Функции алгебры логики

Татьяна Анатольевна Новикова
novikovat.cmc@gmail.com

Факультет ВМиК
Казахстанский филиал МГУ им.М. В. Ломоносова

24 апреля 2016 г.

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$ — исходный алфавит (множество) значений переменных.
Обозначим $E_2^n = \{(a_1, \ldots, a_n) | \forall i \; a_i \in E_2\}$.

Definition

Всюду определенная булева функция — отображение $f(x_1, \ldots, x_n) : E_2^n \to E_2$.

Табличное представление функций одной переменной.

x	0	1	x	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Табличное представление функций одной переменной.

x	0	1	x	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Функция 0 — константа ноль(нуль).
Функция 1 — константа единица.
Функция x — тождественная функция.
Функция $\bar{x}$ — отрицание (другое обозначение: $\neg x$).

Табличное представление функций двух переменных.

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Табличное представление функций двух переменных.

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

f_1 — дизъюнкция, логическое ИЛИ: $f_1 = x \vee y$.
f_2 — конъюнкция, логическое И: $f_2 = x \cdot y = x \& y = xy$.
f_3 — сложение по модулю 2, исключающее ИЛИ: $f_3 = x \oplus y$.
f_4 — импликация(x имплицирует y): $f_4 = x \longrightarrow y$.
f_5 — эквивалентность: $f_5 = x \sim y = \overline{x \oplus y}$.
f_6 — штрих Шеффера: $f_6 = x | y = \overline{xy}$.
f_7 — стрелка Пирса: $f_7 = x \downarrow y = \overline{x \vee y}$.

Lemma

В алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ из r букв можно построить ровно r^m различных слов длины m.

Доказательство. Индукцией по m.
$m = 1$. Очевидно.

Lemma

В алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ из r букв можно построить ровно r^m различных слов длины m.

Доказательство. Индукцией по m.
$m = 1$. Очевидно.
Пусть верно для $m - 1$, то есть существует ровно r^{m-1} различных слов длины $m - 1$. Сколько существует способов добавить одну букву в конец слова?

Lemma

В алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ из r букв можно построить ровно r^m различных слов длины m.

Доказательство. Индукцией по m.
$m = 1$. Очевидно.
Пусть верно для $m - 1$, то есть существует ровно r^{m-1} различных слов длины $m - 1$. Сколько существует способов добавить одну букву в конец слова?
К каждому из r^{m-1} слов можно приписать одну букву r способами, итого $r \cdot r^{m-1} = r^m$. $\square$

Табличное задание некоторой функции алгебры логики от n переменных:

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_2 & \dots & x_n & f
\end{array}
$$

$$
2^n\left\{\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\
0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & 1 & \dots & 1 & \alpha_{2^n-1}
\end{array}\right\}2^{2^n}
$$

Каково количество всевозможных функций f — мощность множества P_2?

Табличное задание некоторой функции алгебры логики от n переменных:

$$2^n\left\{\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & f \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \alpha_{2^n-1} \end{array}\right\}2^{2^n}$$

Каково количество всевозможных функций f — мощность множества P_2? $|P_2| = 2^{2^n}$.

Definition

Переменная x_i называется существенной переменной ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, если существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in E_2$, что

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$

при этом наборы, отличающиеся только значением i-той компоненты, называются соседними по переменной x_i.
В противном случае переменная x_i называется фиктивной.

Если x_i — фиктивная переменная функции f, то набор ее значений однозначно совпадает с набором значений некоторой функции $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Две функции алгебры логики мы назовем равными, если одна из них может быть получена из другой путем добавления или изъятия любого числа фиктивных переменных.

Пусть имеется множество функций
$A = \{f_1(\ldots), \ldots, f_n(\ldots), \ldots\}$.

Definition

Формулой над A назовем следующие объекты:

1. Любая функция из A называется формулой над A.
2. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$ и для любого i верно, что H_i — либо переменная, либо формула над A, то выражение вида $f(H_1, \ldots, H_n)$ тоже является формулой над A.
3. Те и только те объекты, которые строятся по пунктам 1 и 2, являются формулами.

1. Коммутативность.
2. Ассоциативность.
3. Дистрибутивность.
4. Тождества де Моргана.
5. Законы поглощения.
6. Очевидные тождества.

Коммутативность.

- $x \vee y = y \vee x$;
- $xy = yx$;
- $x \oplus y = y \oplus x$;
- $x \sim y = y \sim x$.

Ассоциативность.

1. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$;
2. $(xy)z = x(yz) = xyz$;
3. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$.

Дистрибутивность.

1. $(x \oplus y)z = (xz) \oplus (yz)$;
2. $(x \vee y)z = (xz) \vee (yz)$;
3. $(xy) \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z)$.

Тождества де Моргана.

1. $\bar{\bar{x}} = x$;
2. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$;
3. $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

Законы поглощения.

1. $x \vee x = x$;
2. $x \cdot x = x$;
3. $x \vee \bar{x} = 1$;
4. $x \cdot \bar{x} = 0$;
5. $x \vee 1 = 1$;
6. $x \cdot 1 = x$;
7. $x \vee 0 = x$;
8. $x \cdot 0 = 0$.

Тождества по определению.

1. $x|y = \overline{x \cdot y}$;
2. $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$;
3. $x \longrightarrow y = \bar{x} \vee y$;
4. $x \oplus y = (x \cdot \bar{y}) \vee (\bar{x} \cdot y)$;
5. $x \sim y = \overline{x \oplus y} = (xy) \vee (\bar{x}\bar{y})$.

Очевидные тождества:

$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \Leftrightarrow \forall i : x_i = 1,$

$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n = 1 \Leftrightarrow \exists i : x_i = 1$

Очевидные тождества:
$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \Leftrightarrow \forall i : x_i = 1,$
$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n = 1 \Leftrightarrow \exists i : x_i = 1$
Введем обозначение:

$$x^\sigma = \begin{cases} x, \sigma & = & 1 \\ \bar{x}, \sigma & = & 0. \end{cases}$$

Что означает утверждение вида: $x^\sigma = 1$?

Очевидные тождества:
$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \Leftrightarrow \forall i : x_i = 1$,
$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n = 1 \Leftrightarrow \exists i : x_i = 1$
Введем обозначение:

$$x^\sigma = \begin{cases} x, \sigma & = & 1 \\ \bar{x}, \sigma & = & 0. \end{cases}$$

Что означает утверждение вида: $x^\sigma = 1$?
$x = \sigma$.

Theorem (О разложении ФАЛ по переменным)

Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ и для любого $k (1 \le k \le n)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Theorem (О разложении ФАЛ по переменным)

Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ и для любого $k (1 \le k \le n)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Идея доказательства. Рассмотрим произвольный набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Заметим, что (Почему это так?)

$$\bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in E_2^k} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \alpha_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) = 0 \vee \ldots \vee 0 \vee \alpha_1^{\alpha_1} \cdot \alpha_2^{\alpha_2} \ldots \alpha_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Следствие 1. Разложение произвольной ФАЛ по одной переменной:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x}_1 \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n).$$

Следствие 1. Разложение произвольной ФАЛ по одной переменной:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x}_1 \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n).$$

Следствие 2 (Теорема о совершенной дизъюнктивной нормальной форме, ДНФ). Для любой ФАЛ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отличной от тождественного ноля, справедливо следующее представление:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \vee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n): f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Доказательство ?.

Theorem

Для любой функции алгебры логики $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, отличной от тождественной единицы, справедливо представление:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \&_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n): f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}).$$

Definition

Система функций алгебры логики A называется полной системой в P_2, если любую булеву функцию можно выразить формулой над A.

Definition

Система функций алгебры логики A называется полной системой в P_2, если любую булеву функцию можно выразить формулой над A.

Theorem

Пусть даны две системы функций алгебры логики:

$$A = \{f_1, f_2, \ldots\}, B = \{g_1, g_2, \ldots\}.$$

Пусть известно, что система A полна и каждая ее функция выражается формулой над системой B. Тогда система B также является полной.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $h \in P_2$. Ввиду полноты системы A функция h может быть выражена формулой $h = H(f_1, \ldots, f_n, \ldots)$.
По условию теоремы справедливо:

$$f_1 = H_1(g_1, \ldots, g_n, \ldots), f_2 = H_2(g_1, \ldots, g_n, \ldots), \ldots$$

Произведем замену в формуле для h:

$$H(f_1, \ldots, f_n, \ldots) = H(H_1(g_1, \ldots, g_n, \ldots), f_2 = H_2(g_1, \ldots, g_n, \ldots), \ldots)$$

Таким образом, существует формула H':

$$h = H(f_1, \ldots, f_n, \ldots) = H'(g_1, \ldots, g_n, \ldots).$$

Ввиду произвольности функции h, теорема доказана.

Theorem (О стандартном базисе)

Система $A = \{\vee, \&, \neg\}$ является полной в P_2.

Доказательство. Если функция f отлична от тождественного ноля, то, по теореме о ДНФ, существует формула над A, реализующая f. Если же $f \equiv 0$, то $f = x \cdot \bar{x}$. □

Theorem

Следующие системы являются полными в P_2:

1. $\{x \vee y, \bar{x}\}$;
2. $\{x \cdot y, \bar{x}\}$;
3. $\{x|y\}$;
4. $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$.

Идеи доказательств.

1. По закону де Моргана: $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$. Тогда: $x \cdot y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$. Но тогда по теореме о стандартном базисе система $\{x \vee y, \bar{x}\}$ тоже является полной системой.

Theorem

Следующие системы являются полными в P_2:

1. $\{x \vee y, \bar{x}\}$;
2. $\{x \cdot y, \bar{x}\}$;
3. $\{x|y\}$;
4. $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$.

Идеи доказательств.

1. По закону де Моргана: $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$. Тогда: $x \cdot y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$. Но тогда по теореме о стандартном базисе система $\{x \vee y, \bar{x}\}$ тоже является полной системой.
2. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \Leftrightarrow x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$. Далее по аналогии с п.1.

Theorem

Следующие системы являются полными в P_2:

1. $\{x \vee y, \bar{x}\}$;
2. $\{x \cdot y, \bar{x}\}$;
3. $\{x|y\}$;
4. $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$.

Идеи доказательств.

1. По закону де Моргана: $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$. Тогда: $x \cdot y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$. Но тогда по теореме о стандартном базисе система $\{x \vee y, \bar{x}\}$ тоже является полной системой.
2. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \Leftrightarrow x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$. Далее по аналогии с п.1.
3. $x|x = \bar{x}, x \cdot y = \overline{x|y} = (x|y)|(x|y)$.

Theorem

Следующие системы являются полными в P_2:

1. $\{x \vee y, \bar{x}\}$;
2. $\{x \cdot y, \bar{x}\}$;
3. $\{x|y\}$;
4. $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$.

Идеи доказательств.

1. По закону де Моргана: $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$. Тогда: $x \cdot y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$. Но тогда по теореме о стандартном базисе система $\{x \vee y, \bar{x}\}$ тоже является полной системой.
2. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \Leftrightarrow x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$. Далее по аналогии с п.1.
3. $x|x = \bar{x}, x \cdot y = \overline{x|y} = (x|y)|(x|y)$.
4. $\bar{x} = x \oplus 1$. $\square$

Definition

Монотонной конъюнкцией от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется любое выражение вида $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}$, где $s \geq 1, 1 \leq i_j \leq n, \forall j = 1, 2, \ldots, s$, все переменные различны ($i_j \neq i_k$, если $j \neq k$); либо просто 1.

Definition

Монотонной конъюнкцией от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется любое выражение вида $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}$, где $s \geq 1, 1 \leq i_j \leq n, \forall j = 1, 2, \ldots, s$, все переменные различны ($i_j \neq i_k$, если $j \neq k$); либо просто 1.

Definition

Полиномом Жегалкина над $x_1, \ldots, x_n$ называется выражение вида

$$K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_l,$$

где $l \geq 1$ и все K_j есть различные монотонные конъюнкции над $x_1, \ldots, x_n$; либо константа 0.

Theorem (Теорема Жегалкина)

Любую функцию алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно единственным образом выразить полиномом Жегалкина над $x_1, \ldots, x_n$.

Доказательство. Существование. Любую ФАЛ f можно реализовать формулой над $\{x \cdot y, x \oplus y, 1\}$. Преобразуем эту формулу по следующим правилам:

- дистрибутивность: раскрываем все скобки и получаем $f(x_1, \ldots, x_n) = K'_1 \oplus K'_2 \oplus \ldots \oplus K'_l$, где каждая K'_i — конъюнкция переменных и единиц.
- Коммутативность и соотношения: $x \cdot x = x, 1 \cdot 1 = 1, A \cdot 1 = A$. В результате все конъюнкции станут монотонными.
- $A \oplus A = 0, A \oplus 0 = A$. В результате получим либо 0, либо $K_{i_1} \oplus K_{i_2} \oplus \ldots \oplus K_{i_n}$.

Единственность. Подсчитаем количество полиномов Жегалкина от переменных $x_1, \ldots, x_n$ — число выражений вида

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s} \cdot x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}.$$

Число членов $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ равно количеству всех подмножеств $(i_1, \ldots, i_s)$ из n чисел $(1, \ldots, n)$.

Единственность. Подсчитаем количество полиномов Жегалкина от переменных $x_1, \ldots, x_n$ — число выражений вида

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s} \cdot x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}.$$

Число членов $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ равно количеству всех подмножеств $(i_1, \ldots, i_s)$ из n чисел $(1, \ldots, n)$. , т.е. 2^n.

Единственность. Подсчитаем количество полиномов Жегалкина от переменных $x_1, \ldots, x_n$ — число выражений вида

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s} \cdot x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}.$$

Число членов $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ равно количеству всех подмножеств $(i_1, \ldots, i_s)$ из n чисел $(1, \ldots, n)$. , т.е. 2^n.
Коэффициент $a_{i_1\ldots i_s}$ принимает одно из значений 0 или 1. Но тогда число полиномов соответствует числу всех булевых функций от тех же переменных, т.е. 2^{2^n}. Ввиду существования представления для каждой функции и ввиду равномощности множества всех булевых функций и множества полиномов, единственность доказана.

Definition

Пусть $A \subseteq P_2$. Тогда замыканием A — $[A]$ — называется множество всех ФАЛ, которые могут быть выражены формулами над A.

Свойства замыканий:

1. $[A] \supseteq A$;
2. $A \supseteq B \Rightarrow [A] \supseteq [B]$, причем $A \supset B \Rightarrow [A] \supseteq [B]$;
3. $[[A]] = [A]$.

Definition

Система функций алгебры логики A называется полной, если $[A] = P_2$.

Definition

Система функций алгебры логики A называется полной, если $[A] = P_2$.

Definition

Пусть $A \subseteq P_2$. Тогда система A называется замкнутым классом, если замыкание A совпадает с самим A: $[A] = A$.

Утверждение. Пусть A — замкнутый класс, $A \neq P_2$, и $B \subseteq A$. Тогда B — неполная система.

Definition

Система функций алгебры логики A называется полной, если $[A] = P_2$.

Definition

Пусть $A \subseteq P_2$. Тогда система A называется замкнутым классом, если замыкание A совпадает с самим A: $[A] = A$.

Утверждение. Пусть A — замкнутый класс, $A \neq P_2$, и $B \subseteq A$. Тогда B — неполная система.

$B \subseteq A \Rightarrow [B] \subseteq [A] = A \neq P_2$. Значит, B — неполная система.

Примеры замкнутых классов:

1. класс функций, сохраняющих 0: T_0;
2. класс функций, сохраняющих 1: T_1;
3. класс линейных функций: L;
4. класс монотонных функций: M;
5. класс самодвойственных функций: S.

$T_0 = \{f(x_1, \ldots, x_n) | f(0, \ldots, 0) = 0\}$. Примеры:

$T_0 = \{f(x_1, \ldots, x_n) | f(0, \ldots, 0) = 0\}$. Примеры:
$0, x, xy, x \vee y, x \oplus y$.
Каково количество функций в классе T_0?

$T_0 = \{f(x_1, \ldots, x_n) | f(0, \ldots, 0) = 0\}$. Примеры: $0, x, xy, x \vee y, x \oplus y$.

Каково количество функций в классе T_0? $|T_0| = 2^{2^n - 1}$.

$T_0 = \{f(x_1, \ldots, x_n) | f(0, \ldots, 0) = 0\}$. Примеры: $0, x, xy, x \vee y, x \oplus y$.

Каково количество функций в классе T_0? $|T_0| = 2^{2^n - 1}$.

Theorem

Класс T_0 — замкнутый класс.

Доказательство. Пусть $\{f(x_1, \ldots, x_n), g_1(y_{11}, \ldots, y_{1m_1}), \ldots, g_n(y_{n1}, \ldots, y_{nm_n})\}$.

Рассмотрим функцию $h(y_1, \ldots, y_r) = f(g_1(y_{11}, \ldots, y_{1m_1}), \ldots, g_n(y_{n1}, \ldots, y_{nm_n}))$.

Но $h(0, \ldots, 0) = f(g_1(0, \ldots, 0), \ldots, g_2(0, \ldots, 0)) = f(0, \ldots, 0) = 0 \Rightarrow$ функция h тоже сохраняет ноль! $\square$

$T_1 = \{f(x_1, \ldots, x_n) | f(1, \ldots, 1) = 1\}$ Примеры:

$T_1 = \{f(x_1, \ldots, x_n) | f(1, \ldots, 1) = 1\}$ Примеры: $1, x, xy, x \vee y, x \to y, x \sim y.$

$T_1 = \{f(x_1, \ldots, x_n) | f(1, \ldots, 1) = 1\}$ Примеры:
$1, x, xy, x \vee y, x \to y, x \sim y.$

Каково количество функций в классе T_1? Как и в классе T_0.

Theorem

Класс T_1 — замкнутый класс.

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Класс линейных функций L.

Definition

Функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется линейной, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n,$$

где $a_i \in \{0, 1\}$.

Примеры:

Класс линейных функций L.

Definition

Функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется линейной, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n,$$

где $a_i \in \{0, 1\}$.

Примеры: $0, 1, \bar{x}, x \sim y, x \oplus y$.

Класс линейных функций L.

Definition

Функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется линейной, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n,$$

где $a_i \in \{0, 1\}$.

Примеры: $0, 1, \bar{x}, x \sim y, x \oplus y$.

Theorem

Класс L замкнут.

Класс линейных функций L.

Definition

Функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется линейной, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n,$$

где $a_i \in \{0, 1\}$.

Примеры:$0, 1, \bar{x}, x \sim y, x \oplus y$.

Theorem

Класс L замкнут.

Доказательство. Всякая линейная функция представима в виде $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \ldots \oplus x_{i_n} \oplus a$. Если вместо каждого x_{i_j} подставить линейное выражение, то получится снова линейная функция.

Definition

Функцией, двойственной к ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, называется функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$.

Definition

Функцией, двойственной к ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, называется функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$.

Theorem (Принцип двойственности)

Пусть

$$\Phi(y_1, \ldots, y_m) = f(g_1(y_{11}, \ldots, y_{1k_1}), \ldots, g_n(y_{n1}, \ldots, y_{nk_n})).$$

Тогда

$$\Phi^*(y_1, \ldots, y_m) = f^*(g_1^*(y_{11}, \ldots, y_{1k_1}), \ldots, g_n^*(y_{n1}, \ldots, y_{nk_n})).$$

Доказательство принципа двойственности. Рассмотрим

$$\begin{aligned}\Phi^*(y_1,\ldots,y_m) &= \\ \overline{f}(g_1(\overline{y_{11}},\ldots,\overline{y_{1k_1}}),\ldots,g_n(\overline{y_{n1}},\ldots,\overline{y_{nk_n}})) \\ = \overline{f}(\overline{\overline{g_1}}(\overline{y_{11}},\ldots,\overline{y_{1k_1}}),\ldots,\overline{\overline{g_n}}(\overline{y_{n1}},\ldots,\overline{y_{nk_n}})) \\ = f^*(g_1^*(y_{11},\ldots,y_{1k_1}),\ldots,g_n^*(y_{n1},\ldots,y_{nk_n})).\end{aligned}$$

□

Утверждение. Для любой ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ справедливо равенство

$$f(x_1 \ldots, x_n) = f^{**}(x_1, \ldots, x_n).$$

Утверждение. Для любой ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ справедливо равенство

$$f(x_1 \ldots, x_n) = f^{**}(x_1, \ldots, x_n).$$

Обоснование.

$$f^{**} = [\overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})]^* = \overline{\overline{f}}(\overline{\overline{x_1}}, \ldots, \overline{\overline{x_n}}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Definition

ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется самодвойственной, если $f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n)$.

Примеры:

Definition

ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется самодвойственной, если $f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n)$.

Примеры: $\{x, \bar{x}, x \oplus y \oplus z \oplus a, m(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz\}$.

Definition

ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется самодвойственной, если $f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n)$.

Примеры: $\{x, \bar{x}, x \oplus y \oplus z \oplus a, m(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz\}$.

Theorem

Класс S замкнут.

Definition

ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется самодвойственной, если $f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_n)$.

Примеры: $\{x, \bar{x}, x \oplus y \oplus z \oplus a, m(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz\}$.

Theorem

Класс S замкнут.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $\forall i$ $g_i(y_{i1}, \ldots, y_{ik_i}) \in S$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и

$$\Phi = f(g_1(y_{11}, \ldots, y_{1k_1}), \ldots, g_n(y_{n1}, \ldots, y_{nk_n})).$$

Тогда по принципу двойственности:

$$\Phi^* = f^*(g_1^*(y_{11}, .., y_{1k_1}), .., g_n^*(y_{n1}, .., y_{nk_n})) = f(g_1(..), .., g_n(..)).$$

Т.е. $\Phi = \Phi^* \Rightarrow \Phi \in S$. $\square$

Definition

Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Тогда $\widetilde{\alpha} \leq \widetilde{\beta} \Leftrightarrow \forall i (\alpha_i \leq \beta_i)$.

Указанное здесь отношение порядка является частичным. Существует несравнимые наборы, например, $(1, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

Definition

Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Тогда $\widetilde{\alpha} \leq \widetilde{\beta} \Leftrightarrow \forall i(\alpha_i \leq \beta_i)$.

Указанное здесь отношение порядка является частичным. Существует несравнимые наборы, например, $(1, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$.

Definition

Функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется монотонной, если для любых двух сравнимых наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ выполняется импликация

$$\widetilde{\alpha} \leq \widetilde{\beta} \Rightarrow f(\widetilde{\alpha}) \leq f(\widetilde{\beta}).$$

Класс M — класс всех монотонных функций.

Примеры:

Класс M — класс всех монотонных функций.
Примеры: $0, 1, x, xy, x \vee y, m(x, y, z)$.

Класс M — класс всех монотонных функций.
Примеры: $0, 1, x, xy, x \vee y, m(x, y, z)$.

Theorem

Класс M замкнут.

Класс M — класс всех монотонных функций.
Примеры: $0, 1, x, xy, x \vee y, m(x, y, z)$.

Theorem

Класс M замкнут.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in M$, для любого j: $g_j(y_1, y_m) \in M$ и

$$\Phi(y_1, \ldots, y_m) = f(g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m)).$$

Пусть наборы $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ таковы, что $\widetilde{\alpha} \leq \widetilde{\beta}$. Обозначим $g_i(\widetilde{\alpha}) = \gamma_i, g_i(\widetilde{\beta}) = \delta_i$.
Тогда для любого i имеем $(\gamma_i \leq \delta_i)$. Обозначим $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \widetilde{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Тогда по определению $\widetilde{\gamma} \leq \widetilde{\delta}$ и $f(\widetilde{\gamma}) \leq f(\widetilde{\delta})$.
Но

$$\Phi(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\gamma}), \Phi(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\delta}),$$

и тогда $f(\widetilde{\gamma}) \leq f(\widetilde{\delta}) \Leftrightarrow \Phi(\widetilde{\alpha}) \leq \Phi(\widetilde{\beta})$, значит, $\Phi \in M$. $\square$

Леммы о не-функциях.

Lemma

Из любой несамодвойственной ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, подставляя вместо всех переменных функции $\bar{x}, x$, можно получить константу.

Lemma

Из любой несамодвойственной ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, подставляя вместо всех переменных функции $\bar{x}, x$, можно получить константу.

Доказательство. Пусть $f \notin S$. Тогда
$\bar{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \neq f(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow \exists \widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ такой, что

$$\bar{f}(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}) \neq f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \Leftrightarrow f(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Построим функцию $\phi(x)$ так: $\phi(x) = f(x \oplus \sigma_1, \ldots, x \oplus \sigma_n)$.
Тогда $\phi(0) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \phi(1) = f(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n})$
и $\phi(0) = \phi(1) \Rightarrow \phi(x) = const$.

□

Lemma (О немонотонной функции)

Из любой немонотонной ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, подставляя вместо всех переменных функции $x, 0, 1$ можно получить функцию $\phi(x) \equiv \bar{x}$.

Lemma (О немонотонной функции)

Из любой немонотонной ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, подставляя вместо всех переменных функции $x, 0, 1$ можно получить функцию $\phi(x) \equiv \bar{x}$.

Доказательство. Пусть $f \notin M$. Тогда существуют наборы $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ и $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$.

Lemma (О немонотонной функции)

Из любой немонотонной ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, подставляя вместо всех переменных функции $x, 0, 1$ можно получить функцию $\phi(x) \equiv \bar{x}$.

Доказательство. Пусть $f \notin M$. Тогда существуют наборы $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ и $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$.

Пусть они различаются в разрядах $i_1, \ldots, i_k$. Тогда в наборе α они равны 0, а в наборе β — 1.

Lemma (О немонотонной функции)

Из любой немонотонной ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, подставляя вместо всех переменных функции $x, 0, 1$ можно получить функцию $\phi(x) \equiv \bar{x}$.

Доказательство. Пусть $f \notin M$. Тогда существуют наборы $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ и $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$.

Пусть они различаются в разрядах $i_1, \ldots, i_k$. Тогда в наборе α они равны 0, а в наборе β — 1.

Рассмотрим последовательность наборов $\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k$ таких, что $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}_0 < \widetilde{\alpha}_1 < \ldots < \widetilde{\alpha}_k = \widetilde{\beta}$, при этом $\widetilde{\alpha}_{i+1}$ получается из $\widetilde{\alpha}_i$ заменой одного из нулей в позициях $i_1, \ldots, i_k$ на единицу.

Lemma (О немонотонной функции)

Из любой немонотонной ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, подставляя вместо всех переменных функции $x, 0, 1$ можно получить функцию $\phi(x) \equiv \bar{x}$.

Доказательство. Пусть $f \notin M$. Тогда существуют наборы $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ и $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$.

Пусть они различаются в разрядах $i_1, \ldots, i_k$. Тогда в наборе α они равны 0, а в наборе β — 1.

Рассмотрим последовательность наборов $\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k$ таких, что $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}_0 < \widetilde{\alpha}_1 < \ldots < \widetilde{\alpha}_k = \widetilde{\beta}$, при этом $\widetilde{\alpha}_{i+1}$ получается из $\widetilde{\alpha}_i$ заменой одного из нулей в позициях $i_1, \ldots, i_k$ на единицу.

Среди рассмотренных наборов найдутся два таких, что $f(\widetilde{\alpha}_i) = 1, f(\widetilde{\alpha}_{i+1}) = 0$.

Предположим, что они отличаются в i-том разряде.
Определим функцию $\phi(x) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, x, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$.

Предположим, что они отличаются в i-том разряде. Определим функцию $\phi(x) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, x, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$. Но тогда $\phi(0) = f(\widetilde{\alpha_i}) = 1$, $\phi(1) = f(\widetilde{\alpha_{i+1}}) = 0$, $\phi(x) \equiv \bar{x}$.

$\square$

Lemma (О нелинейной функции.)

Из любой нелинейной функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, подставляя вместо всех переменных $x, \bar{x}, y, \bar{y}, 0, 1$, можно получить $\phi(x, y) = x \cdot y$ или $\phi(x, y) = \overline{x \cdot y}$.

Доказательство. Пусть $f \notin L$. В полиноме Жегалкина этой функции присутствуют слагаемые вида $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots$. Предположим, что $i_1 = 1, i_2 = 2$ и т.д. Тогда:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) = \\ x_1 \cdot x_2 \cdot P_1(x_3, \ldots, x_n) \oplus x_1 \cdot P_2(x_3, \ldots, x_n) \\ \oplus x_2 \cdot P_3(x_3, \ldots, x_n) \oplus P_4(x_3, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

причем $P_1(x_3, \ldots, x_n) \neq 0$.

Это означает, что $\exists a_3, a_4, \ldots, a_n$ такие, что $P_1(a_3, a_4, \ldots, a_n) = 1$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$f(x_1, x_2, a_3, a_4, \ldots, a_n) = x_1 x_2 \cdot 1 \oplus x_1 \cdot b \oplus x_2 \cdot c \oplus d$.

Это означает, что $\exists a_3, a_4, \ldots, a_n$ такие, что $P_1(a_3, a_4, \ldots, a_n) = 1$.
Рассмотрим вспомогательную функцию $f(x_1, x_2, a_3, a_4, \ldots, a_n) = x_1 x_2 \cdot 1 \oplus x_1 \cdot b \oplus x_2 \cdot c \oplus d$.
Тогда

$$\begin{aligned} & f(x \oplus c, y \oplus b, a_3, a_4, \ldots, a_n) \\ &= (x \oplus c)(y \oplus b) \oplus (x \oplus c)b \oplus (y \oplus b)c \oplus d \\ &= xy \oplus b \cdot x \oplus c \cdot y \oplus bc \oplus x \cdot b \oplus bc \oplus yc \oplus bc \oplus d \\ &= xy \oplus (bc \oplus d) = \begin{cases} xy, bc \oplus d & = & 0 \\ \overline{xy}, bc \oplus d & = & 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Theorem (Теорема Поста)

Система функций алгебры логики $A = \{f_1, f_2, \ldots\}$ является полной в P_2 тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из следующих классов: T_0, T_1, S, L, M.

Доказательство. Необходимость.

Пусть A — полная система, N — любой из классов T_0, T_1, S, L, M и пусть $A \subseteq N$.

Theorem (Теорема Поста)

Система функций алгебры логики $A = \{f_1, f_2, \ldots\}$ является полной в P_2 тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из следующих классов: T_0, T_1, S, L, M.

Доказательство. Необходимость.

Пусть A — полная система, N — любой из классов T_0, T_1, S, L, M и пусть $A \subseteq N$.

Тогда $[A] \subseteq [N] = N \neq P_2$ и $[A] \neq P_2$.

?!

Достаточность. Пусть A не содержится ни в одном указанных классов $\Rightarrow$ в A существуют функции $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_M \notin M, f_L \notin L, f_S \notin S$.

Достаточность. Пусть A не содержится ни в одном указанных классов $\Rightarrow$ в A существуют функции $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_M \notin M, f_L \notin L, f_S \notin S$.
Нам необходимо показать, что $[A] \supseteq [f_0, f_1, f_M, f_L, f_S] = P_2$.
Для этого получим отрицание, константы и конъюнкции.

Достаточность. Пусть A не содержится ни в одном указанных классов $\Rightarrow$ в A существуют функции $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_M \notin M, f_L \notin L, f_S \notin S$.

Нам необходимо показать, что $[A] \supseteq [f_0, f_1, f_M, f_L, f_S] = P_2$.

Для этого получим отрицание, константы и конъюнкции.

I. Получение $\bar{x}$. Рассмотрим $f_0(x_1, \ldots, x_n) \notin T_0$ и введем функцию $\phi_0(x) = f_0(x, x, \ldots, x)$. Функция f_0 не сохраняет 0, $\phi_0(0) = f(0, \ldots, 0) = 1$.

$\phi_0(x)$ — функция одной переменной, значит, либо $\phi_0(x) = \bar{x}$, либо $\phi_0(x) \equiv 1$.

Достаточность. Пусть A не содержится ни в одном указанных классов $\Rightarrow$ в A существуют функции $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_M \notin M, f_L \notin L, f_S \notin S$.

Нам необходимо показать, что $[A] \supseteq [f_0, f_1, f_M, f_L, f_S] = P_2$.

Для этого получим отрицание, константы и конъюнкции.

I. Получение $\bar{x}$. Рассмотрим $f_0(x_1, \dots, x_n) \notin T_0$ и введем функцию $\phi_0(x) = f_0(x, x, \dots, x)$. Функция f_0 не сохраняет 0, $\phi_0(0) = f(0, \dots, 0) = 1$.

$\phi_0(x)$ — функция одной переменной, значит, либо $\phi_0(x) = \bar{x}$, либо $\phi_0(x) \equiv 1$.

То же самое проделаем с функцией $f_1 \notin T_1$. Построенная в этом случае аналогичным образом функция $\phi_1(x)$ принимает либо $\phi_1(x) = \bar{x}$, либо $\phi_1(x) \equiv 0$.

Достаточность. Пусть A не содержится ни в одном указанных классов $\Rightarrow$ в A существуют функции $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_M \notin M, f_L \notin L, f_S \notin S$.
Нам необходимо показать, что $[A] \supseteq [f_0, f_1, f_M, f_L, f_S] = P_2$.
Для этого получим отрицание, константы и конъюнкции.
I. Получение $\bar{x}$. Рассмотрим $f_0(x_1, \dots, x_n) \notin T_0$ и введем функцию $\phi_0(x) = f_0(x, x, \dots, x)$. Функция f_0 не сохраняет 0, $\phi_0(0) = f(0, \dots, 0) = 1$.
$\phi_0(x)$ — функция одной переменной, значит, либо $\phi_0(x) = \bar{x}$, либо $\phi_0(x) \equiv 1$.
То же самое проделаем с функцией $f_1 \notin T_1$. Построенная в этом случае аналогичным образом функция $\phi_1(x)$ принимает либо $\phi_1(x) = \bar{x}$, либо $\phi_1(x) \equiv 0$.
Если хотя бы в одном из случаев получили отрицание, хорошо. Если не получили - применяем лемму о немонотонной функции для двух констант.

II. Получение $0, 1$. Рассмотрим $f_s \notin S$. Согласно лемме о несамодвойственной функции, с учетом полученного в п.1 отрицания, строим константы.

II. Получение $0, 1$. Рассмотрим $f_S \notin S$. Согласно лемме о несамодвойственной функции, с учетом полученного в п.1 отрицания, строим константы.
III. Получение конъюнкции $x \cdot y$. Рассмотрим функцию $f_L \notin L$. Подставим в нее вместо всех переменных константы и отрицания, полученные в предыдущих пунктах. В результате получим конъюнкцию или ее отрицание.

II. Получение $0, 1$. Рассмотрим $f_s \notin S$. Согласно лемме о несамодвойственной функции, с учетом полученного в п.1 отрицания, строим константы.

III. Получение конъюнкции $x \cdot y$. Рассмотрим функцию $f_L \notin L$. Подставим в нее вместо всех переменных константы и отрицания, полученные в предыдущих пунктах. В результате получим конъюнкцию или ее отрицание.

Итого: $[f_0, f_1, f_L, f_S, f_M] \supseteq [\bar{x}, xy] = P_2$. $\square$

Definition

Система функций алгебры логики A называется базисом в P_2, если

1. $[A] = P_2$;
2. $\forall f \in A : [A \setminus \{f\}] \neq P_2$.

Definition

Система функций алгебры логики A называется базисом в P_2, если

1. $[A] = P_2$;
2. $\forall f \in A : [A \setminus \{f\}] \neq P_2$.

Theorem

Максимальное число функций в базисе алгебры логики равно 4.

Доказательство. Покажем, что из любой полной системы можно выделить полную подсистему, содержащую не более 4 функций.
По теореме Поста, из полной системы A можно выделить пять функций: $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_L \notin L, f_S \notin S, f_M \notin M$ — образующих также полную систему. Рассмотрим подробнее функцию $f_0 : f_0(0, \ldots, 0) = 1$:

- $f_0(1, \ldots, 1) = 1 \Rightarrow f_0 \notin S \Rightarrow [f_0, f_1, f_L, f_M] = P_2$.
- $f_0(1, \ldots, 1) = 0 \Rightarrow f_0 \notin M, T_1 \Rightarrow [f_0, f_L, f_S] = P_2$.

Продолжение доказательства. Теперь нужно показать, что такой базис из четырех функций действительно существует. Рассмотрим систему $\{0, 1, xy, x \oplus y \oplus z\}$. Эта система полна.

Продолжение доказательства. Теперь нужно показать, что такой базис из четырех функций действительно существует. Рассмотрим систему $\{0, 1, xy, x \oplus y \oplus z\}$. Эта система полна. Но каждая ее подсистема не является полной:

- $\{0, 1, x \cdot y\} \subseteq ?$;
- $\{0, 1, x \oplus y \oplus z\} \subseteq ?$;
- $\{0, xy, x \oplus y \oplus z\} \subseteq ?$;
- $\{1, xy, x \oplus y \oplus z\} \subseteq ?$.

Продолжение доказательства. Теперь нужно показать, что такой базис из четырех функций действительно существует. Рассмотрим систему $\{0, 1, xy, x \oplus y \oplus z\}$. Эта система полна. Но каждая ее подсистема не является полной:

- $\{0, 1, x \cdot y\} \subseteq M$;
- $\{0, 1, x \oplus y \oplus z\} \subseteq L$;
- $\{0, xy, x \oplus y \oplus z\} \subseteq T_0$;
- $\{1, xy, x \oplus y \oplus z\} \subseteq T_1$.

$\square$

Definition

Пусть $A \subseteq P_2$. A называется предполным классом, если

1. $[A] \neq P_2$;
2. $\forall f \in P_2$ справедливо: если $f \notin A$, то $[A \cup \{f\}] = P_2$.

Theorem (О предполных классах)

В P_2 предполными являются только следующие 5 классов: T_0, T_1, S, L, M.

Доказательство. Покажем сначала, что ни один из этих пяти классов не содержится в другом.

$\in$ \ $\notin$	T_0	T_1	L	M	S
T_0		0	xy	$x \oplus y$	0
T_1	1		xy	$x \oplus y \oplus 1$	1
L	1	0		$x \oplus y$	0
M	1	0	xy		0
S	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$xy \oplus yz \oplus zx$	$\bar{x}$	

Продолжение доказательства. Покажем теперь, что все эти классы — предполные. Пусть $N \in \{T_0, T_1, L, M, S\}$, $f \notin N$. Тогда система $N \cup \{f\}$ не содержится ни в одном из пяти классов Поста. Но тогда система $N \cup f$ — полная, а N — предполный класс.

Продолжение доказательства. Покажем теперь, что все эти классы — предполные. Пусть $N \in \{T_0, T_1, L, M, S\}$, $f \notin N$. Тогда система $N \cup \{f\}$ не содержится ни в одном из пяти классов Поста. Но тогда система $N \cup f$ — полная, а N — предполный класс.

Пусть теперь A — предполный класс. Тогда A не содержится в одном из классов $\{T_0, T_1, L, M, S\}$, назовем этот класс N.

Продолжение доказательства. Покажем теперь, что все эти классы — предполные. Пусть $N \in \{T_0, T_1, L, M, S\}$, $f \notin N$. Тогда система $N \cup \{f\}$ не содержится ни в одном из пяти классов Поста. Но тогда система $N \cup f$ — полная, а N — предполный класс.

Пусть теперь A — предполный класс. Тогда A не содержится в одном из классов $\{T_0, T_1, L, M, S\}$, назовем этот класс N. Если $A \neq N$, то $f : f \in N, f \notin A$ такая, что $A \cup \{f\} \subseteq N \Rightarrow [A \cup \{f\}] \neq P_2$?!. Значит, A совпадает с указанным N.

Общие результаты, полученные Постом относительно класса P_2:

1. В P_2 существует ровно счетное число замкнутых классов.
2. В любом замкнутом классе существует конечный базис.