计 算 方 法

实验一 Lagrange插值

|  |  |
| --- | --- |
| 姓名 | 郭茁宁 |
| 学号 | 1183710109 |
| 院系 | 计算机科学与技术学院 |
| 专业 | 软件工程 |

哈尔滨工业大学

# 实验报告一

# 题目（摘要）

利用拉格朗日插值多项式求的近似值

输 入：个数据点，；插值点

输 出：在插值点的近似值

* 问题1：拉格朗日插值多项式的次数越大越好吗？
* 问题2：插值区间越小越好吗？
* 问题3：在区间考虑拉格朗日插值问题，为了使得插值误差较小，应如何选取插值节点？
* 问题4：考虑拉格朗日插值问题，内插比外推更可靠吗？

# 前言（目的和意义）

目的：利用拉格朗日插值多项式求的近似值

意义：学习根据实际问题建立的数学模型，针对数学模型的特点确定适当的计算方法，编制出计算机能够执行的计算程序，输入计算机，进行调试，完成运算等数值计算的过程。不只会套用教科书中的标准程序进行数值计算，独立地将学过的数值算法编制成计算机程序，灵活应用已经掌握的算法求解综合性较大的课题。理解数值计算程序结构化的思想，提高编程能力，加深对“计算方法”课程内容的理解和掌握，进一步奠定从事数值计算工作的基础。具体可以利用所掌握的“高级语言”顺利地编制出计算机程序，上机实习，完成实验环节的教学要求。不简单地套用现成的标准程序完成实验题目，把重点放在对算法的理解、程序的优化设计、上机调试和计算结果分析上，达到实验课的目的。

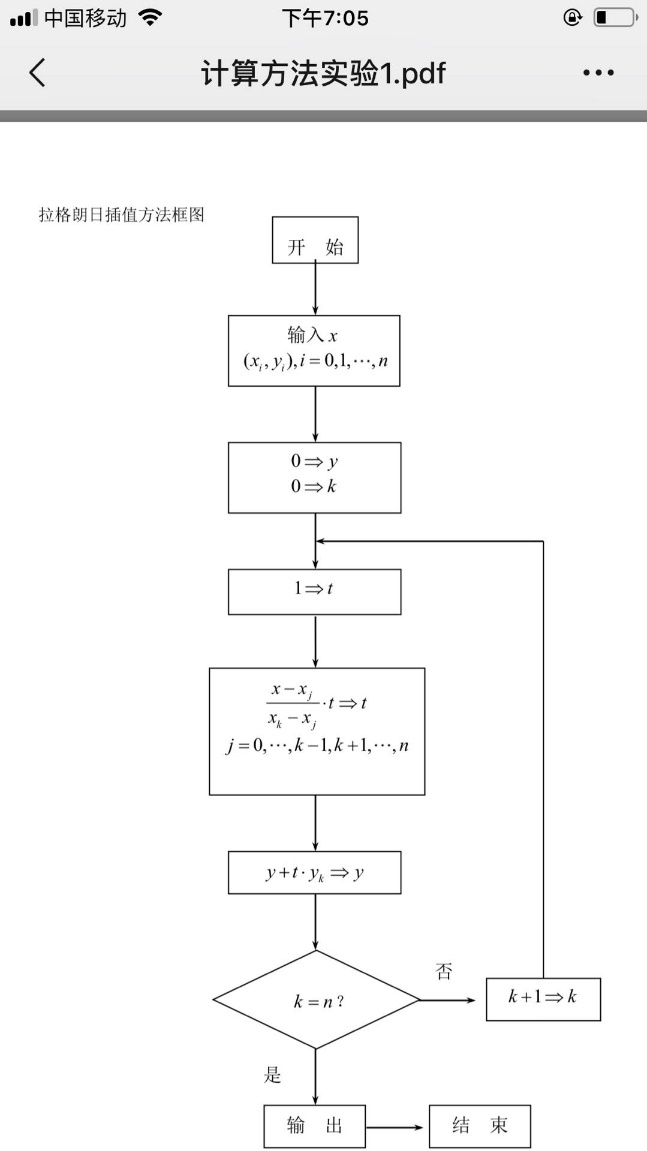
# 数学原理

给定平面上个不同的数据点，，，；则满足条件

的次拉格朗日插值多项式

是存在唯一的。若，且函数充分光滑，则当时，有误差估计式

# 程序设计流程



核心代码：

    double x, y = 0.0;

    scanf("%lf", &x);

    double a[N + 1], b[N + 1];

    int n = 0;

    while (scanf("%lf%lf", &a[n], &b[n]) >= 2) n++;

    n--;

    for (int k = 0; k <= n; k++) {

        double l = 1.0;

        for (int j = 0; j <= n; j++) {

            if (j != k) l \*= (x - a[j]) / (a[k] - a[j]);

        }

        y += l \* b[k];

    }

printf("x = %.3lf\ny = %.3lf", x, y);

测试框架（批量分析）：

#include <cmath>

#include <cstdio>

#define N1 3   // n amount

#define N2 4   // x amount

#define N3 20  // n max

int Ns[N1] = {5, 10, 20};

double x[N2] = {-0.95, -0.05, 0.05, 0.95};

double l = -1.0;

double r = 1.0;

double X(int *k*, int *n*) {

    double h = (r - l) / n;

    return l + k \* h;

}

double Y(double *x*) { return pow(2.718281828459, x); }

int main() {

    for (int i = 0; i < N2; i++) printf("\tx=%.2lf", x[i]);

    printf("\n");

    for (int i = 0; i < N1; i++) {

        double a[N3 + 1], b[N3 + 1];

        int n = Ns[i];

        for (int k = 0; k <= n; k++) {

            a[k] = X(k, n);  // x

            b[k] = Y(a[k]);  // y

        }

        printf("n=%d", n);

        for (int p = 0; p < N2; p++) {

            double y = 0.0;

            for (int k = 0; k <= n; k++) {

                double l = 1.0;

                for (int j = 0; j <= n; j++) {

                    if (j != k) l \*= (x[p] - a[j]) / (a[k] - a[j]);

                }

                y += l \* b[k];

            }

            printf("\t%.6lf", y);

        }

        printf("\n");

    }

    printf("Actual");

    for (int p = 0; p < N2; p++) printf("\t%.6lf", Y(x[p]));

    return 0;

}

# 实验结果、结论与讨论

## 问题1

* 拉格朗日插值多项式的次数越大越好吗？

（1）设，，考虑等距节点的拉格朗日插值多项式，即将区间进行等分，记，，，构造，利用拉格朗日插值多项式作为的近似值。分别取，，，同时计算在，，，，处的函数值。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

（2）设，，考虑等距节点的拉格朗日插值多项式，即将区间进行等分，记，，，构造，利用拉格朗日插值多项式作为的近似值。分别取，，，同时计算在，，，处的函数值。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

结论：

拉格朗日插值多项式的次数不是越多越好。在上述实验中或的匹配效果也不错。根据定义，插值点可以在节点处与实际函数匹配，但不能保证在节点之间逼近实际函数，插值次数越高，插值结果越偏离原函数的现象称为多项式摆动Runge现象。

## 问题2

* 插值区间越小越好吗？

（1）设，，考虑等距节点的拉格朗日插值多项式，即将区间进行等分，记，，，构造，利用拉格朗日插值多项式作为的近似值。分别取，，，同时计算在，，，处的函数值。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

（2）设，，考虑等距节点的拉格朗日插值多项式，即将区间进行等分，记，，，构造，利用拉格朗日插值多项式作为的近似值。分别取，，，同时计算在，，，处的函数值。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

结论：

在分段段数相同的情况下，插值区间越大，误差越大；原因是在较大的区间里，相较于更小的空间变化更大，因此越小的区间函数摆动较小、误差较小。

## 问题3

* 在区间考虑拉格朗日插值问题，为了使得插值误差较小，应如何选取插值节点？

（1）设，，考虑非等距节点的拉格朗日插值多项式，记，，构造，利用拉格朗日插值多项式作为的近似值。分别取，，，同时计算在，，，处的函数值。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

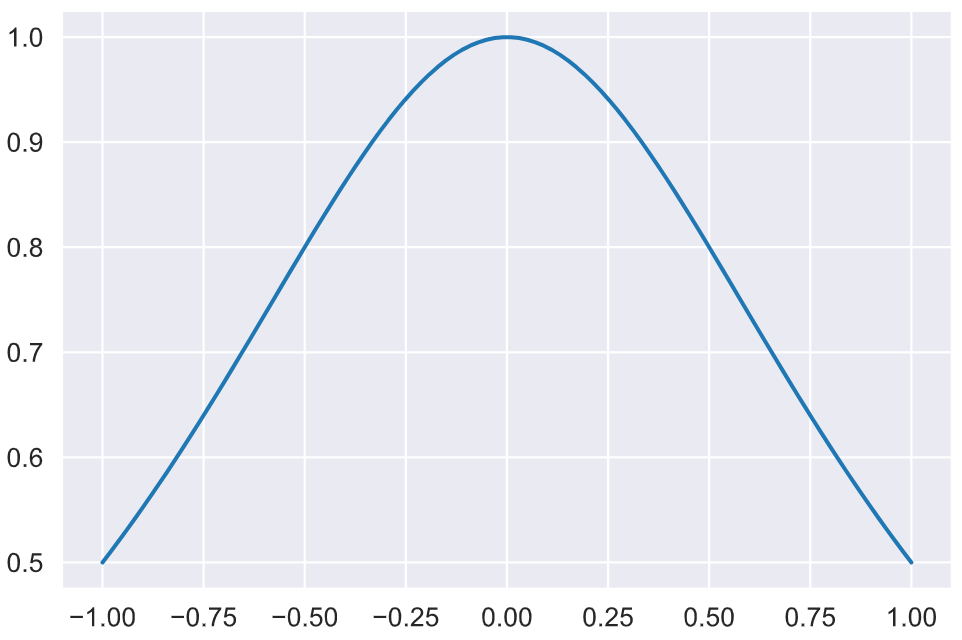
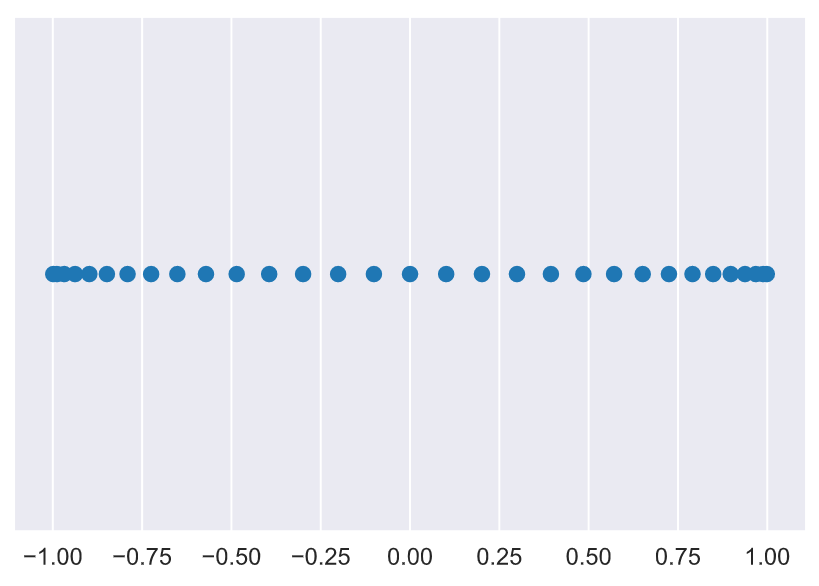
（2）设，，考虑非等距节点的拉格朗日插值多项式，记，，构造，利用拉格朗日插值多项式作为的近似值。分别取，，，同时计算在，，，处的函数值。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

结论：

两个函数的插值效果都很好，以第一个函数为例。

函数和函数图像如下：

可以看出在变化较快（斜率较大）的区间内，取值较多，因此插值效果较好。第二个函数同理。

## 问题4

（1）设，关于以，，为节点的拉格朗日插值多项式，利用拉格朗日插值多项式作为的近似值。同时计算在，，，处的函数值。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

（2）设，关于以，，为节点的拉格朗日插值多项式，利用拉格朗日插值多项式作为的近似值。同时计算在，，，处的函数值。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

（3）设，关于以，，为节点的拉格朗日插值多项式，利用拉格朗日插值多项式作为的近似值。同时计算在，，，处的函数值。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

（4）设，关于以，，为节点的拉格朗日插值多项式，利用拉格朗日插值多项式作为的近似值。同时计算在，，，处的函数值。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

结论：

由对比可知，内插时插值收敛于实际函数值，超出内插范围插值会发散，且距离插值区间越远外推误差越大；不同取值时外推的插值也差别巨大，说明外推具有极大不确定性。