近世代数

任 世 军

Email: ren_shijun@163.com

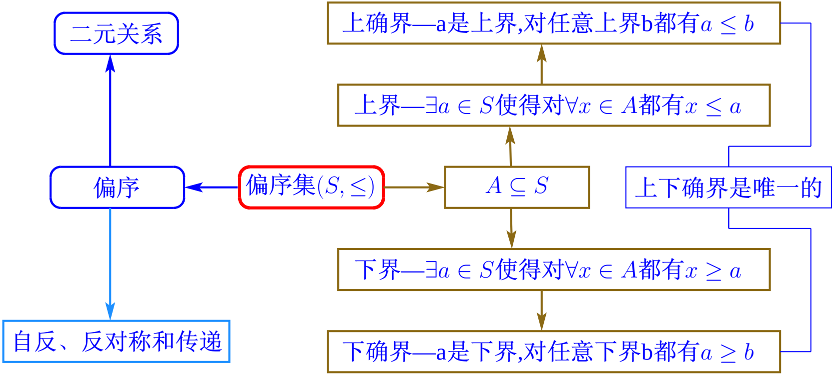
哈尔滨工业大学 计算机学院

2007 年 6 月 19 日

目录

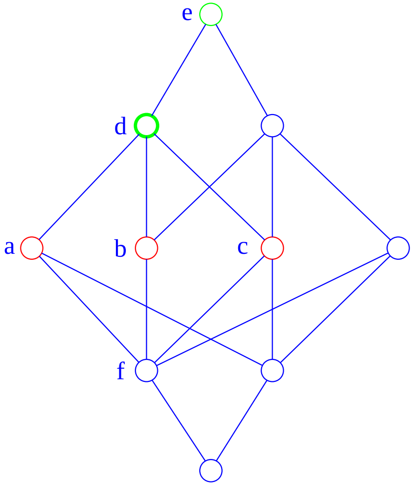
1. 格的定义及其简单性质
2. 对偶原理以及格做为一个代数系
3. 某些特殊的格

有关偏序集

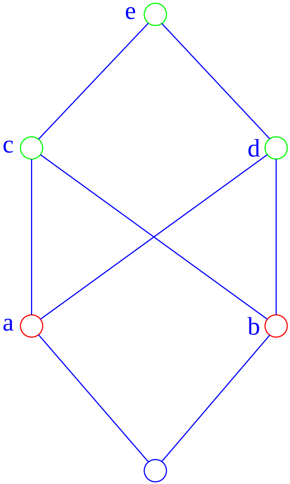


有关偏序集、偏序集子集的上下界、上下确界

上界和上确界



(1) sup{a,b,c}=d, inf{a,b,c}=f



(2)sup{a,b}不存在

偏序集的上下界、上下确界

格的定义和例子

定义14.1.1

偏序集$(L,\leq)$称为格,如果对L的任意两个元素a和b,sup{a,b}和inf{a,b}都存在。格$(L,\leq)$中元素a和b的上确界sup{a,b}记为$a\vee b$,称为a与b的并；a和b的下确界inf{a,b}记为$a\wedge b$,称为a与b的交。

格的定义和例子

定义14.1.1

偏序集$(L,\leq)$称为格,如果对L的任意两个元素a和b,sup{a,b}和inf{a,b}都存在。格$(L,\leq)$中元素a和b的上确界sup{a,b}记为$a \vee b$,称为a与b的并；a和b的下确界inf{a,b}记为$a \wedge b$,称为a与b的交。

例14.1.1

设S是一个集合,则S的幂集2^S对集合的包含关系⊆构成的偏序集$(2^S,\subseteq)$是一个格。

格的定义和例子

定义14.1.1

偏序集$(L,\leq)$称为格,如果对L的任意两个元素a和b,sup{a,b}和inf{a,b}都存在。格$(L,\leq)$中元素a和b的上确界sup{a,b}记为$a \vee b$,称为a与b的并；a和b的下确界inf{a,b}记为$a \wedge b$,称为a与b的交。

例14.1.1

设S是一个集合,则S的幂集2^S对集合的包含关系⊆构成的偏序集$(2^S,\subseteq)$是一个格。

例14.1.2

区间$[0,1]$中的全体实数之集对实数间通常的小于等于关系≤构成的偏序集是一个格。

格的定义和例子（续）

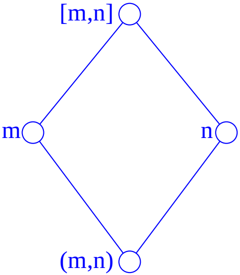
例14.1.3

全体自然数的集合N对整除关系构成的偏序集$(N, |)$是一个格。

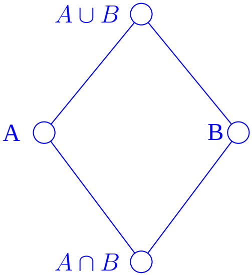
格的定义和例子（续）

例14.1.3

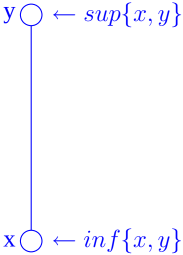
全体自然数的集合N对整除关系构成的偏序集$(N, |)$是一个格。



例14.1.3



例14.1.1



例14.1.2

格的定义和例子（续）

例14.1.4

设X为任一非空集合,F(X)=$\{\mu|\mu : X \to \{0,1\}\}$。在F(X)上定义二元关系“$\leq$”如下：$\forall \mu_A, \mu_B \in F(X), \mu_A \leq \mu_B$当且仅当$\forall x \in X$有$\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$。容易验证$\leq$是一个偏序关系。可以证明$(F(X), \leq)$是一个格。

格的定义和例子（续）

例14.1.4

设X为任一非空集合,F(X)=$\{\mu|\mu : X \to \{0,1\}\}$。在F(X)上定义二元关系“$\leq$”如下：$\forall \mu_A, \mu_B \in F(X), \mu_A \leq \mu_B$当且仅当$\forall x \in X$有$\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$。容易验证$\leq$是一个偏序关系。可以证明$(F(X), \leq)$是一个格。

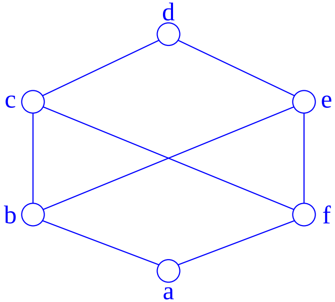
例14.1.5

任一全序集是格。

不是格的偏序集

例14.1.6

设$S = \{a, b, c, d, e, f\}$,S上的偏序关系由下面的Hasse图确定。但是这个偏序集不是格。



在这个偏序集里面,c,e没有下确界

在这个偏序集里面,b,f没有上确界

不是格的偏序集

格的性质

定理14.1.1

设$(L,\leq)$为一个格，则运算$\vee$ 和$\wedge$ 满足交换律、结合律、吸收律和幂等律，即：

（1）$\forall a,b\in L$，有$a\vee b=b\vee a$；$a\wedge b=b\wedge a$（交换律）

（2）$\forall a,b,c\in L$，有$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$；$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$（结合律）

（3）$\forall a,b\in L$，有$a\vee(a\wedge b)=a$；$a\wedge(a\vee b)=a$（吸收律）

（4）$\forall a\in L$，有$a\vee a=a; a\wedge a=a$（幂等律）

格的几个命题

命题14.1.1

格中任一有限子集均有上确界和下确界。

格的几个命题

命题14.1.1

格中任一有限子集均有上确界和下确界。

命题14.1.2

设$(L, \leq)$是一格，则对任意的$a, b \in L$，均有$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$。

格的几个命题

命题14.1.1

格中任一有限子集均有上确界和下确界。

命题14.1.2

设$(L,\leq)$是一格，则对任意的$a,b\in L$，均有$a\leq b\Leftrightarrow a\wedge b=a\Leftrightarrow a\vee b=b$。

命题14.1.3

设$(L,\leq)$是一格，$b,c\in L$，如果$b\leq c$，则

对$\forall a\in L$有$a\wedge b\leq a\wedge c, a\vee b\leq a\vee c$。

格的几个命题

命题14.1.1

格中任一有限子集均有上确界和下确界。

命题14.1.2

设$(L,\leq)$是一格，则对任意的$a,b\in L$，均有$a\leq b\Leftrightarrow a\wedge b=a\Leftrightarrow a\vee b=b$。

命题14.1.3

设$(L,\leq)$是一格，$b,c\in L$，如果$b\leq c$，则对$\forall a\in L$有$a\wedge b\leq a\wedge c, a\vee b\leq a\vee c$。

命题14.1.4

设$(L,\leq)$是一格，$a,b,c\in L$，

(1) 如果$a\leq b, a\leq c$，则$a\leq b\wedge c$。

(2) 如果$a\geq b, a\geq c$，则$a\geq b\vee c$。

格的几个命题（续）

命题14.1.5

设$(L,\leq)$是一格，则对任意的$a,b,c,d\in L$，若$a\leq b$且$c\leq d$，则

（1）$a\vee c\leq b\vee d$。

（2）$a\wedge c\leq b\wedge d$。

格的几个命题（续）

命题14.1.5

设$(L,\leq)$是一格，则对任意的$a,b,c,d\in L$，若$a\leq b$且$c\leq d$，则

（1）$a\vee c\leq b\vee d$。

（2）$a\wedge c\leq b\wedge d$。

命题14.1.6

设$(L,\leq)$是一格，则对任意的$a,b,c\in L$，有

$a\vee(b\wedge c)\leq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\leq a\wedge(b\vee c)$

格的几个命题（续）

命题14.1.5

设$(L,\leq)$是一格，则对任意的$a,b,c,d\in L$，若$a\leq b$且$c\leq d$，则

（1）$a\vee c\leq b\vee d$。

（2）$a\wedge c\leq b\wedge d$。

命题14.1.6

设$(L,\leq)$是一格，则对任意的$a,b,c\in L$，有

$a\vee(b\wedge c)\leq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\leq a\wedge(b\vee c)$

命题14.1.7

设$(L,\leq)$是一格，则对任意的$a,b,c\in L$，有

$a\leq c\Leftrightarrow a\vee(b\wedge c)\leq(a\vee b)\wedge c$

对偶原理

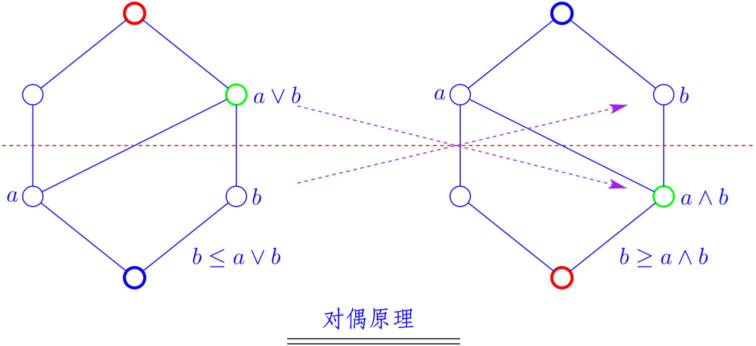
对偶原理

设P是对任意格均为真的命题，如果在命题P中把$\leq$ 换成$\geq$ ，把$\wedge$ 换成$\vee$ ，把$\vee$ 换成$\wedge$ ，就得到另一个命题Q，我们把Q称为P的对偶命题，有结论：Q是对任意格也为真的命题。

对偶原理

对偶原理

设P是对任意格均为真的命题，如果在命题P中把$\leq$ 换成$\geq$ ，把$\wedge$ 换成$\vee$ ，把$\vee$ 换成$\wedge$ ，就得到另一个命题Q，我们把Q称为P的对偶命题，有结论：Q是对任意格也为真的命题。



作为代数系统的格

定义14.2.3

设$(L, \wedge, \vee)$是一个代数系统，其中$\vee, \wedge$ 都是二元运算，如果两种运算满足交换律、结合律、吸收律，即：如果对于任意的$a, b, c \in L$，有

（L_1）交换律：$a \vee b = b \vee a$；$a \wedge b = b \wedge a$。

（L_2）结合律：$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$；$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$。

（L_3）吸收律：$a \vee (a \wedge b) = a$；$a \wedge (a \vee b) = a$。

则称$(L, \wedge, \vee)$为一代数格。

作为代数系统的格

定义14.2.3

设$(L,\wedge,\vee)$是一个代数系统，其中$\vee,\wedge$ 都是二元运算，如果两种运算满足交换律、结合律、吸收律，即：如果对于任意的$a,b,c\in L$，有

（L_1）交换律：$a\vee b=b\vee a$；$a\wedge b=b\wedge a$。

（L_2）结合律：$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$；$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$。

（L_3）吸收律：$a\vee(a\wedge b)=a$；$a\wedge(a\vee b)=a$。

则称$(L,\wedge,\vee)$为一代数格。

定理14.2.1

格的两种定义等价。

作为代数系统的格

定义14.2.3

设$(L,\wedge,\vee)$是一个代数系统，其中$\vee,\wedge$ 都是二元运算，如果两种运算满足交换律、结合律、吸收律，即：如果对于任意的$a,b,c\in L$，有

（L_1）交换律：$a\vee b=b\vee a$；$a\wedge b=b\wedge a$。

（L_2）结合律：$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$；$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$。

（L_3）吸收律：$a\vee(a\wedge b)=a$；$a\wedge(a\vee b)=a$。

则称$(L,\wedge,\vee)$为一代数格。

定理14.2.1

格的两种定义等价。

偏序格显然是代数格。反之呢？可以证明：$a\wedge b=a\Leftrightarrow a\vee b=b$,定义序如下：$a\leq b\Leftrightarrow a\wedge b=a$。可以证明$(L,\leq)$是一个格。

子格

定义14.2.4

设$(L,\wedge,\vee)$是一个格，其中S是L的一个非空子集，如果L中的代数运算$\vee$和$\wedge$在S中封闭，则称代数系统$(S,\wedge,\vee)$是$(L,\wedge,\vee)$的一个子格。(子格显然也是格)

子格

定义14.2.4

设$(L, \wedge, \vee)$是一个格，其中S是L的一个非空子集，如果L中的代数运算$\vee$和$\wedge$在S中封闭，则称代数系统$(S, \wedge, \vee)$是$(L, \wedge, \vee)$的一个子格。(子格显然也是格)

例14.2.1

设$L = \{a_1, a_2, \cdots, a_8\}$，$(L, \leq)$是由下图确定的格，$L$的子集$S_1 = \{a_1, a_2, a_4, a_6\}$和$S_2 = \{a_3, a_5, a_7, a_8\}$均是$L$的子格。但$L$的子集$S_3 = \{a_1, a_2, a_4, a_8\}$不是$L$的子格。

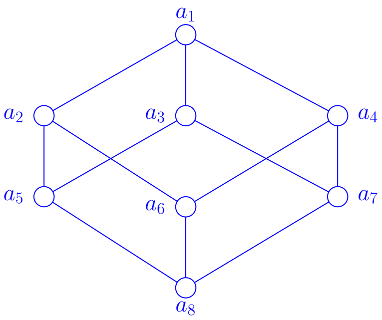
子格

定义14.2.4

设$(L, \wedge, \vee)$是一个格，其中S是L的一个非空子集，如果L中的代数运算$\vee$和$\wedge$在S中封闭，则称代数系统$(S, \wedge, \vee)$是$(L, \wedge, \vee)$的一个子格。(子格显然也是格)

例14.2.1

设$L = \{a_1, a_2, \cdots, a_8\}$，$(L, \leq)$是由下图确定的格，$L$的子集$S_1 = \{a_1, a_2, a_4, a_6\}$和$S_2 = \{a_3, a_5, a_7, a_8\}$均是$L$的子格。但$L$的子集$S_3 = \{a_1, a_2, a_4, a_8\}$不是$L$的子格。



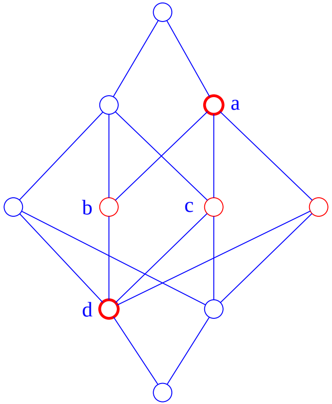
子格（续）

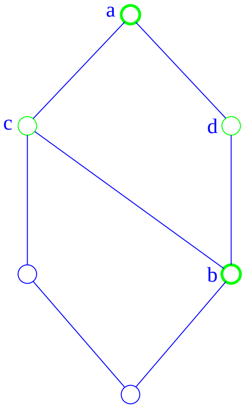
例14.2.2

设$(L, \wedge, \vee)$是一个格，$a, b \in L, a \leq b$，集合$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in L\}$是$L$的一个子格。又$L$中一切使$a \leq x$的元素$x$所构成的集合也是$L$的子格。

例14.2.2

设$(L,\wedge,\vee)$是一个格，$a,b\in L, a\le b$，集合$[a,b]=\{x|a\le x\le b, x\in L\}$是$L$的一个子格。又$L$中一切使$a\le x$的元素$x$所构成的集合也是$L$的子格。





格的同态

定义14.2.5

设$(L_1,\wedge,\vee)$和$(L_2,\cap,\cup)$是两个格，h是L_1到L_2的映射，若对任意$x,y\in L_1$，有$h(x\vee y)=h(x)\cup h(y)$，$h(x\wedge y)=h(x)\cap h(y)$，则称$h$是从格$L_1$到格$L_2$的格同态，格$L_1$同态于格$L_2$。若$h$还是双射，则称$h$是格同构映射。此时称格$(L_1,\wedge,\vee)$与$(L_2,\cap,\cup)$同构，记为$L_1\cong L_2$。

格的同态

定义14.2.5

设$(L_1,\wedge,\vee)$和$(L_2,\cap,\cup)$是两个格，h是L_1到L_2的映射，若对任意$x,y\in L_1$，有$h(x\vee y)=h(x)\cup h(y)$，$h(x\wedge y)=h(x)\cap h(y)$，则称$h$是从格$L_1$到格$L_2$的格同态，格$L_1$同态于格$L_2$。若$h$还是双射，则称$h$是格同构映射。此时称格$(L_1,\wedge,\vee)$与$(L_2,\cap,\cup)$同构，记为$L_1\cong L_2$。

定理14.2.2

设ϕ是格$(L_1,\wedge,\vee)$到格$(L_2,\cap,\cup)$的格同态，$\leq_1$是L_1中由$\wedge$和$\vee$确定的偏序关系，$\leq_2$是L_2中由$\cap$和$\cup$确定的偏序关系，则ϕ是保序的。即对$\forall a,b\in L_1$，如果$a\leq_1 b$，则有$\phi(a)\leq_2\phi(b)$。

格的同态

定义14.2.5

设$(L_1, \wedge, \vee)$和$(L_2, \cap, \cup)$是两个格，h是L_1到L_2的映射，若对任意$x, y \in L_1$，有$h(x \vee y) = h(x) \cup h(y)$，$h(x \wedge y) = h(x) \cap h(y)$，则称$h$是从格$L_1$到格$L_2$的格同态，格$L_1$同态于格$L_2$。若$h$还是双射，则称$h$是格同构映射。此时称格$(L_1, \wedge, \vee)$与$(L_2, \cap, \cup)$同构，记为$L_1 \cong L_2$。

定理14.2.2

设ϕ是格$(L_1, \wedge, \vee)$到格$(L_2, \cap, \cup)$的格同态，$\leq_1$是L_1中由$\wedge$和$\vee$确定的偏序关系，$\leq_2$是L_2中由$\cap$和$\cup$确定的偏序关系，则ϕ是保序的。即对$\forall a, b \in L_1$，如果$a \leq_1 b$，则有$\phi(a) \leq_2 \phi(b)$。

定理14.2.3

设ϕ是格$(L_1, \wedge, \vee)$到格$(L_2, \cap, \cup)$的一一对应，则ϕ是格同构当且仅当ϕ与ϕ^{-1}都有保序的。

1 格的定义及其简单性质

2 对偶原理以及格做为一个代数系

3 某些特殊的格

完备格

定义14.3.1

如果一个格里的任一非空子集均有上确界和下确界，则称此格是一个完备格。（有限格是完备格）

例14.3.1

设S是任一集合，则格$(2^S, \subseteq)$是一个完备格。

例14.3.2

格$([0,1], \leq)$是一个完备格。

有界格

格中的最大元素“1”（称为单位元素）和最小元素“0”（称为零元素）。

定义14.3.2

格$(L,\leq)$称为有界格，如果L中有最大元素“1”和最小元素“0”。

$a\vee 0=a, a\vee 1=1, a\wedge 0=0, a\wedge 1=a$

若$L=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是完备格，

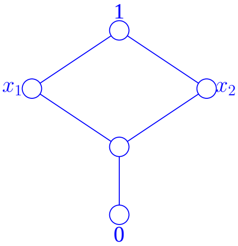
则$0=a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n, 1=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$。

补元素

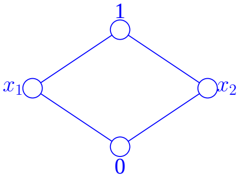
定义14.3.3

设$(L, \wedge, \vee, 0, 1)$是一个有界格，元素$b \in L$称为L中的元素a的补元素，如果$a \wedge b = 0, a \vee b = 1$。

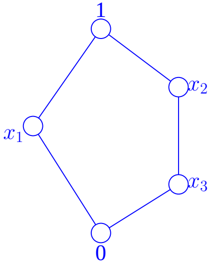
在有界格中，不是每个元素都有补元素，即使有也不一定唯一。



x_1与x_2均无补元素



x_1的补元素是x_2



x_1的补元素是x_2, x_3