1.

设$S=\{a,b,c\}$，二元运算"·"满足：

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

则半群$(S,\cdot)$有有限多个左单位元素$\{a,b,c\}$

2.

设$S=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b\in N\right\}$，其有右单位元素$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}, d\in N$，因

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

3.

若$(a\cdot b)$为左消去元，则

$$(a\cdot b)\cdot x=(a\cdot b)\cdot y$$

由半群$(S,\cdot)$结合律得

$$(a\cdot b)\cdot x=a\cdot(b\cdot x)$$

由a为左消去元得，对于$\forall x,y\in S$

$$a\cdot(b\cdot x)=a\cdot(b\cdot y)$$

故

$$(a\cdot b)\cdot x=a\cdot(b\cdot x)=a\cdot(b\cdot y)$$

则

$$b\cdot x=b\cdot y$$

由a为左消去元得

$$x=y$$

故$a\cdot b$为消去元

5.

设有限半群$(S,\cdot)$，对于$\forall b \in S$，有

$$b^{2^0}, b^{2^1}, \cdots b^{2^n}$$

根据抽屉原理有

$$\exists 0 \le m < n \le |S|, b^{2^n} = b^{2^m}$$

$1°$当$n = m + 1$，则

$$b^{2^m} \cdot b^{2^m} = b^{2^m \cdot 2} = b^{2^n}$$

则令$a = b^{2^m}$有

$$a \cdot a = a$$

$2°$当$n > m + 1$，则构造$b^{2^n - 2^m}$

$$b^{2^n-2^m} \cdot b^{2^n-2^m} = b^{2^n} \cdot b^{2^n-2^m-2^m} = b^{2^m} \cdot b^{2^n-2^m-2^m} = b^{2^n-2^m}$$

则令$a = b^{2^n-2^m}$有

$$a \cdot a = a$$

7.

由半群$(S,\cdot)$性质得

$$\forall a, b \in S, a \cdot b = b \cdot a \epsilon S$$

又

$$\forall a \in M = S \cup \{u\}, a \cdot u = a \cdot u \in M$$

则对于$\forall a, b \in M$，当$a, b \in S$则

$$a \cdot b = b \cdot a \in M$$

当$a \in S, b = u$,则

$$a \cdot b = a \cdot u = u \cdot a = a$$

$\therefore (M,\cdot)$运算封闭，且满足结合律，即

$$(M,\cdot)是半群$$

有$\forall a \in M$，当$a \in S$时

$$a \cdot u = u \cdot a = a$$

当$a = u$时

$$u \cdot u = u$$

$$\therefore u为(M,\cdot)的幺元$$

$$\therefore (M,\cdot)是幺半群$$