# P412

1、①、Z（2^-1）对+构成一个阿贝尔群：先证明其成群：

1、封闭性：Z是整数的集合，整数的加法运算仍为整数，所以满足封闭性。

2、单位元，存在m=0，n=0，使得(0+0\*2^1/2)+(m+n\*2^1/2)=(m+n\*2^1/2)+(0+0\*2^1/2)=m+n\*2^1/2。

3、逆元：对于任何m，n,都存在-m,-n使得(m+n\*2^1/2)+ (-m-n\*2^1/2)= (-m-n\*2^1/2)+ (m+n\*2^1/2)=0+0\*2^1/2

4、结合律：(m1+n1\*2^1/2)+ ((m2+n2\*2^1/2)+ (m3+n3\*2^1/2))=( (m1+n1\*2^1/2)+ (m2+n2\*2^1/2))+( (m3+n3\*2^1/2))=(m1+m2+m3)+(n1+n2+n3)\*2^1/2

再整明交换律也成立：(m1+n1\*2^1/2) + (m2+n2\*2^1/2)= (m2+n2\*2^1/2)+ (m1+n1\*2^1/2)=(m1+m2)+(n1+n2)\*2^1/2。

所以，Z(2^1/2)对+构成一个阿贝尔群。

②、再证明Z(2^1/2)对\*构成半群：（m1+n1\*2^1/2）\*(m2+n2\*2^1/2)=(m2+n2\*2^1/2)\*(m1+n1\*2^1/2)=m1\*m2+2\*n1\*n2+(m1\*n2+m2\*n1)\*2^1/2。

③、证明其满足左右分配律：（m1+n1\*2^1/2）\*(（m2+n2\*2^1/2）+（m3+n3\*2^1/2）)= （m1+n1\*2^1/2）\*（m2+n2\*2^1/2）+（m1+n1\*2^1/2）+（m3+n3\*2^1/2）=m1m2+m1m3+2n1n2+2n1n3+m1n2\*2^1/2+m1n3\*2^1/2

(（m2+n2\*2^1/2）+（m3+n3\*2^1/2）)\* （m1+n1\*2^1/2）=（m2+n2\*2^1/2）\*（m1+n1\*2^1/2）+（m3+n3\*2^1/2）\*（m1+n1\*2^1/2）= m1m2+m1m3+2n1n2+2n1n3+m1n2\*2^1/2+m1n3\*2^1/2

所以（Z（2­^1/2），+，\*）是一个环。

3、因为其不满足封闭性：(m1+n1\*2^1/3)\* (m2+n2\*2^1/3)=m1m2+(m1n2+m2n1)\*2^1/3+n1n2\*2^2/3,不在Q（2^1/3）中。

9、e是R的左单位元，则e\*a=a(a属于R)，往证a\*e=a。若a\*e=b(b∈R,且b≠a)

e\*e=b,e\*e=e,b≠e，矛盾。所以a\*e=a。即e也是右单位元，所以e是单位元。

10、a-1/b=（ab-1）/b,它的逆元为b/ab-1=b\*(ab-1)。所以a-1/b的逆元为b乘上（ab-1）的逆元，因为b和ab-1的逆元均在R中，所以根据封闭性，b\*（ab-1）也在R中，得证。

同理，（a-b^-1）^-1-a^-1=1/(a-1/b)-1/a=1/((ab-1)/b)-1/a=b/(ab-1)-1/a=1/(aba-a),根据封闭性，它也在R中。且（a-b^-1）^-1-a^-1=(aba-a)^-1，所以(（a-b^-1）^-1-a^-1)^-1=aba-a。得证。

# P417

1、F仅有4个元素，其中包含0，且非零元素构成一个群，则这个群为3阶群，元素为{e,a,a^-1}。

①、则只需证a+a=0,根据推论13.2.1，则a^-1+a^-1=0。根据封闭性，a+a=0或e或a或a^-1。若a+a=a,a\*a^-1=(a+a)\*a^-1=e+e=e,显然不成立，同理a^-1+a^-1≠a^-1。若a+a=a^-1,a\*a^-1=0,a\*(a+a)=a\*a+a\*a=a^-1+a^-1=0,若成立，则根据推论13.2.1，阶应为2，则a+a应为0，矛盾，所以a+a≠a^-1,同理，a^-1+a^-1≠a。若a+a=e，根据上面的结论，a^-1+a^-1=e。a\*e=a(a^-1+a^-1)=a\*a^-1+a^a-1=e+e,a\*e=a,a=e+e,a=4a^-1,8a^-1=e,矛盾。所以只能a+a=0。所以阶为2，特征数为2。

1. 、x2=x+e：x=a, a^2=a+e 因为乘法群为三阶群，所以a^-1=a^2,即证a+e=a^-1。

在加法群中：a+e显然≠a或e，假设a+e=0,a=-e,a^2=e,a^-1=e,矛盾。所以只剩下a+e=a^-1一种可能，即a+e=a^2,同理可得a^-1+e=(a^-1)^2。

1. 、 + 0 e a a-1

0 0 e a a-1

e e 0 a-1 a

a a a-1  a e

a-1 a-1 a e a-1

\* 0 e a a-1

0 0 0 0 0

e 0 e a a-1

a 0 a a-1  e

a-1 0 a-1 e a