P347.1

设$T=\{x|\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\epsilon A,x=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n,n\geq 1\}$
对于$\forall x\epsilon T$，有$\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\epsilon A$，使$x=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n\epsilon S$，故$T\in S$
取$\forall a,b\epsilon T,\exists a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n\epsilon A$，使$a=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n,b=b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n$
则$a\cdot b=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n\cdot b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n\epsilon T$，故$T$运算封闭
故T是S的子半群
当$n=1$时，$T=\{x|\exists a_1\epsilon A,x=a_1\}$故$A\in T$
设R是任意一个包含A的子半群，$\forall x\epsilon T,\exists a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n\epsilon A\in R$
使$x=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n\epsilon R$，则$T\in P$，则$T\in\cap A_\alpha\in G(A)$
故$T=G(A)$

P347.2

设M所有幂等元之集为S，取$\forall a,b\epsilon S$
则$(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)=\big((a\cdot b)\cdot a\big)\cdot b=(a\cdot b\cdot a)\cdot b=(a\cdot a\cdot b)\cdot b=(a\cdot a)\cdot(b\cdot b)=a\cdot b$
故$a\cdot b$也是幂等元，故$a\cdot b\epsilon S$，故S运算封闭
取$\forall x,y,z\epsilon S\in M$，有$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$交换律成立，故$(S,\cdot)$是$M$的子半群
由于$e\cdot e=e$，则e是幂等元，且$e\epsilon S$，故$(S,\cdot)$是子幺半群

P355.1

由φ是M_1到M_2的同态，则$\varphi(e_1)=e_2$，则$e_1\epsilon\varphi^{-1}(e_2)$
取$\forall x,y\epsilon\varphi^{-1}(e_2)$，由$\varphi(x)=e_2,\varphi(y)=e_2$

$$\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)=e_2*e_2=e_2$$

即$x\cdot y\epsilon\varphi^{-1}(e_2)$，故“$\cdot$”在$\varphi^{-1}(e_2)$上运算封闭
由于$\varphi^{-1}(e_2)$是M_1的子集，故$\varphi^{-1}(e_2)$上满足交换律
综上，$\varphi^{-1}(e_2)$是 M 的一个子幺半群

当$\varphi^{-1}(e_2)=M_1$时，$\varphi^{-1}(e_2)$是M_1的理想;
当$\varphi^{-1}(e_2)\neq M_1$时，$\varphi^{-1}(e_2)$不是$M_1$的理想;

P355.2

设$(R,\cdot),(S,\times),(T,*)$为 3 个半群，$\varphi_1$时$R$到$S$的同态，$\varphi_2$时$S$到$T$的同态
取$\forall a,b\epsilon R$，则$\varphi_2\varphi_1(a\cdot b)=\varphi_2\big(\varphi_1(a)\times\varphi_1(b)\big)=\varphi_2\varphi_1(a)*\varphi_2\varphi_1(b)$
故$\varphi_2\varphi_1$是R到T的同态，即同态的合成还是同态

P355.5

设$S = \{a, b, c\}, I = \{a\}$，在$S$上有如下运算

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	b	c

则$b \cdot c = a \epsilon I$因此bRc
而又R是等价关系有cRb，则有$c = b$或$c \cdot b = a$则$c \neq b$则必有$c \cdot b = a$矛盾
因此R不是等价关系

P355.7

$\rightarrow$:
由$\cong$是同余关系得，$\forall a, b \epsilon X, a \cong b$，又$\cong$是等价关系，$\forall x \epsilon X$有$x \cong x$，故$a \cdot x \cong b \cdot x$且$x \cdot a \cong x \cdot b$

$\leftarrow$:
设$\forall a, b \epsilon X, a \cong b, a' \cong b'$

$$x = a', a \cdot a' \cong b \cdot a'$$
$$x = b, b \cdot a' \cong b \cdot b'$$

因$\cong$是等价关系，由传递性质得$a \cdot a' \cong b \cdot b'$
故$\cong$是等价关系