P394

1

若 H 是 G 的正规子群，则根据定理，任意 $x \in G$，$x^{-1}Hx=H$，H 与 H 的∩仍为 H，当 $n \neq 1$ 时成立。

退化条件，若 H 存在一个子群 A 是 G 的正规子群，则 $x^{-1}Hx=A\cup Q$（Q 是 G 的子群)。

又因为 A 是 H 的子群，所以 $(A\cup Q)\cap H$ 必包含 A，不等于{e}，成立。

设该 n^2 阶群为$\{a^1,a^2\ldots\ldots,a^{(n^2)}\}$,从中任取 n 个元素，得子群 $H=\{a^{b1},a^{b2}\ldots\ldots, a^{bn}\}$（$b1,b2\ldots\ldots bn\in[1,n^2]$）。从中取 x 个元素$\{a^{bc1},abc2\ldots\ldots a^{bcx}\}$($c1,c2\ldots\ldots cx\in[1,n]$),任取 a^t 属于 G,$a^tH=Ha^t=\{a^{(bc1t\%(n^2))},a^{(bc2t\%(n^2)}\ldots\ldots a^{(bcnt\%(n\%2))}\}$,成立。

得证。

2

设 A 中元素个数为 x，B 中元素个数为 y。因为 A∩B 中元素*A∩B 中元素还是 A∩B 中元素，所以应当将重复部分减去。所以$|AB|=|A||B|-|A\cap B|$

3

设 A 和 B 是六阶群的两个不同的三阶子群，$|AB|=3*3-1=8>6$ 矛盾。

4

若 a∈H，则显然 aH=Ha=H。

若 a 不属于 H，则 aH 不属于 H，Ha 不属于 H，aH=Ha=G-H。

5

设两个正规子群分别为 A，B，x∈A，y∈B，任取元素 w∈G，wA∩B∈A∩B。若不成立，则 wA∩B 不属于 A∩B，设 z 属于 A∩B，wz 不属于 A∩B，对于 A，设 wz 不属于 A∩B，则 wz 属于 A-A∩B，同理对于 B，wz 属于 B-A∩B，因为（A-A∩B）∩（B-A∩B）=空集，即 wz 同时等于两个不同结果，显然矛盾。

所以 w（A∩B）=（A∩B）w=（A∩B），即两个正规子群的交也为正规子群。

6

封闭性、结合律：显然对于 G 中任意两个元素相乘，结果仍在 G 中，且符合结合律。

单位元：e∈H，e∈N，则 e∈NH。

逆元：任取 H 中元素 a，根据正规子群的定义，aN=Na。Na 包含于 NH，Na^-1=a^-1N,Naa^-1N=e。则对于 NH 中每个元素都存在逆元。