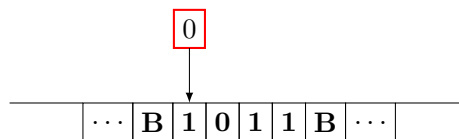


Objectif et exemple simple.

L'objectif de ce PFE est de bien comprendre la notion de machine de Turing, un modèle mathématique du concept d'algorithme. Un bon manuscrit de ce PFE doit comporter au moins :

1. Un historique sur la machine de Turing à un ou plusieurs rubans.
2. Lien entre la machine de Turing et un algorithme.
3. Quelques notions de complexité des algorithmes.
4. Comprendre la représentation d'une machine de Turing à l'aide d'un diagramme ressemblant à celui que vous avez vu en théorie des graphes.
5. Présentation d'exemples simples de machines de Turing réalisant une tâche donnée.

Une fois la notion de machine de Turing est bien assimilée, vous pouvez regarder l'exemple très simple suivant d'une machine de Turing qui incrémente de 1 un nombre binaire donné. Ce binaire est écrit sur le ruban :



Le binaire **1011** est donné juste à titre d'exemple. Comme vous pouvez le voir, la tête est placée au bit fort du binaire et la machine se trouve à l'état initial 0. Le fonctionnement de cette machine se fait à l'aide de la fonction de transition ou encore à l'aide d'un nombre fini d'instructions chacune ayant la forme suivante :

$$(p, a, b, A, q) \quad (1)$$

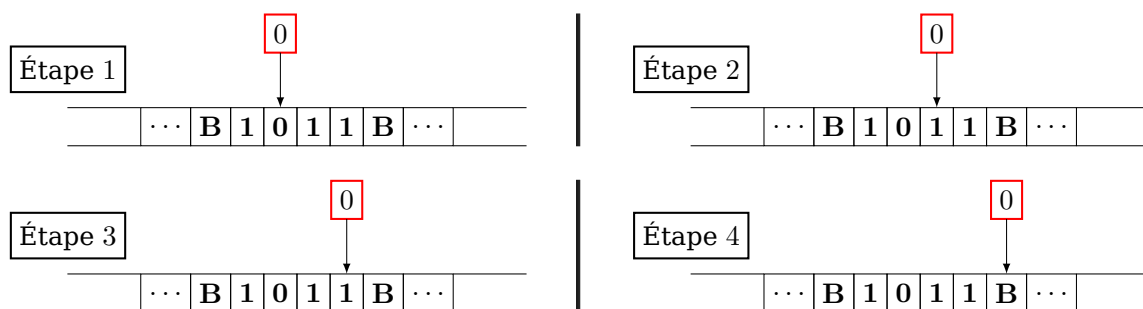
où dans ce cas, on doit comprendre que la machine est à l'état p et sa tête de lecture pointe sur le caractère a . L'exécution de l'instruction se fait en effaçant le caractère a et en le remplaçant par b puis ensuite en déplaçant la tête de lecture à droite si l'action est $A = \mathbf{R}$ et à gauche si $A = \mathbf{L}$ et enfin la machine passe à l'état q .

Dans notre cas, d'incrémement par 1, on déplace à droite la tête de lecture jusqu'à ce qu'on rencontre un caractère blanc **B** sans changer d'état ni de caractère. Cela peut être réalisé par les instructions :

1 : $(0, 0, 0, \mathbf{R}, 0)$.

2 : $(0, 1, 1, \mathbf{R}, 0)$

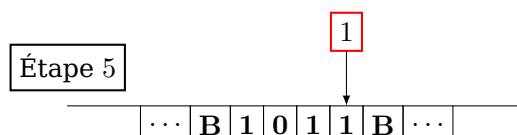
qui conduisent étape par étape aux situations :



On passe de l'étape 4 à l'étape 5 en changeant l'état 0 par 1 et en déplaçant à gauche la tête de lecture pour retrouver le bit faible. Cela se résume en l'instruction :

3 : $(0, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{L}, 1)$

qui conduit à la situation :



On traite maintenant notre binaire de droite vers la gauche sachant que l'état actuel de la machine est 1 de la manière suivante : Si on rencontre 1, on le remplace par 0 et on déplace à gauche la tête de lecture sans changer d'état, c'est ce qui est résumé par l'instruction :

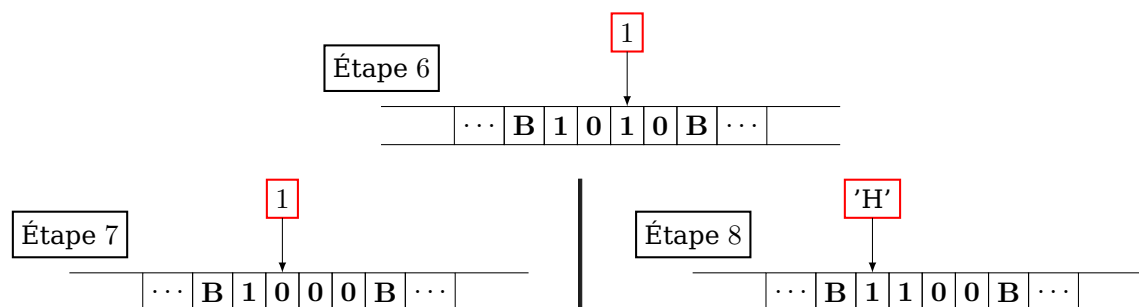
4 : (1, 1, 0, L, 1)

Si on rencontre le caractère 0 ou le caractère B, on le remplace par 1, on déplace à gauche la tête de lecture et la machine passe à l'état final 'H', c'est ce qui est résumé par les instructions :

5 : (1, 0, 1, L, 2)

6 : (1, B, 1, L, 2)

Dans notre cas du binaire 1011, voici les étapes qui restent :



Lorsqu'on arrive à l'état final 'H', les traitements s'arrêtent. Le résultat est le binaire écrit sur le ruban.

Application

Pour la partie application, vous pouvez simuler une (des) machine(s) de Turing réalisant une (différentes) tâche(s). Dans la Figure 1 ci-dessous, on voit les étapes expliquées plus haut pour l'incréméntation du binaire 1011.

Figure 1 – Machine pour incrémenter un binaire.

L'application doit inclure une base de données de machines de Turing qui réalisent chacune une tâche donnée. L'utilisateur a le choix entre ces tâches. Imaginons qu'une tâche consiste à faire la somme de deux binaires. Une fois cette tâche est choisie par l'utilisateur, ce dernier est invité à entrer ses binaires. L'application

- lui affiche un ruban sur lequel est écrit ses binaires séparés par un caractère spécial,
- lui affiche une tête de lecture et vers quoi elle pointe et l'état initial,
- l'invite à démarrer sa tâche,
- lui montre ce que fait la machine, comme la Figure 1, étape par étape avant d'arriver à la dernière étape où on trouve le ruban avec le résultat de la somme et l'état final.