k)/\{2[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)\}}{\alpha - x_k}$$

代入 $f(x_k)$、$f'(x_k)$、$f''(x_k)$ 的 Taylor 展开式，并化简得

$$\frac{\alpha - x_{k+1}}{\alpha - x_k} \approx 1 - \frac{[f''(\alpha)]^2}{2[f''(\alpha)]^2 - \frac{1}{2}[f''(\alpha)]^2}$$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = \text{常数}(\neq 0)$$

故在重根附近，（1）中公式是线性收敛的.

例 26　求方程组

$$\begin{cases} x^3+y^3-6x+3=0 \\ x^3-y^3-6y+2=0 \end{cases}$$

具有三位准确数字的正根.

解　为了应用迭代法，将方程组改写为

$$\begin{cases} x=\dfrac{x^3+y^3}{6}+\dfrac{1}{2}\equiv\varphi_1(x,y) \\ y=\dfrac{x^3-y^3}{6}+\dfrac{1}{3}\equiv\varphi_2(x,y) \end{cases}$$

考虑正方形 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$. 如果点（x_0, y_0）位于这个正方形中，则有

$$0<\varphi_1(x_0,y_0)<1,\quad 0<\varphi_2(x_0,y_0)<1$$

由于

$$0<\frac{(x_0^3+y_0^3)}{6}<\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{6}<\frac{(x_0^3-y_0^3)}{6}<\frac{1}{6}$$

所以对点（x_0, y_0）的任何选择，序列（x_k, y_k）仍保留在这个正方形中. 再者，点（x_k, y_k）都保留在矩形

$$\frac{1}{2}<x<\frac{5}{6},\quad \frac{1}{6}<y<\frac{1}{2}$$

中（因为 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$，$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$）. 对于这个矩形中的点，有

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right|=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}<\frac{25/36+1/4}{2}=\frac{34}{72}<1$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right|=\frac{x^2}{2}+\left|-\frac{y^2}{2}\right|<\frac{34}{72}<1$$

因此，在所述的矩形中存在唯一的解，且可用迭代法求出. 令

$$x_0=\frac{1}{2},\quad y_0=\frac{1}{2}$$

有

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{1/8+1/8}{6}=0.542$$

$$x_2=\frac{1}{2}+\frac{0.19615}{6}=0.533$$

$$y_1=\frac{1}{3}+\frac{1/8-1/8}{6}=0.333$$

$$y_2=\frac{1}{3}+\frac{0.1223}{6}=0.354$$

继续这个过程，我们得到

$$x_3=0.533,\quad x_4=0.532$$

$$y_3=0.351,\quad y_4=0.351$$

因为这里

$$q_1=q_2=\frac{34}{72}<0.5$$

所以前两位小数位相同就意味着所要求的精度达到了。

例 27 用 Newton 法求方程组

$$\begin{cases}F(x,y)\equiv 2x^3-y^2-1=0\\G(x,y)\equiv xy^3-y-4=0\end{cases}$$

的实根.

解 通过图示的方法找出初始近似值 x_0=1.2 和 y_0=1.7，计算点（1.2, 1.7）处的 Jacobi 行列式，有

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}6x^2 & -2y\\ y^3 & 3xy^2-1\end{vmatrix}$$

$$J(1.2,1.7)=\begin{vmatrix}8.64 & -3.40\\ 4.91 & 9.40\end{vmatrix}=97.910$$

由公式（4-9），得到

$$x_1=1.2-\frac{1}{97.910}\begin{vmatrix}-0.434 & -3.40\\ 0.195\,6 & 9.40\end{vmatrix}$$

$$=1.2+0.034\,9=1.234\,9$$

$$y_1=1.7-\frac{1}{97.910}\begin{vmatrix}8.64 & -0.434\\ 4.91 & 0.195\,6\end{vmatrix}$$

$$=1.7-0.039\,0=1.661\,0$$

用求得的 x_1 和 y_1 的值，重复这一过程，我们便得到

$$x_2=1.234\,3,\quad y_2=1.661\,5$$

三、综合复习题

1．求方程 $f(x)=\sin x-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=0$ 在区间[1.5, 2]内的实根的近似值，并指出其误差.

2．证明：方程 $\mathrm{e}^x+10x-2=0$ 存在唯一实根 $\alpha\in(0,1)$.用二分法求出此根，要求误差不超过 $\dfrac{1}{2}\times10^{-2}$.

3．用迭代法求方程 $f(x)=x^3-2x-5=0$ 在区间[2, 3]上的根，并讨论迭代法的收敛性.

4．已知 $x^3-x^2-0.8=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近有一个根，将此方程改写成如下 2 个等价形式：

$$x=\sqrt[3]{0.8+x^2},\quad x=\sqrt{x^3-0.8}$$

构造如下两个迭代格式：

（1） $x_{k+1}=\sqrt[3]{0.8+x_k^2}\quad(k=0,1,2,\cdots)$

（2） $x_{k+1}=\sqrt{x_k^3-0.8}\quad(k=0,1,2,\cdots)$

判断这两个迭代格式是否收敛.选一种收敛较快的迭代格式，求出具有 4 位有效数字的近似值.

5．证明：用迭代格式

$$x_{k+1}=\frac{x_k}{2}+\frac{1}{x_k}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

产生的序列，对于 $x_0\geq1$ 均收敛于 $\sqrt{2}$.

6．设法导出计算 $\dfrac{1}{\sqrt{a}}(a>0)$ 的 Newton 迭代公式，并要求公式中既无开方运算，又无除法运算.

7．用 Newton 法求 $f(x)=x-\cos x=0$ 在 $x_0=1$ 附近的实根，要求满足精度 $|x_{k+1}-x_k|<0.001$.

8．应用 Newton 法解方程 $x^3-a=0$，导出求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的近似公式.

9．用弦截法求方程 $x^3-3x-1=0$ 在 $x_0=2$ 附近的实根，设取 $x_0=1.9$，计算到四位有效数字为止.

四、复习题答案

1．$f(x)$在[1.5, 2]上连续，$f(1.5)\cdot f(2)<0$，故 $f(x)$在[1.5, 2]上有根.可利用二分

方法，其结果如下表

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的符号
0	1.5	2	1.75	+
1	1.75	2	1.875	+
2	1.875	2	1.937 5	−
3	1.875	1.937 5	1.906 25	+
4	1.906 25	1.937 5	1.921 875	+

若取根的近似值为 $\alpha \approx x_4 = 1.921875$：则其误差为 $|\alpha - x_4| \le \frac{1}{2^5}(2-1.5)$ $= 0.015625$.

2．需二等分 7 次，$\alpha \approx 0.089844$.

3．方程在[2, 3]上有根，把方程改写成下列三种等价形式

（1）$x = \sqrt[3]{2x+5}$；

（2）$x = \sqrt{2 + \frac{5}{x}}$；

（3）$x = x^3 - x - 5$.

其对应的三个迭代格式为

（1）$x_{k+1} = \sqrt[3]{2x_k + 5}$；

（2）$x_{k+1} = \sqrt{2 + \frac{5}{x_k}}$；

（3）$x_{k+1} = x_k^3 - x_k - 5$.

（$k = 0, 1, 2, \cdots$）

迭代格式（1）在[2, 3]上收敛.

迭代格式（2）在[2, 2.5]上收敛.

迭代格式（3）当 $x_0 \ne x_1$ 时，迭代发散.

4．（1）迭代格式是局部收敛的

（2）迭代格式是发散的.

取 x_0=1.5，利用迭代格式（1）计算，得具有 4 位有效数字的近似根为 $\alpha \approx 1.405$.

6． $x_{k+1} = 0.5(3 - a x_k^2) x_k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$

7．Newton 法求解的迭代公式为

$$x_{k+1}=\frac{x_k\sin x_k+\cos x_k}{1+\sin x_k}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

迭代三次便满足精度要求，$\alpha\approx 0.739$.

8． $x_{k+1}=\frac{1}{3}(2x_k+\frac{a}{x_k^2})\quad (k=0,1,2,\cdots)$

9． $\alpha\approx x_4=1.8794$