第2回課題

33B21009　情報科学研究科 情報数理学専攻

羽田充宏

(16)

(a) $\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n-\frac{1}{n}, n+\frac{1}{n}\right]}_{:=A\text{とする}} = [0, 2] \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right] \cup \cdots$

$\forall y \in \mathbb{R} \setminus A$ に対して

$\exists \varepsilon > 0$, $B(y, \varepsilon) \cap A = \phi$ より

$\mathbb{R} \setminus A$ は開集合 よって A は閉集合.

(b) $P = \{2, 3, \cdots\}$

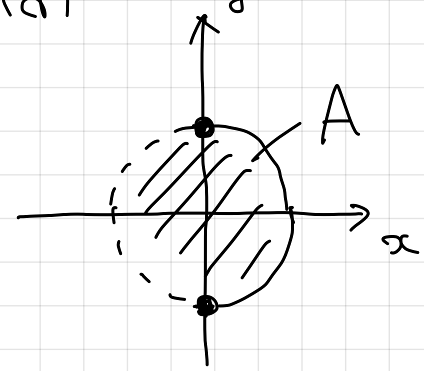
$\forall y \in \mathbb{R} \setminus P$　$\exists \varepsilon > 0$, $B(y, \varepsilon) \cap P = \phi$ となるので

$\mathbb{R} \setminus P$ は開, よって P は閉集合

(c) $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$

よって $\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Z}}$ は閉集合

(d)



$(x, y) = (-1, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$

$\forall \varepsilon > 0$, $B(y, \varepsilon) \cap A \neq \phi$

よって y は A の集積点である

一方で $y \notin A$ より A は開集合.

$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\square$

⑰

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}, \quad a_1 = 1 \text{ より}$$

$a_k \geq 0 \quad k \in \mathbb{N}$ である.

よって $a_{k+1} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}a_k \cdot \frac{1}{a_k}} = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

等号成立は $a_k = \sqrt{2}$ の時,

また $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} - a_n$

$$= \frac{1}{a_n} - \frac{1}{2}a_n$$

$$= \frac{2}{2a_n} - \frac{a_n^2}{2a_n} = \frac{1}{2a_n}(2 - a_n^2)$$

$$= \frac{1}{2a_n}(\sqrt{2} + a_n)(\sqrt{2} - a_n)$$

$n \geq 2$ に対して

$$a_{n+1} - a_n \leq 0$$

従って a_n は下に有界な単調減少数列より収束して

収束先 α とすれば

$$\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha^2 = \frac{\alpha^2}{2} + 1 \qquad \alpha = \sqrt{2}$$

よって $\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{2}$ ▨

⑱ $\varepsilon > 0$, 有界閉集合 M, $f : M \to \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$, 各 $z \in M$, $d(x, z) < \Delta(z) \Rightarrow d(f(x), f(z)) < \varepsilon$

となるような $\Delta(z)$ を設定

(a) Heine − Borel の定理より M はコンパクトより

有限開被覆 ${}^{\exists}U_1 = B(z_1, \frac{1}{2}\Delta(z_1)), \ldots, {}^{\exists}U_m = B(z_m, \frac{1}{2}\Delta(z_m))$

$M \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ とすることができる.

$x, y \in M$ を $d_1(x, y) < \delta := \frac{1}{2} \min \Delta(z_i)$

をみたすように選び、

$x \in U_i$ とする.

(b)
$$d_1(x, z_i) < \frac{1}{2}\Delta(z_i) < \Delta(z_i)$$

$\because$ $x \in U_i = B(z_i, \frac{\Delta(z_i)}{2})$

(c) $d_1(y, z_i) \leq d(x, y) + d(x, z_i) < \frac{1}{2}\Delta(z_i) + \frac{1}{2}\Delta(z_i) = \Delta(z_i)$

$\because$ 三角不等式, 及び (b)

(d) $d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(z_i)) + d_2(f(z_i), f(y))$
$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$\because$ 最初の仮定

(e) $\forall \varepsilon > 0, \forall x, y \in M, \exists \delta > 0,$

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

とできたので f は一様連続.

$\square$

(19)

$^\forall f \in C[a, b]$ について定積分が存在する.

$a < b$ を n 等分して $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ とする.

この時 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\Delta := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \sup_{x_{i-1} < x < x_i} f(x) \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \inf_{x_{i-1} < x < x_i} f(x) \right\} < \varepsilon \quad \cdots (*)$$

とできれば定積分が存在するが, f の一様連続性より

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [a, b]$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

とできるので

$\frac{\varepsilon}{2}$ をみたす δ が存在して，$[a, b]$ の分割幅をそれぞれ δ より
小さくとれば(*)をみたすので
f が一様連続ならば積分値が存在する □

(20) $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 内積 sp. とする.

$\forall x, y \in V$, $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$0 \leq \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty \rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2$$

t に関する判別式より

$$|\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

等号成立は

$\|x + ty\|^2 = 0$ となる時なので

$$x + ty = 0$$

すなわち $x = ky$ $k \in \mathbb{R}$ をみたす時 □

(21)

多項式環 $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ について

$f, g, h \in \mathbb{R}[x]$

$f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ とする.

$$f + g = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i$$ (短い方の係数は0)

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} a_i b_j x^k$$ で定める.

$\mathbb{R}$ の積の可換性より $\mathbb{R}[x]$ は可換環である.

$$f\cdot(g+h) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j + \sum_{k=0}^{l} c_k x^k \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \sum_{j=0}^{n} b_j x^j + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \sum_{k=0}^{l} c_k x^k$$

$$= f\cdot g + f\cdot h$$

$$= g\cdot f + h\cdot f$$

$$= (g+h)\cdot f$$

また $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(f\cdot g) = \alpha \sum\sum a_i b_j x^k$$

$$= \sum\sum(\alpha a_i) b_j x^k$$

$$= (\alpha f)\cdot g$$

よって $\mathbb{R}[x]$ は多項式環

ここで $E=[0,1]$ はコンパクト集合で $\mathbb{R}[x]$ は多元環である.

ストーンワイエルシュトラスの定理の仮定(i),(ii)について

(i) $\mathbb{R}[x] \ni f = 1$ の定数関数を含むので

そのような $x \in E$ は存在しないので成り立つ

(ii) $x, y \in E$ に対して

$$f(x) = (x-y)^2 \text{ とすれば}$$

$$f(y) = 0$$

$f(x) > 0$ であるので成り立つ.

よって定理より

$\mathbb{R}[x][E]$ (E上一変数多項式) は $C(E)$ 上稠密.

∎

㉒ Riesz - Fischer thm.

L^2 は Hilbert sp. である.

pr) $\{f_n\}$ を L^2 の Cauchy 列

a

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{n,m\geq N} \|f_m - f_n\| = 0$$ と仮定

すると $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$ をみたすような部分列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ をとれる

b

よって $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 1 < \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|^2 dx < \infty$$

よって $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| = 0$ a.e.

c

従って $\forall r < t$

$$|f_{n_r}(x) - f_{n_t}(x)| \leq \sum_{k=r}^{t-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

よって $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ $x \in E\setminus N$ で Cauchy 列となる.

その収束先 $f(x)$ として零集合 N に関して $f(x) = 0$ $x \in N$ で定める

d

$\forall \varepsilon > 0$, $\|f - f_n\| = \int_E |f_n - f|^2 d\mu$

$$= \int_E \liminf_{k\to\infty} |f_n - f_{n_k}|^2 d\mu$$

$$= \liminf_{k\to\infty} \int_E |f_n - f_{n_k}|^2 d\mu < \varepsilon$$

$f - f_n \in L^2$ より $f \in L^2$

(23)

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$\left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\} \, dx$$

$$= 0$$

$$\left\langle \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \sin nx \sin mx \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\} \, dx$$

$$= \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \cos nx \cos mx \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\cos(n-m)x + \cos(n+m)x\} \, dx$$

$$= \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = 1, \quad \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \cos nx \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \sin mx \right\rangle = 0$$

よって フーリエ級数の基底は 正規直交列となる.

㉔ 射影定理

(a) closed sub sp. $M \subset \mathcal{H}$

$x \in \mathcal{H}$ $\quad d = \inf_{y \in M} \|x - y\|^2$

$\{y_n\} \subset M$ $\quad \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d$ となる y_n がCauchy列

であることを示す.

$$\|y_n - y_m\| = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2$$

∵ 中線定理

$$\to 0 \quad \text{as} \quad n, m \to \infty$$

よって $\{y_n\}$ Cauchy列であって $\mathcal{H}$: Hilbert sp. より

$\{y_n\}$ は M の要素に収束する.

(b) $\forall a \in (0,1)$ と $z \in M$

$$\|x - \{az + (1-a)y\}\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

$$\|(x - y) + a(y - z)\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

$$\cancel{\|x - y\|^2} + 2a\langle x - y, y - z\rangle + a^2\|y - z\|^2 \geq \cancel{\|x - y\|^2}$$

$$2a\langle x - y, z - y\rangle \leq a^2\|y - z\|^2$$

(c) $\langle x - y, z - y\rangle > 0$ の時

a を小さくすることで不等号満たさなくなるので

矛盾が生じるので

$$\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$$

(d) $z = 0,\ 2y$ を代入すれば

$$\langle x - y, y\rangle = 0$$

$$\langle x-y, z\rangle - \langle x-\cancel{y}, y\rangle \leq 0$$

(e)

$\forall z \in M$, $\langle x-y, z\rangle \leq 0$

また $\langle x-y, -z\rangle \leq 0$

$\langle x-y, z\rangle \geq 0$

より $\forall z \in M$ $\langle x-y, z\rangle = 0$ ■

25

X_1, X_2 norm sp.

$T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$

$\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_2$ で作用素ノルムを定める.

$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ に対して

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T_1+T_2)(x)\|$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2 x\|$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|y\|=1} \|T_2 y\|$$

$$= \|T_1\| + \|T_2\|$$

よって三角不等式が成り立つ ■

26 $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$\int_0^1 \int_0^1 K(x,y)\,dx\,dy < \infty$ を用いて

$T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$

$(Tf)(\cdot) := \int_0^1 K(\cdot, x) f(x)\,dx$ で定める.

$$|(Tf)(x)|^2 \leq \left| \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy \right|^2$$
$$\leq \int_0^1 k(x,y)^2 f^2(y)\, dy$$
$$= \int_0^1 k(x,y)^2 dy \int_0^1 f(y)^2 dy$$

よって $\|Tf\|^2 \leq \underbrace{\int_0^1\int_0^1 k(x,y)^2 dx\, dy}_{M} \|f\|^2$

よって T は有界線形作用素

また $k(x,y) = k(y,x)$ の時

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^1\int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy\, \overline{g(x)}\, dx$$
$$= \int_0^1 f(y) \int_0^1 \overline{k(y,x) g(x)}\, dx\, dy$$
$$= \langle f, Tg\rangle$$

よって $T = T^*$ で T は self adjoint op.

□

27 命題24 より Eが点列コンパクト $\Leftrightarrow$ Eがコンパクト

よって以降点列コンパクトかを見ていく.

(a) $a_n = \{1 - \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$

だが $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \notin E$ より

Eの無限列がEの要素に収束しないので

点列コンパクトでない.

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$ で $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を定めると明らかに

$\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ であるが,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\quad\because$ ⑰より

$\mathbb{Q}$ は点列コンパクトでない.

㉘ prop 27

$T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ コンパクト 自己共役 op. とする.

(a)

$x_1 \in \mathrm{Ker}(T)$, $x_2 \in \mathcal{H}$

$$\langle x_1, T^* x_2 \rangle = \langle T x_1, x_2 \rangle = 0$$

$$\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Im}(T^*)^{\perp}$$

また $x_1 \in \mathrm{Im}(T^*)^{\perp}$ であれば

$$T^*(Tx_1) \in \mathrm{Im}(T^*)$$

$$\|Tx_1\|^2 = \langle Tx_1, Tx_1 \rangle$$
$$= \langle x_1, T^* T x_1 \rangle = 0$$

$x_1 \in \mathrm{Ker}(T)$ より

$$\mathrm{Ker}(T) \supset \mathrm{Im}(T^*)^{\perp}$$

よって $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T^*)^{\perp}$

また命題20 (3) より

$$\mathrm{Ker}(T)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(T^*)}$$

$$H = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T)^{\perp}$$

$$= \mathrm{Ker}(T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(T)}$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j e_j = T\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\lambda_j} e_j\right)$$

$$\mathrm{span}\{e_j \mid j \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Im}(T)$$

よって $\overline{\mathrm{span}\{e_j \mid j\in\mathbb{N}\}} \subset \overline{\mathrm{Im}(T)}$ である.

(C) (2.11) より

$$\overline{\mathrm{Im}(T)} = \overline{\mathrm{span}\{e_j \mid j\in\mathbb{N}\}} \oplus N$$ とできる.

ただし $N = \overline{\mathrm{span}\{e_j\}}^{\perp} \cap \overline{\mathrm{Im}(T)}$

$y \in \mathrm{span}\{e_j\}$ に対して

$$T(y) \in \overline{\mathrm{span}\{e_j\}}$$

$x\in N$ に対して $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0$ となる.

つまり $Tx \in N$

次に

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \quad \because T \text{ が自己共役}$$

つまり $\pm\|T\|$ のいずれかが T の固有値となっている.

実際,

$$\langle Tx_n, x_n\rangle \to \|T\| \quad \text{or} \quad -\langle Tx_n, x_n\rangle \to \|T\|$$ となる $\{x_n\}$ が存在する.

$$0 \le \|Tx_n - \|T\|x_n\|^2 \le \|Tx_n\|^2 + \|T\|^2\|x_n\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_n, x_n\rangle$$
$$\to 0 \quad \text{as } n\to\infty$$

と T がコンパクト op. より $Tx_{n_k} \to y \in \mathcal{H}$ なる部分列 $^{\exists}\{x_{n_k}\}$

$\|T\|x_{n_k} \to \|T\|x$ なる $0\neq x\in\mathcal{H}$ が存在.

$$\|T\|x = y = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} \text{ より}$$

$Tx = \|T\|x$ となり $\|T\|$ は固有値.

$\|Tx\|\neq 0$ となる $x\in N$ が存在すると仮定, T の N への制限を T_N とする.

$\|T_N\| > 0$ であるが

$\|T_N\|$ は固有値となり、N 上の固有ベクトルが存在し、

N の決め方に矛盾。よって $x \in N$ の時 $Tx = 0$

$$N \subset \overline{Im(T)} \cap Ker(T) = \{0\}$$

よって $x \in \overline{Im(T)} \Rightarrow x \in span\{e_j\}$

$$\overline{Im(T)} \supset span\{e_j\}$$

$$\overline{Im(T)} = \overline{span(e_j)}$$

2.25 は

$\|Tx_n - \|T\|x_n\| \to 0$ as $n \to \infty$ を言う時に必要であった

$\square$

(29)

$$\|T\|_{HS} := \langle T, T \rangle_{HS}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2}$$

$T_1, T_2 \in \mathcal{L}_{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$

$$\|T_1 + T_2\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \|T_1 e_i + T_2 e_i\|^2}$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\|T_1 e_i\| + \|T_2 e_i\| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\{ \sum_i \|T_1 e_i\|^2 + \sum_j \|T_2 e_i\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$\left[\because \quad x, y \in \mathbb{R}_+ \right.$

$$x + y \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$$

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\leq \sqrt{\sum_i \|T_1 e_i\|^2} + \sqrt{\sum_j \|T_2 e_j\|^2}$$

$$= \|T_1\|_{HS} + \|T_2\|_{HS}$$

$T \in \mathcal{L}(H)$ $\{e_i\}$を$\mathcal{H}$の直交基底

$$\|T\|_{TR} := \sum_{j=1}^{\infty} \langle Te_j, e_j \rangle$$

$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$ トレースクラスとして

$$\|T_1 + T_2\|_{TR} = \sum_{j=1}^{\infty} \langle T_1 e_j + T_2 e_j, e_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \langle T_1 e_j, e_j \rangle + \sum_{j=1}^{\infty} \langle T_2 e_j, e_j \rangle$$

$$= \|T_1\| + \|T_2\|$$

よって三角不等式をみたす.

(30) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$がトレースクラスの時

$$\|T\|_{HS} \leq \sqrt{\lambda_1 \|T\|_{TR}}$$ よって

トレースクラス ⇒ HSクラス

また $T \in \mathcal{L}_{HS}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, $x \in \mathcal{H}$

$$T_n x := \sum_{i=1}^{n} \langle Tx, e_i \rangle e_i$$

$\{e_i\}$ $\mathcal{H}$の正規直交基底.

T_nの像が有限次元よりT_nはコンパクト.

よって $\|T_n - T\| \to 0$ となればTはコンパクト

$$\|(T - T_n)x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \langle Tx, e_i \rangle^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \langle x, T^* e_i \rangle^2$$

$$< \infty$$

よって $T \in \mathcal{L}_{HS}(\mathcal{H})$ はコンパクト

以上より Tがトレースクラス ⇒ TはHSクラス ⇒ Tはコンパクト

四