# 定理 1.2 证明

首先用数学归纳法证明当二元运算满足交换律时$\forall n \in N$有

$$\begin{cases} a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \cdots \cdot a_{in} = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \\ i1, i2, i3, \cdots, in\text{互不相等} \\ i1, i2, i3, \cdots in\text{分别等于}1,2,3,\cdots, n\text{中的一个} \end{cases}$$

证明如下：

1) 当$n = 1$时成立；
2) 假设当$n = k$时，由交换律得

$$\begin{cases} a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \cdots \cdot a_{ik} = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k \\ i1, i2, i3, \cdots, ik\text{互不相等} \\ i1, i2, i3, \cdots ik\text{分别等于}1,2,3,\cdots, k\text{中的一个} \end{cases}$$

3) 则当$n = k + 1$时，第$k + 1$元素为$a_{k+1}$

$$a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \cdots \cdot a_{k+1} \cdot \cdots \cdot a_{ik} = (a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \cdots) \cdot a_{k+1} \cdot (\cdots \cdot a_{ik})$$
$$= (a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \cdots) \cdot (\cdots \cdot a_{ik}) \cdot a_{k+1} = (a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \cdots \cdot a_{ik}) \cdot a_{k+1}$$

由 2）知$a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \cdots \cdot a_{ik} = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k$，则

$$a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \cdots \cdot a_{k+1} \cdot \cdots \cdot a_{ik} = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k \cdot a_{k+1}$$

得证。

所以当二元运算满足交换律时，其乘积与次序无关；其次由二元运算满足结合律得，其乘积与$n$个元素和次序有关且唯一确定。因此当二元运算满足交换律和结合律时，其$n$个元素乘积仅与$n$个元素有关且唯一确定，且与次序无关。

# 定理 1.3 证明

由题意得，对于$\forall a, a_1, a_2, a_3$有

$$\begin{cases} a \cdot (a_1 + a_2) = a \cdot a_1 + a \cdot a_2 \\ (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3) \end{cases}$$

用数学归纳法进行证明满足左分配律：

1) 当$n = 2$时，由结合律得$a \cdot (a_1 + a_2) = a \cdot a_1 + a \cdot a_2$成立；
2) 假设当$n = k$时，

$$a \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = (a \cdot a_1) + (a \cdot a_2) + \cdots + (a \cdot a_k)$$

3) 则当$n = k + 1$时，

$$a \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}) = a \cdot [(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}]$$
$$= a \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}) + a \cdot a_{k+1}$$
$$= (a \cdot a_1) + (a \cdot a_2) + \cdots + (a \cdot a_k) + (a \cdot a_{k+1})$$

$\therefore a \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}) = (a \cdot a_1) + (a \cdot a_2) + \cdots + (a \cdot a_k) + (a \cdot a_{k+1})$得证。

所以满足左分配律，右分配律同理有

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}) \cdot a = (a_1 \cdot a) + (a_2 \cdot a) + \cdots + (a \cdot a_n)$$