伴随矩阵的多种求法及对比

摘要：给出了利用矩阵的特征多项式和利用矩阵初等变换求矩阵的伴随矩阵的三种简便方法，并与矩阵教材中给出的求法进行比较。

关键词：伴随矩阵、特征多项式、初等行变换、可逆矩阵

1. 伴随矩阵相关定义

定义1[1]　设A_{ij}是矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 中元素a_{ij}的代数余子式，矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$ 称为矩阵A的伴随矩阵。

定理1[1]　矩阵A可逆的充分必要条件是A非退化，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$。

推论1　$AA^*=A^*A=|A|I$，I为一阶单位矩阵。

2. 矩阵教材中给出的方法（简称方法一）

矩阵教材中介绍的求伴随矩阵的方法是利用代数余子式。求解步骤如下：

1）把矩阵 A 的各个元素换成它相应的代数余子式 A_{ij}；

（余子式定义：在一个 n 阶行列式 A 中，把(i,j)元所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 n-1 阶行列式叫做(i,j)元 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}）

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，其中 A_{ij} 叫做(i,j)元 a_{ij} 的代数余子式。

2）将所得到的矩阵转置便得到 A 的伴随矩阵。

3. 利用矩阵的特征多项式求可逆矩阵的伴随矩阵（简称方法二）

定理 2[2]　设 $A=(a_{ij})$ 是数域 F 上一个 n 阶矩阵，A 的特征多项式为

$f_A(\lambda)=\lambda^n+k^{n-1}+\cdots+k_1\lambda+k_0$，若 A 可逆，则 A 的逆矩阵

$$A^{-1}=\frac{A^{n-1}+k_{n-1}A^{n-2}+\cdots+k_1I_n}{-k_0} \tag{1}$$

推论 2　设 $A=(a_{ij})$ 是数域 F 上的一个 n 阶矩阵，$f_A(\lambda)=\lambda^n+k^{n-1}+\cdots+k_1\lambda+k_0$ 是 A 的特征多项式。若 A 可逆，则 A 的伴随矩阵

$$A^*=(-1)^{n-1}(A^{n-1}+k_{n-1}A^{n-2}+\cdots+k_1I_n) \tag{2}$$

证明：

因 A 可逆，且 $f_A(\lambda)=\lambda^n+k^{n-1}+\cdots+k_1\lambda+k_0$ 是矩阵 A 的特征多项式，据定理 2，

$$A^{-1}=\frac{A^{n-1}+k_{n-1}A^{n-2}+\cdots+k_1I_n}{-k_0}=\frac{A^{n-1}+k_{n-1}A^{n-2}+\cdots+k_1I_n}{-(-1)|A|}=(-1)^{n-1}\frac{A^{n-1}+k_{n-1}A^{n-2}+\cdots+k_1I_n}{|A|}$$

而 A 的逆矩阵
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

故
$$A^*=(-1)^{n-1}(A^{n-1}+k_{n-1}A^{n-2}+\cdots+k_1I_n).$$

证毕。

4. 利用矩阵的初等变换求可逆矩阵的伴随矩阵

1）仅利用初等行变换或者初等列变换求解（简称方法三）

由矩阵的初等变换理论知，若 n 阶方阵 A 可逆，则可通过对其进行初等行变换求 A^{-1}，即 $(A\mid E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\mid A^{-1})$，同理可导出以下定理。

定理 3[4]　设 A 为 n 阶可逆方阵，作 $n\times 2n$ 矩阵 $(\frac{1}{|A|}A\mid E)$，用初等行变换将其左边的一半化成 E，则右边的一半就是 A^*.

证明：　由初等行变换理论知，若 A 可逆，则有

$$(\frac{1}{|A|}A\mid E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\mid(\frac{1}{|A|}A)^{-1})$$

又
$$(\frac{1}{|A|}A)^{-1}=|A|A^{-1}=A^*$$

因此

$$(\frac{1}{|A|}A\mid E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\mid A^{*}) \tag{3}$$

结论成立。

也可利用矩阵的初等列变换求 A^{*}, 即 $\left(\dfrac{\frac{1}{|A|}A}{E}\right)_{2n\times n}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\left(\dfrac{E}{A^{*}}\right)$.

2）利用矩阵的初等变换求解（简称方法四）

在传统的求伴随矩阵的方法中，当矩阵级数较大时，其计算就显得非常繁琐。对此，文献[3]给出了一种用初等变换求伴随矩阵的新方法，由于矩阵的初等变换在整个线性代数理论中应用非常广泛，因此这种新方法非常容易掌握，是一种简便易行的方法．文献[3]给出的方法如下：

定理4[3]　设A是一个n阶方阵，秩$(A)=r$，且 $PAQ=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，则

$$A^{*}=\frac{1}{|P||Q|}Q\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & E_r\end{bmatrix}P \tag{4}$$

其中P, Q都是n阶可逆方阵，k由如下所得

$$\mathrm{k}=\begin{cases}n, r=n\\ 1, r=n-1\\ 0, r<n-1\end{cases} \tag{5}$$

当n阶矩阵A是满秩的，则A是可逆的，并且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$，从而 $A^{*}=|A|A^{-1}$。对矩阵A，我们只需施行初等行变换就能将其化为标准形。当n级矩阵A的秩小于n-1时，$A^{*}=0$。据此，对文献[3]的方法简化如下：

设A是一个n阶方阵，

1）构造矩阵$(A\mid E)$，并对其施行初等行变换，将A化为简化的行阶梯矩阵J，E就能华为矩阵P，即$(A\mid E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\mathrm{J}\mid\mathrm{P})$.

2） 若秩$(J)=n$，则A是可逆的，且 $A^{-1}=P$，$|A|=\frac{1}{|P|}$，故 $A^{*}=\frac{1}{|P|}P$.

3）若秩$(J)=n-1$，则继续构造矩阵$(\frac{J}{E})$，并对其施行初等列变换，将J化为标准型$\mathrm{E}_n^{(n-1)}$，E就化为矩阵Q，即 $(\frac{J}{E})\underline{\text{初等行变换}}\left(\dfrac{\mathrm{E}_n^{(n-1)}}{Q}\right)$.

这样，运用（4）式，故 $A^{*}=\frac{1}{|P||Q|}Q\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{r}\end{bmatrix}P$.

4）若秩$\left(J\right)<n-1$，则秩$(A^{*})=0$，故 $A^{*}=0$.

5. 四种方法对比

对于二阶、三阶的低阶矩阵，线代教材上给出的求代数余子式来求伴随矩阵的方法可以很简便的求解。 对于$n\times n$矩阵A，求其伴随矩阵A^{*},实际上归结为计算n^{2}个n-1 级行列式，随着矩阵阶数的增大，其计算量会迅速增大。

以下用一个四阶的矩阵A来比较四种方法的简便程度。

例 设$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，求$A^{*}$.

方法一：

矩阵A中各元素a_{ij}的代数余子式分别为：

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-3$； $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-5$； $A_{13}=2$； $A_{14}=3$；

$A_{21}=-2$； $A_{22}=1$； $A_{23}=-3$； $A_{24}=2$； $A_{31}=6$； $A_{32}=-3$； $A_{33}=-4$； $A_{34}=7$；

$A_{41}=-5$； $A_{42}=-4$； $A_{43}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1$；

$A_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-8$

因此，

$$A^{*}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43}\\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 6 & -5\\ -5 & 1 & -3 & -4\\ 2 & -3 & -4 & -1\\ 3 & 2 & 7 & -8\end{bmatrix}$$

方法二：

A 的特征多项式为 $f_A(\lambda)=\lambda^4-2\lambda^3-4\lambda^2+14\lambda-13$。由 $|A|=-13$ 可知矩阵 A 可逆。

$$A^3=\begin{vmatrix}1 & 2 & -12 & -5\\ 9 & -11 & 5 & -4\\ -6 & 5 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 5 & -2\end{vmatrix},\quad A^2=\begin{vmatrix}4 & -2 & -1 & -3\\ -2 & 4 & -3 & -2\\ 0 & -1 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 4 & 0\end{vmatrix}$$

根据推论 2 中公式 $A^*=(-1)^{n-1}(A^{n-1}+k_{n-1}A^{n-2}+\cdots+k_1I_n)$，有

$$\begin{aligned}A^*&=(-1)^3(A^3-2A^2-4A+14I)\\&=-\begin{bmatrix}1 & 2 & -12 & -5\\ 9 & -11 & 5 & -4\\ -6 & 5 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 5 & -2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}4 & -2 & -1 & -3\\ -2 & 4 & -3 & -2\\ 0 & -1 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 4 & 0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}-14\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 6 & -5\\ -5 & 1 & -3 & -4\\ 2 & -3 & -4 & -1\\ 3 & 2 & 7 & -8\end{bmatrix}\end{aligned}$$

方法三：

$$\left(\frac{1}{|A|}A\,|\,E\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} & 1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{1}{13} & 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 6 & -5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 7 & -8\end{pmatrix}$$

由定理 3 中公式 $(\frac{1}{|A|}A\,|\,E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\,|\,A^*)$ 知，

$$A^*=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 6 & -5\\ -5 & 1 & -3 & -4\\ 2 & -3 & -4 & -1\\ 3 & 2 & 7 & -8\end{bmatrix}$$

方法四：

构造矩阵 $(A\,|\,E)$，并对其施行初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1&0&0&0\\2&-1&2&-1&0&1&0&0\\-1&1&1&0&0&0&1&0\\0&1&1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{3}{13}&\frac{2}{13}&\frac{-6}{13}&\frac{5}{13}\\0&1&0&0&\frac{5}{13}&-\frac{1}{13}&\frac{3}{13}&\frac{4}{13}\\0&0&1&0&\frac{-2}{13}&\frac{3}{13}&\frac{4}{13}&\frac{1}{13}\\0&0&0&1&-\frac{3}{13}&-\frac{2}{13}&-\frac{7}{13}&\frac{8}{13}\end{pmatrix}.$$

这样，

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}\frac{3}{13}&\frac{2}{13}&-\frac{6}{13}&\frac{5}{13}\\\frac{5}{13}&-\frac{1}{13}&\frac{3}{13}&\frac{4}{13}\\-\frac{2}{13}&\frac{3}{13}&\frac{4}{13}&\frac{1}{13}\\-\frac{3}{13}&-\frac{2}{13}&-\frac{7}{13}&\frac{8}{13}\end{bmatrix}.$$

由于秩$\left(J\right)=4$，则 A 是可逆的，且 $A^{-1}=P$，$|A|=\dfrac{1}{|P|}$，

故

$$A^*=\frac{1}{|P|}P=\begin{bmatrix}-3&-2&6&-5\\-5&1&-3&-4\\2&-3&-4&-1\\3&2&7&-8\end{bmatrix}.$$

从例题的计算中不难看出，对于 4 阶矩阵，方法一需要计算 16 个代数余子式，即 16 步运算；方法二需要计算矩阵特征多项式 $f_A(\lambda)$、A^3、A^2 以及 $A^*=(-1)^3(A^3-2A^2-4A+14I)$，需要四步计算，但每一步计算量较大；方法三需要对矩阵 A 进行多步初等行变换，虽然计算量不是很大，但容易出错，一步错，满盘输；方法四在本例题中是秩$(\mathrm{J})=\mathrm{n}$ 的情况，故在对$\left(A\mid E\right)$进行初等行变换之后就得到了 A^{-1} 进而得到 A^*。

下面用一个例子来看方法四中秩$\left(J\right)=n-1$的情况。

例 $A=\begin{bmatrix}1&1&2&1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\2&2&2&2\end{bmatrix}$，求 A^*.

构造矩阵$(A|E)$，并对其施行初等行变换，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

这样，

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

由于秩$(J)=3$，则继续构造矩阵$(\dfrac{J}{E})$，并对其施行初等列变换。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这样，

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

故$|P| = \dfrac{1}{2}$，$|Q| = 1$。因为秩$(A)=3$，由定理 4 可知$k=1$，则

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

由定理 4，得

$$A^{*}=2\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&2&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-2&-2&-2&2\end{bmatrix}.$$

通过以上例题，不难发现，方法一和方法四可以求解不可逆矩阵的伴随矩阵，而方法二和方法三只能用来求解可逆矩阵的伴随矩阵。

对于 n 阶矩阵而言，方法一的计算量是非常巨大的；方法二对于 $n>4$ 阶的矩阵而言计算量也足够大，在计算得到矩阵 A 的特征多项式后还要求 A^2~A^{n-1}；方法四若为秩 $\left(J\right)<n$ 的情况，不仅要进行初等行变换，还要进行初等列变换，更易出错。反而方法三显得更为简便，只需要对矩阵 A 进行初等行变换或者初等列变换就能得到相应伴随矩阵，但是方法三无法求不可逆矩阵的伴随矩阵，也是一大弊病。

综上，对于以上四种求矩阵的伴随矩阵的方法，我们可以根据矩阵是否可逆选择方法一、四或者二、三，再根据矩阵的阶数选择相应更简便的方法。针对不同情况，合理应用四种方法，以达到简便求解伴随矩阵的目的。

参考文献

[1] 屠伯埙，徐诚浩，王芬. 高等代数[M]. 上海：上海科学技术出版社，1987.

[2] 黄光鑫. 一种关于求可逆矩阵的新方法[J]. 重庆师范学院学报（自然科学版），2002.3,9(1):35-36.

[3] 左连翠．伴随矩阵的新求法[J]．山东轻工业学院学报，1997,11(4):79-81.

[4] 刘敬. 伴随矩阵的一种简便求法[J]. 辽宁工学院学报，1999.4,19(2):75-76.

联系方式：18795958023