Chapter 1

Fourier Series

1.1 波的 Time Domain 与空域

谈频率的时候，时间就不再是一个变量。

1. 空间固定，使用 frequency 表示一秒内经过多少个波；
2. 时间固定，使用 period 描述波在空间上的分布；
3. Time Domain 上用 frequency 表示周期性；空域上用 period 表示周期性。period 和 frequency 互成反比：

$$\begin{aligned} \lambda &= v &\cdot& \frac{1}{\theta} \\ Distance &= Speed &\times& Time \end{aligned}$$

1.2 Signal 周期化

1.2.1 笔记中周期的设定

1. 在下面的笔记里，我们一直设定周期为 1，即：

$$f(t+1) = f(t) \tag{1.1}$$

2. 周期为 1 的 Signal，可以用 $sin(2 \cdot \pi \cdot t)$ 和 $cos(2 \cdot \pi \cdot t)$ 组成。

1.2.2 为什么用三角函数表示周期性

三角函数作为线性系统的输入时具有频率不变的特性。

假设输入 Signal 为 $x(t) = \cos(\omega \cdot t)$。输出 Signal 为输入 Signal$\cos(\omega \cdot t)$ 加上一个时延 Signal$\alpha \cdot \cos(\omega \cdot t - \omega \cdot t_0)$：

$$\begin{aligned} & g(t) \\ =& \cos(w \cdot t) + \alpha \cdot \cos(\omega \cdot t - \omega \cdot t_0) \\ =& (1 + \alpha \cdot \cos\omega \cdot t_0) \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ +& \alpha \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ =& A \cdot \cos(\omega \cdot t - \theta) \end{aligned}$$

从这个例子可以看出，输入是一个余弦 Signal，输出也是一个余弦 Signal。只是幅度和相位有了一定改变，但是频率没有变。

1.2.3 One period, many frequencies.

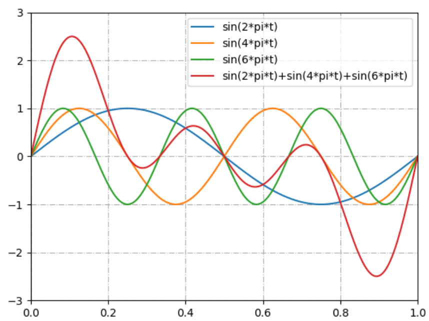

图 1.1: $\sin(2\cdot\pi\cdot t)+\sin(4\cdot\pi\cdot t)+\sin(8\cdot\pi\cdot t)$

1. 一般表示为：

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n} A_k\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot k\cdot t+\phi_k) \tag{1.2}$$

这里使用 cos 也没有关系，但是这节课里就钦定了 sin。

2. 由上图可以看出，整体的函数在周期最长的函数重复的时候才重复，可以说周期最长的函数奠定了整个函数的基调。$k=1$ 时，$T=\frac{2\cdot\pi}{2\cdot\pi}=1$，周期最长，所以 $k=1$ 的项被称为 fundamental wave。而 $k>1$ 的项被称为 harmonic wave。

1.3 Fourier Series 的两种表达方式

1.3.1 三角函数形式表示

我们把(1.2)展开：

$$
\begin{aligned}
f(t)&=\sum_{k=1}^{n} A_k\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot k\cdot t+\phi_k)\\
&=\sum_{k=1}^{n}[A_k\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot k\cdot t)\\
&\quad\cdot\cos(\phi_k)+A_k\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot k\cdot t)\cdot\sin(\phi_k)]\\
&=\sum_{k=1}^{n}[a_k\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot k\cdot t)+b_k\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot k\cdot t)]
\end{aligned}
$$

其中：

$$\begin{cases} a_k=A_k\cdot\cos(\phi_k)\\ b_k=A_k\cdot\sin(\phi_k)\end{cases}$$

所以我们得到：

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}[a_k\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot k\cdot t)+b_k\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot k\cdot t)] \tag{1.3}$$

1.3.2 复指形式表示

因为根据(1.3)的展开，所以我们令（为什么这么令我也不知道，反正老师就是突然跳到这一步。他想怎么干就怎么干吧……）：

$$f(t)=\sum_{k=-n}^{n} c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t} \tag{1.4}$$

1.4 Fourier Series 的对称性

1.4.1 欧拉公式 Euler's Formula

$$e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}=\cos(2\cdot\pi\cdot k\cdot t)+i\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot k\cdot t) \tag{1.5}$$

$$\cos(2\cdot\pi\cdot k\cdot t)=\frac{e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t+}+e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}}{2} \tag{1.6}$$

$$\sin(2\cdot\pi\cdot k\cdot t)=\frac{e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t+}-e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}}{2\cdot i} \tag{1.7}$$

1.4.2 Fourier Series 的对称性

假设 Signal 是一个实 Signal (real Signal)，则 Signal 中没有虚部，有 $f(t)=\overline{f(t)}$:

$$\begin{aligned}&f(t)\\=&\overline{\sum_{k=-n}^{n} c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}}\\=&\sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}}\\=&\sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k}\cdot \overline{e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}}\\=&\sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k}\cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}\end{aligned}$$

因为 $\sum\limits_{k=-n}^{n}=\sum\limits_{k=n}^{-n}$，所以把 k 变成 $-k$，得:

$$\begin{aligned}&f(t)\\=&\sum_{k=-n}^{n} c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}\\=&\sum_{-k=-n}^{n} c_{-k}\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}\\=&\sum_{k=n}^{-n} c_{-k}\cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}\\=&\sum_{k=-n}^{n} c_{-k}\cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}\end{aligned}$$

由上面两个推导知:

$$f(x)=\sum_{k=-n}^{n}\overline{c_k}\cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}=\sum_{k=-n}^{n} c_{-k}\cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}$$

所以得到:

$$c_{-k}=\overline{c_k} \tag{1.8}$$

那么我们可知:

$$\begin{aligned}&c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}+c_{-k}\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(-k)\cdot t}\\=&c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}+c_{-k}\cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}\\=&c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}+\overline{c_k}\cdot e^{\overline{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}}\\=&c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}+\overline{c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}}\\=&2\cdot\Re\{C_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}\}\end{aligned}$$

所以 $c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}+c_{-k}\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(-k)\cdot t}$ 为一个实数。$\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}$ 可以表示一个实数。

1.5 从三角函数到复指形

1.5.1 从三角函数到复指形

$$\begin{aligned}&f(t)\\=&\sum_{k=1}^{n}[a_k\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot k\cdot t)\\&+b_k\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot k\cdot t)]+\frac{A_0}{2}\\=&\sum_{k=1}^{n}(a_k\cdot\frac{e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}-e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}}{2\cdot i}\\&+b_k\cdot\frac{e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t+}+e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}}{2})+\frac{A_0}{2}\\=&\sum_{k=1}^{n}(\frac{b_k-i\cdot a_k}{2}\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}\\&+\frac{b_k+i\cdot a_k}{2}\cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t})+\frac{A_0}{2}\end{aligned}$$

设 $c_0=\frac{1}{2}\cdot A_0$；$c_k=\frac{b_k-i\cdot a_k}{2}$；$c_{-k}=\overline{c_k}=\frac{b_k+i\cdot a_k}{2}$ 则:

$$\begin{aligned}&f(t)\\=&\sum_{k=1}^{n}(c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot k\cdot t}+c_{-k}\cdot e^{-2\cdot\pi\cdot k\cdot t})+c_0\\=&\sum_{k=1}^{n} c_k\cdot e^{2\cdot\pi\cdot k\cdot t}+\sum_{k=1}^{n} c_{-k}\cdot e^{-2\cdot\pi\cdot k\cdot t}+c_0\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e^{2\cdot\pi\cdot k\cdot t} + \sum_{k=-1}^{-n} c_k \cdot e^{2\cdot\pi\cdot k\cdot t} + c_0$$
$$=\sum_{k=-n\ k\neq 0}^{n} c_k \cdot e^{2\cdot\pi\cdot k\cdot t} + c_0$$

为了表示一般的周期现象，光求 $\sum\limits_{k=-n}^{n}$ 是不够的，我们必须考虑对周期 Signal 进行无限项求和，即求：$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}$。

We can use high frequencies to make sharp corners. There is discontinuity in some high derivative that means that you are gonna have trouble repeating that phenomenon as a finite sum. You are gonna have to make N layers and layers to represent it more and more accurately.

由于 $\cos(x)$ 和 $\sin(x)$ 是连续且无限可微分的，所以有限的 $\cos(x)$ 或 $\sin(x)$ 之和不能表示离散的函数或者不无限可微分的函数。所以最终：

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{2\cdot\pi\cdot k\cdot t} + c_0 \tag{1.9}$$

1.5.2 求解 c_k

我们由上面的推导可知：

$$c_{-k} = \overline{c_k}$$
$$c_0 = c_{-0} = \overline{c_0}$$

$f(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}$，取出其中任意一项 $c_m \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t} \quad m \in [-\infty, \infty]$：

$$c_m$$
$$=f(t) - \sum_{k\neq m}^{\infty} c_k \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}$$
$$=e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t} \cdot f(t) - \sum_{k\neq m}^{\infty} c_k \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t} \cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}$$
$$=e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t} \cdot f(t) - \sum_{k\neq m}^{\infty} c_k \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(k-m)\cdot t}$$

对等式两边同时积分得到：

$$c_m = \int_0^1 [e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t} \cdot f(t) - \sum_{k\neq m}^{\infty} c_k \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(k-m)\cdot t}]\ dt$$

因为 $k \neq m$，所以 $\int_0^1 e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(k-m)\cdot t}\ dt = 0$（该结论的证明后面有）。所以有：

$$c_m = \int_0^1 e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t} \cdot f(t)\ dt$$

1.5.3 傅立叶参数 Fourier Coefficient

我们用新记号 $\hat{f}(k)$ 表示 c_k：

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t} \cdot f(t)\ dt \tag{1.10}$$

因为是 Fourier Series 的项，所以变量为频率 k。Fourier Series 用以下方式表示：

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t} \tag{1.11}$$

因为在 Time Domain 中观察，所以变量为时间变量 t。这两个式子的指数中：

1. $2\cdot\pi$ 为函数的周期。这个周期来自最初的三角函数的周期设定；
2. k 为 Frequency Domain 变量，在分析 Time Domain 的时候作为常数处理；
3. t 为 Time Domain 变量，在分析 Frequency Domain 时作为常数处理。

1.6 通用性验证

1.6.1 适用范围

关于三角函数的讨论

1. 由于三角函数是连续的，因此有限项级数不能表示离散的函数；
2. 由于三角函数是无限可微分的，因此有限项级数不能表示不无限可微分的函数。

Dirichlet Condition

一个周期函数在任意一个周期内：

1. 有有限个一类间断点；
2. 有有限个极大值与极小值；
3. 其绝对值可积。

则可以表示为 Fourier Series。

有限求和

We can use high frequencies to make sharp corners. There is a discontinuity in some high derivative that means that you are going to have trouble repeating that phenomenon as a finite sum. You are going to take N layers and layers to try to represent it more and more accurately.

1.6.2 收敛性

为什么要讨论收敛？任何非平滑的 Signal 都会产生无限多个 Fourier Series。如果在有限项后截断来得到函数近似，万一级数不收敛于 $f(t)$，情况就很糟糕。

L_2 收敛

一般 Signal（也包括上述两种情况）的收敛性在分析的时候，不采用逐点判断收敛性的方法，用均方收敛（convergence in the mean）。

如果 $\int_0^1 |f(t)|^2\,dt < \infty$，且：$\int_0^1 |\sum\limits_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}\ dt - f(t)|^2 \to 0\ if\ n \to \infty$，则可表示为：

$$f \in L_2([0,1])$$

收敛结论

1. 如果 Signal 是平滑连续的（连续可微），在所有的 t 处都会收敛于 $f(t)$；
2. 如果 Signal 是有跳变的，在跳变点将收敛于跳变点前、后的平均值。

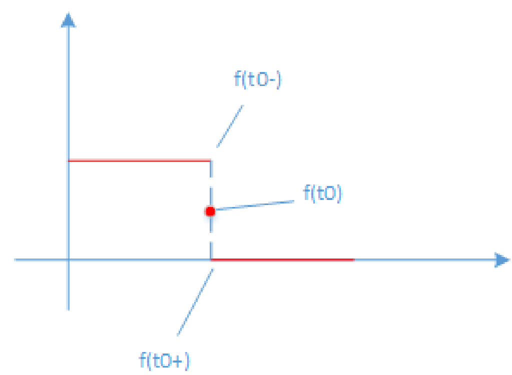

图 1.2: 跳变函数的收敛性

1.7 函数的内积

1.7.1 函数内积计算方法

设有复变函数 $f, g \in L_2([0,1])$，那么可以把 f, g 分别认为是 Vector。求这两个 Vector 内积的

方法为:

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\ dt \tag{1.12}$$

1. $g(t)$ 取共轭函数!!!!!
2. 当 $(f,g)=0$ 的时候，就可以说 f 与 g 正交。

1.7.2 与 Vector 类比

1. 类比 Vector 的模:

$$(f,f)=||f||^2=\int_0^1 |f(t)|^2\ dt$$

2. 当 f 与 g 正交的时候，有函数形式的勾股定理:

$$||f+g||^2=||f||^2+||g||^2$$

1.8 Fourier Series 与 Matrix

1.8.1 空间内的 Orthogonal Basis

空间内一组标准正交 Vector：$q_1,q_2,\cdots,q_n$。空间内任意 Vector$\mathbf{v}$ 有:

$$v=x_1\cdot q_1+x_2\cdot q_2+\cdots+x_n\cdot q_n=Q\cdot x$$
$$x=Q^{-1}\cdot v$$

因为 Q 为正交 Matrix，所以 $Q^T=Q^{-1}$，所以 $x=Q^T\cdot v$。

因为 q_i 为标准 Orthogonal Basis，所以 $q_i^T\cdot q_j=0$。

所以 $x_i=q_i^T\cdot v$。Vector 与标准 Orthogonal Basis 的点乘，求得各分量。

1.8.2 Orthogonal Basis

三角函数的 Orthogonal Basis

正弦余弦函数一定正交:

$$\int_0^{\frac{2\cdot\pi}{n}} \cos(n\cdot x)\sin(n\cdot x)=0$$

相同频率的正弦函数不正交:

$$\int_0^{\frac{2\cdot\pi}{n}} \sin(n\cdot x)\sin(n\cdot x)=1$$

相同频率的余弦函数不正交:

$$\int_0^{\frac{2\cdot\pi}{n}} \cos(n\cdot x)\cos(n\cdot x)=1$$

由此性质，我们可以将 $\sin(2\cdot\pi\cdot m\cdot t)$ 和 $\cos(2\cdot\pi\cdot m\cdot t)$ 看作 Fourier Series 上的 Orthogonal Basis，來求解 Fourier Coefficient。

复指函数的 Orthogonal Basis

$$\begin{aligned}&(e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t},e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot n\cdot t})\\=&\int_0^1 e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t}\cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(-n)\cdot t}\ dt\\=&\int_0^1 e^{e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(m-n)\cdot t}}\ dt\\=&\left.\frac{e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(m-n)\cdot t}}{2\cdot\pi\cdot i\cdot(m-n)}\right|_0^1\end{aligned}$$

展开 $e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(m-n)\cdot t}$:

$$\begin{aligned}&e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(m-n)\cdot t}\\=&\cos(2\cdot\pi\cdot t\cdot(m-n))+i\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot t\cdot(m-n))\end{aligned}$$

因为 $m,n\in\mathbb{Z}$，所以 $m-n\in\mathbb{Z}$；所以 $\cos(2\cdot\pi\cdot t\cdot(m-n))=1$；所以 $\sin(2\cdot\pi\cdot t\cdot(m-n))=0$；所以 $e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(m-n)\cdot t}-e^0=0$。

因此 $e^{2\cdot\pi i\cdot k\cdot t}$ 被称为 Fourier Transform 中的 Orthogonal Basis。

$$\begin{cases} (e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t}, e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t}) & = 1 \\ (e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t}, e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot n\cdot t}) & = 0 \end{cases}$$

1.8.3 求解 Fourier Coefficient

三角函数形

$f(t)$ 的三角函数表达式如下：

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} [a_k \cdot \sin(2\cdot\pi\cdot k\cdot t) + b_k \cdot \cos(2\cdot\pi\cdot k\cdot t)]$$

将 $f(t)$ 分别与 $\sin(2\cdot\pi\cdot m\cdot t)$ 和 $\cos(2\cdot\pi\cdot m\cdot t)$ 做内积，可以得到 a_m 和 b_m：

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \ f(x)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot m\cdot t)\ dt \\ =&\int_0^1 \ a_m\cdot\sin^2(2\cdot\pi\cdot m\cdot t)\ dt \\ =&\int_0^1 \ a_m\cdot\frac{1-\cos(4\cdot\pi\cdot m\cdot t)}{2}\ dt \\ =&\frac{a_m}{2} \end{aligned}$$

因此：

$$a_m = \frac{\int_0^1 \ f(x)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot m\cdot t)\ dt}{\frac{1}{2}}$$

同理：

$$b_m = \frac{\int_0^1 \ f(x)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot m\cdot t)\ dt}{\frac{1}{2}}$$

我们再来看看 c_m：

$$\begin{aligned} &c_m \\ =&\int_0^1 \ e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t}\cdot f(t)\ dt \\ =&\int_0^1 \ [\cos(-2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t) \\ &+i\cdot\sin(-2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t)\cdot f(t)]\ dt \\ =&\int_0^1 \ [\cos(2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t) \\ &-i\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot t)\cdot f(t)]\ dt \\ =&\frac{b_m - i\cdot a_m}{2} \end{aligned}$$

与前面得到的结论一致。

复指函数形

如果 $\mathbf{v}$ 是单位 Vector，那么 $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 是 $\mathbf{u}$ 在 $\mathbf{v}$ 上的投影。

类比到 Fourier Series：

$$\begin{aligned} &\hat{f}(k) \\ =&\int_0^1 \ f(t)\cdot e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}\ dt \\ =&(f(t), e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}) \end{aligned}$$

因此 Fourier Coefficient $\hat{f}(k)$ 是原函数 $f(t)$ 在 $e^{-2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}$ 上的投影。

几何上的分量：

$$\mathbf{a_v} = (\mathbf{a}, \mathbf{v})\cdot\mathbf{v}$$

1. 先通过内积得到投影；
2. 然后用投影乘上代表 Vector 方向的 Orthogonal Basis 得到该方向上的分量。

类比到 Fourier Series：

$$f(t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f, e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}) \cdot e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}$$

1. 函数进行 Fourier Series 后的每一项，都是函数在不同的 Orthogonal Basis$e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot t}$ 上的分量。

2. 反过来，这些分量相加构成完整的原始函数。

下面补充 Rayleigh's Identity。几何上，因为 $\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$，所以 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$。类比到 Fourier Series，帕塞瓦尔定理的定义如下：

$$\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2$$

Fourier Transform 后的项互为正交项，正交项内积为 0。

1.9 Convolution

It is convolution in time, multiplication in frequency.

一般来说，Frequency Domain 的运算会比 Time Domain 简单许多，因为 Frequency Domain 只需执行相乘运算。

1.9.1 定义

设 $f(t)$、$g(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上两个可积函数，作积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \, d\tau$$

可以证明，关于几乎所有的 $x \in (-\infty, \infty)$，上述积分是存在的。这样，随着 x 的不同取值，这个积分就定义了一个新函数 $h(x)$，称为函数 f 与 g 的 Convolution，记为：

$$h(x) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) \cdot g(t - r) \, dr$$

1.9.2 Convolution 与偏微分方程

偏微分方程的解经常以 Convolution 的形式出现。Convolution 的一方是特解，另一方是给定的初始数据下的初始条件。

1.9.3 图解 Convolution

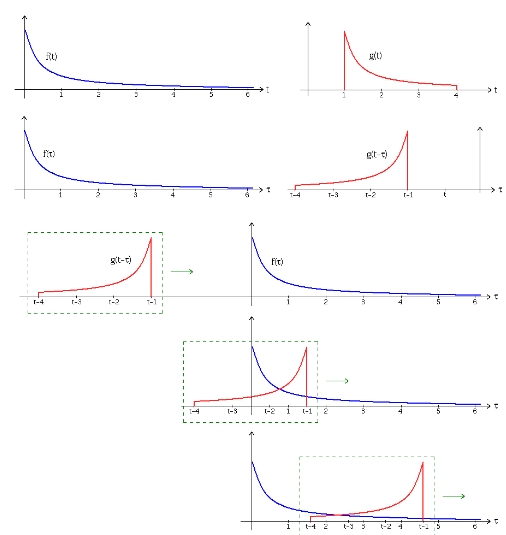

图 1.3: 图解 Convolution

1. 已知两函数 $f(t)$ 和 $g(t)$。上图第一行分别为 $f(t)$ 和 $g(t)$。

2. 首先将两个函数都用 τ 来表示，从而得到 $f(\tau)$ 和 $g(\tau)$。将函数 $g(\tau)$ 向右移动 t 个单位，得到函数 $g(\tau - t)$ 的图像。将 $g(\tau - t)$ 翻转至纵

轴另一侧，得到 $g(t-\tau)$ 的图像。上图第二行两图分别为 $f(\tau)$ 和 $g(t-\tau)$。

3. 由于 τ 是时间变量，当时间变量（以下简称"时移"）取不同值时，$g(t-\tau)$ 能沿着 τ 轴"滑动"。右图第三四五行可理解为"滑动"。

4. 让 τ 从 $-\infty$ 滑动到 $+\infty$。两函数交会时，计算交会范围中两函数乘积的积分值。换句话说，我们是在计算一个滑动的的加权总和。也就是使用 $g(t-\tau)$ 当做加权函数，来对 $f(\tau)$ 取加权值。

5. 最后得到的波形（未包含在此图中）就是 f 和 g 的 Convolution。如果 $f(t)$ 是一个单位脉冲，我们得到的乘积就是 $g(t)$ 本身，称为冲激响应。