Т. А. Новикова

Факультет ВМиК
Казахстанский филиал МГУ им.М. В. Ломоносова

4 мая 2016 г.

Графом называется произвольное множество элементов V и произвольное семейство $E = \{(v_i, v_j), v_i, v_j \in V\}$ пар из V. Обозначение: $G = (V, E)$.

Графом называется произвольное множество элементов V и произвольное семейство $E = \{(v_i, v_j), v_i, v_j \in V\}$ пар из V.
Обозначение: $G = (V, E)$.
Если элементы из E рассматривать как неупорядоченные пары, то граф называется неориентированным, а пары называются рёбрами. Если же элементы из E рассматривать как упорядоченные, то граф ориентированный, а пары — дуги.

Графом называется произвольное множество элементов V и произвольное семейство $E = \{(v_i, v_j), v_i, v_j \in V\}$ пар из V. Обозначение: $G = (V, E)$.
Если элементы из E рассматривать как неупорядоченные пары, то граф называется неориентированным, а пары называются рёбрами. Если же элементы из E рассматривать как упорядоченные, то граф ориентированный, а пары — дуги.
Пара вида (a, a) называется петлёй; если пара (a, b) встречается в семействе E несколько раз, то она называется кратным ребром (кратной дугой).

Граф без петель и кратных рёбер будем называть неориентированным графом (или просто графом), граф без петель — мультиграфом, а мультиграф, в котором разрешены петли — псевдографом.

Граф без петель и кратных рёбер будем называть неориентированным графом (или просто графом), граф без петель — мультиграфом, а мультиграф, в котором разрешены петли — псевдографом.
Две вершины графа называются смежными, если они соединены ребром.

Граф без петель и кратных рёбер будем называть неориентированным графом (или просто графом), граф без петель — мультиграфом, а мультиграф, в котором разрешены петли — псевдографом.
Две вершины графа называются смежными, если они соединены ребром.
Говорят, что вершина и ребро инцидентны, если ребро содержит вершину.

Граф без петель и кратных рёбер будем называть неориентированным графом (или просто графом), граф без петель — мультиграфом, а мультиграф, в котором разрешены петли — псевдографом.

Две вершины графа называются смежными, если они соединены ребром.

Говорят, что вершина и ребро инцидентны, если ребро содержит вершину.

Степенью вершины ($deg(v)$) называется количество рёбер, инцидентных данной вершине. Для псевдографа полагают учитывать петлю дважды.

Lemma

В любом графе (псевдографе) справедливо следующее соотношение: $\sum_{i=1}^{p} deg(v_i) = 2q$, где p — число вершин, а q — число ребер.

Lemma

В любом графе (псевдографе) справедливо следующее соотношение: $\sum_{i=1}^{p} deg(v_i) = 2q$, где p — число вершин, а q — число ребер.

Доказательство. Когда мы считаем степень одной вершины, мы считаем все рёбра, выходящие из неё. Вычисляя сумму всех степеней, мы получаем, что каждое ребро считается дважды, так как оно инцидентно двум вершинам (петли по определению степени также посчитаются дважды). Поэтому общая сумма будет равна удвоенному числу рёбер.

□

Пусть множество вершин графа $V = v_1, v_2, \ldots, v_p$. Тогда матрицей смежности этого графа назовём матрицу $A = ||a_{ij}||$, где $a_{ij} = 1$, если вершины v_i и v_j смежны ($2, 3, \ldots$ для мультиграфа или псевдографа) и 0 в противном случае, a_{ii} при этом равно числу петель в вершине v_i.

Пусть множество вершин графа $V = v_1, v_2, \ldots, v_p$. Тогда матрицей смежности этого графа назовём матрицу $A = ||a_{ij}||$, где $a_{ij} = 1$, если вершины v_i и v_j смежны $(2, 3, \ldots$ для мультиграфа или псевдографа) и 0 в противном случае, a_{ii} при этом равно числу петель в вершине v_i.
Два графа (псевдографа) $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ называются изоморфными, если существуют два взаимно однозначных отображения $\phi_1 : V_1 \to V_2$ и $\phi_2 : E_1 \to E_2$ такие, что для любых двух вершин u, v графа G_1 справедливо $\phi_2(u, v) = (\phi_1(u), \phi_1(v))$.

Пусть множество вершин графа $V = v_1, v_2, \ldots, v_p$. Тогда матрицей смежности этого графа назовём матрицу $A = ||a_{ij}||$, где $a_{ij} = 1$, если вершины v_i и v_j смежны $(2, 3, \ldots$ для мультиграфа или псевдографа) и 0 в противном случае, a_{ii} при этом равно числу петель в вершине v_i.

Два графа (псевдографа) $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ называются изоморфными, если существуют два взаимно однозначных отображения $\phi_1 : V_1 \to V_2$ и $\phi_2 : E_1 \to E_2$ такие, что для любых двух вершин u, v графа G_1 справедливо $\phi_2(u, v) = (\phi_1(u), \phi_1(v))$.

Два графа $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение $\phi : V_1 \to V_2$ такое, что $(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in E_2$.

Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называется подграфом графа $G = (V, E)$, если $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$.

Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называется подграфом графа $G = (V, E)$, если $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$.
Путём в графе $G = (V, E)$ называется любая последовательность вида
$v_0, (v_0, v_1), v_1, (v_1, v_2), \ldots, v_{n-1}, (v_{n-1}, v_n), v_n$. Число n в данных обозначениях называется длиной пути.

Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называется подграфом графа $G = (V, E)$, если $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$.
Путём в графе $G = (V, E)$ называется любая последовательность вида
$v_0, (v_0, v_1), v_1, (v_1, v_2), \ldots, v_{n-1}, (v_{n-1}, v_n), v_n$. Число n в данных обозначениях называется длиной пути.
Цепью называется путь, в котором нет повторяющихся рёбер. Простой цепью называется путь без повторения вершин.

Lemma

Пусть в $G = (V, E)$ выполнено $v_1 \neq v_2$ и пусть P — путь из v_1 в v_2. Тогда в P можно выделить подпуть из v_1 в v_2, являющийся простой цепью.

Lemma

Пусть в $G = (V, E)$ выполнено $v_1 \neq v_2$ и пусть P — путь из v_1 в v_2. Тогда в P можно выделить подпуть из v_1 в v_2, являющийся простой цепью.

Доказательство. Пусть данный путь — не простая цепь. Тогда в нем повторяется некоторая вершина v, то есть он имеет вид: $P_1 = v_1 C_1 v C_2 v C_3 v_2$. Но тогда он содержит и подпуть $P_2 = v_1 C_1 v C_3 v_2$. Аналогично удалим все куски, соответствующие повторяющимся вершинам.

Lemma

Пусть в $G = (V, E)$ выполнено $v_1 \neq v_2$ и пусть P — путь из v_1 в v_2. Тогда в P можно выделить подпуть из v_1 в v_2, являющийся простой цепью.

Доказательство. Пусть данный путь — не простая цепь. Тогда в нем повторяется некоторая вершина v, то есть он имеет вид: $P_1 = v_1 C_1 v C_2 v C_3 v_2$. Но тогда он содержит и подпуть $P_2 = v_1 C_1 v C_3 v_2$. Аналогично удалим все куски, соответствующие повторяющимся вершинам.
Этот процесс сходится, так как P_1 — конечный путь.

$\square$

- Путь называется замкнутым, если $v_0 = v_n$.

- Путь называется замкнутым, если $v_0 = v_n$.
- Путь называется циклом, если он замкнут, и рёбра в нём не повторяются.

- Путь называется замкнутым, если $v_0 = v_n$.
- Путь называется циклом, если он замкнут, и рёбра в нём не повторяются.
- Путь называется простым циклом, если $v_0 = v_n$ и вершины не повторяются.

- Путь называется замкнутым, если $v_0 = v_n$.
- Путь называется циклом, если он замкнут, и рёбра в нём не повторяются.
- Путь называется простым циклом, если $v_0 = v_n$ и вершины не повторяются.
- Граф $G = (V, E)$ называется связным, если для любых двух вершин $v_i, v_j \in V (v_i \neq v_j)$ существует путь из v_i в v_j.

Для отношения существования пути из v_i в v_j в графе (обозначим его как $v_i \to v_j$) справедливо:

1. симметрично, $(v_i \to v_j) \Rightarrow (v_j \to v_i)$,
2. транзитивно, $(v_i \to v_j) \& (v_j \to v_k) \Rightarrow (v_i \to v_k)$
3. рефлексивно, $\forall i (v_i \to v_i)$.

Для отношения существования пути из v_i в v_j в графе (обозначим его как $v_i \to v_j$) справедливо:

1. симметрично, $(v_i \to v_j) \Rightarrow (v_j \to v_i)$,
2. транзитивно, $(v_i \to v_j) \& (v_j \to v_k) \Rightarrow (v_i \to v_k)$
3. рефлексивно, $\forall i (v_i \to v_i)$.

Но тогда это отношение - отношение эквивалентности на множестве вершин графа. Это отношение разбивает граф на подграфы (классы эквивалентности), называемые компонентами связности.

Деревом называется связный граф без циклов.

Деревом называется связный граф без циклов.

Подграф $G_1 = (V_1, E_1)$ графа $G = (V, E)$ называется остовным деревом в графе $G = (V, E)$, если $G_1 = (V_1, E_1)$ — дерево и при этом $V_1 = V$.

Деревом называется связный граф без циклов.

Подграф $G_1 = (V_1, E_1)$ графа $G = (V, E)$ называется остовным деревом в графе $G = (V, E)$, если $G_1 = (V_1, E_1)$ — дерево и при этом $V_1 = V$.

Lemma

Если граф $G = (V, E)$ связный и ребро (a, b) содержится в некотором цикле в графе G, то при выбрасывании из графа G ребра (a, b) снова получится связный граф

Theorem

Любой связный граф содержит хотя бы одно остовное дерево.

Доказательство. Если в G нет циклов, то G является искомым остовным деревом.

Theorem

Любой связный граф содержит хотя бы одно остовное дерево.

Доказательство. Если в G нет циклов, то G является искомым остовным деревом.
Если в G есть циклы, то удалим из G какое-нибудь ребро, входящее в цикл. Получится некоторый подграф G_1. По предыдущей лемме G_1 — связный граф. Если в G_1 нет циклов, то G_1 и есть искомое остовное дерево, иначе продолжим этот процесс.

Theorem

Любой связный граф содержит хотя бы одно остовное дерево.

Доказательство. Если в G нет циклов, то G является искомым остовным деревом.
Если в G есть циклы, то удалим из G какое-нибудь ребро, входящее в цикл. Получится некоторый подграф G_1. По предыдущей лемме G_1 — связный граф. Если в G_1 нет циклов, то G_1 и есть искомое остовное дерево, иначе продолжим этот процесс.

Процесс должен завершиться, так как E — конечное множество.

$\square$

Lemma

Если к связному графу добавить новое ребро на тех же вершинах, то появится цикл.

Доказательство. Рассмотрим произвольный связный граф $G = (V, E)$. Пусть $u \in V, v \in V, (u, v) \notin E$.

Lemma

Если к связному графу добавить новое ребро на тех же вершинах, то появится цикл.

Доказательство. Рассмотрим произвольный связный граф $G = (V, E)$. Пусть $u \in V, v \in V, (u, v) \notin E$.

Так как G — связный граф, то в нём есть путь из v в u. Тогда в G есть и простая цепь C из v в u. Поэтому в полученном графе есть цикл $C, (u, v), v$.

$\square$

Lemma

Пусть в графе $G = (V, E)$ p вершин и q рёбер. Тогда в G не менее $p - q$ связных компонент. Если при этом в G нет циклов, то G состоит ровно из $p - q$ связных компонент.

Доказательство. Пусть к некоторому графу H, содержащему вершины u и v, добавляется ребро (u, v). Тогда если u и v лежат в разных связных компонентах графа H, то число связных компонент уменьшится на 1. Если u, v лежат в одной связной компоненте графа H, то число связных компонент не изменится. В любом случае, число связных компонент уменьшается не более чем на 1. Значит, при добавлении q рёбер число связных компонент уменьшается не более чем на q.

Так как граф G получается из графа $G_1 = (V, \emptyset)$ добавлением q рёбер, то в G не менее $p - q$ связных компонент. Пусть теперь в G нет циклов, и пусть в процессе получения G из G_1 добавляется ребро (u, v). Если бы u, v лежали уже в одной связной компоненте, то в G, согласно лемме, возникал бы цикл. Следовательно, u, v лежат в разных связных компонентах и при добавлении ребра (u, v) число связных компонент уменьшается ровно на 1. Тогда G состоит ровно из $p - q$ связных компонент.

$\square$

Theorem

Следующие пять определений эквива- лентны (p —– число вершин, q —– число рёбер):

1. G — дерево;
2. G — без циклов и $q = p - 1$;
3. G — связный граф и $q = p - 1$;
4. G — связный граф, но при удалении любого ребра становится несвязным;
5. G — без циклов, но при добавлении любого ребра на тех же вершинах появляется цикл.

будем показывать переходы в порядке :
$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$.

- так как G — связный граф и G не содержит циклов, то $p - q = 1$ по лемме. Отсюда $q = p - 1$.

будем показывать переходы в порядке :
$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$.

- так как G — связный граф и G не содержит циклов, то $p - q = 1$ по лемме. Отсюда $q = p - 1$.
- по лемме в G число связных компонент равно $p - q = 1$, то есть G — связный граф.

будем показывать переходы в порядке :
$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$.

- так как G — связный граф и G не содержит циклов, то $p - q = 1$ по лемме. Отсюда $q = p - 1$.
- по лемме в G число связных компонент равно $p - q = 1$, то есть G — связный граф.
- при удалении одного ребра $p - q = 2$. Тогда по лемме число связных компонент не менее чем $p - q = 2$.

будем показывать переходы в порядке :
$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$.

- так как G — связный граф и G не содержит циклов, то $p - q = 1$ по лемме. Отсюда $q = p - 1$.
- по лемме в G число связных компонент равно $p - q = 1$, то есть G — связный граф.
- при удалении одного ребра $p - q = 2$. Тогда по лемме число связных компонент не менее чем $p - q = 2$.
- если G имеет цикл, то согласно первой лемме можно выбросить одно ребро так, что граф останется связным. Согласно лемме 2, если добавить любое новое ребро к связному графу G на тех же вершинах, то появится цикл.

будем показывать переходы в порядке :
$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$.

- так как G — связный граф и G не содержит циклов, то $p - q = 1$ по лемме. Отсюда $q = p - 1$.
- по лемме в G число связных компонент равно $p - q = 1$, то есть G — связный граф.
- при удалении одного ребра $p - q = 2$. Тогда по лемме число связных компонент не менее чем $p - q = 2$.
- если G имеет цикл, то согласно первой лемме можно выбросить одно ребро так, что граф останется связным. Согласно лемме 2, если добавить любое новое ребро к связному графу G на тех же вершинах, то появится цикл.
- если G не связный граф и вершины u, v лежат в разных связных компонентах графа G, то добавление к G ребра (u, v), очевидно, не порождает циклов, что противоречит 5). Отсюда следует, что G —– связный граф

Definition

Пусть задан некоторый неориентированный граф $G = (V, E)$. Пусть любой вершине v_i графа G сопоставлена некоторая точка $a_i : v_i \to a_i, a_i, a_i \neq a_j (i \neq j)$, а любому ребру $e = (a, b)$ сопоставлена некоторая непрерывная кривая L, соединяющая точки a_i, a_j и не проходящая через другие точки $a_k (k \neq i, j)$. Тогда если все кривые, сопоставленные рёбрам, не имеют общих точек, кроме концевых, то говорят, что задана геометрическая реализация графа G.

Theorem

Для любого графа существует его реализация в трёхмерном пространстве.

Доказательство. См. изображение на доске.

Theorem

Для любого графа существует его реализация в трёхмерном пространстве.

Доказательство. См. изображение на доске. Возьмём в пространстве любую прямую l и разместим на ней все вершины графа G. Пусть в G имеется q рёбер. Проведём связку из q различных полуплоскостей через l. После этого каждое ребро графа G можно изобразить линией в своей полуплоскости и они, очевидно, не будут пересекаться. $\square$

- Граф называется планарным, если существует его геометрическая реализация на плоскости.
- Если имеется планарная реализация графа и мы «разрежем» плоскость по всем линиям этой планарной реализации, то плоскость распадётся на части, которые называются гранями этой планарной реализации (одна из граней бесконечна, она называется внешней гранью).

Theorem (Формула Эйлера)

Для любой планарной реализации связного планарного графа $G = (V, E)$ с p вершинами, q рёбрами и r гранями выполняется равенство: $p - q + r = 2$.

Доказательство.

Theorem (Формула Эйлера)

Для любой планарной реализации связного планарного графа $G = (V, E)$ с p вершинами, q рёбрами и r гранями выполняется равенство: $p - q + r = 2$.

Доказательство. Зафиксируем количество вершин и будем доказывать теорему индукцией по $q, q \geq p - 1$.

1. Пусть $q = p - 1$. Т.к. G – связный, то G — дерево $\Rightarrow$ в G нет циклов $\Rightarrow r = 1 \Rightarrow p - (p - 1) + 1 = 2$.

Theorem (Формула Эйлера)

Для любой планарной реализации связного планарного графа $G = (V, E)$ с p вершинами, q рёбрами и r гранями выполняется равенство: $p - q + r = 2$.

Доказательство. Зафиксируем количество вершин и будем доказывать теорему индукцией по $q, q \geq p - 1$.

1. Пусть $q = p - 1$. Т.к. G – связный, то G — дерево $\Rightarrow$ в G нет циклов $\Rightarrow r = 1 \Rightarrow p - (p-1) + 1 = 2$.
2. Пусть верно для $q : p - 1 \leq q < q_0$. Покажем, что верно для $q = q_0$. Пусть G — связный граф с p вершинами, q_0 ребрами и пусть в его планарной реализации r граней. $q_0 > p - 1 \Rightarrow G$ — не дерево $\Rightarrow$ есть цикл.

Продолжение доказательства. Пусть ребро e входит в цикл $\Rightarrow$ к нему с двух сторон примыкают разные грани. Удалим ребро e из $G \Rightarrow$ две грани сольются в одну, полученный граф G_1 останется связным. При этом получится планарная реализация графа G_1 с p вершинами и $q_0 - 1$ рёбрами и $r - 1$ гранями. Но $q_0 - 1 < q_0 \Rightarrow$ по предположению индукции, для G_1 справедлива формула Эйлера, то есть $p - (q_0 - 1) + (r - 1) = 2 \Rightarrow p - q_0 + r = 2$.

$\square$

Следствие. Формула Эйлера справедлива для геометрической реализации связных графов на сфере.

Следствие. Формула Эйлера справедлива для геометрической реализации связных графов на сфере.

Доказательство. Пусть связный граф G с p вершинами и q рёбрами реализован на сфере S так, что число граней равно r. Пусть точка A на сфере не лежит на линиях этой геометрической реализации. Пусть P — некоторая плоскость. Поставим сферу S на плоскость P так, чтобы точка A была самой удалённой от плоскости. Спроектируем S на P центральным проектированием с центром в точке A. Тогда на плоскости P мы получим геометрическую реализацию связного графа с p вершинами и q рёбрами, причём число граней будет равно r (грань на сфере, содержащая A, отображается на внешнюю грань на плоскости). По теореме получаем $p - q + r = 2$.

$\square$

Следствие 2. Для любого выпуклого многогранника справедливо равенство $p - q + r = 2$, где p — число вершин, q — число рёбер, r — число граней.

Следствие 2. Для любого выпуклого многогранника справедливо равенство $p - q + r = 2$, где p — число вершин, q — число рёбер, r — число граней.

Доказательство. Пусть выпуклый многогранник M имеет p вершин, q рёбер и r граней. Пусть O — внутренняя точка многогранника. Рассмотрим сферу S с центром в точке O настолько большого радиуса, чтобы M целиком содержался в S. Рассмотрим центральное проектирование с центром в точке O, и спроектируем вершины и рёбра M на S. Тогда на S мы получим геометрическую реализацию некоторого связного графа с p вершинами, q рёбрами и r гранями. Отсюда согласно следствию 1 из теоремы о формуле Эйлера $p - q + r = 2$. □

Theorem

Граф K_5 не планарен.

Доказательство.

Пусть для графа K_5 существует планарная реализация. K_5 связен $\Rightarrow$ для этой планарной реализации справедлива формула Эйлера $p - q + r = 2$. В K_5 имеем p = 5 и q = 10 $\Rightarrow$ число всех граней должно равняться $r = 2 - p + q = 7$.

Theorem

Граф K_5 не планарен.

Доказательство.

Пусть для графа K_5 существует планарная реализация. K_5 связен $\Rightarrow$ для этой планарной реализации справедлива формула Эйлера $p - q + r = 2$. В K_5 имеем p $=$ 5 и q $=$ 10 $\Rightarrow$ число всех граней должно равняться $r = 2 - p + q = 7$.

Пусть грани занумерованы $1, 2, \ldots, r$ и пусть при обходе i-ой грани по периметру (по её краю) проходится q_i рёбер. Так как при этом каждое ребро обходится дважды, то $\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q = 20$. Но в каждой грани не менее трех сторон!$\Rightarrow$ $q_i \geq 3, \forall i$.

Theorem

Граф K_5 не планарен.

Доказательство.

Пусть для графа K_5 существует планарная реализация. K_5 связен $\Rightarrow$ для этой планарной реализации справедлива формула Эйлера $p - q + r = 2$. В K_5 имеем р = 5 и q = 10 $\Rightarrow$ число всех граней должно равняться $r = 2 - p + q = 7$.

Пусть грани занумерованы $1, 2, \ldots, r$ и пусть при обходе i-ой грани по периметру (по её краю) проходится q_i рёбер. Так как при этом каждое ребро обходится дважды, то $\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q = 20$. Но в каждой грани не менее трех сторон!$\Rightarrow$ $q_i \geq 3, \forall i$.
Тогда $\sum_{i=1}^{r} q_i \geq 3r = 21 \Rightarrow 20 \geq 21$?!. $\Rightarrow$ для K_5 не существует планарной реализации. $\square$

Theorem

Граф $K_{3,3}$ не планарен.

Доказательство. Допустим, что для графа $K_{3,3}$ существует планарная реализация. $K_{3,3}$ связен$\Rightarrow$ для этой планарной реализации справедлива формула Эйлера $p - q + r = 2$. Поскольку в графе $K_{3,3}$ имеем $p = 6$ и $q = 9$, то число всех граней должно равняться $r = 2 - p + q = 5$. Так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, получаем, что $\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q = 18$, где q_i — число сторон в i-той грани.

Theorem

Граф $K_{3,3}$ не планарен.

Доказательство. Допустим, что для графа $K_{3,3}$ существует планарная реализация. $K_{3,3}$ связен$\Rightarrow$ для этой планарной реализации справедлива формула Эйлера $p - q + r = 2$. Поскольку в графе $K_{3,3}$ имеем $p = 6$ и $q = 9$, то число всех граней должно равняться $r = 2 - p + q = 5$. Так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, получаем, что $\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q = 18$, где q_i — число сторон в i-той грани. Но в графе $K_{3,3}$ нет циклов длины 3$\Rightarrow$ в каждой грани не менее 4 сторон $\Rightarrow$ $q_i \geq 4, \forall i \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} q_i \geq 4r = 20 \Rightarrow$?!. $\square$

Definition

Подразделением (подразбиением) ребра (a, b) называется операция, состоящая в следующих действиях:

1. удаление (a, b),
2. добавление новой вершины c,
3. добавление рёбер (a, c) и (c, b).

Definition

Подразделением (подразбиением) ребра (a, b) называется операция, состоящая в следующих действиях:

1. удаление (a, b),
2. добавление новой вершины c,
3. добавление рёбер (a, c) и (c, b).

Definition

- Граф H называется подразделением графа G, если H можно получить из G путём конечного числа подразделений его рёбер.
- Два графа называются гомеоморфными, если существуют их изоморфные подразделения.

Theorem (Понтрягина-Куратовского)

Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит ни одного подграфа, гомеоморфного графам K_5 или $K_{3,3}$.

Доказательство необходимости. Пусть G — планарный. Допустим, что он содержит подграф G_1, гомеоморфный графу K_5 или $K_{3,3}$. Рассмотрим планарную реализацию графа G.

Удалив лишние вершины и рёбра, мы получим планарную реализацию подграфа G_1. Но G_1 геометрически — это граф K_5 или $K_{3,3}$ с точками на рёбрах. Если проигнорировать эти точки, то мы получим планарную реализацию графа K_5 или $K_{3,3}$. ?!

Theorem (Понтрягина-Куратовского)

Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит ни одного подграфа, гомеоморфного графам K_5 или $K_{3,3}$.

Доказательство необходимости. Пусть G — планарный. Допустим, что он содержит подграф G_1, гомеоморфный графу K_5 или $K_{3,3}$. Рассмотрим планарную реализацию графа G.

Удалив лишние вершины и рёбра, мы получим планарную реализацию подграфа G_1. Но G_1 геометрически — это граф K_5 или $K_{3,3}$ с точками на рёбрах. Если проигнорировать эти точки, то мы получим планарную реализацию графа K_5 или $K_{3,3}$. ?!

Достаточность доказывать не будем. $\square$

Lemma

Для любой геометрической реализации на плоскости связного планарного графа с q рёбрами выполняется равенство:

$$\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q,$$

где суммирование ведется по всем граням, включая внешнюю.

Lemma

Для любой геометрической реализации на плоскости связного планарного графа с q рёбрами выполняется равенство:

$$\sum_{i=1}^{r} q_i = 2q,$$

где суммирование ведется по всем граням, включая внешнюю.

Доказательство. Равенство следует из того, что у каждого ребра две стороны и при суммировании q_i каждое ребро учитывается дважды: либо оно входит в границы двух соседних граней, либо оно дважды учитывается в одной грани. □

Theorem

Если в связном планарном графе $G = (V, E)$ с p вершинами и q рёбрами, отличном от дерева, нет циклов длины меньше k, $(k \geq 3)$, то $q \leq \frac{k}{k-2}(p-2)$.

Theorem

Если в связном планарном графе $G = (V, E)$ с p вершинами и q рёбрами, отличном от дерева, нет циклов длины меньше k, $(k \geq 3)$, то $q \leq \frac{k}{k-2}(p-2)$.

Доказательство. Так как по условию $q_i \geq k$, то по лемме получаем $2q \geq kr$, $r \leq \frac{2q}{k}$. По формуле Эйлера: $r = 2 - p + q$. Отсюда $2 - p + q \leq \frac{2q}{k}$.
Далее $(k-2)q \leq k(p-2) \Rightarrow q \leq \frac{k}{k-2}(p-2)$. □

Theorem

Если в связном планарном графе $G = (V, E)$ с p вершинами и q рёбрами, отличном от дерева, нет циклов длины меньше k, $(k \geq 3)$, то $q \leq \frac{k}{k-2}(p-2)$.

Доказательство. Так как по условию $q_i \geq k$, то по лемме получаем $2q \geq kr$, $r \leq \frac{2q}{k}$. По формуле Эйлера: $r = 2 - p + q$. Отсюда $2 - p + q \leq \frac{2q}{k}$.
Далее $(k-2)q \leq k(p-2) \Rightarrow q \leq \frac{k}{k-2}(p-2)$. □

В любом связном планарном графе $G = (V, E)$ без петель и кратных рёбер с не менее, чем тремя вершинами p, и q ребрами справедливо неравенство $q \leq 3(p-2)$.

Подмножество $V_1 \subseteq V$ вершин графа $G = (V, E)$ называется независимым, если никакие две вершины из V_1 не соединяются ребром.

Подмножество $V_1 \subseteq V$ вершин графа $G = (V, E)$ называется независимым, если никакие две вершины из V_1 не соединяются ребром.

Пусть есть некоторое множество $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ — множество цветов. Тогда (вершинной) раскраской графа $G = (V, E)$ называется любое отображение $\phi : V \to C$. Раскраска называется правильной, если для любого цвета вершины этого цвета образуют независимое множество.

Lemma

В планарном графе без петель и кратных рёбер существует вершина v:

$$deg(v) \leq 5.$$

Lemma

В планарном графе без петель и кратных рёбер существует вершина v:

$$deg(v) \leq 5.$$

Доказательство. Пусть G — планарный граф с p вершинами и q рёбрами. Пусть в G нет вершин степени 0 и 1. Тогда $q \leq 3(p-2) < 3p$. Пусть d_{min} — минимальная степень вершин в G.

Lemma

В планарном графе без петель и кратных рёбер существует вершина v:
$$deg(v) \leq 5.$$

Доказательство. Пусть G — планарный граф с p вершинами и q рёбрами. Пусть в G нет вершин степени 0 и 1. Тогда $q \leq 3(p-2) < 3p$. Пусть d_{min} — минимальная степень вершин в G. Тогда получаем

$$6p > 2q = \sum_{i=1}^{p} deg(v_i) \geq pd_{min}.$$

Тогда $d_{min} < 6 \Rightarrow d_{min} \leq 5$. □

Theorem

Вершины любого планарного графа можно правильно раскрасить в не более чем 5 цветов.

Доказательство. Проведем индукцию по числу вершин. Базис. Очевидно.

Пусть при $p < p_0$ утверждение верно и пусть $G = (V, E)$ — планарный граф с $|V| = p_0$. Тогда по лемме в G есть вершина v степени не более 5. Рассмотрим укладку на плоскости графа G без пересечения ребер.

Удалим из G вершину v и все инцидентные ей рёбра. Получим планарный граф G_1 с числом вершин $p_0 - 1$. По предположению индукции его вершины можно правильно раскрасить в 5 цветов C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. Пусть в G вершина v смежна с $v_1, v_2, \ldots, v_k$, где $k \leq 5$. Здесь далее возможны два случая.

I. Среди цветов вершин $v_1, v_2, \ldots, v_k$ в G нет цвета $C_i, 1 \leq i \leq 5$. Тогда вершине v припишем цвет C_i и получим правильную раскраску графа G в 5 цветов.

I. Среди цветов вершин $v_1, v_2, \ldots, v_k$ в G нет цвета $C_i, 1 \le i \le 5$. Тогда вершине v припишем цвет C_i и получим правильную раскраску графа G в 5 цветов.

II. Степень вершины v равна 5 и среди вершин $v_1, v_2, \ldots, v_5$ в G_1 есть все 5 цветов. Без ограничения общности будем считать, что в укладке графа G рёбра-
$(v, v_1), (v, v_2), (v, v_3), (v, v_4), (v, v_5)$ выходят из v в порядке по часовой стрелке и что $C(v_i) = C_i, i = 1, \ldots, 5$. Пусть A — множество всех вершин в G_1, до которых можно дойти из v_1 по рёбрам графа G_1, используя только вершины цветов C_1 и C_3. Возможны два варианта:

- $v_3 \notin A$. Тогда в А поменяем цвета $C_1 \to C_3, C_3 \to C_1$. Так как вершины из A не смежны с другими вершинами цветов C_1 и C_3, то останется правильная раскраска и среди v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 не будет цвета C_1. Тогда вершине v припишем цвет C_1.

- $v_3 \notin A$. Тогда в A поменяем цвета $C_1 \to C_3, C_3 \to C_1$. Так как вершины из A не смежны с другими вершинами цветов C_1 и C_3, то останется правильная раскраска и среди v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 не будет цвета C_1. Тогда вершине v припишем цвет C_1.
- $v_3 \in A$. Это значит, что в A есть цепь из v_1 в v_3, все вершины которой имеют цвета C_1 и C_3. Эта цепь вместе с рёбрами $(v_3, v), (v, v_1)$ образует цикл в G, причём вершины v_2 и v_4 лежат по разные стороны от этого цикла. Это значит, что из v_2 нельзя пройти в v_4 в графе G только по вершинам цветов C_2 и C_4. Пусть B — множество всех вершин в G, до которых можно дойти из v_2 по рёбрам графа G, используя только вершины цветов C_2 и C_4. Тогда $v_4 \notin B$ и дальше поступаем как в предыдущем пункте.

$\square$