第3回課題

33B21009 情報科学研究科 情報数理学専攻

羽田充宏

(3.1) Aronszajn

$k: E \times E \to \mathbb{R}$ 正定値カーネルの時,

その k を再生核にもつ RKHS は一意,

また $k(x,\cdot) \in \mathcal{H} \ (\forall x \in E)$

$\overline{\mathrm{span}\{k(x,\cdot) \mid x \in E\}} = \mathcal{H}$

(a)

$H_0 := \mathrm{span}\{k(x,\cdot) \mid x \in E\}$ で定義

$$f(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} a_i k(x_i,\cdot) \in H_0$$

$$g(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} b_j k(x_j,\cdot) \in H_0$$ に対して

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_0} := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j k(x_i, x_j)$$

で定義する.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_0}$ について

$$\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_i a_j k(x_i, x_j) \geq 0$$

$\because$ k の半定値性.

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^{m} a_i g(x_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j f(x_j)$$

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{m} a_i k(x_i, x) \right|$$

$\because$ Cauchy-schwarz

$$= \left| \langle f(\cdot), k(x,\cdot) \rangle_{\mathcal{H}_0} \right| \leq \|f\|_{\mathcal{H}_0} \|k(x,\cdot)\|_{\mathcal{H}_0}$$

$\|f\|_{\mathcal{H}_0} = 0 \Rightarrow \forall x \in E \ \ f(x) = 0$

よって $f = 0$

従って $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathcal{H}_0}$ は内積となる.

(b) $\{f_n\} \subset H_0$ をCauchy列とする.

$\forall x \in E \quad n, m \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{H}_0} \sqrt{k(x,x)}$$

ここで $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は実数列より収束先を持つ.

$\forall x \in E \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ として

$f : E \to \mathbb{R}$ を構成する.

そのような f の集合を H とおく.

$H \supset H_0$ である

(c)

H_0 における Cauchy列 $\{f_n\}, \{g_n\}$ に対して

$f, g \in H$ が定ぎできる

ここで $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} := \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n \rangle_{H_0}$ を H の内積とする.

$\langle \cdot , \cdot \rangle_H$ は f_n, g_n によらず well-defined となることが示せる.

(d) $f \in H$ を H_0 における Cauchy列 $\{f_n\}$ の $x \in E$ での極限として定ぎしたので,

$$\|f - f_n\|_H = \lim_{m\to\infty} \|f_m - f_n\|_{H_0} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

よって H_0 は H 上稠密である.

(e) $\{f_n\}$ を H の Cauchy 列とする.

相密性より $^\exists\{f_n'\} \subset H_0$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f_n'\|_H = 0$$

$\lim_{n\to\infty} f_n' = f \in H$ として

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{H}} \leq \|f - f_n'\|_{\mathcal{H}} + \|f_n' - f_n\|_{\mathcal{H}} \to 0$$

as $n \to \infty$

よって $\mathcal{H}$ は完備

(f) $\forall x \in E$ $k(x, \cdot) \in \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ である.

また $f \in \mathcal{H}$ は $\lim_{n\to\infty} f_n$, $\{f_n\} \subset H_0$ と表せるので,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, k(x,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}_0}$$

$$= \langle f, k(x,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}}$$

より $k(\cdot,\cdot)$ は $\mathcal{H}$ の再生核である.

(e)

H と同じ性質を持つ G が存在したとする.

この時, $H = \overline{H_0}$ より $G \supset H$ である.

H は閉より $G = H \oplus H^\perp$ と表せる

ここで $\forall x \in E$, $k(x,\cdot) \in \mathcal{H}$

$f \in \mathcal{H}^\perp$ に対して $\langle f, k(x,\cdot)\rangle_G = 0$

$f(x) = 0$

つまり $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$

よって $\mathcal{H}$ は一意 ∎

(32)

例55

積分核 $J(x,t) = e^{ixt}$

例56

〃 $J(x,t) = (t-x)_+^0$

ここで $(x)_+^0 := \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

$k(x,y) = \int_E J(y-x,t)\, d\eta(t)$

で表せる.

(33)

prop 38 k_1, k_2 を RKHS $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ の再生核とする.

この時, $k = k_1 + k_2$ は, 内積(3.5) の Hilbert sp.

$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ の再生核となり, $f \in \mathcal{H}$ のノルムは.

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \min_{\substack{f = f_1 + f_2 \\ f_1 \in \mathcal{H}_1 \\ f_2 \in \mathcal{H}_2}} \{ \|f_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|f_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 \}$$ となる.

Pr)

(a) まず仮定より

$\forall x \in E \quad k(x,\cdot) = k_1(x,\cdot) + k_2(x,\cdot) \in \mathcal{H}$

$N^\perp \ni (h_1(x,\cdot), h_2(x,\cdot)) := u^{-1}(k(x,\cdot))$ を定ぎ

h_1, h_2 は必ずしも k_1, k_2 でない.

$h_1(x,\cdot) + h_2(x,\cdot) - k_1(x,\cdot) - k_2(x,\cdot) = 0$

$F \supset N \ni z := (h_1(x,\cdot) - k_1(x,\cdot),\ h_2(x,\cdot) - k_2(x,\cdot))$

が成り立ち。

各 $f \in \mathcal{H}$ の $N^{\perp} \ni (f_1, f_2) := u^{-1}(f)$ について

$$0 = \langle 0, f \rangle_{\mathcal{H}} = \langle Z, (f_1, f_2) \rangle_F$$

つまり

$$\langle h_1(x,\cdot) - k_1(x,\cdot), f_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle h_2(x,\cdot) - k_2(x,\cdot), f_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} = 0$$

$$\langle h_1(x,\cdot), f_1 \rangle + \langle h_2(x,\cdot), f_2 \rangle = \langle k_1(x,\cdot), f_1 \rangle + \langle k_2(x,\cdot), f_2 \rangle$$

(b)

これは再生性を意味する。実際

$$\langle f, k(x,\cdot) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u^{-1}(f), u^{-1}(k(x,\cdot)) \rangle_F$$

$$= \langle (f_1, f_2), (h_1(x,\cdot), h_2(x,\cdot)) \rangle_F$$

$$= \langle f_1, k_1(x,\cdot) \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle f_2, k_2(x,\cdot) \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

$$= f_1(x) + f_2(x) = f(x)$$

(c)

さらに $(f_1, f_2) \in F$, $f := f_1 + f_2$

$$(g_1, g_2) := (f_1, f_2) - u^{-1}(f)$$

$u(g_1, g_2) = 0$ より $(g_1, g_2) \in N$

$u^{-1}(f) \in N^{\perp}$ より

$$\|(f_1, f_2)\|_F^2 = \|u^{-1}(f)\|_F^2 + \|(g_1, g_2)\|_F^2$$

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u^{-1}(f)\|_F^2 \leq \|(f_1, f_2)\|_F^2$$

一般の $f_1 \in \mathcal{H}_1$, $f_2 \in \mathcal{H}_2$

$$= \|f_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|f_2\|_{\mathcal{H}_2}^2$$

等号の成立は $(f_1, f_2) = u^{-1}(f)$ の時。

よって $\mathcal{H}$ のノルム (3.6) となる　■

(34)

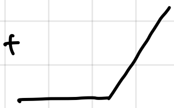
$\forall f \in W_q[0,1]$ について

$\phi_i(x) := \frac{x^i}{i!}$

$G_q(x,y) := \frac{(x-y)_+^{q-1}}{(q-1)!}$

relu

$(\cdot)_+$



$$\int_0^1 G_q(x,y) f^{(q)}(y)\,dy = \left[G_q(x,y) f^{(q-1)}(y) \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{d}{dy} G_q(x,y)} f^{(q-1)}(y)\,dy$$

$$\begin{cases} -\frac{(x-y)^{q-2}}{(q-2)!} & x-y \geq 0 \\ 0 & x-y < 0 \end{cases}$$

$$-\frac{x^{q-1}}{(q-1)!} f^{(q-1)}(0) + \int_0^1 G_{q-1}(x,y) f^{(q-1)}(y)\,dy$$

$$\vdots$$

$$\int_0^1 G_q(x,y) f^{(q)}(y)\,dy + \frac{x^{q-1}}{(q-1)!} f^{(q-1)}(0) + \cdots + x f^{(1)}(0)$$

$$= \int_0^1 G_1(x,y) f^{(1)}(y)\,dy$$

$$\int_0^1 G_1(x,y) h(y)\,dy = \int_0^x h(y)\,dy$$

よって $f(x) = \sum_{i=0}^{q-1} \phi_i(x) f^{(i)}(0) + \int_0^1 G_q(x,y) f^{(q)}(y)\,dy$

とTaylor展開できる $\square$

(35) $$H_0 := \left\{ \sum_{i=0}^{g-1} \alpha_i \phi_i(x) \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$H_1 := \left\{ \int_0^1 G_g(x,y)\, h(y)\, dy \;\middle|\; h \in L^2[0,1] \right\}$$

として

$$W_g[0,1] = H_0 \oplus H_1$$ を示す.

(34) より

$\forall f \in W_g[0,1]$ について

$$f(\cdot) = \sum_{i=0}^{g-1} \alpha_i \phi_i(\cdot) + \int_0^1 G_g(\cdot, y) f^{(g)}(y)\, dy$$

$\alpha_i \in \mathbb{R}$, $f^{(g)}(\cdot) \in L^2[0,1]$ と一意に表せる

ここで $$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=0}^{g-1} f^{(i)}(0)\, g^{(i)}(0)$$

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle f^{(g)}, g^{(g)} \rangle_{L^2}$$ と内積を定めれば

$\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ は Hilbert sp. となる.

また $$f(\cdot) = \sum_{i=0}^{g-1} \alpha_i \phi_i(\cdot) \in \mathcal{H}_0 \Rightarrow h = f^{(g)} = 0$$

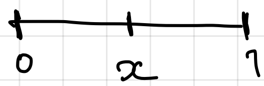
$$f(\cdot) = \int_0^1 G_g(\cdot, y)\, h(y)\, dy \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow \alpha_i = 0$$

よって $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_1 = \{0\}$

従って $W_g[0,1] = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ ▨

(36)

$$T_K e_j(x) = \int_0^1 \min(x,y) \sqrt{2} \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{2} y \right) dy$$



$$= \int_0^x y \sqrt{2} \sin\left(\frac{2j-1}{2} \pi y \right) dy + x \int_x^1 \sqrt{2} \sin\left(\frac{2j-1}{2} \pi y \right) dy$$

$$= \left[-\sqrt{2}y \frac{2}{(2j-1)\pi} \cos\left(\frac{2j-1}{2}\pi y\right) \right]_0^x + \int_0^x \frac{2\sqrt{2}}{(2j-1)\pi} \cos\left(\frac{2j-1}{2}\pi y\right) dy$$

$$- \sqrt{2}x \left[\frac{2}{(2j-1)\pi} \cos\left(\frac{2j-1}{2}\pi y\right) \right]_x^1$$

$$= \cancel{-\sqrt{2}x \frac{2}{(2j-1)\pi} \cos\left(\frac{2j-1}{2}\pi x\right)} + \frac{4\sqrt{2}}{(2j-1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{2j-1}{2}\pi x\right)$$

$$\cancel{+ \sqrt{2}x \frac{2}{(2j-1)\pi} \cos\left(\frac{2j-1}{2}\pi x\right)}$$

$$= \frac{4}{\{(2j-1)\pi\}^2} \sqrt{2} \sin\left(\frac{2j-1}{2}\pi x\right)$$

$= \lambda_j e_j(x)$ よって成り立つ ☑

37

固有値

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{2a}{A}} B^j$$

$$= \sqrt{\frac{2a}{a+b+c}} \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^j$$

$$= \sqrt{\frac{2a}{a+b+\sqrt{a^2+2ab}}} \left(\frac{b}{a+b+\sqrt{a^2+2ab}}\right)^j$$

$\beta = \frac{b}{2a}$ より

$$= \left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\beta+\sqrt{\frac{1}{4}+\beta}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}+\beta+\sqrt{\frac{1}{4}+\beta}}\right)^j$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \beta + \sqrt{\frac{1}{4}+\beta} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + \beta + \sqrt{\frac{1}{4}+\beta}} \right)^{j}$$

初項　　　　公比.

よって β のみによって固有値が等比数列として定まる.

(39)

(a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = n^2(1-x)x^{n+1} \text{ について}$$

$\forall \xi \in [0,1]$

$$a_n = n^2(1-\xi)\xi^{n+1} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

よって各点で 0 に収束するが

$$\max_{x \in E} f_n(x) = n^2\left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$$

よって $\sup_{x \in E} f_n(x) \to \infty$ as $n \to \infty$ となるので

一様収束しない　□

$$f_n'(x) = n^2\left(-x^{n+1} + (1-x)(n+1)x^n\right)$$
$$= n^2x^n\{-x + (1-x)(n+1)\}$$
$$= n^2x^n\{-x + n + 1 - (n+1)x\}$$
$$= n^2x^n\{n+1 - (n+2)x\}$$
$$x^* = \frac{n+1}{n+2}$$

(b) $f_n(x) = (1-x)x^{n+1}$ とする時.

$\forall \xi \in [0,1]$

$$f_n(\xi) - f_{n-1}(\xi) = (1-\xi)\xi^{n+1} - (1-\xi)\xi^n$$
$$= (1-\xi)\xi^n(\xi - 1)$$
$$= -(1-\xi)^2\xi^n \leq 0$$

より f_n は各点で単調に 0 へ収束.

よって lem 3 より f_n は 0 へ一様収束 ☒

(c)

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$ 交代級数

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$ より $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

一方 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$n \geq \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{調和級数}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

よって a_n は条件収束

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$ の時も同様

この時絶対収束する.

☒

(10)

$E = [0, 2\pi]$ とする.

$$T_K f(x) = \int_0^{2\pi} K(x, y) f(y)\, dy$$

$$= \int_0^x y f(y)\, dy + x \int_x^{2\pi} f(y)\, dy$$

固有eqは,

$$\int_0^{2\pi} \min(x, y)\, e(y)\, dy = \lambda e(x)$$

$$\int_0^x y\, e(y)\, dy + x \int_x^{2\pi} e(y)\, dy = \lambda e(x)$$

$\downarrow$ xで微分

$$x \cancel{e(x)} + \int_x^{2\pi} e(y)\, dy - x \cancel{e(x)} = \lambda e'(x)$$

$$\int_x^{2\pi} e(y)\, dy = \lambda e'(x)$$

$$-e(x) = \lambda e''(x)$$

$$e(x) = \alpha \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \beta \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$\varphi(0) = 0$ より $\beta = 0$

$\varphi'(2\pi) = 0$ 　 $\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \cos\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$

$$\alpha \cos\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

$$\frac{2\cancel{\pi}}{\sqrt{\lambda_j}} = \frac{2j-1}{2}\cancel{\pi} \quad j \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_j = \left\{\frac{2}{(2j-1)}\right\}^2$$

$$\varphi_j(x) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{2j-1}{2}\right)x$$

例60?

ϕ の周期 2π の時,

$$E = [-\pi, \pi]$$

$$K : E \times E \to \mathbb{R} \qquad K(x,y) = \phi(x-y)$$

$$\phi : E \to \mathbb{R}$$

$$T_K f(x) = \int_E \phi(x-y) f(y)\,dy$$

$$= \phi * f(x)$$

$\phi(x) = \phi(x + 2\pi\mathbb{Z})$ を仮定

$\varphi_j(x) = \cos(jx)$ とすれば

$$T_K f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x-y)\cos(jy)\,dy$$

$$= \int_{-x-\pi}^{-x+\pi} \phi(-u)\cos(j(x+u))\,du \qquad \begin{aligned} -x+y &= u \\ dy &= du \end{aligned} \qquad \begin{array}{c|cc} y & -\pi & \pi \\ \hline u & -x-\pi & -x+\pi \end{array}$$

$$= \int_E \phi(u)\cos(j(x+u))\,du$$

$$= \lambda_j \cos(jx)$$

$$e_j(x) = \cos(jx),\ \sin(ix)$$

$$\lambda_j = \int_E \phi(u)\cos(ju)du,\ \int_E \phi(u)\sin(iu)du$$

Mercer thm より

$$K(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \left(\cos(jx)\cos(jx) + \sin(jx)\sin(jx)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \cos\{j(x-y)\}$$

(41)

$$K(x,y) = (1+xy)^3$$

$$e(y) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \text{ とおいて}$$

$$T_K e(x) = \int (1 + 3xy + 3x^2y^2 + x^3y^3)\, e(y)\, dy$$

$$= \lambda e(y)$$ の固有eqを解いて

$$\lambda a_0 = \int e(y)\, dy$$

$$\lambda a_1 = 3\int y\, e(y)\, dy$$

$$\lambda a_2 = 3\int y^2 e(y)\, dy$$

$$\lambda a_3 = \int y^3 e(y)\, dy$$

を解けばよい.

(44)

Merceの定理の固有値固有関数を近似的に求める方法.

X を E における確率変数

$T_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$T_k : L^2 \ni \phi \mapsto \int_E k(\cdot, x)\phi(x)\,dx \in L^2$$

について.

$$T_k \phi_j = \lambda_j \phi_j$$

$$\int_E \phi_j \phi_k \, d\mu = \delta_{j,k}$$

なる $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$

および $\phi_1 \geq \phi_2 \geq \cdots$

が存在する.

∵ T_k self adjoint

これが $\forall m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in E$

が μ に従って発生したとして

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} k(x_j, y)\phi_i(x_j) = \lambda_i \phi_i(y)$$

と近似する.

↑

積分を有限和で近似する.

この時,
$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \phi_j(x_i)\phi_k(x_i) = \delta_{jk}$$ であり,

$y = x_1, \dots, x_m$ を代入して

$$\underbrace{K_m}_{\text{gram行列}} U = U \Lambda$$

$$\begin{bmatrix} k(x_1,x_1) & \cdots & k(x_1,x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ k(x_m,x_1) & \cdots & k(x_m,x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}}\phi_1(x_1) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{m}}\phi_m(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{m}}\phi_1(x_m) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{m}}\phi_m(x_m) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}}\phi_1(x_1) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{m}}\phi_m(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{m}}\phi_1(x_m) & \cdots & \frac{1}{\sqrt{m}}\phi_m(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m\lambda_m \end{bmatrix}$$

$K \geq 0$ 実対称行列

Uは直交行列

ここで

$$\phi_i(\cdot) = \frac{\sqrt{m}}{\lambda_i^{(m)}} \sum_{j=1}^{m} K(x_j,\cdot)\, U_{ji} \quad \text{とする時.}$$

$$= \underline{\frac{1}{\lambda_i^{(m)}} \sum_{j=1}^{m} K(x_j,\cdot)\, \phi_i(x_j)} \quad (3.19)$$

この時

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} K(x_j,y)\,\phi_i(x_j) = \lambda_i\,\phi_i(y)$$

3.18をみたす.

$$\int \phi_i(x)\phi_j(x)\,d\mu \sim \sum_{k=1}^{m} \phi_i(x_k)\,\phi_j(x_k) = \delta_{ij}$$

有限近似

をみたす ☐

(42) k 正定値カーネル

$\{(\lambda_j, e_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ を T_k の固有値固有関数

$$H = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j^2}{\lambda_j} < \infty \right\}$$

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\int_E f(x) e_j(x) d\eta(x) \int_E g(x) e_j(x) d\eta(x)}{\lambda_j}$$

で定ぎ

$$\langle e_i, e_j \rangle = \frac{\delta_{ij}}{\lambda_i}$$ で書けるので

$f \in \mathrm{span}\{e_i\}$ に対して ノルムを定めるには，

$$\langle f, f \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j \quad \beta_j}{\lambda_j} < \infty$$

が必要.

よって $\mathcal{H}$ を Hilbert sp. とするために

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j^2}{\lambda_j} < \infty$$ の仮定が必要.

(L^2 よりせまい関数空間とするため)

$\square$

In [1]:
```
# 第 3 章のプログラムは,事前に下記が実行されていることを仮定する。
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import style
style.use("seaborn-ticks")
```

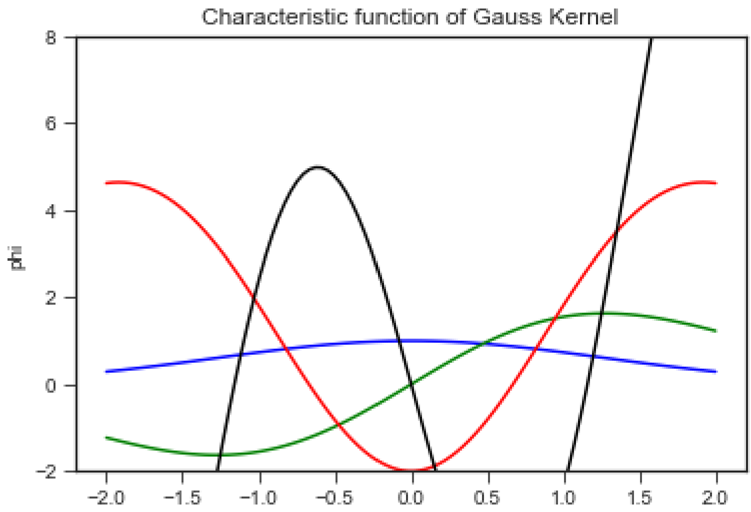
38

In [2]:
```
def Hermite(j):
    if j == 0:
        return [1]
    a = [0] * (j + 2)
    b = [0] * (j + 2)
    a[0] = 1
    for i in range(1, j + 1):
        b[0] = -a[1]
        for k in range(i + 1):
            b[k] = 2 * a[k - 1] - (k + 1) * a[k + 1]
        for h in range(j + 2):
            a[h] = b[h]
    return b[:(j+1)]
```

In [3]:
```
def H(j, x):
    coef = Hermite(j)
    S = 0
    for i in range(j + 1):
        S = S + np.array(coef[i]) * (x ** i)
    return S
```

In [4]:
```
sigma = 1
sigma_hat = 1

def phi(j, x, sigma=1, sigma_hat=1):
    a = 1/(4*sigma_hat**2)
    b = 1/(2*sigma**2)
    cc = np.sqrt(a**2 + 2*a*b)
    return np.exp(-(cc - a) * x**2) * H(j, np.sqrt(2 * cc) * x)


color = ["b", "g", "r", "k"]
p = [[] for _ in range(4)]
x = np.linspace(-2, 2, 100)
for i in range(4):
    for k in x:
        p[i].append(phi(i, k, sigma, sigma_hat))
    plt.plot(x, p[i], c=color[i], label="j = %d" % i)
plt.ylim(-2, 8)
plt.ylabel("phi")
plt.title("Characteristic function of Gauss Kernel")
```

Out[4]:
```
Text(0.5, 1.0, 'Characteristic function of Gauss Kernel')
```



42

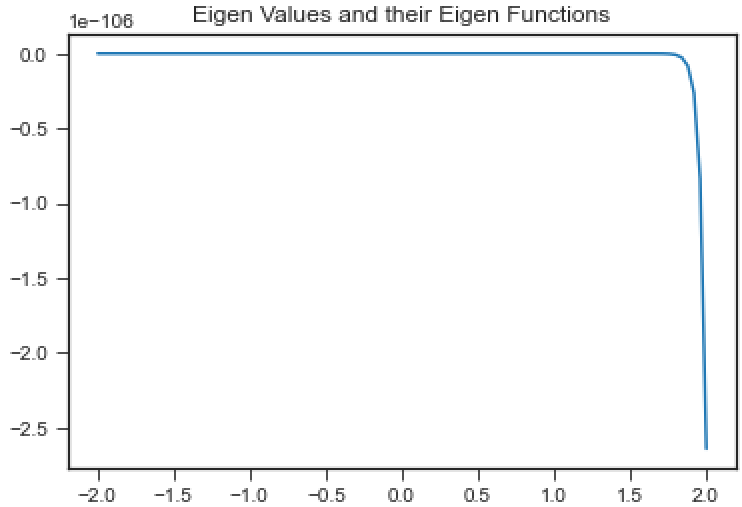
In [5]:

```
# カーネルの定義
sigma = 1


def k(x, y):
    return np.exp(-(x - y)**2 / sigma**2)


# サンプルの発生とグラム行列の設定
m = 300
x = np.random.randn(m) - 2 * np.random.randn(m)**2 + 3 * np.random.randn(m)**3


def eigen(x, k, ith):
    # 固有値と固有ベクトル
    K = np.zeros((m, m))
    for i in range(m):
        for j in range(m):
            K[i, j] = k(x[i], x[j])
        values, vectors = np.linalg.eig(K)
        lam = values / m
        alpha = np.zeros((m, m))
        for i in range(m):
            alpha[:, i] = vectors[i, :] * np.sqrt(m) / (values[i] + 10e-16)


    # グラフの表示
    def F(y, i):
        S = 0
        for j in range(m):
            S = S + alpha[j, i] * k(x[j], y)
            return S



    def G(y):
        return F(y, ith)

    return G, values[ith]


w = np.linspace(-2, 2, 100)
eigen_fun, eigen_val = eigen(x, k, 1)
print('eigen value : ', eigen_val)
```

```python
plt.plot(w, eigen_fun(w))
plt.title("Eigen Values and their Eigen Functions")
```

```
<ipython-input-5-145df3228af5>:24: ComplexWarning: Casting complex values to real discards t
he imaginary part
  alpha[:, i] = vectors[i, :] * np.sqrt(m) / (values[i] + 10e-16)
eigen value :  (45.78948642004862+0j)
```

Out[5]: Text(0.5, 1.0, 'Eigen Values and their Eigen Functions')



In [6]:

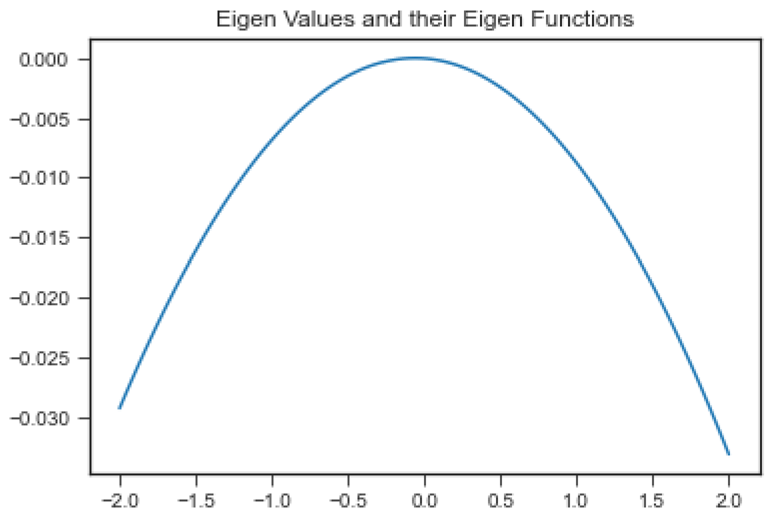
```python
def k(x,y):
    return (1+np.dot(x,y))**2
```

In [7]:

```python
w = np.linspace(-2, 2, 100)
eigen_fun, eigen_val = eigen(x, k, 1)
print('eigen value : ', eigen_val)
plt.plot(w, eigen_fun(w))
plt.title("Eigen Values and their Eigen Functions")
```

```
<ipython-input-5-145df3228af5>:24: ComplexWarning: Casting complex values to real discards t
he imaginary part
  alpha[:, i] = vectors[i, :] * np.sqrt(m) / (values[i] + 10e-16)
eigen value :  (86246.02689572684+0j)
```

Out[7]: Text(0.5, 1.0, 'Eigen Values and their Eigen Functions')



In [ ]: