近世代数(2020 春)

课程报告

班级: 1837101

学号: 1183710109

姓名: 郭茁宁

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、 阐述一下半群和群的关系，并举例说明如何由半群和群来构造一个有限环。（20 分）

半群：设$(S,\cdot)$是一个代数系，若“$\cdot$”满足结合律，则称S对于乘法“$\cdot$”构成一个半群（Semi group）；群：每个元素都有逆元素的幺半群称为群，即运算同时满足结合律、每个元素都有逆元、有幺元的代数系。

关系：半群的本质就是一个集合对上面的二元运算满足结合律，而群不仅有结合律，还要求含幺和每个元有逆，条件更多。半群是具有封闭且结合运算的非空集合；群是每个元素都有逆元的具有幺元的半群。从定义的角度来看，群是半群的子集。

环：R为非空集合，R上有两个代数运算“$+$”、“$\cdot$”，若$(R,+)$是交换群、$(R,\cdot)$是半群且“$\cdot$”对“$+$”满足左右分配律，则$(R,+,\cdot)$称为环。

使用模加和模乘构造模n剩余类环。

取$n=6$，$R=0,1,2,3,4,5$，定义集合上R的两种运算，一个是交换群，一个是半群，最后验证两种运算的分配律，即R为有限环。

定义集合R上的加法，$a+b=(a+b)\ mod\ b$，R中0到5的所有数字关于模b加法构成一个群，且模b加法是交换的运算，也是交换群。R中的加法单位元是0，a的加法逆元是$b-a$。

定义集合R上的乘法，$a\cdot b=(a\cdot b)\ mod\ b$，根据半群的定义说明$R$中0到5的所有数字关于模$b$乘法构成一个半群，且是含幺交换半群，乘法单位元是1，模b乘法是可交换运算。此外，比如$2,3,4$没有逆元，但5的逆元是自身。

验证分配律成立。

综上所述，$(R,+,\cdot)$是一个有限环。

二、 举例说明群的同构 Cayley 定理的意义。你认为在研究两个代数系统之间的关系时候，该定理有什么局限性没有？如果有，你有什么解决方案？（20 分）

群的 Cayley 定理：任何一个群都同构一个变换群。令$S=\{1,2,\cdots,n\}$，$sym(S)$是从S到S的一一对应构成的集合，按照映射的合成构成一个群S_n，其任意子群称为S上的一个变换群。例如，任何一个群 G 都和它的左乘变换群 L(G)同构；模 4 同余等价类的加法可以找到一个置换群与其等价。

意义：通过研究变换群和置换群的代数性质，就可以知道其他各个种群的代数性质。Caylay 定理正是利用了变换群的具体性来替代一般群的抽象性。

局限性：能否找到$S_n, \Omega, G' \leq S_n$，使$G \cong G'$，Caylay 定理在这些因素上是不稳定的，未考虑到某些特定条件的子群H也可能不唯一，故Ω也可能不唯一。当集合中元素很多时，表达起来很麻烦。无法描述环等代数系统，只能描述研究群的性质。

解决方案：设H是G的子群，且H除了单位元群之外不含G的任何不变子群，Ω是子群H在G的所有右陪集组成的集合。$\forall g \epsilon G$，规定$\rho_g: \Omega \to \Omega, \mathrm{H_x} \to H(g_x), G' = \{\rho_g | \forall g \epsilon G\}$。易得$G' \leq S_n$。由$\forall \rho_a, \rho_b \epsilon G', (\rho_a \cdot \rho_b)(H_x) = \rho_a(H(bx)) = H(abx) = \rho_{ab}(H_x)$证$\rho_a \cdot \rho_b \epsilon G'$；作$\varphi: G \to G', a \to \rho_a$易证$\varphi$是群同态，且为同构映射，即$G \cong G'$。

三、 结合实例给出判定一个子群是否为正规子群的方法，并说明在代数系统研究中正规子群有什么重要应用？（20 分）

若H是群G的正规子群，则$\forall x \epsilon G$有$xH = Hx$。设群G为

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & a & b & c & d \\ b & b & a & c & d \\ c & c & c & a & b \\ d & d & d & c & a \end{array}$$

则子群 H

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & a \end{array}$$

满足

$$aH = \{a, b\} = Ha$$
$$bH = \{a, b\} = Hb$$
$$cH = \{c\} = Hc$$
$$dH = \{d\} = Hd$$

因此子群 H 为正规子群。

应用：正规子群作为商群的单位元，可以生成商群，是研究商群的基础；任何正规子群都是某个群同构的核，因此可以研究群的同态和同构，帮助我们在代数研究中类比代数体系以及研究新代数体系的性质。

四、 通过实例来简述群的同态基本定理及其意义，并结合你的例子指出其中同态核的意义。（30 分）

同态基本定理：设$\varphi: G \to G_1$是群同态，则$G/ker\varphi \cong im\varphi$。证明过程大致为：定义映射$\Psi: G/ker\varphi \to im\varphi, a \cdot ker\varphi \to \varphi(a)$；可证$\Psi$是良定义的，并得$\Psi$是群同态；通过证明$\Psi$同时为单射和满射，证明$\Psi$为同构。

意义：同态基本定理的证明，将同态和同构相联系，可以从满同态的两个群找出其中的同构。可以将复杂的群转换成简单的群，通过研究简单的群进而研究复杂群中每一类元素的性质。群同态基本定理是同构定理的关键。

例：$G_1:(R,+),G_2:(\{z\epsilon C;\ |z|=1\},\times),f:G1\rightarrow G2,\times\rightarrow e^{ix}$；易得其为满同态，符合同态基本定理，$kerf=\{0\}$。

五、 谈一下抽象代数系统的学习给你带来的体会，以及你对此门课程今后的建议。(10 分)

抽象代数系统是离散数学中重要的分支，对于计算机科学而言，它讲许多实际问题、计算机编程问题转换为抽象的数学问题，许多重要的概念具有很多实际的意义。抽象代数系统的诞生使代数学由作为解方程的科学转变为研究代数运算结构的科学，即把代数学由初等代数时期推向抽象代数。

我认为抽象代数与计算机最为相关的是图论方面的知识，例如基本同态定理，可以引导我们从已知的关系网络去研究未知的图；再比如，证明一个关系网络为图，那么自然而然能获得一些性质，兴许对了解内部特征有着极大的帮助。所以这门课对于计算机科学而言是非常深远的，也许短期之内不能发现它的作用，但它对于抽象思维的培养的贡献却不可磨灭。