Question 1.

Preuve $2^n \in \Omega(4^n)$

Où déf: $\Omega(f(n)) = \{g : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \mid (\exists c \in \mathbb{R}^{>0})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[g(n) \geq c \cdot f(n)]$

$C = \frac{1}{2}$ et $n_0 = 1$

Contre-exemple invalide

$n = 2 \geq n_0.$

$g(n) \geq c \cdot f(n)$

$\Downarrow$

$2^2 \geq \frac{1}{2} \cdot 4^2$

$4 \geq 8 \Rightarrow$ invalide

Preuve

$2^n \in \Omega(4^n)$

$4^n = (2^2)^n = 2^{2n} = 2^n \cdot 2^n \geq 2^n \quad \forall n \geq 0.$

Donc $2^n \geq c \cdot 4^n \Rightarrow$ invalide $\quad 2^n \notin \Omega(4^n)$

Question 2. $2^n \in \Omega(4^n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{2n}} \quad (1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(2^n)}{\lg(2^{2n})} \quad (2)$$

(2) invalide.

Contre exemple: si $n=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(2^n)}{\lg(2^{2n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(1)}{\lg(1)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{0}{0} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{2n}} \ (1)$$

(forme indéterminée)

correction:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{2n}} \quad (1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (2)$$

$$= 0. \Rightarrow 2^n \notin \Omega(4^n)$$

Question 3.

$$\Omega(f(n)) = \{t(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \mid (\exists c \in \mathbb{R}^{\geq 0})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ f(n) \geq c f(n)\}$$

erreur 1 : $\exists c \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ doit être remplacé par

$\exists c \in \mathbb{R}^{>0}$.

Car si $c = 0$, n'importe quelle fonction positive peut être assymptotiquement plus grande que n'importe quelle fonction

contre exemple

$f(n) \in \Omega(n)$ où $f(n) = 1$. (constante)

si $c = 0$, $n \cdot 0 = 0$, $f(n) = 1 > 0$. donc $1 \in \Omega(n)$ ce qui n'est absolument pas vrai.

erreur 2 : $f(n) \geq c \cdot f(n)$ doit être remplacé par $t(n) \geq c \cdot f(n)$

car $\forall c : 0 < c \leq 1$, $f(n) \geq c \cdot f(n)$ est toujours vrai.

définition formelle :

$$\Omega(f(n)) = \{t(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0} \mid (\exists c \in \mathbb{R}^{>0})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ t(n) \geq c \cdot f(n)\}.$$

Question 4:

$$(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\ x \geq y \Leftrightarrow \qquad (1)$$

$$(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})\ x \geq y \Leftrightarrow. \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2) ne sont pas équivallentes:
cela change le sens de la formule.
formule (1): Il existe une valeur de x, et POUR CE X: tous les valeurs de $y \in \mathbb{N}$ sont plus petites ou égaux à cette valeur de x.

(2): Pour tous les valeurs de $y \in \mathbb{N}$, il existe une valeur de x POUR CHACUNE des valeur de y: $x \geq y$.

La différence entre ces deux formules est:
pour (1), il existe une x unique pour tous les y. (X unique)
pour (2), pour tous les y, il y a une valeur de x pour chaque y. (plusieurs x)

Question 5:

Soit f et g deux fonctions $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ t.q. $f(n) < g(n)$ $\forall n \geq n_0$.

Alors $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

L'erreur se trouve dans $f(n) < g(n)$, qui doit être remplacé par $f(n) \in O(g(n))$.

Contre-exemple: soit $f(n) = n-1$ où $f(n) < g(n)$
$g(n) = n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n} = 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 1 \neq 0.$$

Donc, l'énoncé n'est pas vrai.