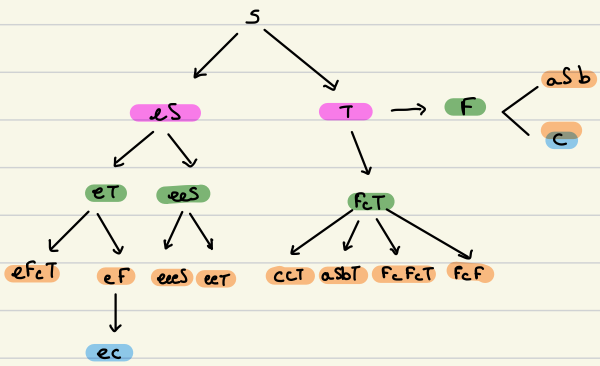
exercice 1 :

Q1 :



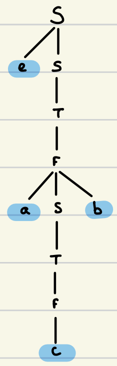
$\to \hat{\mathcal{L}}^1(G)$

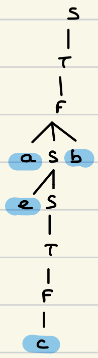
$\to \hat{\mathcal{L}}^2(G)$

$\to \hat{\mathcal{L}}^3(G)$

- $\mathcal{L}^1(G) = \emptyset$
- $\mathcal{L}^2(G) = \emptyset$
- $\mathcal{L}^3(G) = \{c\}$
- $\mathcal{L}^4(G) = \{ec\}$

Q2 :





exercice 2 :

Q1. $S \to aSb \to aaSbb \to aaaSbbb$

$S \to \varepsilon$, $aSb \to ab$, $aaSbb \to aabb$

généralisation $\to a^n S b^n$ ou $a^{n-1}\ b^{n-1}$

Q2. supposons $\hat{\mathcal{L}}^n(G) = \{a^n S b^n,\ a^{n-1}\ b^{n-1}\}$

exprimons $\hat{\mathcal{L}}^{n+1}(G) = \{a^{n+1} S b^{n+1},\ a^n b^n\}$

Q3. $\mathcal{L}^n(G) = \hat{\mathcal{L}}^n(G) \cap \Sigma^*$

$= \{a^{n-1}\ b^{n-1}\}$

$\mathcal{L}(G) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}^n(G) = \mathcal{L}^0(G) \cup \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{L}^n(G)$

$= \bigcup_{n \geq 1} \{a^{n-1}\ b^{n-1}\}$ $\qquad n' = n-1$, $n \geq 1$ ou $n' \geq 0$.

$= \bigcup_{n' \geq 0} \{a^{n'} b^{n'}\}$

$= \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

exercice 3 :

Q1. grammaire régulière $\to$ type 3.

Q2.3. $A \to aS \to abA \to abbS \to abbaA \to abba$

Q4. $\hat{\mathcal{L}}^1(G) = \{aS, bS, \varepsilon\}$ $\qquad \mathcal{L}^1(G) = \{\varepsilon\}$

$\hat{\mathcal{L}}^2(G) = \{aaA, abA, baA, bbA\}$ $\qquad \mathcal{L}^2(G) = \{\emptyset\}$

$\hat{\mathcal{L}}^3(G) = \{aa, aaaS, aabS, abaS, abbS, baaS, babS, bbaS, bbbS, ab, ba, bb\}$ $\qquad \mathcal{L}^3(G) = \{aa, ab, ba, bb\}$

Q5. longueur paire : · se termine tous par la variable A.

· ils ne contiennent qu'une seule variable.

· composé d'un nombre pair de lettre.

$$\hat{\mathcal{L}}^{2n}(G) = \{(a+b)^{2n} A\}$$

longueur impaire : · se termine par la variable S de longueur impaire

· sans variable et de longueur paire

$$\hat{\mathcal{L}}^{2n+1}(G) = \{(a+b)^{2n+1} S, \ (a+b)^{2n}\}$$

Q6. $\mathcal{L}^{2n}(G) = \emptyset$

$\mathcal{L}^{2n+1}(G) = (a+b)^{2n}$

$\mathcal{L}(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^{n}(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a+b)^{2n}$

<u>exercice 5 :</u>

alphabet terminal (Σ) = { 'a', ... ; 'z', ',', '{', '}', '[', ']' }

Variable (V) = { <u>commande</u>, <u>identificateur</u>, <u>lettre</u>, <u>suite de lettres</u>, <u>variable</u>, <u>parametres</u>, <u>options</u>, <u>suite_parametres</u>, <u>suite non vide parametres</u>, <u>suite_options</u>, <u>suite_non_vide_options</u>, <u>option</u> }

axiome = <u>commande</u>

règles (R) = { <u>commandes</u> → <u>identificateur</u> <u>variable</u> <u>parametres</u> <u>options</u>

<u>identificateur</u> → <u>lettre</u> <u>suite de lettres</u>

<u>lettre</u> → a | b | ... | z

<u>suite de lettres</u> → ε | <u>lettre</u> <u>suite de lettres</u>

<u>variable</u> → ε | <u>identificateur</u>

<u>parametres</u> → ε | { <u>suite_parametres</u> }

<u>suite_parametres</u> → ε | <u>suite_non_vide_parametres</u>

<u>suite_non_vide_parametres</u> → <u>lettre</u> | <u>lettre</u> , <u>suites_non_vide_parametres</u>

<u>options</u> → ε | [<u>suite_options</u>]

<u>suite_options</u> → ε | <u>suite non vide options</u>

<u>suites non vide options</u> → <u>option</u> | <u>option</u> , <u>suite_non_vide_options</u>

<u>option</u> → <u>lettre</u> | { <u>suite_parametres</u> }

}

<u>exercice 4 :</u>

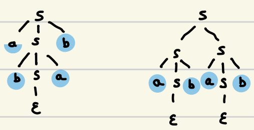
Q1. type 2 → algébrique

Q2. non → S → SS → aSbS → aSb bSa → abbSa → abba

Q3. 1. S → aSb → abSab → abab

2. S → SS → aSbS → aSbaSb → abaSb → abab

Q4

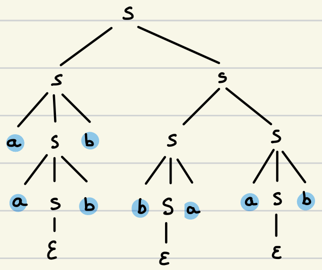


→ grammaire ambigue.

Q5. S → SS → SSS → SSSS → ... → ε

$\forall_n \in \mathbb{N} \quad S^n \in \hat{\mathcal{L}}(G) \quad S^n \xrightarrow{*} \varepsilon$

Q6.



Q7. Dans chaque règle, quand on a un "a" on a forcément un "b" et quand on a un "b" on a forcément un "a".

Q8. $|S|_a = 0$ $\quad |S|_b = 0$

si on utilise la règle $S \to aSb$

à partir de m dans le mot obtenu m' $\quad |m'|_a = |m|_a + 1$

$|m'|_b = |m|_b + 1$

on peut le montrer par récurrence sur le nombre de dérivation de $\hat{\mathcal{L}}(G)$

P_n : tout mot de $\bigcup_{k=0}^{n} \hat{\mathcal{L}}^k(G)$ contient autant de a que de b.

P_0 est vraie car S contient autant de a que de b.

supposons P_n vraie.

soit $m' \in \hat{\mathcal{L}}^{n+1}(G)$ $\quad \exists\, m \in \hat{\mathcal{L}}^n(G)$ $\quad m = uSv$

$m' = uaSbv$ ou $m' = ubSav$

$m' = uSSv$ ou $m' = uv$

dans le 1er cas :

$|m'|_a = |u|_a + 1 + 0 + 0 + |v|_a = |m|_a + 1$

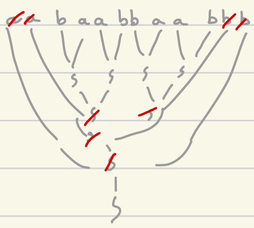
$|m'|_b = |u|_b + 0 + 0 + 1 + |v|_b = |m|_b + 1$

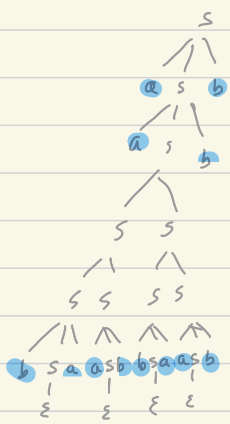
dans les 3 autres cas, le raisonnement est analogue

réciproque $\to$ $m \in (a+b)^*$ on suppose que $|m|_a = |m|_b$

et on doit montrer que $m \in \mathcal{L}(G)$ donc il faut être en mesure de montrer une dérivation de m

à partir de S en utilisant la grammaire G





l'idée est de décomposer le mot de la manière suivante :

$m = aubv$ $\quad$ avec $|u|_a = |u|_b$

ou $m = buav$ $\quad |v|_a = |v|_b$

trouve dérivation(m) renvoie la dérivation

- si m est le mot vide $\to$ $S \to \varepsilon$
- si m n'est pas vide alors $\to$ il commence par a
  $\to$ il commence par b

Q9. $\mathcal{L}(G) = \{ m \in \{a,b\}^* \mid |m|_a = |m|_b \}$

$a^{-1} \mathcal{L}(G) = \{ m \in \{a,b\}^* \mid |m|_a = |m|_b - 1 \}$

$\vdots$

$\rightarrow$ infinité de résiduels distinct $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(G)$ non rationnel.