# P394

# 1

若H是G的正规子群，则根据定理，任意x∈G，x^-1Hx=H,H与H的∩仍为H，当n≠1时成立。

退化条件，若H存在一个子群A是G的正规子群，则x^-1Hx=A∪Q（Q是G的子群）。

又因为A是H的子群，所以(A∪Q)∩H必包含A，不等于{e}，成立。

设该n^2阶群为{a^1,a^2……,a^(n^2)},从中任取n个元素，得子群H={a^b1,a^b2……，a^bn}（b1,b2……bn∈[1,n^2]）。从中取x个元素{a^bc1,abc2……a^bcx}(c1,c2……cx∈[1,n]),任取a^t属于G,a^tH=Ha^t={a^(bc1t%(n^2)),a^(bc2t%(n^2)……a^(bcnt%(n%2))},成立。

得证。

# 2

设A中元素个数为x，B中元素个数为y。因为A∩B中元素\*A∩B中元素还是A∩B中元素，所以应当将重复部分减去。所以|AB|=|A||B|-|A∩B|

# 3

设A和B是六阶群的两个不同的三阶子群，|AB|=3\*3-1=8>6矛盾。

# 4

若a∈H，则显然aH=Ha=H。

若a不属于H，则aH不属于H，Ha不属于H，aH=Ha=G-H。

# 5

设两个正规子群分别为A，B，x∈A，y∈B，任取元素w∈G，wA∩B∈A∩B。若不成立，则wA∩B不属于A∩B，设z属于A∩B，wz不属于A∩B，对于A，设wz不属于A∩B，则wz属于A-A∩B，同理对于B，wz属于B-A∩B，因为（A-A∩B）∩（B-A∩B）=空集，即wz同时等于两个不同结果，显然矛盾。

所以w（A∩B）=（A∩B）w=（A∩B），即两个正规子群的交也为正规子群。

# 6

封闭性、结合律：显然对于G中任意两个元素相乘，结果仍在G中，且符合结合律。

单位元：e∈H，e∈N，则e∈NH。

逆元：任取H中元素a，根据正规子群的定义，aN=Na。Na包含于NH，Na^-1=a

^-1N,Naa^-1N=e。则对于NH中每个元素都存在逆元。