

主管
领导
审核
签字

哈尔滨工业大学 2019 学年 春 季学期

近世代数 试题 A

题号	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	总分
分数											
阅卷人											

1. 设 A 是半群 (S, \circ) 的一个非空子集, $G(A)$ 是由 A 生成的子半群, 证明:
 $G(A) = \{a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n | a_i \in A, i = 1, 2, \cdots, n, n \geq 1\}$ 。(15 分)

姓名

学号

院系

密

封

线

2. 设 (S, \circ, e) 是一个幺半群, $a \in S$ 。如果 a 有左逆 a_l , a_l 又有左逆 a_{l_l} , 证明:
 a 可逆并且 a_l 就是 a 的逆元。(10 分)

3. 设 (S, \circ, e) 是一个幺半群, $a \in S$ 称为左消去元, 如果对 $\forall x, y \in S$, 从 $a \circ x = a \circ y$ 可以推出 $x = y$ 。令 M 是 S 中的所有左消去元构成的集合, 证明: (M, \circ) 是半群 S 的一个子幺半群。(10 分)

姓名

学号

院系

密

封

线

4. 设 G_1 和 G_2 是群 G 的两个真子群, 证明: $G_1 \cup G_2$ 是 G 的子群的充分必要条件是 $G_1 \subseteq G_2$ 或者 $G_2 \subseteq G_1$ 。(15 分)

5. 设 p 是一个素数, 对 $\forall i \in Z$, 令 $[i] = \{n | n - i = pk, k, n \in Z\}$, $M = \{[1], [2], \dots, [p-1]\}$, 其中 Z 是整数集合, 定义 $[i] \circ [j] = [ij]$. 证明: (1) (M, \circ) 是一个群. (2) 对任何自然数 a , 若 $(a, p) = 1$, 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, 即 a^{p-1} 被 p 除的余数为 1. (20 分)

密

封

线

姓名

学号

院系

6. 设 $Q(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} | a, b \in Q\}$, 其中 Q 是有理数集合, 请问 $Q(\sqrt[3]{2})$ 对通常的加法和乘法是否构成一个环, 为什么? (10 分)

姓名
学号
院系

密

封

线

7. 证明: 在一个无零因子环中, 每个非零元对加法的阶均相同。(20 分)。

