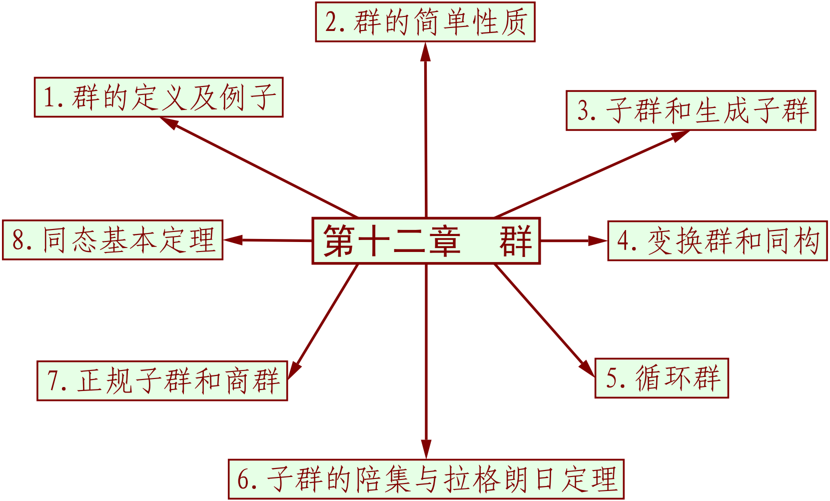
计算机数学基础 群论

任世军
e-mail:renshijun@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学计算机学院

November 4, 2019

本章主要内容


第十二章　群
1. 群的定义及例子
2. 群的简单性质
3. 子群和生成子群
4. 变换群和同构
5. 循环群
6. 子群的陪集与拉格朗日定理
7. 正规子群和商群
8. 同态基本定理

群的定义及例子（续）

定义 12.1.1

设 G 是一个非空集合,"$\circ$"是 G 上的二元代数运算,称为乘法。如果下列各个条件成立,则称 G 对它的乘法"$\circ$"构成一个群 (Group)。

- 乘法"$\circ$"满足结合律,即对 $\forall a, b, c \in G$,都有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- 对乘法"$\circ$",G 中有一个左单位元。即对 $\forall a \in G, e \circ a = a$
- 对乘法"$\circ$",G 中每个元素都有左逆元。即对 G 中的每个元素 a,都有元素 $b \in G$,使得 $b \circ a = e$

回顾

Definition (定义 11.3.4)

每个元素都有逆元素的幺半群称为群。

显然定义 11.3.4 蕴含定义 12.1.1

群的定义及例子（续）

Example (例 12.1.1)

全体整数集合 Z 对通常的加法构成一个群。

Example (例 12.1.2)

全体正有理数集合 Q_+ 对通常的乘法构成一个群。

Example (例 12.1.3)

设 M_n 为所有 $n \times n$ 非奇异实矩阵的集合，则 M_n 对矩阵的乘法构成一个群。

Example (例 12.1.4)

设 S 是一个集合，$|S| = n$，则 2^S 对集的对称差运算构成一个群。

群的定义及例子（续）

Example (例 12.1.5)

设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$,S_n 为 S 的所有 n 次置换的集合,则 S_n 对置换的乘法构成一个群,称为 n 次对称群。

Definition (定义 12.1.2)

群 G 称为交换群或可换群,如果乘法"$\circ$"满足交换律,即对 $\forall a,b\in G$,都有 $a\circ b=b\circ a$。交换群又称为阿贝尔群。

Definition (定义 12.1.3)

群 $(G,\circ)$ 称为有限群,如果 G 为有限集。G 的基数称为群 G 的阶。如果 G 有无穷多个元素,则称 G 为无限群。

Example (例 12.1.6)

设 n 是一个正整数,整数集 Z 关于模 n 的剩余类的集合 $\{[0],[1],\cdots,[n-1]\}$ 对于剩余类的加法构成一个 n 阶阿贝尔群。

群的简单性质

Theorem (定理 12.2.1)

设 $(G, \circ)$ 是一个群,则 $\forall a \in G$, a 的左逆元也是 a 的右逆元。

Theorem (定理 12.2.2)

G 的左单位元也是右单位元。

Theorem (定理 12.2.3)

群的两个定义等价。

Theorem (定理 12.2.4)

设 a, b 是群 G 的任意两个元素,则

$$(a^{-1})^{-1} = a, \quad (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

群的简单性质 (续)

Theorem (定理 12.2.5)

对 $\forall a, b \in G$, 在群 G 中, 方程

$$ax = b, \quad ya = b$$

关于未知量 x 与 y 有唯一解。

Theorem (定理 12.2.6)

非空集合 G 对其二元代数运算"$\circ$"构成一个群的充分必要条件是下列两个条件同时成立:

1. "$\circ$"满足结合律, 即对 $\forall a, b, c \in G$

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

2. 对 $\forall a, b \in G$, 方程

$$a \circ x = b \quad y \circ a = b$$

在 G 中有唯一解。

群的简单性质 (续)

Theorem (定理 12.2.7)

群 G 中的乘法满足消去律,即对 $\forall a, x, y \in G$,
如果 $ax = ay$,那么 $x = y$。
如果 $xa = ya$,那么 $x = y$。

Theorem (定理 12.2.8)

非空有限集合 G 对其二元代数运算“$\circ$”构成群的充分必要条件是下列两个条件同时成立:

1. *“$\circ$”满足结合律。*
2. *“$\circ$”满足左右消去律。*

群的简单性质 (续)

$$M = \{(g_1, g_2, \cdots, g_n) | g_i \in G, \quad i = 1, 2, \cdots, n, |\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}| = n\}$$

$$\phi : M \to M \qquad \phi : (g_1, g_2, \cdots, g_n) \to (gg_1, gg_2, \cdots, gg_n)$$

可以证明 ϕ 为双射

$$\begin{tikzcd}
 & (g_1, g_2, \cdots, g_n) \arrow[dr] & \\
(g^{k-1}g_1, g^{k-1}g_2, \cdots, g^{k-1}g_n) \arrow[ur] & & (gg_1, gg_2, \cdots, gg_n) \arrow[d] \\
\cdots \arrow[u] & & (g^2g_1, g^2g_2, \cdots, g^2g_n) \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

可以得到 g^k 为左单位元素 $\longrightarrow$ 为单位元素 $\longrightarrow$ g^{k-1} 为逆元素

Save file:/root/group Save file:/root/group Save file:/root/group

群的简单性质 (续)

Definition (定义 12.2.1)

设 G 是一个群，$a \in G$，使 $a^n = e$ 的最小正整数 n 称为 a 的阶。如果这样的正整数不存在，则称 a 的阶为无穷大。

Theorem (定理 12.2.9)

有限群的每个元素的阶不超过有限群的阶。

Example

3 阶群是交换群。

群的简单性质 (续)

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c		
c	c	b		

$\Rightarrow$

克莱茵四元群

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$\Rightarrow$

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

a和b互换

$\circ$	e	b	a	c
e	e	b	a	c
b	b	a	c	e
a	a	c	e	b
c	c	e	b	a

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c		
c	c	e		

$\Rightarrow$

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

$=$

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e		
c	c	b		

$\Rightarrow$

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

b和c互换

$\circ$	e	a	c	b
e	e	a	c	b
a	a	c	b	e
c	c	b	e	a
b	b	e	a	c

四阶循环群

子群、生成子群

Definition (定义 12.3.1)

设 S 是群 G 的非空子集，如果 G 的乘法在 S 中封闭且 S 对此乘法也构成一个群，则称 S 是 G 的子群。

Example (例 12.3.1)

任何一个至少含有两个元素的群 G，至少有两个不同的子群，一个是 G 本身，一个是单位元的集合 $\{e\}$。

Example (例 12.3.2)

整数集合 Z 的加法群是有理数集 Q 的加法群的子群。

Example

偶数集合 $2Z$ 构成的加法群是整数集合 Z 的加法群的子群。

子群、生成子群（续）

Theorem (定理 12.3.1)

设 G_1 是群 G 子群，则 G_1 的单位元必是 G 的单位元，G_1 的元素 a 在 G_1 中的逆元素也是 a 在 G 中的逆元素。

Theorem (定理 12.3.2)

群 G 的非空子集 S 是 G 的子群的充分必要条件是：
1. $\forall a, b \in S, ab \in S$
2. $\forall a \in S, a^{-1} \in S$

Theorem (定理 12.3.3)

群 G 的任意多个子群的交还是 G 的子群。

Example (例 12.3.3)

任何一个群不能是它的两个真子群的并。

子群、生成子群（续）

Theorem (定理 12.3.4)

群 G 的非空子集 S 是 G 的子群的充分必要条件是 $\forall a, b \in S$，总有 $ab^{-1} \in S$.

Theorem (定理 12.3.5)

群 G 的有限非空子集 F 是 G 的子群的充分必要条件是 $FF \subseteq F$，即对 $\forall a, b \in F, ab \in F$。

Definition (定义 12.3.2)

群 G 的元素 a 称为 G 的中心元素，如果 a 与 G 的每个元素可交换，即对 $\forall x \in G, xa = ax$。G 的所有中心元素的集合 C 称为 G 的中心。

Theorem (定理 12.3.6)

群 G 的中心 C 是 G 的可交换子群。

子群、生成子群（续）

Definition (定义 12.3.3)

设 M 是群 G 的非空子集，G 的包含 M 的所有子群的交称为由 M 生成的子群，记为 (M).

Example (例 12.3.4)

设 G 是一个群，$a \in G$，那么 $(a) = \{\cdots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \cdots\}$。

Example (例 12.3.5)

设 G 是一个交换群，$a, b \in G$ 是两个无穷阶的元素，那么
$(M) = \{a^m b^n | m, n \text{为任意整数}\}$。

Definition (定义 12.3.4)

设 G 是一个群，$a, b \in G$，称 $aba^{-1}b^{-1}$ 为 a 和 b 的换位子。由 G 的所有换位子生成的子群称为 G 的换位子群。

变换群、同构

Definition (定义 12.4.1)

设 $(G_1, \circ), (G_2, \star)$ 是群，如果存在一个一一对应 $\phi : G_1 \to G_2$，使得对 $\forall a, b \in G_1$，都有

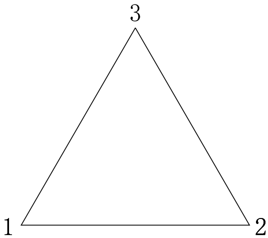
$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \star \phi(b)$$

则称群 G_1 与 G_2 同构，记为 $G_1 \cong G_2$。此时 ϕ 称为 G_1 到 G_2 上的一个同构.

Definition (定义 12.4.2)

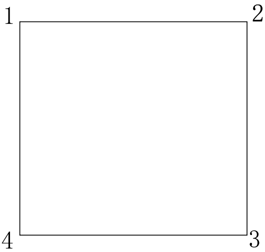
设 S 是一个非空集合，$sym(S)$ 是从 S 到 S 的一一对应构成的集合，按照映射的合成构成一个群，称为 S 上的对称群。当 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ 时，记 $Sym(S) = S_n$。$Sym(S)$ 的任一子群称为 S 上的一个变换群。S_n 的任一子群称为置换群。

对称群



$$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{bmatrix}$$

gebra/groups/pictures/bmhrqy

对称群

1		
2	1	
		1

1		
2		1
	1	

2	1	
1		
		1

2		1
1		
	1	

2	1	
		1
1		

2		1
	1	
1		

1		
	1	
2		1

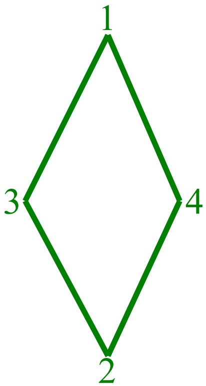
1		
		1
2	1	

	1	
1		
2		1

		1
1		
2	1	

	1	
2		1
1		

		1
2	1	
1		



$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

$\circ$	(1)	(12)	(34)	(12)(34)
(1)	(1)	(12)	(34)	(12)(34)
(12)	(12)	(1)	(12)(34)	(34)
(34)	(34)	(12)(34)	(1)	(12)
(12)(34)	(12)(34)	(34)	(12)	(1)

$\boxed{\text{菱形的对称群}}$

变换群、同构（续）

Theorem (定理 12.4.1 群的 Cayley 同构定理)

任何一个群都同构一个变换群。

Corollary (推论 12.4.1)

任何一个 n 阶有限群都同构 n 次置换群 S_n 的一个 n 阶子群。

Definition (定义 12.4.3)

设 $(G, \circ)$ 是一个群，如果存 P 在一个从 G 到 G 的一一对应 ϕ 使得对 $\forall a, b \in G$，都有

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \circ \phi(b)$$

则称 ϕ 是 G 的一个自同构。

变换群、同构（续）

∘	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

克莱茵四元群

左变换集合

$$\rho_a = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \quad \rho_b = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$$

$$\rho_c = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \quad \rho_d = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

置换

$$\rho_a = (1) \quad \rho_b = (12)(34)$$

$$\rho_c = (13)(24) \quad \rho_d = (14)(23)$$

置换群

∘	(1)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(1)	(1)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(12)(34)	(12)(34)	(1)	(14)(23)	(13)(24)
(13)(24)	(13)(24)	(14)(23)	(1)	(12)(34)
(14)(23)	(14)(23)	(13)(24)	(12)(34)	(1)

变换群、同构（续）

Example (例 12.4.1)

群 G 上的变换 I_G 是 G 的一个自同构。

Example (例 12.4.2)

设 G 是一个交换群，对 $\forall a \in G$，令 $\phi(a) = a^{-1}$，则 ϕ 是 G 的一个自同构。

Example (例 12.4.3)

设 M_n 是一切可逆的 $n \times n$ 矩阵的集合，则 M_n 对矩阵乘法形成一个群。令 P 是 M_n 中一个特定的矩阵，则对 $\forall A \in M_n$

$$\phi(A) = P^{-1}AP$$

则 ϕ 是 M_n 的一个自同构。

变换群、同构（续）

Theorem (定理 12.4.2)

设 G 是一个群，G 的所有自同构之集 $A(G)$ 对映射的合成构成一个群，称为 G 的自同构群。

Example (例 12.4.3)

设 a 是 G 的一个固定元素，对 $\forall x \in G$，令

$$\phi(x) = axa^{-1}$$

则 ϕ 是 G 的一个自同构。

Definition (定义 12.4.4)

群 G 的由其元素 a 确定的自同构

$$\phi(x) = axa^{-1}, \forall x \in G$$

称为 G 的内自同构。G 的其他自同构称为外自同构。

变换群、同构（续）

Theorem (定理 12.4.4)

群 G 的所有内自同构之集是 G 的自同构群的一个子群,称为内自同构群。

Definition (定义 12.4.5)

设 $(G, \circ)$ 是一个群,在 G 上定义二元关系 R 如下:对 $\forall a, b \in G$,aRb 当且仅当有 G 的内自同构 ϕ,使得 $b = \phi(a)$。称二元关系 R 为 G 的共轭关系,如果 aRb,则称 a 与 b 共轭。

Theorem (补充定理)

设 $(G, \circ)$ 是一个有限群,则有

$$|G| = |C(G)| + [G : C(a_1)] + [G : C(a_2)] + \cdots + [G : C(a_k)]$$

循环群

Definition (定义 12.5.1)

群 G 称为循环群,如果 G 是由其中某个元素 a 生成的,即 $(a) = G$.

Definition (定义 12.5.1)

整数加法群 $(Z, +)$ 是循环群,其生成元为 1。

Definition (定义 12.5.2)

整数集在模 n 同余关系下被划分成 n 个同余类 $\{[0], [1], \cdots, [n-1]\}$。令 $Z_n = \{[0], [1], \cdots, [n-1]\}$,则 Z_n 对同余类加法构成的群 $(Z_n, +)$ 是一个有限循环群,其生成元为 $[1]$。

循环群（续）

Theorem (定理 12.5.1)

循环群 $G=(a)$ 是无穷循环群的充分必要条件是 a 的阶为无穷大。此时，

$$G=\{\cdots,a^{-n},\cdots,a^{-2},a^{-1},e,a,a^2,\cdots,a^n,\cdots\}$$

循环群 $G=(a)$ 是 n 阶循环群的充分必要条件是 a 的阶为 n。此时

$$G=\{e,a,a^2,\cdots,a^{n-1}\}$$

Theorem (定理 12.5.2)

1. *无穷循环群同构于整数加群 $(Z,+)$。*
2. *阶为 n 的有限循环群同构于模 n 剩余类加群 $(Z_n,+)$。*

循环群（续）

Theorem (定理 12.5.3)

循环群 $G=(a)$ 是由 a 生成的循环群，则
（1）循环群的子群还是循环群。
（2）如果 G 是无穷循环群，则 G 的子群为 $H_0=\{e\}$，或是某个具有最小正整数的元 a^m 生成的。于是，对 $m=1,2,\cdots$，

$$H_0=\{e\},H_m=(a^m)$$

是 G 的所有子群。
（3）无穷循环群中，除了 $H_0=\{e\}$ 外，都是无穷循环子群，从而都同构于 G 本身。
（4）阶为 n 的循环群中，每个子群的阶整除 n。对 n 的任一因子 q，必有一个阶为 q 的子群。于是 G 的全部子群为

$$H_0=\{e\},H_m=(a^m),m|n$$

每个子群 H_m 的阶为 n/m。

Definition (定义 12.6.1)

设 H 是群 G 的一个子群,a 为群 G 的任一元素。集合 aH 称为子群 H 的一个左陪集,Ha 称为子群 H 的一个右陪集。

Theorem (定理 12.6.1)

设 H 是群 G 的一个子群,$a \in G$,则 $aH = H$ 的充分必要条件是 $a \in H$。

Theorem (定理 12.6.2)

设 H 是群 G 的一个子群,$a, b \in G$,则 $aH = bH$ 的充分必要条件是 $a^{-1}b \in H$。

Theorem (定理 12.6.3)

设 H 是群 G 的一个子群,对 $\forall a, b \in G$,或者 $aH = bH$,或者 $aH \cap bH = \phi$。

子群的陪集、拉格朗日定理（续）

Theorem (定理 12.6.4)

设 H 是群 G 的一个子群，对 $\forall a, b \in G, |aH| = |bH|$。

Theorem (定理 12.6.5)

设 H 是群 G 的一个子群，则 H 的所有左陪集构成的集族是 G 的一个划分。

Theorem (定理 12.6.6)

设 H 是群 G 的一个子群，S_l 是 H 的所有左陪集构成的集族，S_r 是 H 的所有右陪集构成的集族，则 $|S_l| = |S_r|$。

Definition (定义 12.6.2)

设 H 是群 G 的一个子群，若 H 的所有不同的左陪集的个数为有限数 j，则称 j 为 H 在 G 中的指数，记为 $j = [G : H]$，否则说 H 在 G 中的指数为无穷大。

子群的陪集、拉格朗日定理（续）

Theorem (定理 12.6.7 拉格朗日)

设 G 是一个阶为 N 的有限群，H 是群 G 的一个 n 阶子群，则

$$N = n \cdot [G : H]$$

Corollary (推论 12.6.1)

有限群中每个元素的阶整除该有限群的阶。

Corollary (推论 12.6.2)

如果群 G 的阶 p 为素数，则 G 一定是循环群。

Corollary (推论 12.6.3)

设 G 是应该 N 阶群，则对 G 的每个元素 a，都有 $a^N = e$。

Example (例 12.6.1)

证明：阶小于或等于 5 的群是交换群。

正规子群、商群

设 G 是一个群，G 的任一子集称为群子集。在 2^G 中借助于 G 的乘法引如一个代数运算，称为群子集的乘法：对 $\forall A, B \in 2^G$，

$$AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$$

显然群子集的乘法是 2^G 的二元代数运算。其次，对 $\forall A \in 2^G$，定义

$$A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}.$$

Theorem (定理 12.7.1)

设 G 是一个群，则对 $\forall A, B, C \in 2^G$，有 $(AB)C = A(BC)$。其次，如果 H 是 G 的子群，则

$$HH = H, H^{-1} = H, HH^{-1} = H.$$

正规子群、商群（续）

Theorem (定理 12.7.2)

设 A, B 是群 G 的子群，则 AB 是群 G 的子群的充分必要条件是 $AB = BA$。

Example (例 12.7.1)

设 H 是 G 的一个子群且 $H \neq \{e\}$。如果存在一个元素 $x_0 \in G$，使得 $H(x_0^{-1}Hx_0) = G$，则

$$H \cap x_0^{-1}Hx_0 \neq \{e\}.$$

Definition (定义 12.7.1)

设 H 是 G 的子群，如果对 $\forall a \in G$，都有 $aH = Ha$，则称 H 是 G 的正规子群。

S_3 是 3 次置换群，$H_1 = \{(1), (1\ 2)\}$ 是 S_3 的一个子群。显然

$$(1\ 3)H_1 = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}, H_1(1\ 3) = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

因此，$(1\ 3)H_1 \neq H_1(1\ 3)$。但是对于 S_3 的子群 $H_2 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$，就有

$$\begin{gathered}
(1)H_2 = H_2(1) \\
(1\ 2)H_2 = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\} = H_2(1\ 2) \\
(1\ 3)H_2 = \{(1\ 3), (2\ 3), (1\ 2)\} = H_2(1\ 3) \\
(2\ 3)H_2 = \{(2\ 3), (1\ 2), (1\ 3)\} = H_2(2\ 3) \\
(1\ 2\ 3)H_2 = H_2(1\ 2\ 3) \\
(1\ 3\ 2)H_2 = H_2(1\ 3\ 2)
\end{gathered}$$

即对 $\forall \sigma \in S_3$，都有 $\sigma H_2 = H_2\sigma$

正规子群、商群（续）

Theorem (定理 12.7.3)

设 H 是群 G 的一个子群,则下列三个命题等价:

1. *H 是 G 的正规子群。*
2. *对 $\forall a \in G, aHa^{-1} = H$.*
3. *对 $\forall a \in G, aHa^{-1} \subseteq H$.*

Example (例 12.7.2)

群 G 的换位子群是 G 的正规子群。

Theorem (定理 12.7.4)

设 H 是群 G 的一个正规子群当且仅当对 G 的任一内自同构 ϕ,都有 $\phi(H) = H$。

正规子群、商群（续）

Theorem (定理 12.7.5)

设 H 是 G 的正规子群，则 H 的所有左陪集构成的集族 S_l 对群子集的乘法形成一个群。

Proof.

1. $(aH)(bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (ab)(HH) = (ab)H$. 可以作为代数运算的定义。
2. 群子集的结合律显然成立。
3. 幺元为 H。
4. 每个元素 aH 的逆元素为 $a^{-1}H$。 □

Definition (定义 12.7.3)

群 G 的正规子群 H 的所有左陪集构成的集族对群子集的乘法构成的群称为 G 对 H 的商群，记为 G/H。

群的同态基本定理

Theorem (定理 12.8.1)

设 G 和 K 是两个群,$\phi : G \to K$ 是一个从 G 到 K 上的同态映射,则 $K \cong G/Ker(\phi)$。

Theorem (定理 12.8.2)

设 H 和 K 是群 G 的两个子群,如果 $K \lhd G$,那么

$$H/(H \cap K) \cong HK/K$$

Theorem (定理 12.8.3)

设 $H \lhd K \lhd G$, $H \lhd G$,那么 $K/H \lhd G/H$ 并且

$$\frac{G/H}{K/H} \cong G/K$$