

# 量子力学 — Quantum Mechanics

青木健一郎  
日吉物理学教室

2018年度春学期

# Contents

- ① 光と量子
- ② 粒子と波の二重性
- ③ 原子と量子力学
- ④ 観測の理論, 量子情報

# Keypoints

- 光が粒子である根拠と光電効果
- 電子が波である根拠と干渉
- 観測とその与える影響
- 不確定性原理とは？
- 原子はなぜ存在できるのか？
- 粒子と波の性質の両立と確率論的解釈
- 量子テレポーテーション，量子暗号と観測の理論

# 量子力学について — Introduction

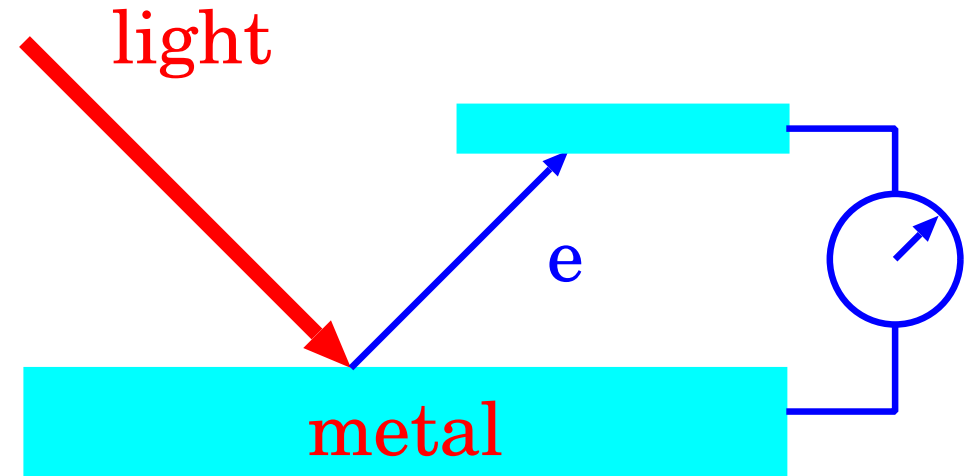
- 量子力学の物理は通常の直感に反する. ← すぐにわからなくても無理はない
- 一般に新しい概念を理解するのは難しい.
- Richard P. Feynman

*“... I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.”*

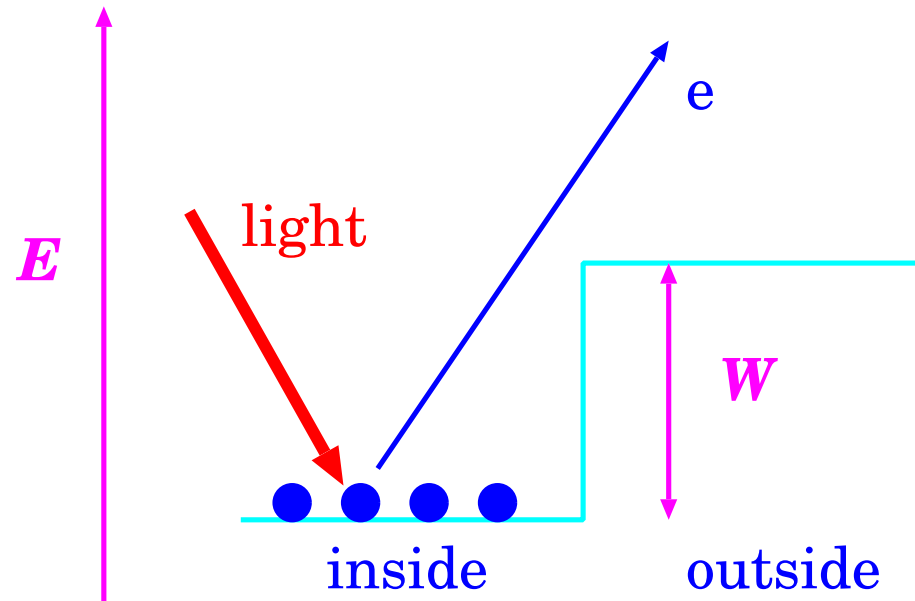
- 最終的に現象として何が観測されるのかまで考えることが重要
  - ▶ 物理現象を考えないと混乱しやすい.
  - ▶ 観測まで考えないと矛盾してしまう.
  - ▶ 思考実験でも良い.
- なぜ直感に反するのか？
  - ▶ 通常直感は日常経験で培われている.
  - ▶ 量子力学の効果が重要になるのは日常経験には無い領域である.
  - ▶ 日常生活に比べて非常に小さいスケールで重要になる.

# 光電効果 (Photoelectric effect, 1887 Hertz)

光電効果：金属に光を当てると電子が飛び出す。 ← 後期実験



- 金属：内部に自由電子が存在.
- エネルギーを与えれば電子が飛び出す. 古典力学的に考えても電子が飛び出すことは不思議ではない.



金属内部の方が電子にとってエネルギーが低い. エネルギーを光から得ることにより電子が外へ飛び出す.

# 光電効果の量子力学的性質

古典力学では理解できなかった性質 (Lenard 1902)

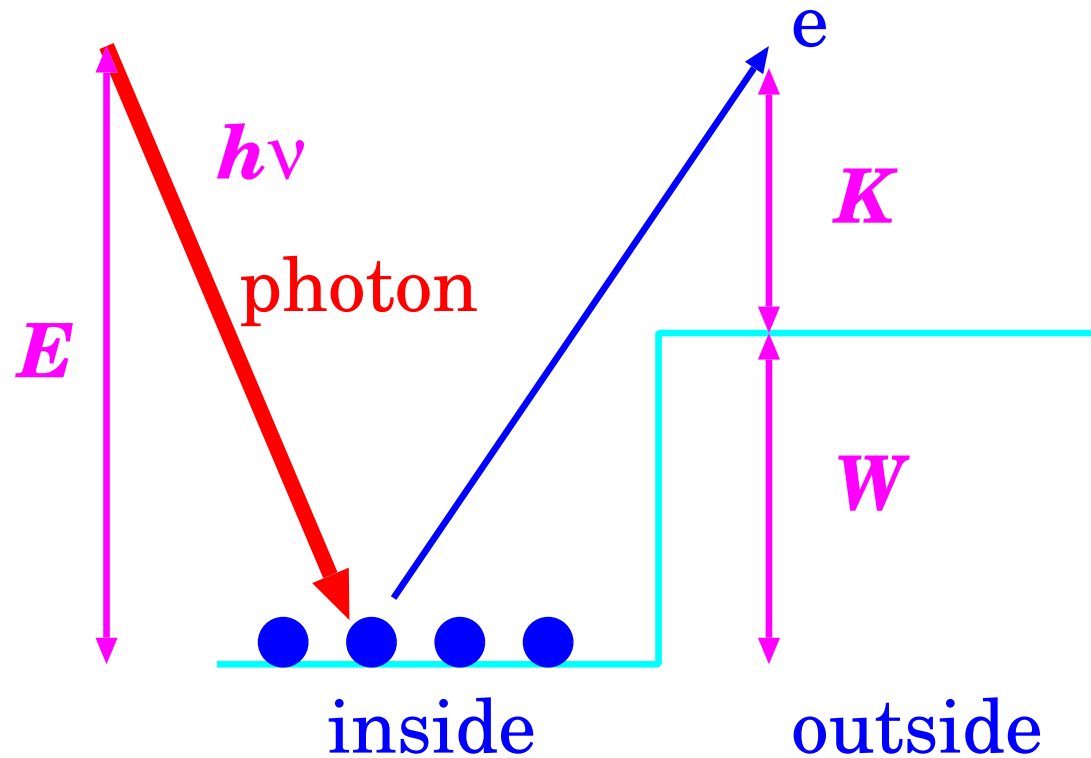
光を強くしても飛び出す各電子のエネルギーは大きくならない.

- 光の性質は強さ (単位時間あたりエネルギー) と色 (波長)
- 強くする = 波長を一定で強くする. ( eg.  $10\text{ W} \rightarrow 100\text{ W}$ )
- より多くのエネルギーを与えているのに飛び出してくる各電子のエネルギーが増えない理由は説明できない.

# 光量子仮説 (Light quantum hypothesis, Einstein 1905)

光と物体は $h\nu$ の整数倍でしかエネルギーを受け渡しをしない。

$h = 6.6 \times 10^{-34}$  Js: プランク定数.  $\nu$ : (光の) 振動数.



Einstein の光量子仮説による光電効果の解釈. 光子 1 個を電子が吸収して金属から飛び出す ( $\nu > \nu_0$  の場合).

$$E = h\nu = K + W, \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$
$$h\nu_0 = W$$

# 光量子仮説の意味

- Einstein 自身の説明 (1906)

*We must consider the following theorem to be the basis of Planck's radiation theory: the energy of a (linear material oscillator) can take on only those values that are integral multiples of  $h\nu$ ; in emission and absorption the energy of (this oscillator) changes by jumps which are integer multiples of  $h\nu$ .*

- 光が粒子の性質を持つことを意味する。「光の量子化」
- 光は光子 (**photon**) の流れ ← 現代的でシンプルな解釈
- 光は波の性質を持つ (干渉する) ことは既に知っている.
  - ▶ 粒子と波動の二重性
  - ▶ 古典力学では矛盾



# 光量子仮説より期待される光電効果の性質

- ① 光を強くしても飛び出す電子のエネルギーは大きくならない. ←  
Lenard 1902 の実験結果の説明
- ② ある振動数  $\nu_0$  を越えないと光を強くしても電子は飛び出さない
- ③ 光が弱くても振動数が  $\nu_0$  より大きければ電子は飛び出す.
- ④ (振動数が  $\nu_0$  より大きい時) 光を強くすると飛び出す電子の数は大きくなる. ← 飛び出す電子の持つ運動エネルギーと光の波長(色) の間に関係があることになるが, このような関係があること自体が量子力学無しでは理解できない.

# 光量子仮説と日常経験

- 直観には反する.
- 光量子の持つエネルギーは小さいので日常経験と矛盾はしない.
- 可視光領域の波長の光子  $h\nu \sim$  数 eV.
- 光子の数を数える. たとえば 10 W の光.

$$10 \text{ W} = nh\nu \quad \Rightarrow \quad n \sim \frac{10 \text{ W}}{7 \times 10^{-34} \text{ Js} \times 10^{15} \text{ s}^{-1}} \sim 10^{19} / \text{s}$$

- 可視光と同じ電磁波でも紫外線, X 線はなぜ「危険」なのか?  
 $\Rightarrow$  光子 1 つあたりのエネルギーが大きいため

# 光量子仮説を支持する他の物理現象

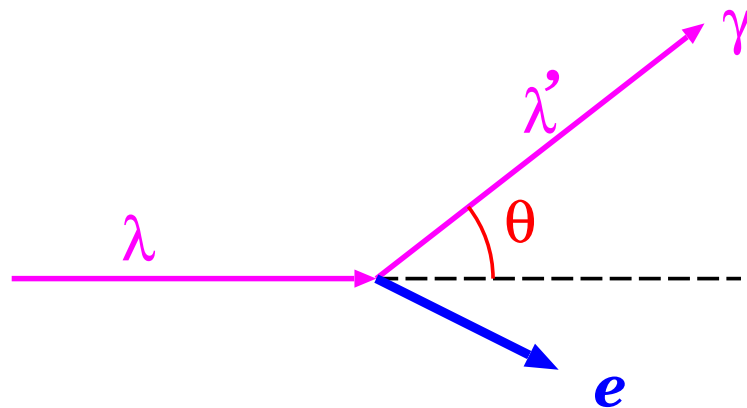
- 黒体輻射 (Black body radiation)

- ▶ 黒い物体でも有限温度であれば電磁波を放射する.
- ▶ 放射する電磁波は物体の種類によらない.
- ▶ 単位面積, 単位時間あたりに放射するエネルギーを理論的に計算すると発散する.
- ▶ Planck 有限かつ現象と一致する答を見つけた. そのために Planck 定数  $h$  を導入し, 固定した振動数を持つ光の振動を想定した (Planck 1900). ← 光子, photon
- ▶ その理屈に関しては当時なぞであった.
- ▶ 昔の理論でエネルギーが無限大の理由: 真の連続体と仮定 = 無限の自由度 (1自由度あたり温度のエネルギー)
- ▶ 光量子仮説: 光は光子の流れ  $\Rightarrow$  有限個の自由度  $\Rightarrow$  有限なエネルギー

# Compton effect, 1923

- 光をエネルギー  $h\nu = hc/\lambda$  を持つ粒子とみなすと，エネルギーが減り，その分波長が長くなる．これを観測して確かめられる．

Compton scattering. 光を電子で散乱する(電子-光子散乱).



$$\lambda' - \lambda = \frac{hc}{m_e} (1 - \cos \theta)$$

$h$ : Planck 定数,  $c$ : 真空中光速,  
 $m_e$ : 電子質量

- 現在では通常の高エネルギー/素粒子実験で光子の散乱は普通の粒子の散乱として扱われ，検証されている．

# 光量子仮説, 量子力学の歴史

- 非常に大胆な仮説.
- 実験結果とは一致. しかし 1920 頃まで他の物理学者には全く受け入れられなかったといつて良い.
- Planck, Nernst, Rubens, Warzburg, Einstein の Prussian academy への推薦状より (1913)

*In sum, one can say that there is hardly one among the great problems in which modern physics is so rich to which Einstein has not made a remarkable contribution. That he may sometimes have missed the target in his speculations, as, for example, in his hypothesis of light quanta, cannot really be held too much against him, for it is not possible to introduce really new ideas even in the most exact sciences without sometimes taking a risk.*

- Robert A. Millikan, Phys. Rev. **7**, 355 (1916). 光量子仮説を用いた Planck 定数の測定で1923 年に Nobel 賞受賞. ← 後期実験

*Despite then the apparently complete success of the Einstein equation, the physical theory of which it was designed to be the symbolic expression is found so untenable that Einstein himself, I believe, no longer holds to it.*

- なぜ？ ⇒ それ以前の物理の概念をひっくり返すものであった。特に 古典力学と矛盾。

1921 A. Einstein 光電効果に関する研究に対して Nobel 章受賞.  
Einsteinの量子力学に関するいくつかの言葉.

- 1912, To Heinrich Zangger

*The more success the quantum theory has, the sillier it looks.*

- 1936 (*J Franklin Inst.*)

*There is no doubt that quantum mechanics has seized hold of a beautiful element of truth and that it will be a touchstone for a future theoretical basis in that it must be deducible as a limiting case from that basis, just as electrostatics is deducible....*

- 1949

*The statistical quantum theory [is] the most successful theory of our period.*

- 友人 M. Besso への手紙より(1951) ← 量子力学の深遠さ.

*All these fifty years of pondering have not brought me any closer to answering the question, "What are light quanta?".*

## 光量子仮説のまとめ

- 電磁波は粒子 (光子, photon) の流れ
- 光子1個の持つエネルギーは  $h\nu = (\text{プランク定数}) \times (\text{振動数})$

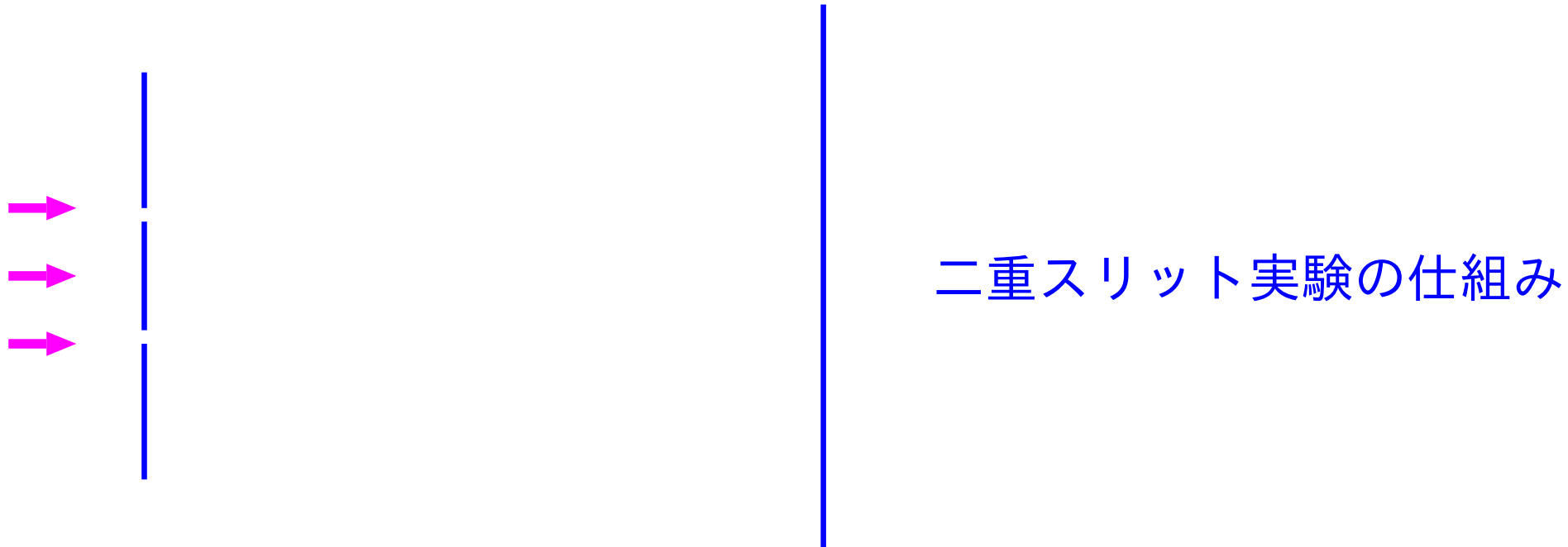


# 物質波

- 光は波であるが粒子ともみなせる.
- 光は粒子であるが波ともみなせる.
- 一般の粒子も波とみなせるのか？たとえば電子は？
- yes! (de Broglie 1924, 1929 Nobel)
- 全ての物は粒子性と波動性の両方を持つ.

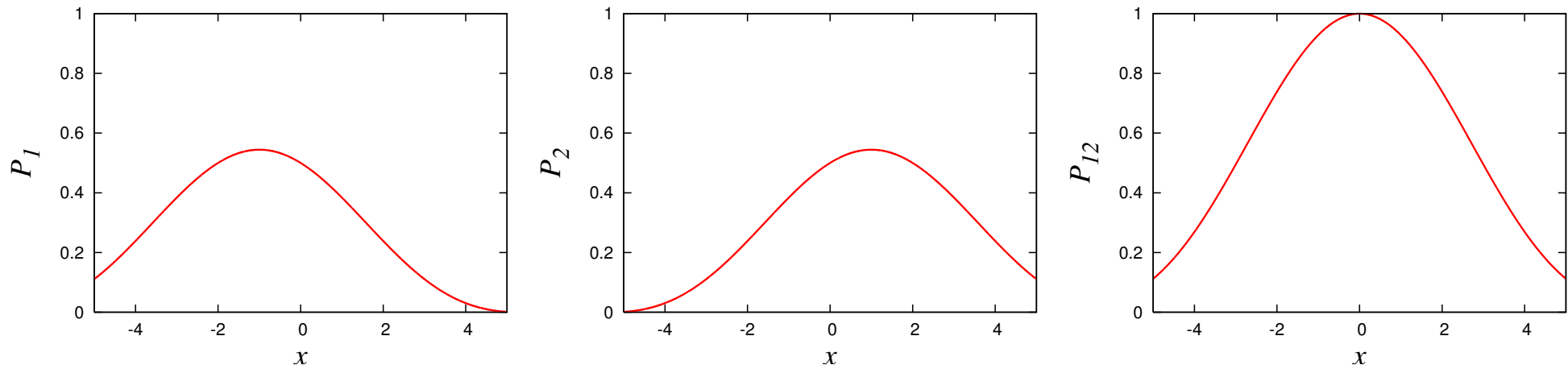
# 粒子と波

- 波の性質を持つかどうか確かめるには？ → 干渉!
- 確かめるには？ → 二重スリット実験



# 古典的粒子の場合の結果

普通の「粒子」で Young の二重スリット実験をした場合.



$P_1, P_2$ : スリット 1,2 だけ開けた場合のスクリーンでの粒子数.

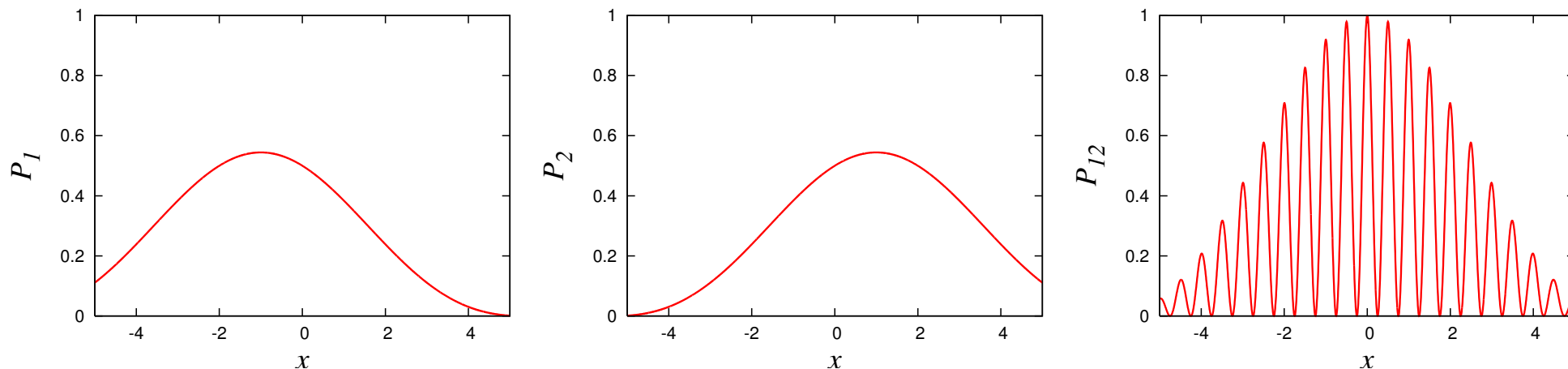
$P_{12}$ : 両スリットを開けた場合のスクリーンでの粒子数.

結果は直感的に理解できる

1, 2 どちらかのスリットを通った場合しかない.

$$\Rightarrow P_{12} = P_1 + P_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{干渉していない}$$

# 波の場合の結果



$P_1, P_2$ : スリット 1,2 だけ開けた場合のスクリーンでの波の強さ.

$P_{12}$ : 両スリットを開けた場合のスクリーンでの波の強さ.

## 結果の理解 — 波の本質的性質

1,2 両スリットを通過してきた波の重ね合わせ

$$\Rightarrow P_{12} \neq P_1 + P_2 \quad \Leftrightarrow$$

干渉している

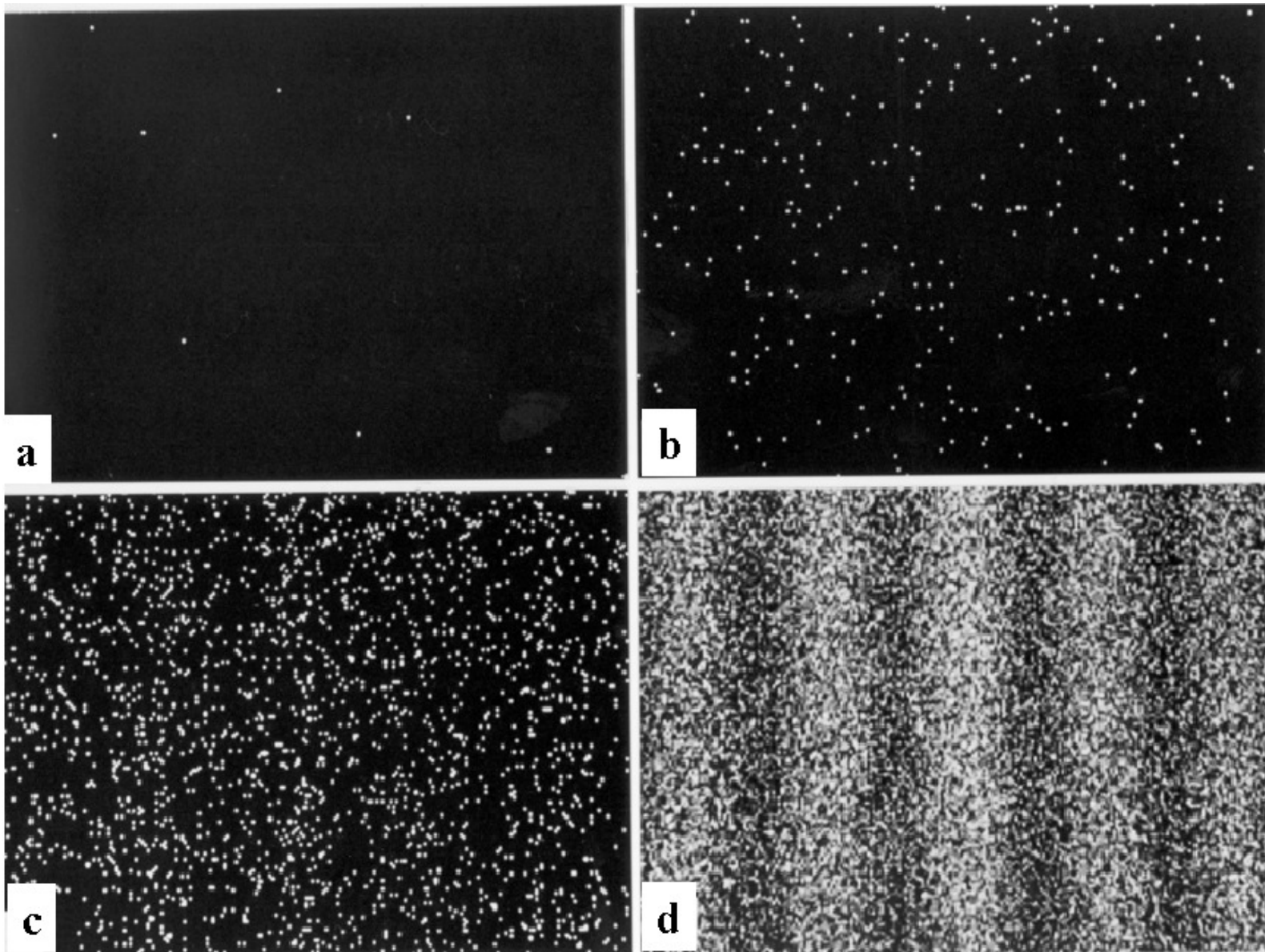
cf. 波を  $\psi_{1,2}$  とすると  $P_1 = \psi_1^2, P_2 = \psi_2^2$ .

$$\psi_{12} = \psi_1 + \psi_2$$

$$P_{12} = (\psi_1 + \psi_2)^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2 + 2\psi_1\psi_2 \neq \psi_1^2 + \psi_2^2 = P_1 + P_2$$

# 波と粒子の二重性

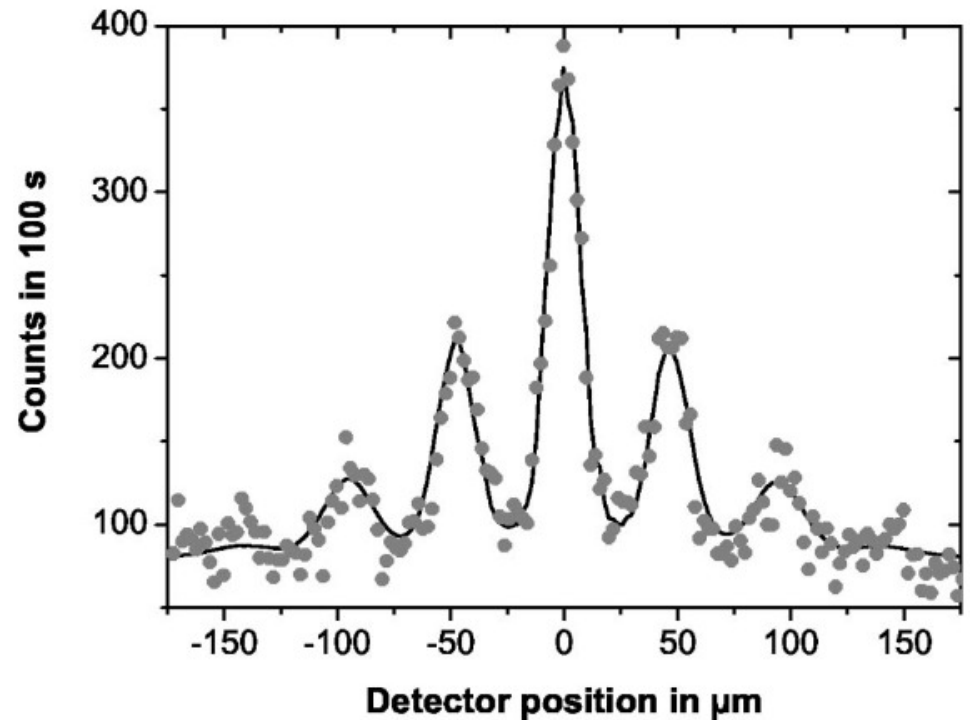
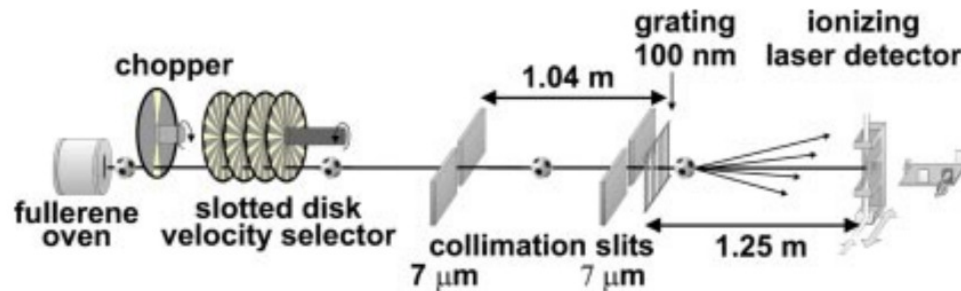
- 波の性質を持つかどうかは簡単に確かめられる！
- 実際の粒子で実験を行う．（たとえば電子を使って実験を行う）
  - ▶ 干渉する
  - ▶ 粒子は波の性質を持っている！
  - ▶ よって粒子と波の二重性を持っている．



電子線による干渉実験  
 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$   
電子による干渉縞が見える.

# 何でも干渉する！

電子はもちろん、 $C_{60}$  のような分子でも干渉現象が実験で生じる。  
430個の原子から構成される分子（質量：水素原子の～7,000倍）の干渉も実験的に確認されている。（Gerlich et al, 2011）



$C_{60}$ 分子の干渉縞

Olaf Nairz, Markus Arndt, Anton Zeilinger, *Am. J. Phys.* **71**, 319 (2003)

- 全てのものが波と粒子の二重性を持っている.
- 電子が 1 度に 1 個ずつしか通らない場合でも干渉する「電子は自分としか干渉しない」(Dirac).
  - ▶ 自分と干渉するのは実験的事実
  - ▶ 他の電子とも干渉しうる



# 古典力学と粒子と波の二重性の矛盾

二重スリット実験の例は量子力学の不思議さの全てを含んでいる.

← 観測の理論, 量子情報理論の本質も同じ

量子力学の本質：波と粒子の二重性

干渉は 1,2 両方のスリットを通過するから生じる.

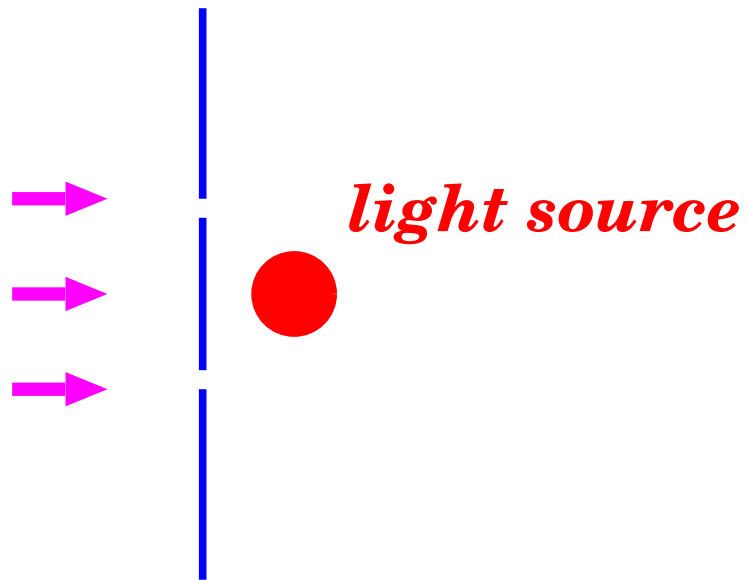


粒子は 1,2 の片方のスリットしか通過できない.

- 粒子は片方のスリットしか通過しないので, 両方のスリットからの寄与があるから生じる干渉現象が観測されるのは矛盾である.
- スリット 1 から粒子が来て, さらにスリット 2 から粒子が来ると粒子が来なかったことになるというのはおかしい!

# 矛盾の解決

粒子がどちらのスリットを通過したか確認すれば良い.



二重スリット実験  
に光源を加えてど  
ちらのスリットを  
粒子が通ったか確  
認する.

- 実験結果

- ▶ どちらのスリットを通過したか確認できる.
- ▶ たしかにどちらかのスリットを通過しており, 粒子も 1 個単位で数えられる.
- ▶ 干渉じまは無くなる!

- どちらかのスリットを通って干渉することはない ← 矛盾解決

- 光源を消す  $\Rightarrow$  干渉じまは生じる.

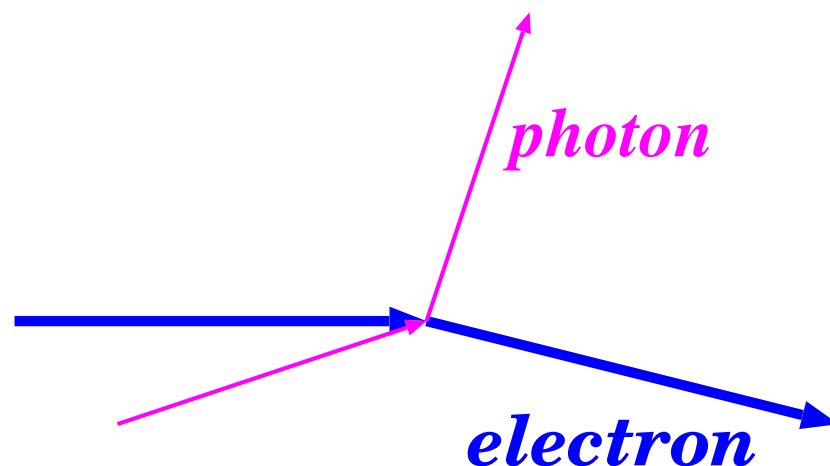
見るか見ないかによって結果が違う!

Paradox! これでいいのか?

# 観測と物理

## 観測は対象に影響を与える

- なぜ，干渉じまは観測すると無くなるのか？



光をあてて電子を観測する  
＝ 光と電子の散乱.

- 光子が電子によって散乱される.  $\Rightarrow$  電子が光子によって影響を受ける.  
 $\Rightarrow$  干渉をしなくなる.

cf. 「光子の裁判」, 朝永振一郎

# 古典力学，量子力学，そして観測

- 観測が対象に影響を与えること自体は古典力学でも想定内.
    - ▶ 温度を測定する.
    - ▶ 光を照射すれば圧力がある.
    - ▶ etc.
  - 古典力学では観測の影響は，いくらでも小さくできると考える.  
⇒ 本質的なものではない.
- ↕
- 量子力学的な現象は観測の影響を考慮しなければ理解できない.
    - ▶ 小さい世界では観測の影響を小さくすることに限界がある.
    - ▶ このような考え方は「観測の理論」とよばれる. 量子情報理論, 量子的からみ合い, 等の本質.
    - ▶ 哲学に大きな影響を与えたと言われている(月は見ないときにあるのだろうか? 誰もいないところで木が倒れたら音がするのだろうか? etc. )
  - 物理量が状態に備わっていてそれを測定 (古典力学)  
↔ 物理量は測定によって生じる (量子力学)
  - 観測まで考えれば物理的ふるまいにはおかしいところはない.

# 二重スリット実験では結局何が起きているのか

- スリット 1 を通る状態とスリット 2 を通る状態との重ね合わせ  
← 標準的な理解のしかた
- 「状態」は波で表現される。（「波動関数」）
- スリット 1 を通ったことを確認した時には 1 を通る状態だけになる。（「波動関数の収縮」）
- この場合の「波」とは通常的空間中の振動ではなく、抽象的な空間内の「振動」である。

# 物質波の波長

- 粒子の波長は？ 何によって決まるのか？



粒子の運動. 質量  $m$ , 速さ  $v$ .

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} \iff p = \frac{h}{\lambda}$$

$h$ : Planck 定数,  $p = mv$ : 運動量

- $p = h/\lambda$  は光量子仮説の関係を一般の物質波に拡張した関係. あらゆる「もの」で成り立つ.
- 次元解析 (単位合わせ) から (定数以外は) 上の関係しかあり得ない.
  - ▶ 波長  $\lambda$  は長さの次元を持つ. [m]
  - ▶ 単位  $v$  [m/s],  $m$  [kg],  $h$  [kgm<sup>2</sup>/s]
  - ▶  $m^a v^b h^c$  の単位は [kg<sup>b+c</sup> m<sup>a+2c</sup>/s<sup>a+c</sup>]  $\Rightarrow a = b = -1, c = 1$
  - ▶ 単位を持たない定数  $2, \pi$ , etc. については当然わからない.
  - ▶ 実際の波長は上式通り (係数を含め).
  - ▶ 干渉実験等で波長は測定して確認できる.

# 波長はどの程度？

- ① ボール  $m \sim 0.1 \text{ kg}$ ,  $v = 10 \text{ m/s}$ .

$$\lambda \sim \frac{h}{mv} \sim \frac{7 \times 10^{-34} \text{ Js}}{0.1 \text{ kg } 10 \text{ m/s}} \sim 10^{-33} \text{ m} !!!$$

絶対に認識できないほど波長  $\lambda$  は短い.

- ② 波の波長は  $v$  が小さい程大きくなるから止まっているなら OK?  
「止まっている」といっても現実には完璧には止められない. 最低でも 1 秒に原子 1 個位分位のスピードは持っているかもしれない. そう考えると  $v = 10^{-10} \text{ m/s}$ . 11桁違うがそれでも  $\lambda = 10^{-22} \text{ m}$  で話にならない.

- ③ 電子  $m \sim 10^{-30} \text{ kg}$ . よって同じ  $v = 10 \text{ m/s}$  で  $10^{29}$  倍波長  $\lambda$  は大きい.

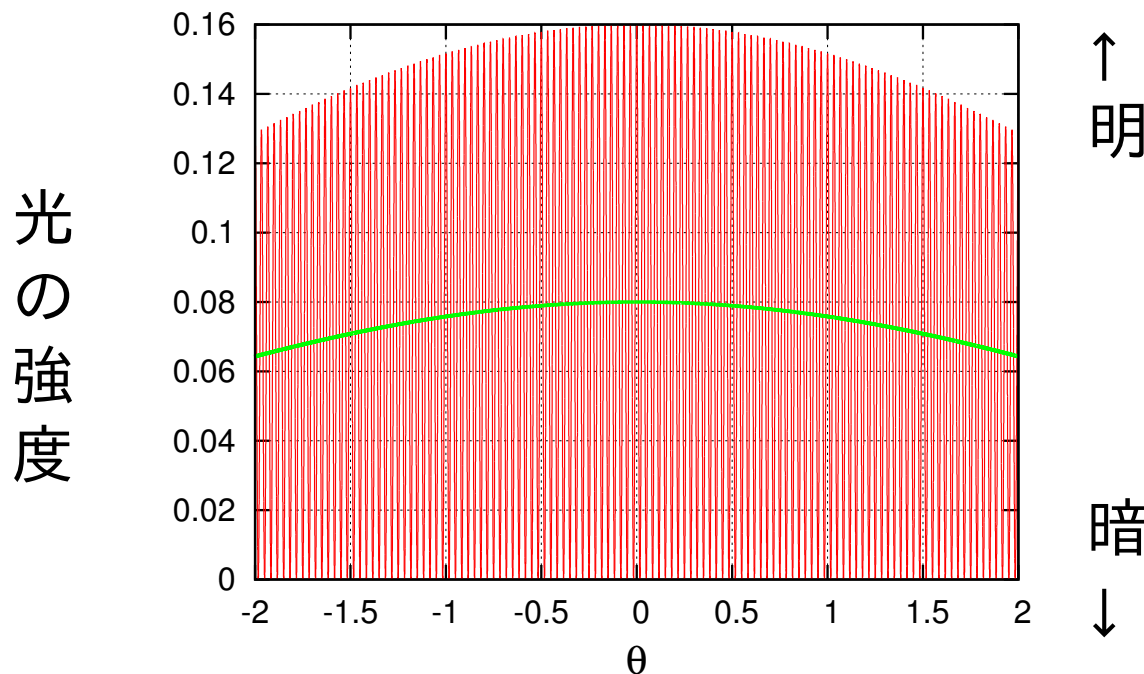
$$\lambda \sim 10^{-4} \text{ m} = 0.1 \text{ mm}$$

ほぼ日常的なスケール. 決して無視できない.



# 物質波：得られた教訓

- 小さいものでは波長は通常のスケーラで無視できないスケールであり、波の性質（＝量子力学的性質）は重要であることが多い。
- 日常スケールの大きさのものの波長はとてつもなく小さい。  
⇒ **幾何光学の極限** — 波の性質（量子力学的性質）を認識する事ができない。
- 日常スケールのものに波の性質が現れないのは我々の日常経験と矛盾しない。（矛盾するはずもない。）



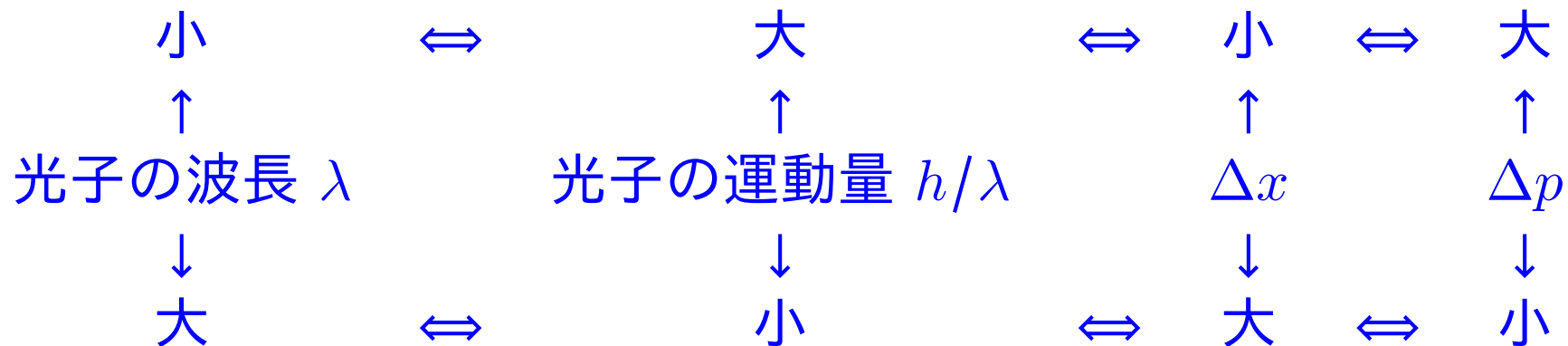
波長が対象のスケールより桁違いに小さい場合は1つ1つの干渉縞は見えず、平均的な振舞しか見えない（幾何光学の極限）。左図は数十個の干渉縞があるだけ。

# 電子を「見る」 — 詳細

- 電子の位置  $x$  を知りたい. (たとえば二重スリット実験)
- 光子が衝突すればその分影響がある.
- 光子のエネルギー  $E \searrow \Leftrightarrow$  運動量  $p \searrow \Rightarrow$  影響はいくらでも小さくできる.
- $\Rightarrow$  光子のエネルギーを十分小さくすれば干渉するはず ← 正しい
- 矛盾では?
- $E = h\nu = hc/\lambda \Rightarrow \boxed{E \searrow \Leftrightarrow \lambda \nearrow}$
- 波長  $\lambda$  より小さいものは見えない.
- 光子のエネルギー, 運動量を小さくすれば影響は小さくなり, 電子は干渉するようになるが, 位置は不確定になる. どちらのスリットを通ったかわからない.  $\Rightarrow$  矛盾はない.
- このようないろいろな思考実験は量子力学創成時には, 特に Einstein, Bohr といった人たちの間で盛んに議論された. Einstein は懐疑派であった.
- 現在は過去の思考実験が実現される時代 (cf. 量子情報関連).

# 電子を光子散乱での観測の影響の定式化

- $\Delta x$ : 電子の位置  $x$  の「不確定性」 (uncertainty).
- $\Delta p$ : 電子の運動量  $p$  の不確定性.
- 不確定性: それ以上原理的に正確に測定不可能なあいまいさ.
- 観測が対象に影響を与える.  $\Rightarrow$  測定の精度には 原理的に 限界が存在. 理想的な実験をしても影響は無くならない.



- 位置  $x$  だけであれば測定精度に限界はない.
- 位置を正確に知るほど運動量は不確定になる.

$$\Delta x \sim \lambda, \quad \Delta p \sim \frac{h}{\lambda} = \text{光子の運動量} \quad \Rightarrow \quad \Delta x \Delta p \gtrsim h$$

# 不確定性原理とその意味

## 不確定性原理 (Uncertainty Principle, Heisenberg 1927)

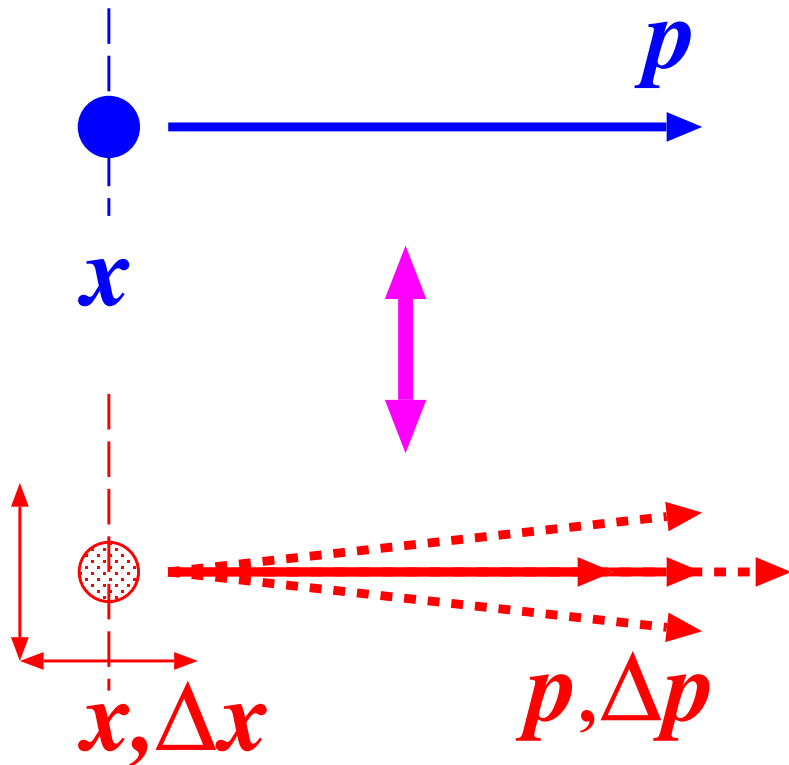
$$\Delta x \cdot \Delta p > \hbar, \quad \hbar = 1.1 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad \left( \hbar = \frac{h}{2\pi} \right)$$

- 電子-光子散乱で成立していた.
- 常に成り立つ原理的な限界である.
- 不確定性原理が波と粒子の二重性を可能にしている.
- 粒子自体が広がりを持っているという意味ではない.
- 量子力学に不確定性原理の限界はあるが, 正確な学問である.  
⇔ 測定の限界は自然の限界

- 不確定性原理は**原理的に避けようが無い観測の影響**の結果.
- 他の物理量に関しても似たような不確定性関係が存在.
  - ▶  $\Delta E \Delta t > \hbar$  , etc.
- 古典力学は(原理的には)不確定性の無い世界.
  - ▶  $\Delta x \cdot \Delta p > \hbar \rightarrow 0 \iff \hbar \rightarrow 0$  は**古典極限**.
  - ▶  $\lambda = \hbar/p$  (de Broglie) で  $\hbar \rightarrow 0 \iff \lambda \rightarrow 0 \iff$  **幾何光学の極限**
  - ▶  $\hbar\nu \rightarrow 0$  (光子のエネルギー $\rightarrow 0$ ) 光も連続極限
- $\hbar = 7 \times 10^{-34}$  Js : 日常スケールの単位では $\hbar$ は小さい  
 $\iff$  **日常スケールでは量子効果は小さい**

# 不確定性原理の意味

波は広がりを持つ  $\leftrightarrow$  粒子は一点に存在しうる



- 古典力学: 粒子がある位置  $x$  で, ある運動量  $p$  (速度  $v$ ) を持って運動.
- 量子力学: 位置  $x$  にも運動量  $p$  にも不確定性  $\Delta x, \Delta p$  が存在.

# 不確定性原理の影響の大きさ

- ① ボール  $m = 0.1 \text{ kg}$ ,  $\Delta x = 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$ ,  $p = mv$

$$\Delta p > \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{10^{-34} \text{ Js}}{10^{-6} \text{ m}} = 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta v = \frac{\Delta p}{m} > 10^{-27} \text{ m/s}$$

- ▶ 速度は不確定！しかしその不確定性は1年で原子1個のスケールも移動しない程小さい速さ(それより10桁以上小さい).
- ▶ 明らかに,現実的な限界の方が原理的な不確定性関係による限界よりはるかに大きい.

- ② 電子  $m = 10^{-30} \text{ kg}$ . 同じ  $\Delta x$  に対して

$$\Delta v > 100 \text{ m/s}$$

およそ無視できない不確定性.

- ③ 電子を  $\Delta x = 10^{-10} \text{ m}$  (原子の大きさのスケール) とすると

$$\Delta v > 10^6 \text{ m/s}$$

これだけ速さは不確定 (光速の1/300程度).

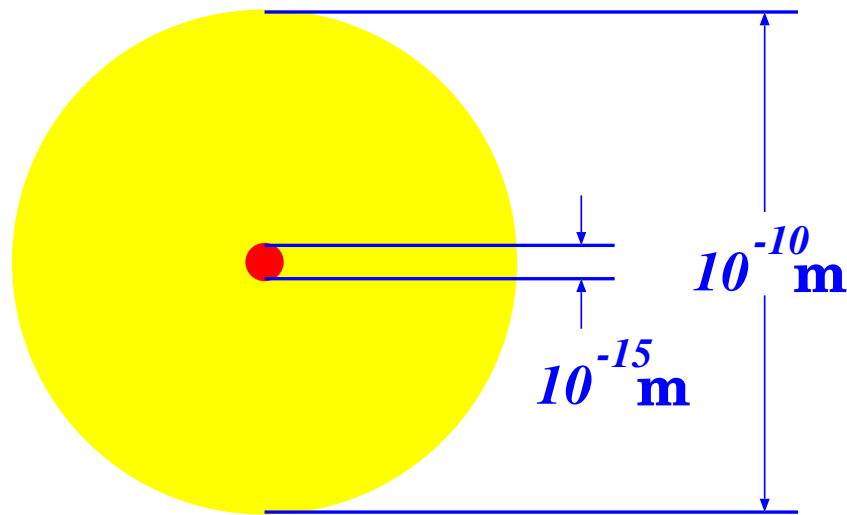
# 量子力学の不確定性と日常経験

- 日常生活のスケールの大きさのものでは不確定性原理を適用しても意味は無い.
- これは日常経験と一致. ← 当然
- 量子力学以前の古典力学とも一致. ← 当然
- 小さいスケール (原子スケールなど) では量子力学の影響は重要.



# 原子の構造

- 物質は原子から構成されている.

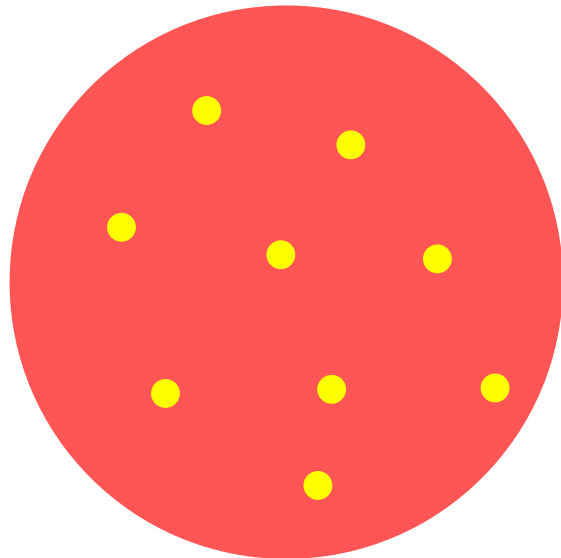


- ▶ 原子 = (1個の) 原子核 + (複数の) 電子
- ▶ 原子核 (陽子, 中性子)  $\sim 10^{-15} \text{ m}$
- ▶ 原子 (核+電子)  $\sim 10^{-10} \text{ m}$
- ▶ 原子核の質量が原子の質量の 99.9% 程度占めている.
- ▶ 原子の大きさを教室程度 ( $\sim 10 \text{ m}$ ) と考えると, 核は  $\sim 0.1 \text{ mm}$ . ゴマ粒 1 個もない!

- 原子は非常に空っぽ! ← 直感的に変なもの

# 原子の構造の発見

- 20 世紀初頭に原子の存在に物理学者が納得する.
- 全ての原子から「陰極線」が出る. ← 実験「電子の電荷と質量の比」
- 陰極線は電子 (electron) の流れ(J.J. Thomson, 1897, 初めて発見された素粒子). ⇒ 全ての原子は電子と「何か？」から構成.
- 太陽系型の原子像(1901 Perrin, 1902 長岡). 電磁気力と重力の類似性から自然な発想. ← ある意味では現在の原子像に近い
- 太陽系型原子像は不安定！
- Plum pudding model提唱(1902 Kelvin, 1903 J.J. Thomson)



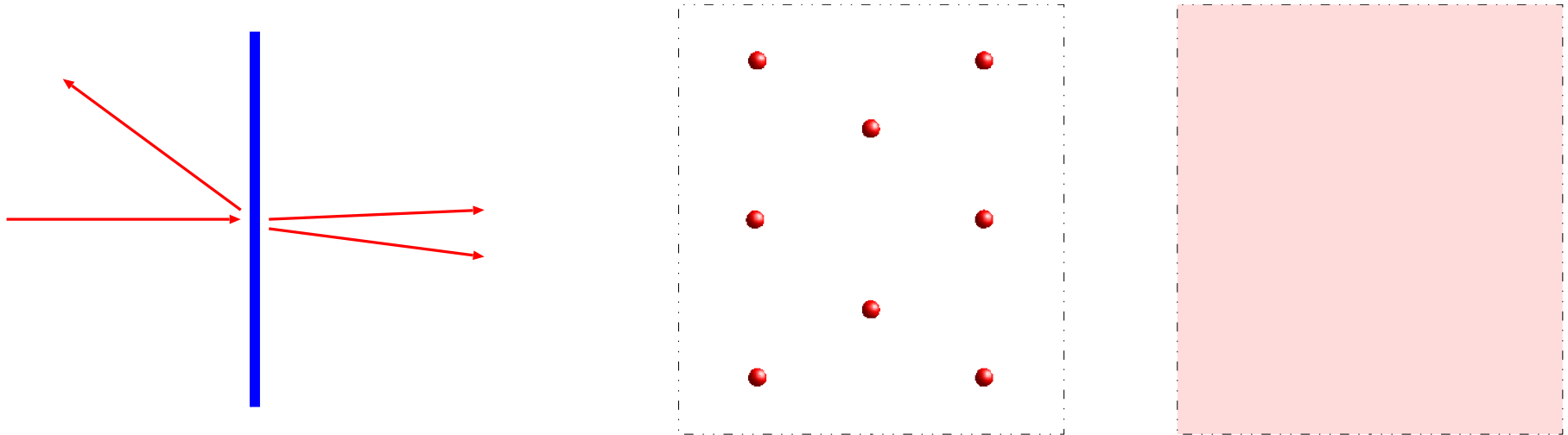
Plum pudding model の模式図

- ▶ + 電荷を持つ物質の中に電子 (●) が埋まっている.
- ▶ 中身が詰まっていてすかすかではない. ← 現在の原子像とは全く違う！

# Rutherford の発見

実験： $\alpha$  粒子 (Helium 原子核) をうすい金属膜 (金, 厚さ 0.1 mm 程度) で散乱 (1909 Geiger, Marsden)

- 8000 粒子につき 1 つ程度は大角度 ( $90^\circ$  以上) 散乱— Rutherford の提案により発見

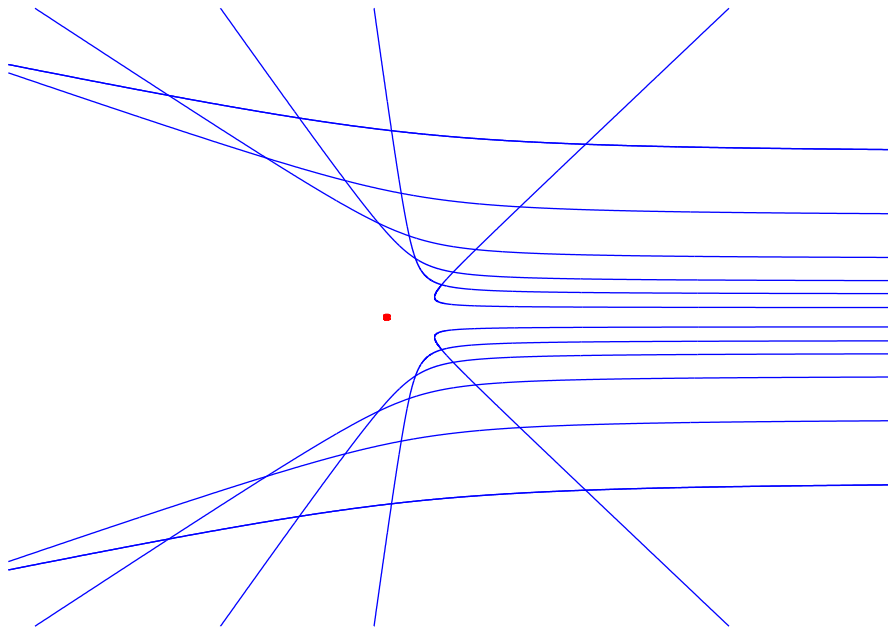


(左) 大角度散乱, (右) 原子核がある場合と plum pudding model のイメージの比較.

- 電子は軽すぎて  $\alpha$  粒子は跳ね返せない.
- Plum pudding model では実験結果説明不可能.

# 点電荷による $\alpha$ 粒子の散乱として実験結果を説明 (1911 Rutherford)

(左図) 同符号の点電荷による散乱 (Rutherford scattering)



*It was quite the most incredible event that has ever happened in my life. it was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you. (Ernest Rutherford の述懐)*

- cf. 10 m 立方の空気を 0.1 mm に集めたら? ( $\sim 1 \text{ kg/m}^3$ )

$$(10 \text{ m})^3 = 10^3 \text{ m}^3 \Rightarrow 10^3 \text{ kg} = 1 \text{ t}$$

- より小さい核とその周りに電子が存在する実験的根拠.
- 電子が核の周りを回っているという根拠は無い.
- 古典力学では不安定である理屈には変わり無い.

# 原子の基本的要素

- もっとも簡単な原子 = 陽子 + 電子 (水素原子)
- 核も電子も点状粒子とみなせる(原子のスケールに比べて小さい)
- 原子は電氣的に中性
- + と - 電荷は電磁気力で引き合う. (静電気力)



- 引力は強さ以外は重力と同じ.

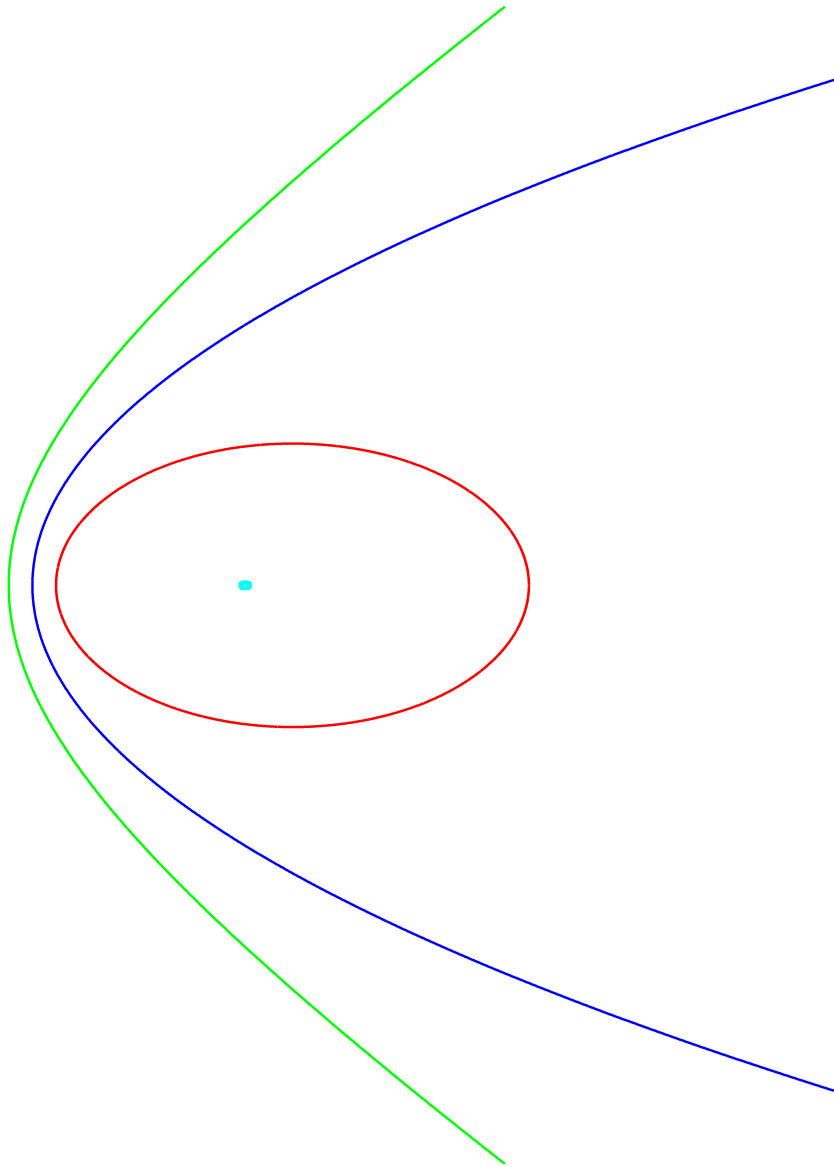
$$\text{静電磁気力} \quad F = -\frac{e^2}{r^2} \quad \leftrightarrow \quad F = -\frac{Gmm'}{r^2} \quad \text{重力}$$

- 強さが桁違い

$$\frac{Gm_p m_e}{e^2} \sim 10^{-39}$$

例： $10^{13}$ につき 1 個の電子を取れば 1 kg の物体が 1 m 浮く力. ←  
一般の物体は恐ろしく電氣的中性に近い

# 古典力学と原子の構造



- スケールこそ違えど重力と基本的に同じ.
- 力が働かなければ等速直線運動.
- 引力が働けばその方向に曲がる.
- 可能な運動
  - ▶ 双曲線, 放物線運動 (閉じていない軌道, とともに散乱運動)
  - ▶ 楕円軌道 (円軌道も含む)
    - ★ 例: 太陽系, 月, 人工衛星, の運動.
- 古典力学では原子は核の周りに電子が楕円軌道を描く可能性しかない!

# 古典力学による原子の描写の限界

## 古典力学的原子の問題点

- 不安定:
    - ▶ 電磁放射をして中心に落ち込んでしまう.
    - ▶ 寿命  $\sim 10^{-11}$  s.
    - ▶ 直感的に考えても安定な方が不思議 (だから不安定であるという指摘がすぐにあったのであろう).
  - 大きさが全く不定  $\leftrightarrow$  大きさは常に  $\sim 10^{-10}$  m
  - 平面的
- 
- 明らかに現実には反する.
  - これらの問題点は古典力学では解決できない.

# エネルギー的視点

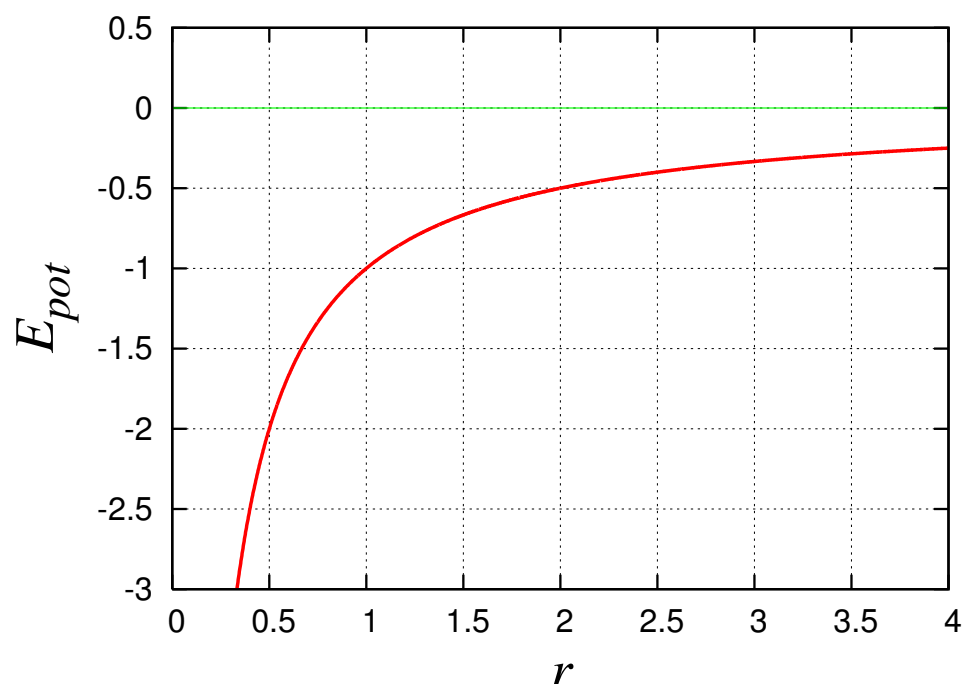
- 核(陽子) + 電子の系をエネルギー的な視点より考える.
- 中心に核があり, その周りを電子が電氣的引力を受けながら運動

$$\begin{array}{ccccccc} E & = & \frac{p^2}{2m} & + & \left( -\frac{e^2}{r} \right) \\ \text{エネルギー} & & \text{運動エネルギー} & + & \text{電磁気的位置エネルギー} \end{array}$$

$$\text{cf. 運動エネルギー} = \frac{p^2}{(2m)} = \frac{mv^2}{2}$$

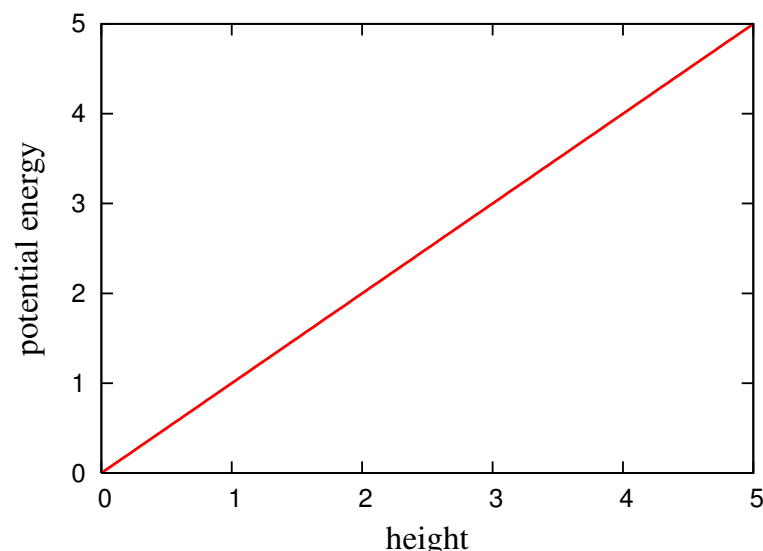


# 位置エネルギー（ポテンシャル・エネルギー）



- **ポテンシャル・エネルギー**  
 **$-e^2/r$  (位置エネルギー)**

- ▶ ポテンシャル・エネルギーの低い方へと力が働く
- ▶ 中心 (核) に近い方へ引力が働く  $\Leftrightarrow$  近いほどポテンシャル・エネルギーが低い.
- ▶ **力 = -ポテンシャル・エネルギーの傾き**



← 参考：地表近くの重力の場合

- ▶ ポテンシャル・エネルギー =  $mgx$  ( $x$ : 高さ)
- ▶ 力 = -ポテンシャル・エネルギーの傾き =  $-mg$

# 古典的な安定点

- もっとも安定な状態は？  $\Rightarrow$  エネルギーのもっとも低い点
  - ▶  $p = 0$  運動していない
  - ▶  $r = 0$  核と電子がくっついている
- 安定であるが，広がりのある原子ではない！

# 量子力学における原子

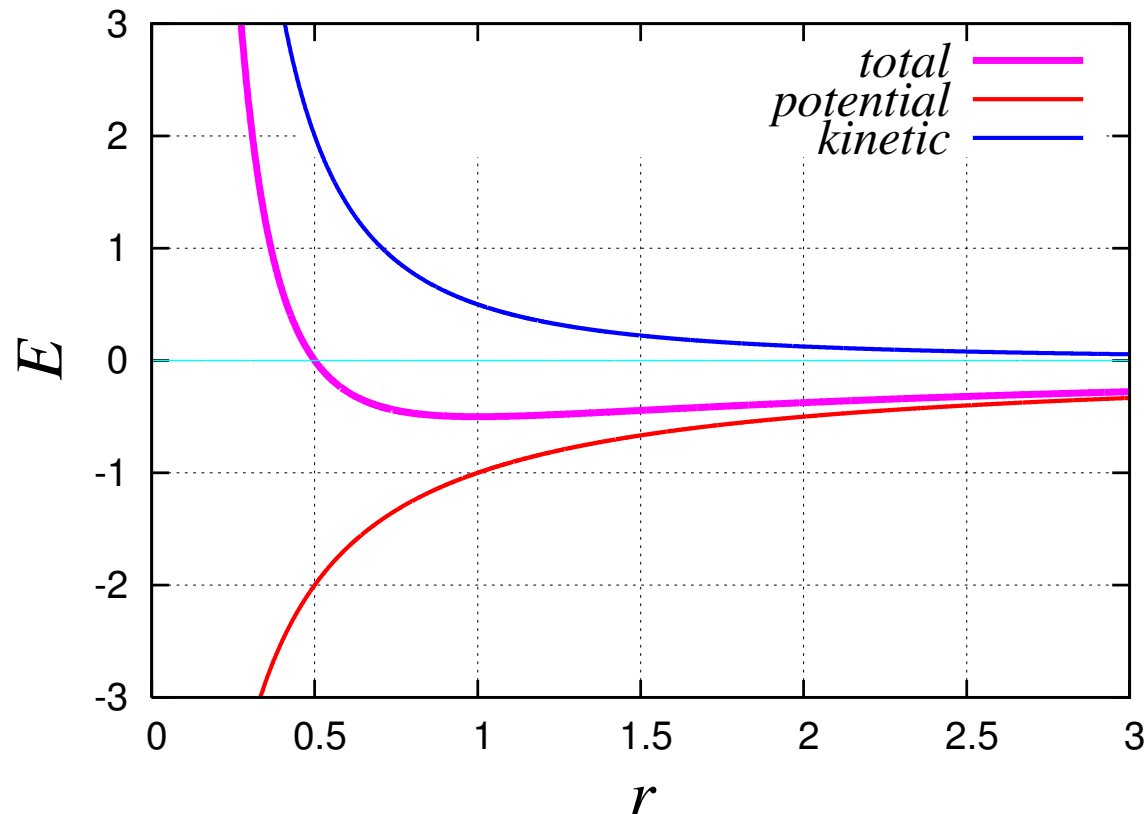
$$\text{量子力学} = \text{不確定性原理 } \Delta r \cdot \Delta p \geq \hbar$$

- エネルギー:  $p \searrow \Rightarrow E \searrow$ ,  $r \searrow \Rightarrow E \searrow$

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

- 不確定性原理より  $\Delta p \geq \hbar / \Delta r$
- 安定状態を探す = エネルギー最低状態を探す ( $p^2 \geq (\Delta p)^2$ )

$$E \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m} - \frac{e^2}{\Delta r} \geq \frac{\hbar^2}{2m(\Delta r)^2} - \frac{e^2}{\Delta r}$$



- 基本的な仕組みはどの原子でも同じなので、どの原子でも同じオーダーの大きさ.

- 不確定性原理の下では系全体のエネルギーに最低値が存在.
- 最低値では  $\Delta r =$  原子の大きさ が決まる.

$$\Delta r = \frac{\hbar^2}{me^2} = \text{“Bohr 半径”}$$

- Bohr 半径は Planck 定数, 電子の質量  $m$  と電磁気力の強さから決まる

$$\Delta r = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

# 量子力学的原子像のまとめ

## ● 古典力学的な原子の問題点の解決

- ▶ 原子は安定 (← 最低エネルギー状態!)
- ▶ 原子の大きさは電子の性質より決まっている.
- ▶ 理論で得た原子の大きさは, 実験で測定される原子の大きさと一致
- ▶ 平面的ではない — どの方向にも不確定性原理がある
- ▶ 最低エネルギー状態 = 「基底状態」

## ● 量子力学的原子像

- ▶ 必ずしも電子は原子核の周りを回っていない.
- ▶ 電子の位置が不確定な分だけ広がりがある.
- ▶  $\hbar \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta r \rightarrow 0$  古典極限であり原子の大きさが0.

# 波と粒子性の二重性が持つ意味

- 粒子と波の二重性 (= 量子力学の本質) の意味は? (「相補性」, “complementarity”)

粒子=点状, 力を受けなければまっすぐ進む



波=広がりを持つ, 振動が広がりながら伝わる

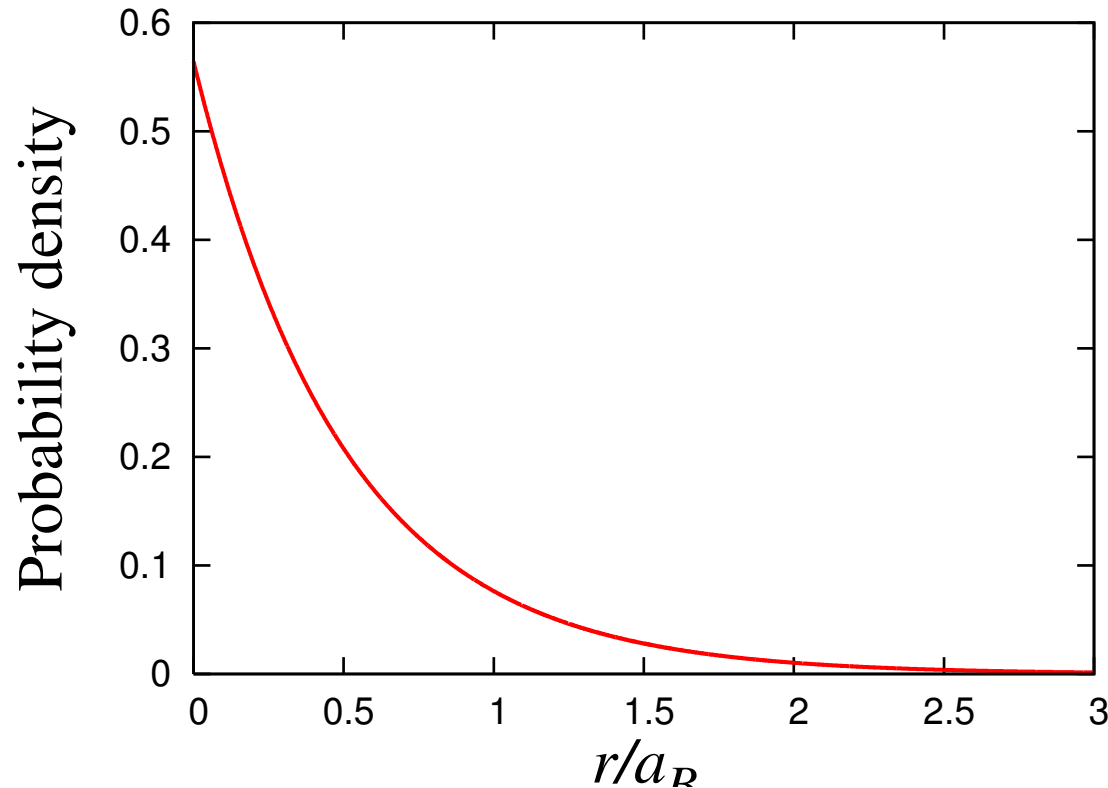
⇔ 不確定性原理

- 波の多いところに粒子が多い (はず) ← 1個の場合に「多い」とは?

$$\text{波の強さ} = |\text{波}|^2 = \text{粒子の存在確率密度}$$

- 波の多いところに粒子は「多い」 (存在確率として)
- 波自体が振動する空間は普通の空間ではない.

# 原子像

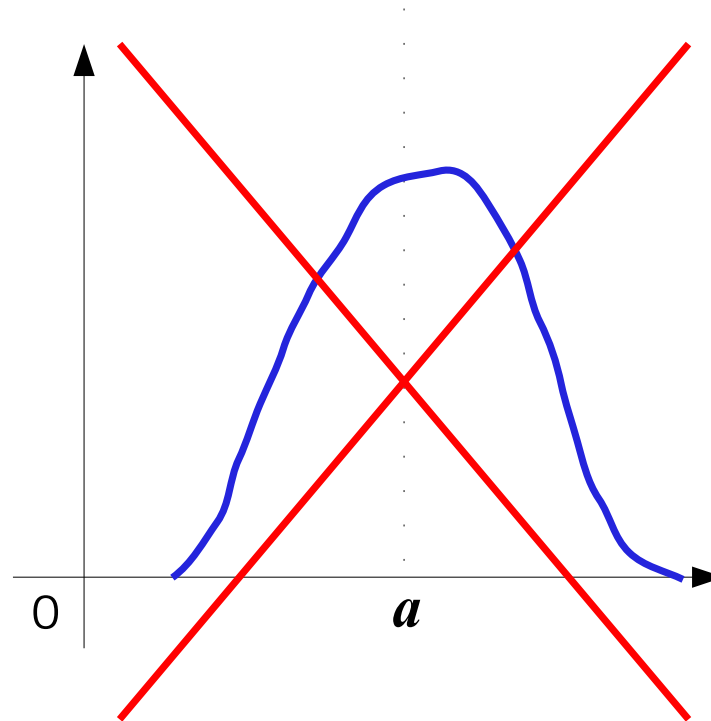


水素原子の Bohr 半径で測った核からの距離 vs. 基底状態における電子の存在確率密度.

$$\text{存在確率密度} = \frac{e^{-2r/a_B}}{\sqrt{\pi}}$$

- 原子には固い殻があるわけではない.
- 原子の大きさは定義による(どう定義しても同じような大きさ).
- 存在確率密度はいくら離れても 0 にはならない. たとえば  $r > 10a_B$  で  $2 \times 10^{-9}$ .

- 電子が核の周りを回っているわけではない。



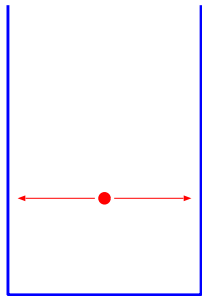
- 不正確なわけではない。存在確率は厳密であり,統計的な意味を持つ。
- 「電子雲」 = 粒子の確率密度



# 量子系のエネルギー — 箱の中の粒子

原子の analogy として箱の中の粒子を考える.

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 \quad m \text{ 粒子の質量, } p \text{ 運動量, } v \text{ 速度}$$



古典論: 運動量任意,  $E \geq 0$  である全てのエネルギーが許される.

- 不確定性原理:  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$

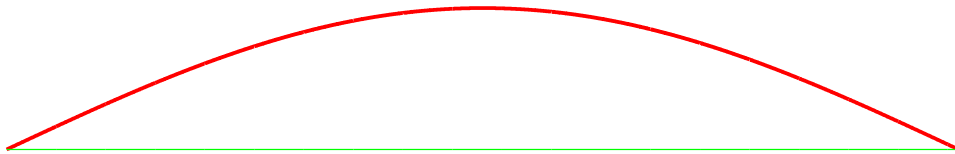
$$\Delta x \leq L \quad \Rightarrow \quad \Delta p \geq \frac{\hbar}{L} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2mL^2}$$

- エネルギーは古典的に許される最低エネルギー (この場合は  $E = 0$ ) より高いエネルギーしか許されない.

↔ 原子の基底状態

- 全く動いていない状態は許されない.

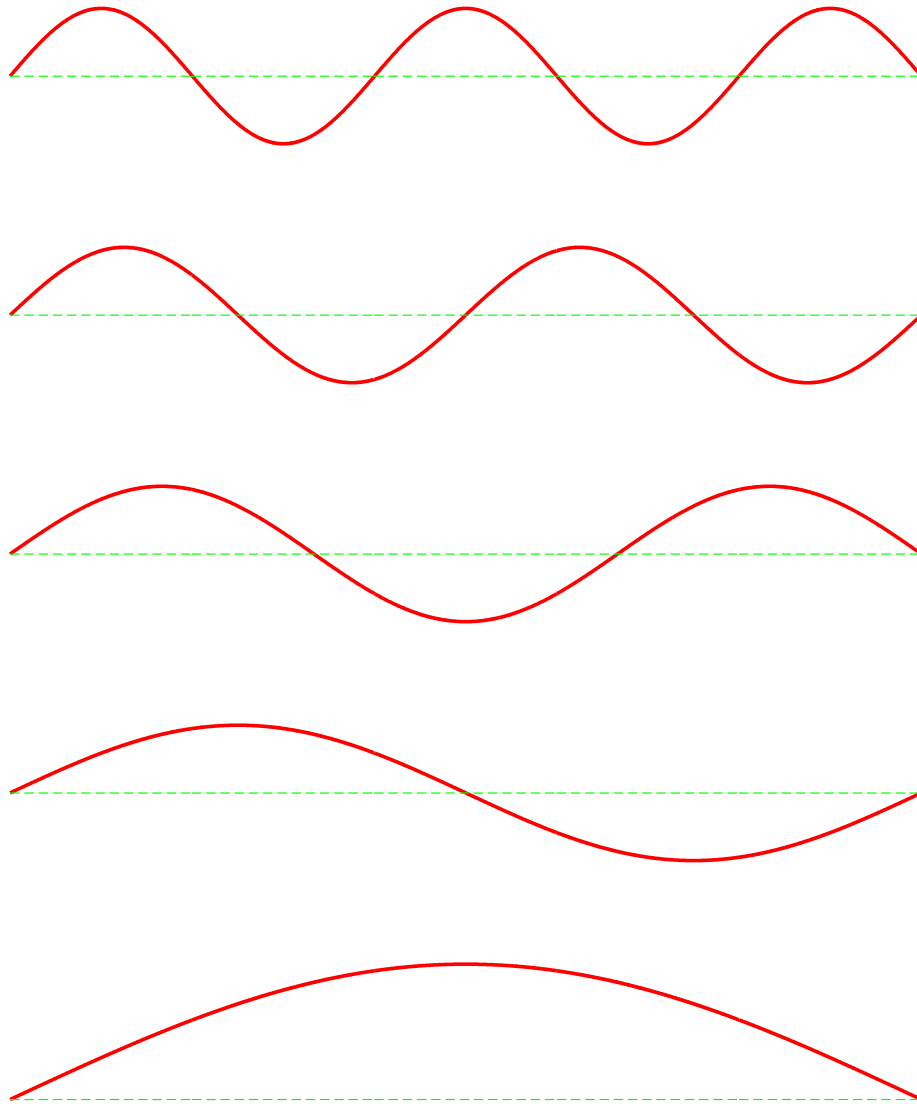
# 量子力学：粒子と波の二重性



## 量子力学

- 粒子 = 波
- 粒子を箱に閉じ込める  $\Leftrightarrow$  波を箱に閉じ込める
- 粒子は消えない  $\Rightarrow$  定常波
- $\leftarrow$  図: 波の様子

# 量子力学：粒子と波の二重性



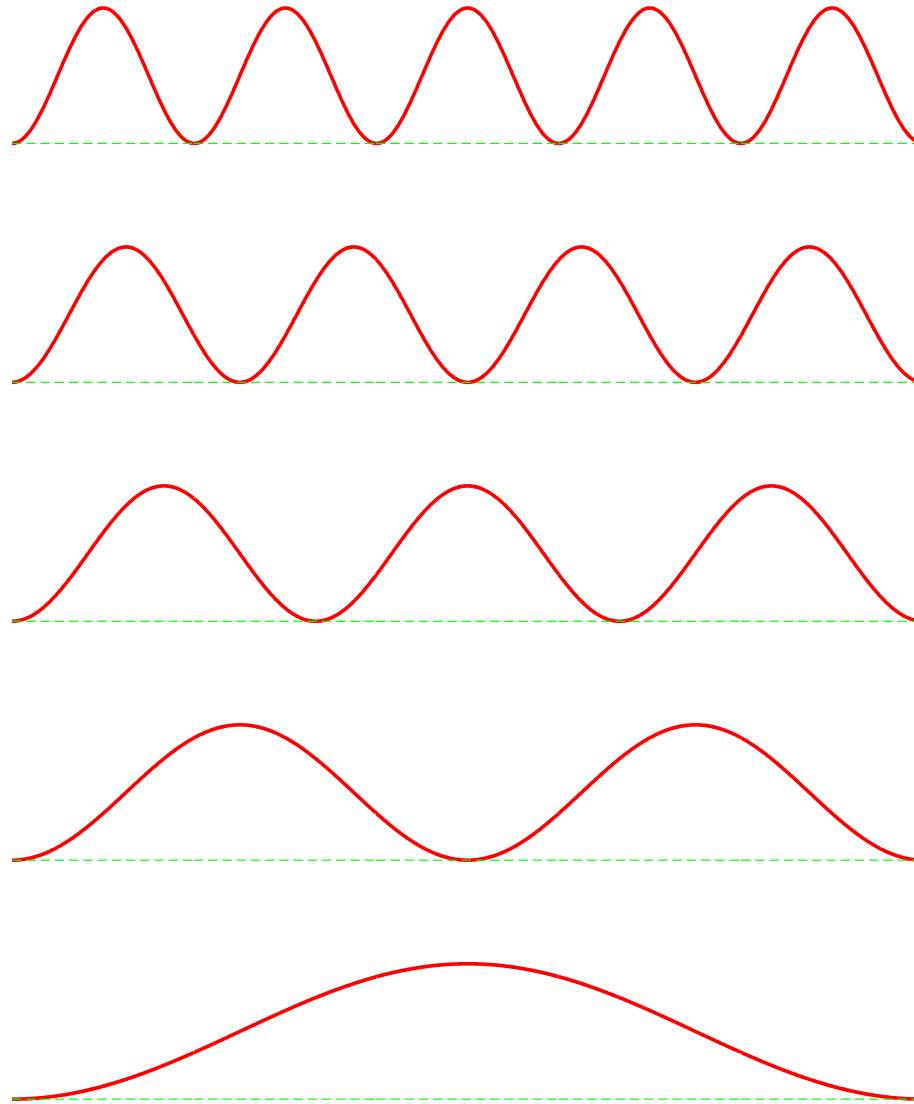
## 量子力学

- 粒子 = 波
- 波を箱に閉じ込める
- ← 図: 波の様子

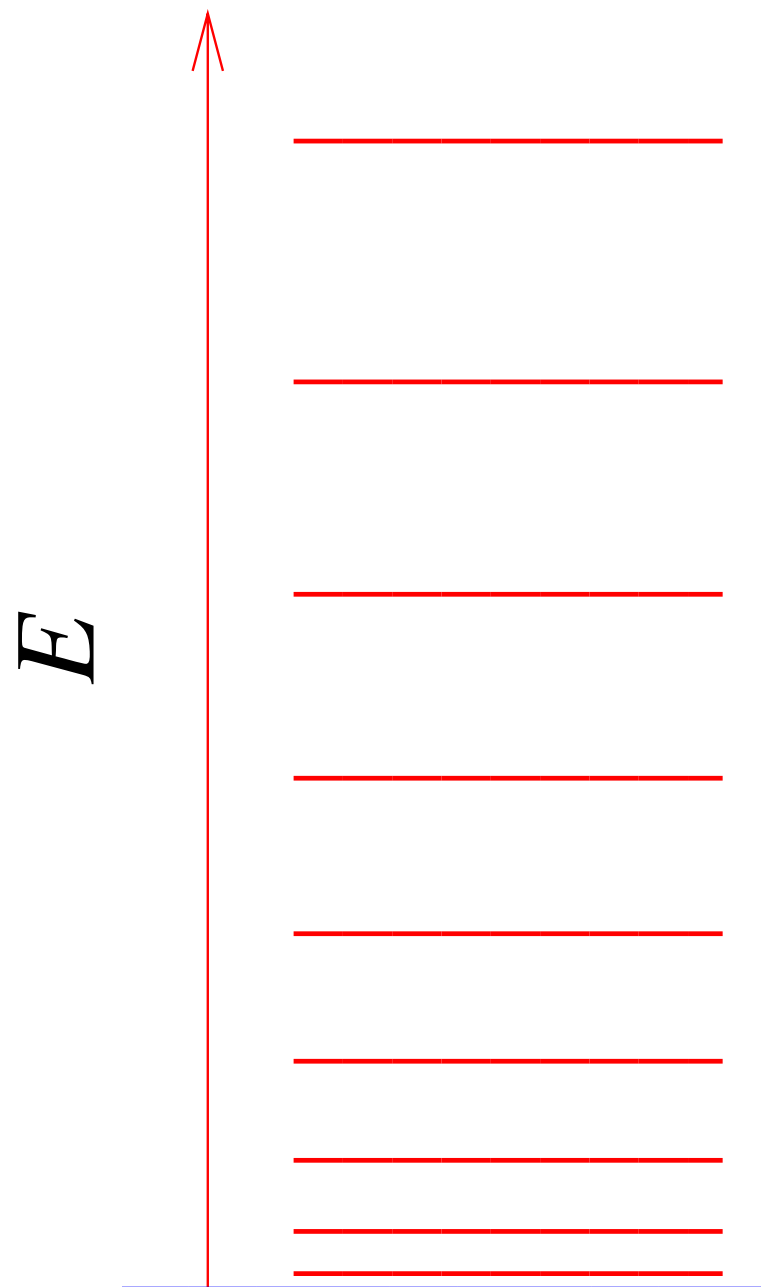
$$p_n = \frac{h}{\lambda_n}, \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left( \frac{hn}{2L} \right)^2$$

# 箱の中の粒子の存在確率密度

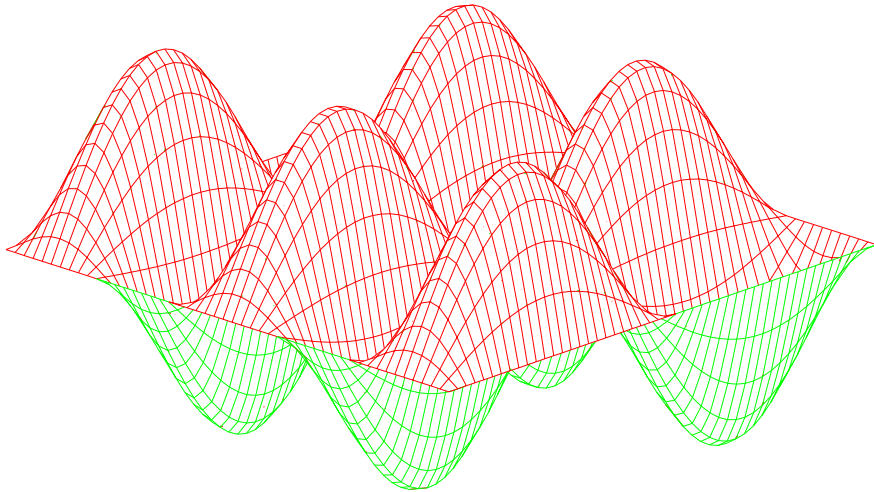
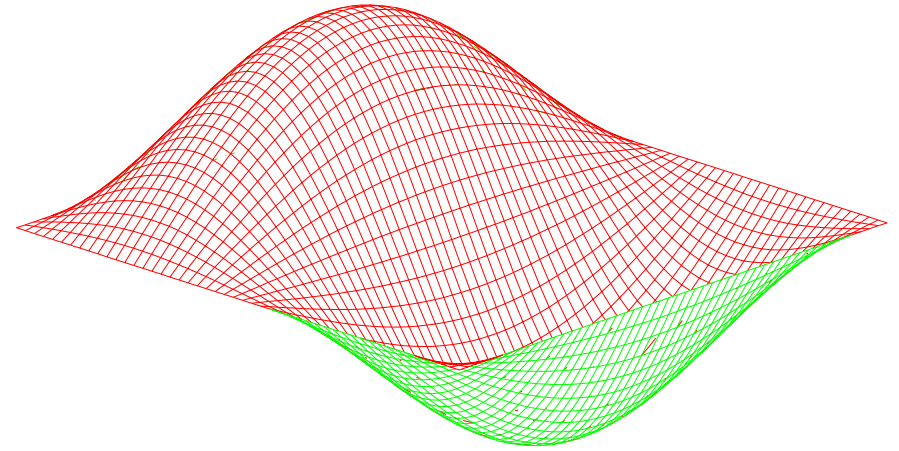
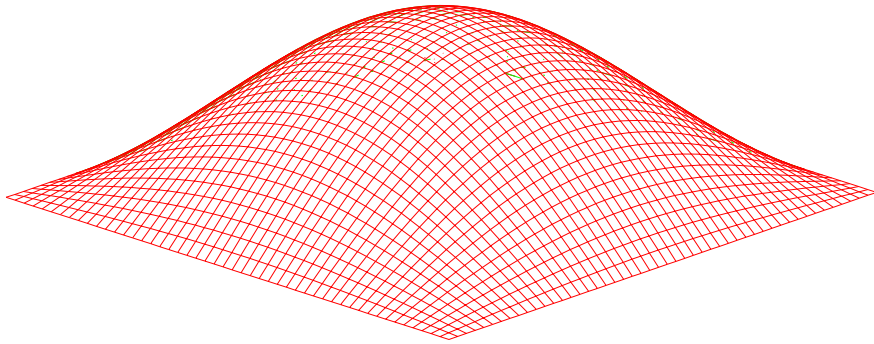


# 粒子の取りうるエネルギー $E$



- 古典力学:  $E \geq 0$  なら何でも OK (右)
- 量子力学: 離散的 (左図)
- why?
  - ▶ 波を閉じ込めれば波長が閉じ込められた領域にちょうどはまらなくてはならない. ← 空気の音速の実験と同様
  - ▶ 波長  $\lambda \Leftrightarrow$  運動量  $p = h/\lambda \Leftrightarrow$  エネルギー  $E = p^2/2m$
  - ▶ エネルギーも離散的
  - ▶ 一般的に粒子を閉じ込めれば (束縛状態, bound state) エネルギーは離散的.

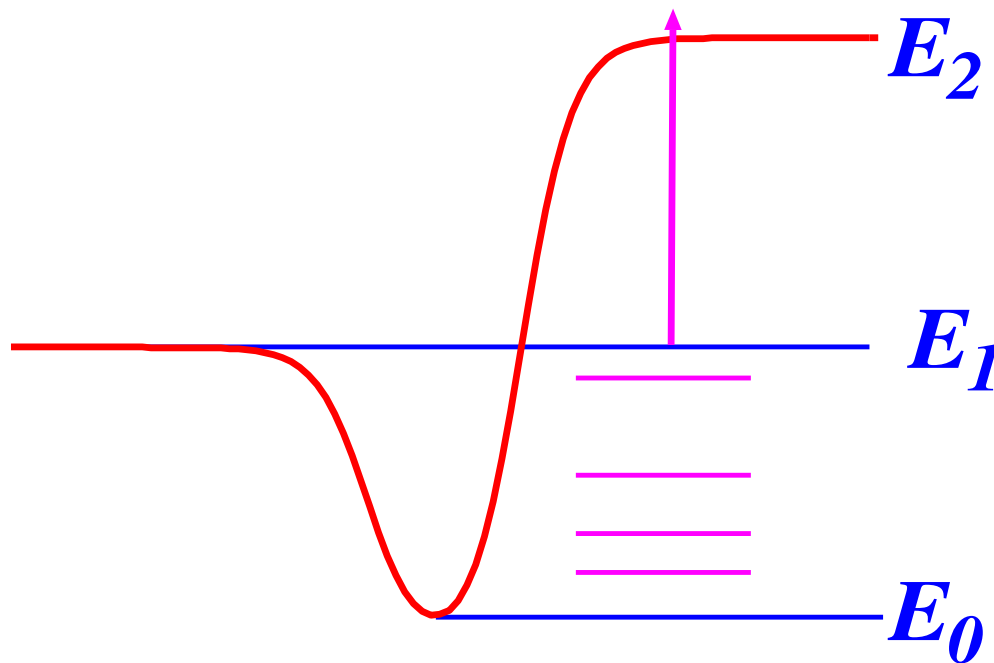
# 2次元の箱の中の粒子の波動関数



2次元の箱の中の粒子の波動関数. 一般に方向によって入る波の数が違う.

# 一般のエネルギースペクトル

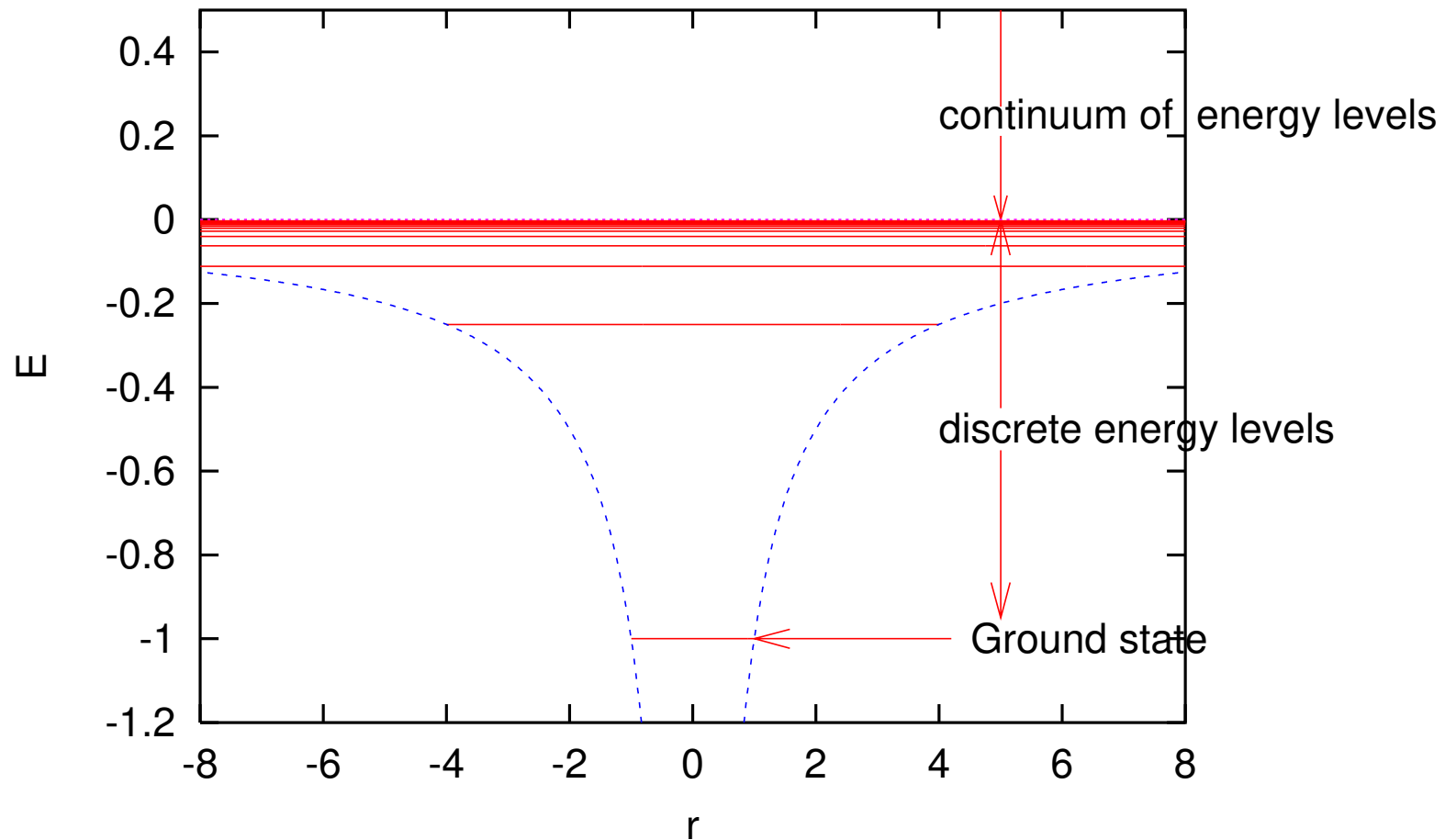
- 系のエネルギーの値全体 = 「エネルギースペクトル」 (energy spectrum)
  - ▶ 束縛状態 (bound state): 離散的スペクトル
  - ▶ 非束縛状態: 連続スペクトル



位置エネルギーと粒子のエネルギー

- $E_0 < E < E_1$  束縛状態, 離散スペクトル
- $E \geq E_1$  非束縛状態, 連続スペクトル

# 原子のスペクトルの構造

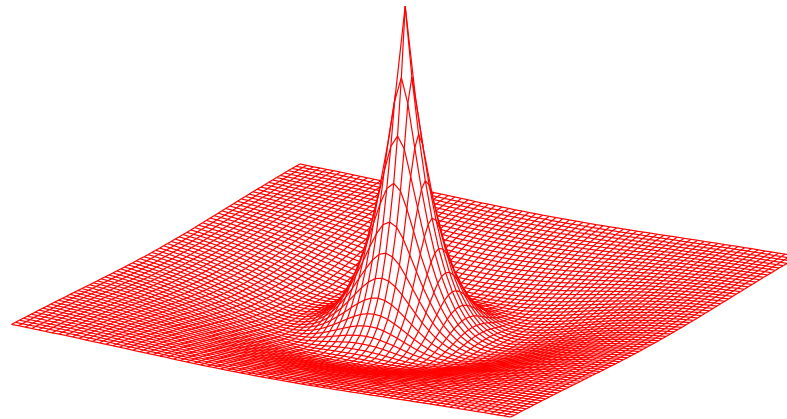
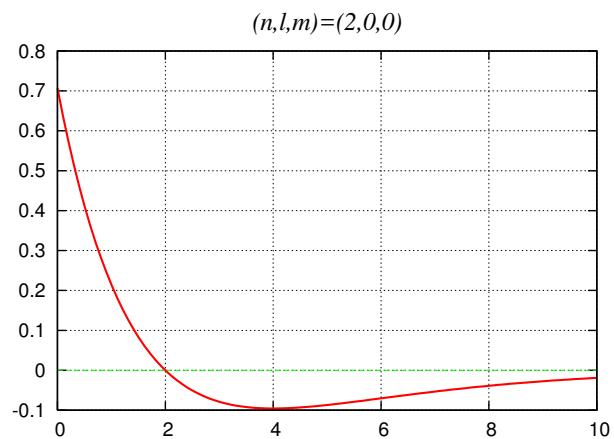
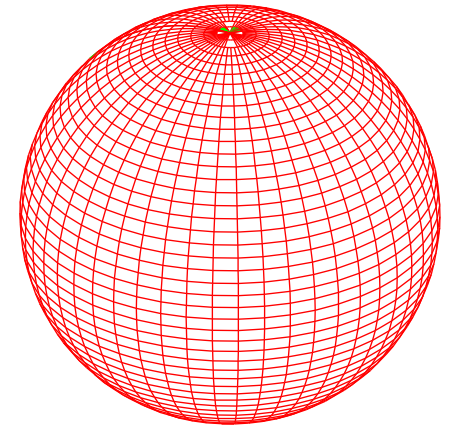
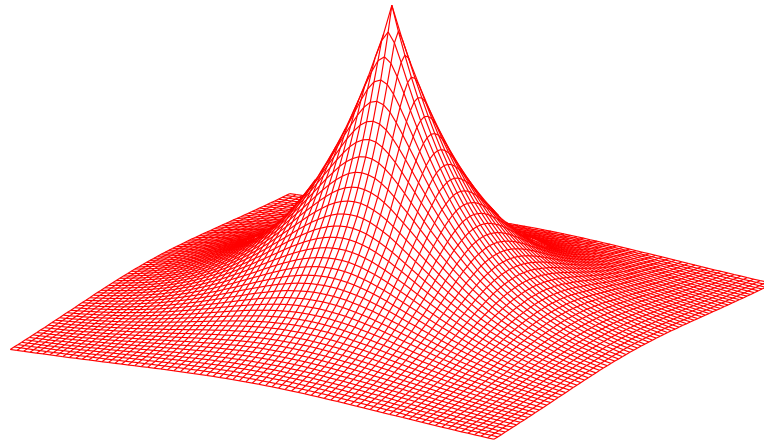
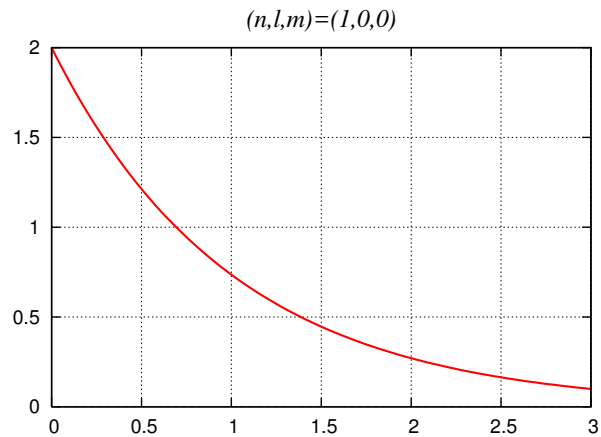


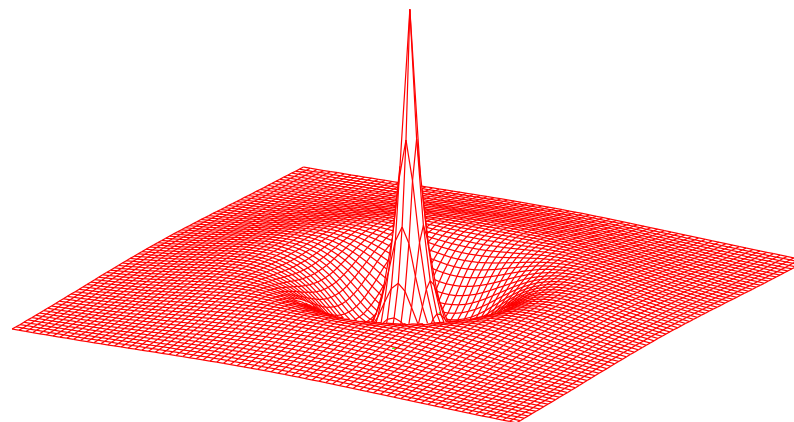
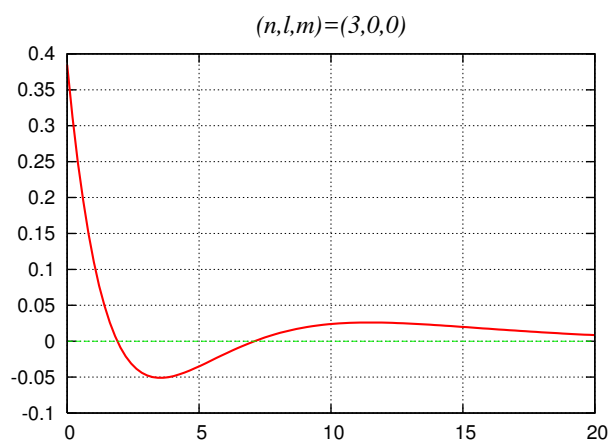
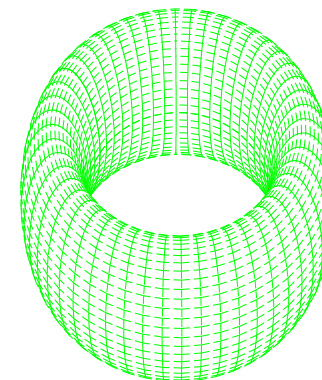
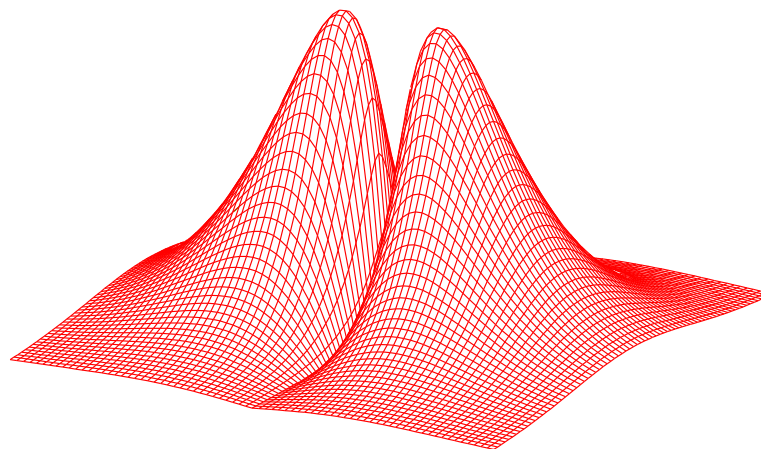
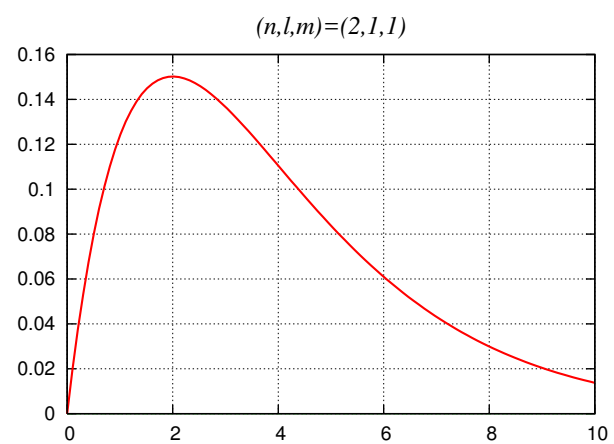
- 原子のスペクトル:

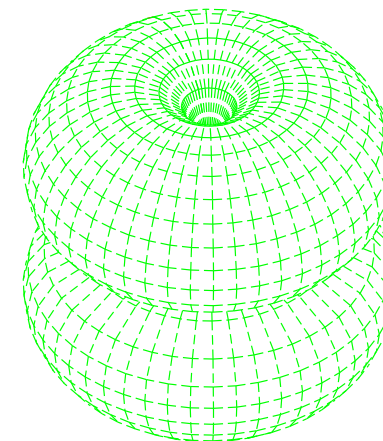
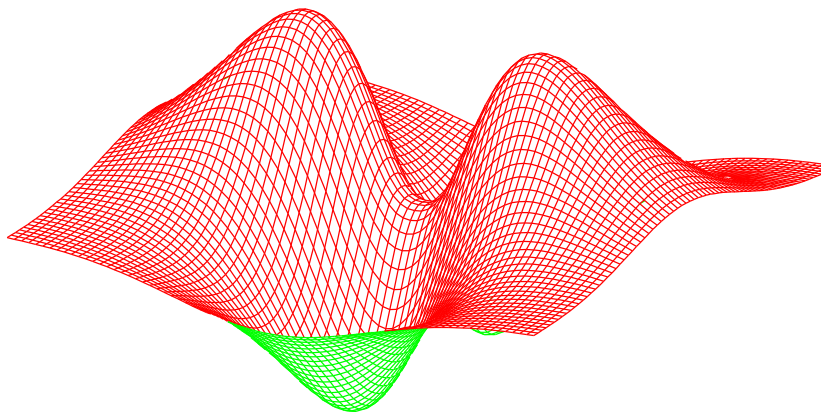
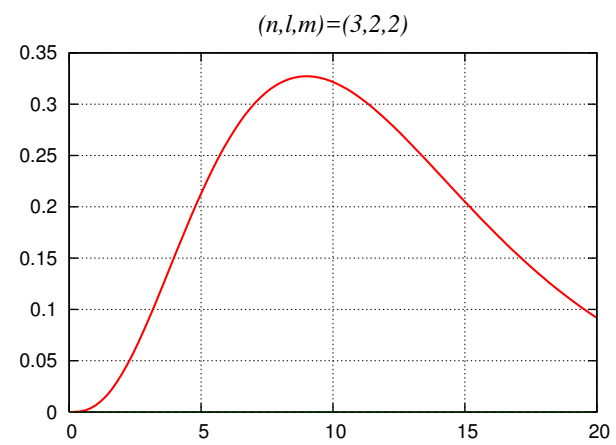
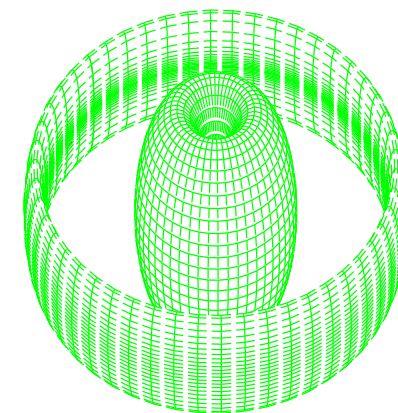
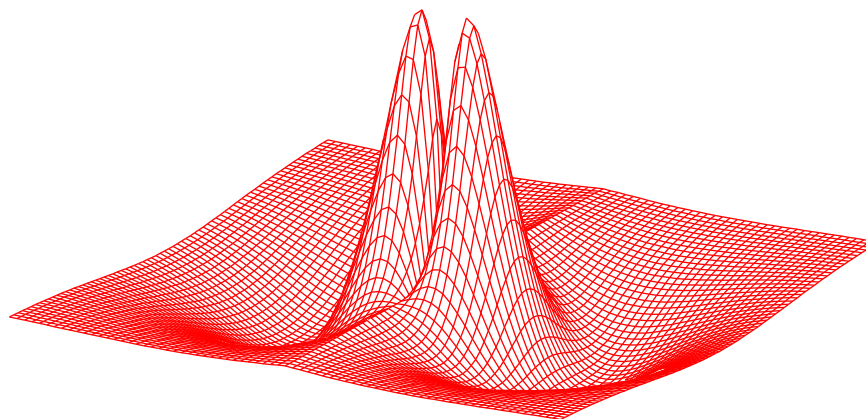
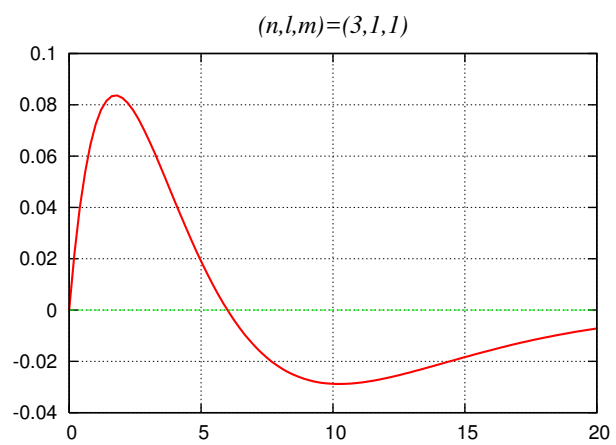
- ▶ 離散的スペクトル ( $E < 0$ ), 束縛状態
- ▶ 連続スペクトル ( $E > 0$ ), 非束縛状態



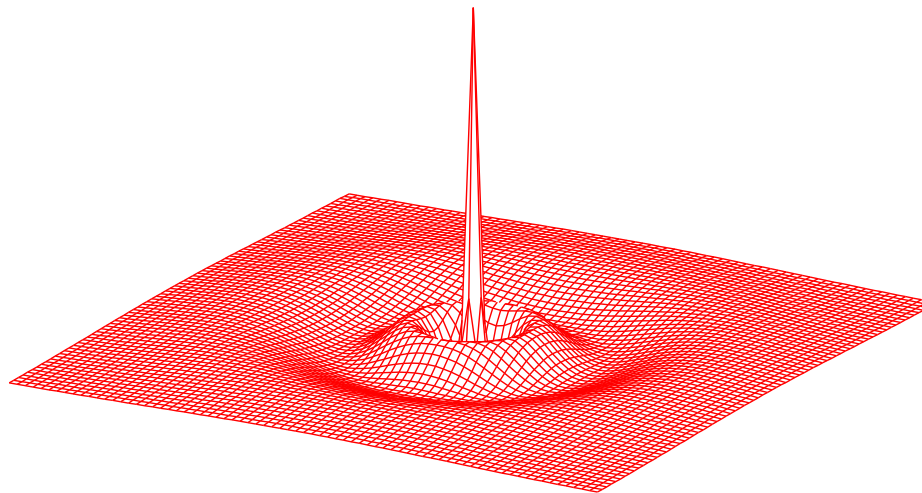
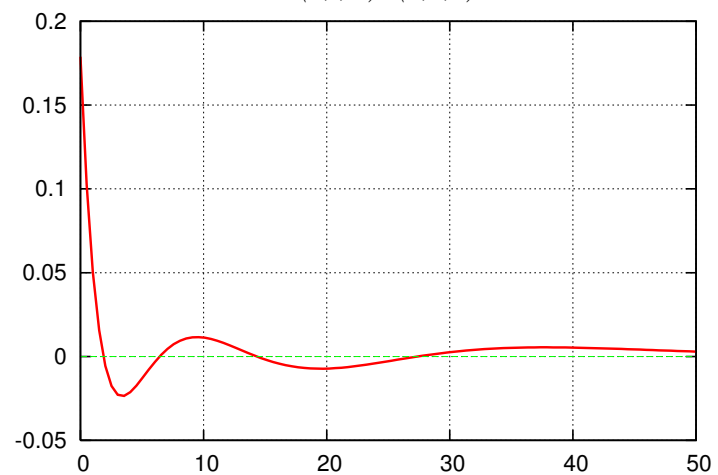
# 水素型原子の波動関数と確率密度の例



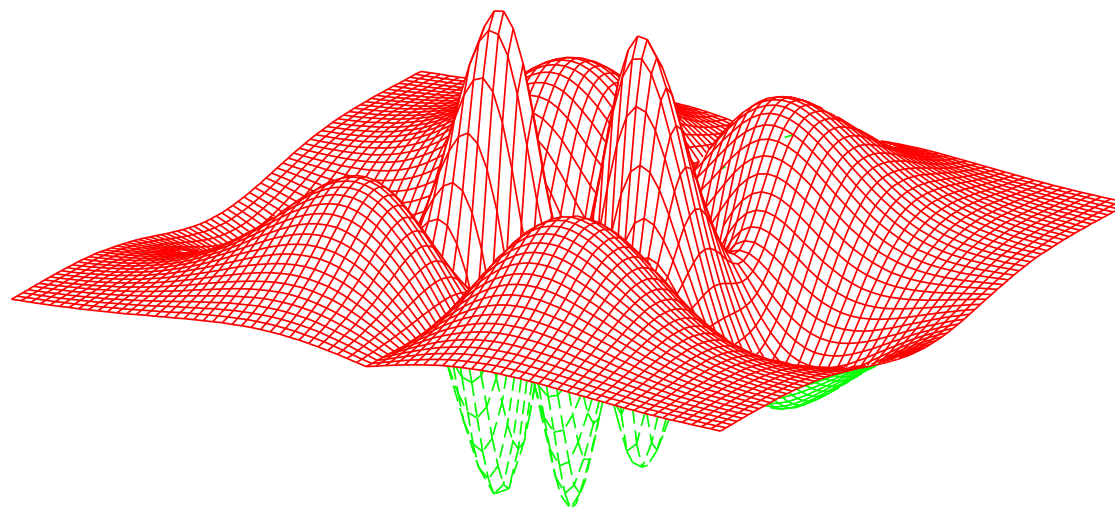
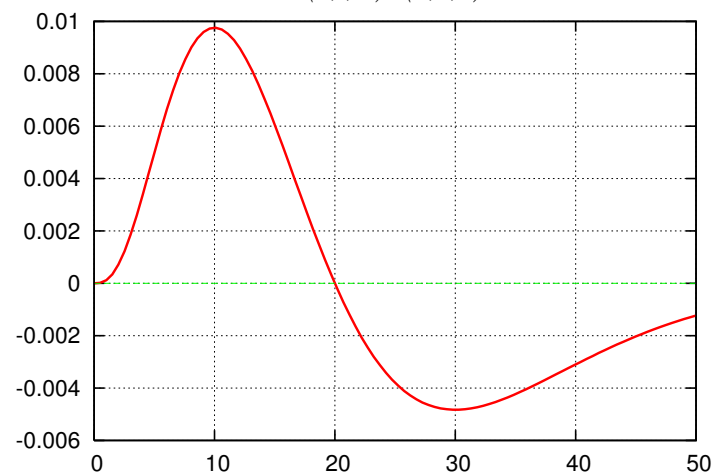


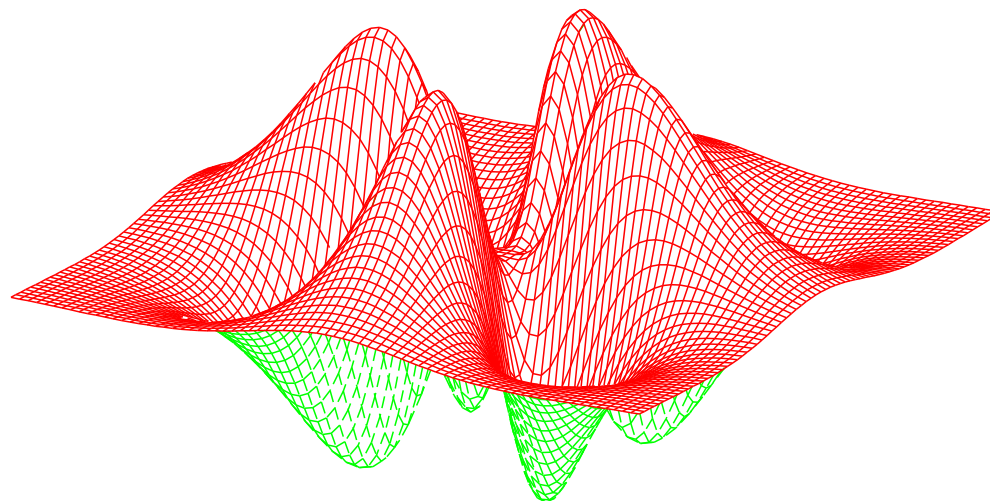
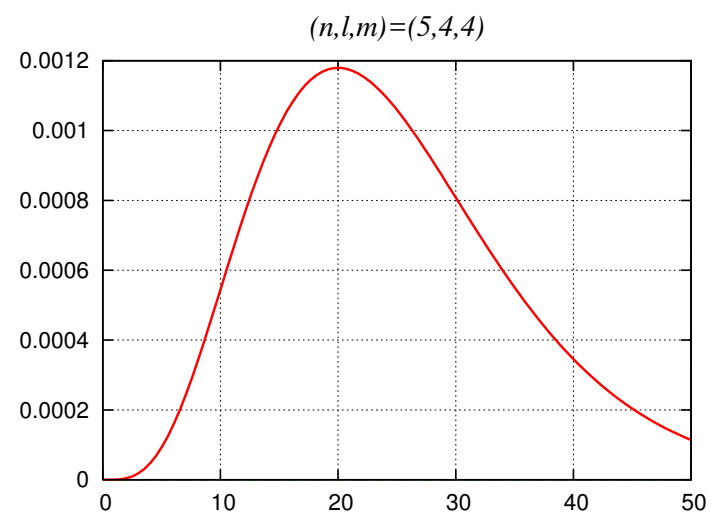


$(n,l,m)=(5,0,0)$



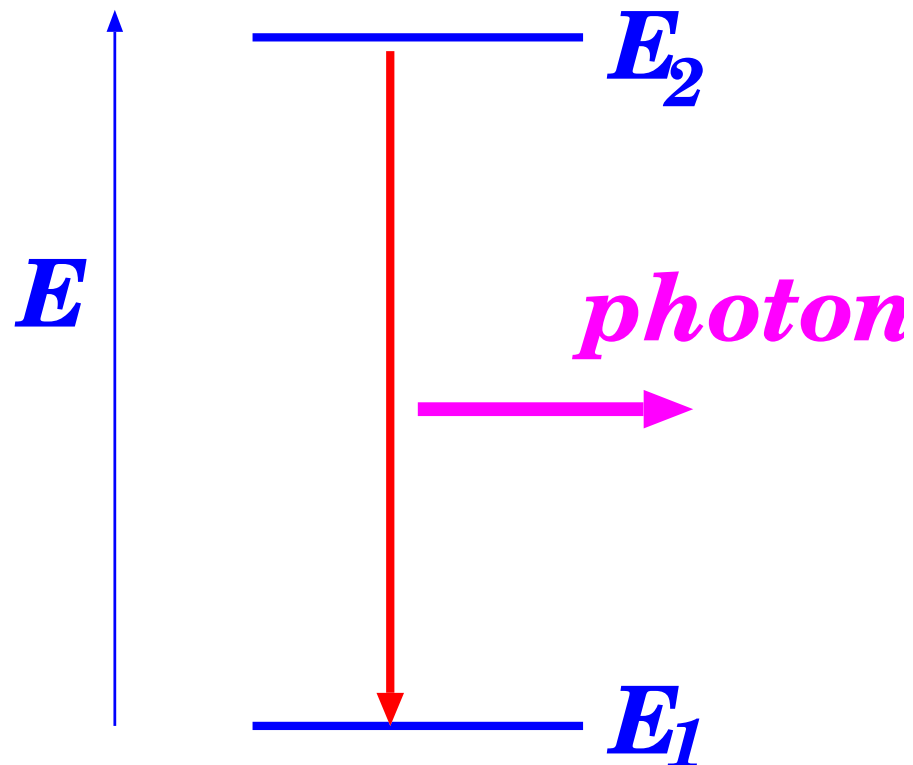
$(n,l,m)=(5,3,3)$





# 離散的スペクトルの持つ物理的意味

## 原子と光



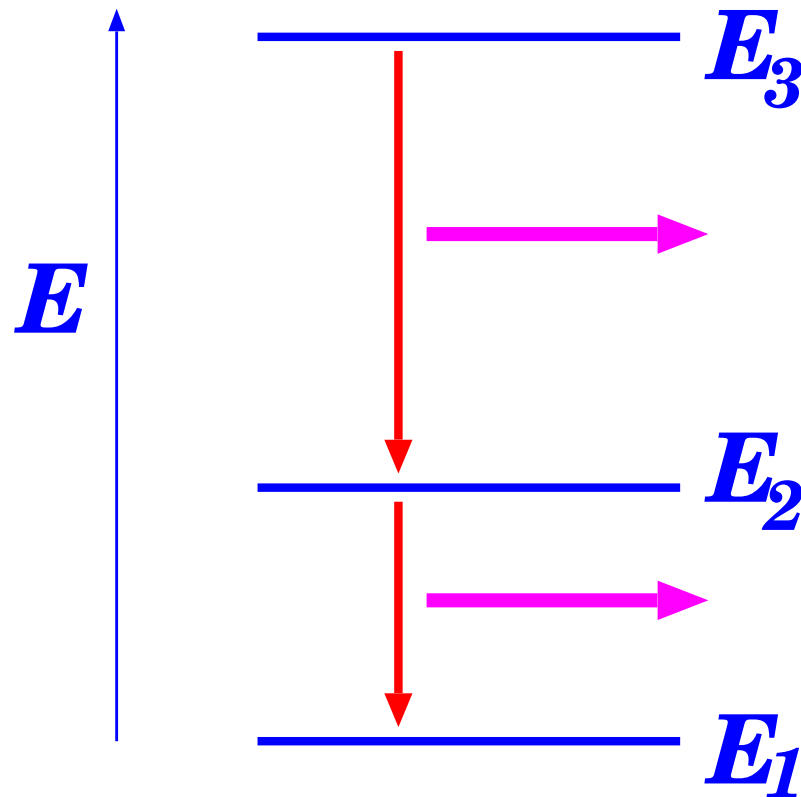
- エネルギーの高い状態  
⇒ 不安定  
⇒ エネルギーの低い状態へ遷移
- エネルギー保存  
⇒ エネルギーの放出  
⇒ 光子 (photon) の放出

$$E_2 - E_1 = h\nu_{12} = \frac{hc}{\lambda_{12}}$$

- 原子の放出する光の波長  $\lambda$  (色) はエネルギー差で決まる

# 原子のスペクトルの離散性

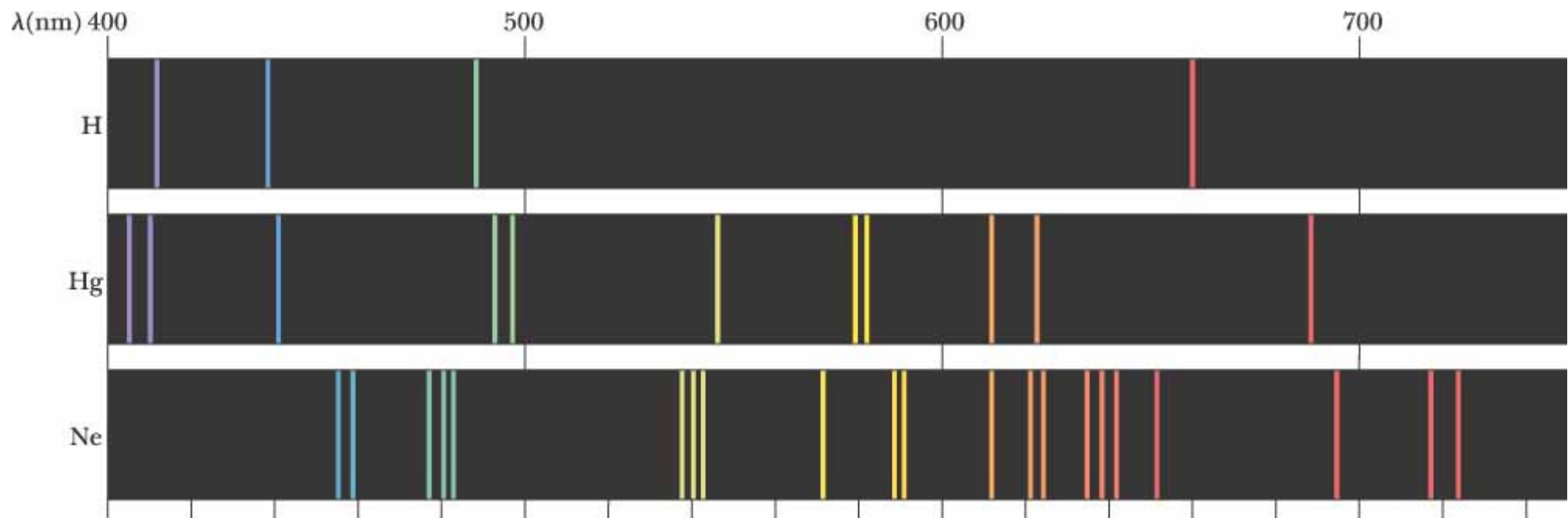
- 離散的スペクトル — 量子力学固有の特徴  
蛍光灯, オーロラ, 炎色反応, 花火, etc.
- 原子は束縛状態 (電子は原子内) なので離散的スペクトルを持つ



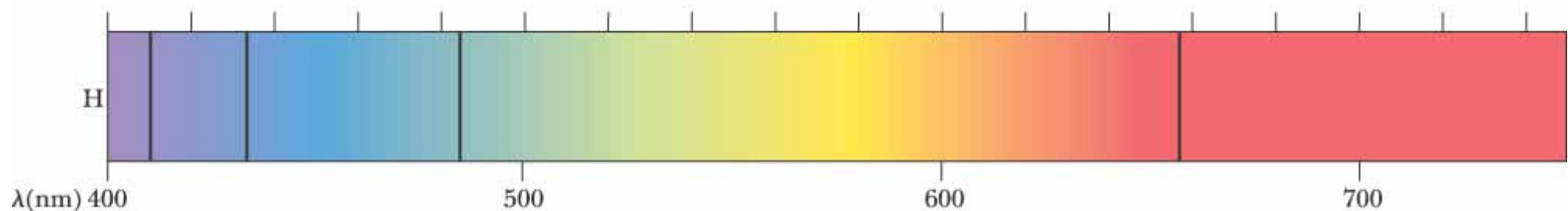
- ▶ エネルギーが離散的  
⇒ エネルギー差が離散的  
⇒ 波長 (色) が離散的 ← 後期実験  
「量子力学と原子のスペクトル」
- ▶ 19 世紀初めより離散的なスペクトルは経験的に知られていた.
- ▶ 理由が理解されたのは 20 世紀に量子力学が誕生してから. 量子力学が皆に信じられるようになった大きな理由.

- 原子固有のスペクトル ⇒ 物質同定 (特に宇宙物理)





(a)

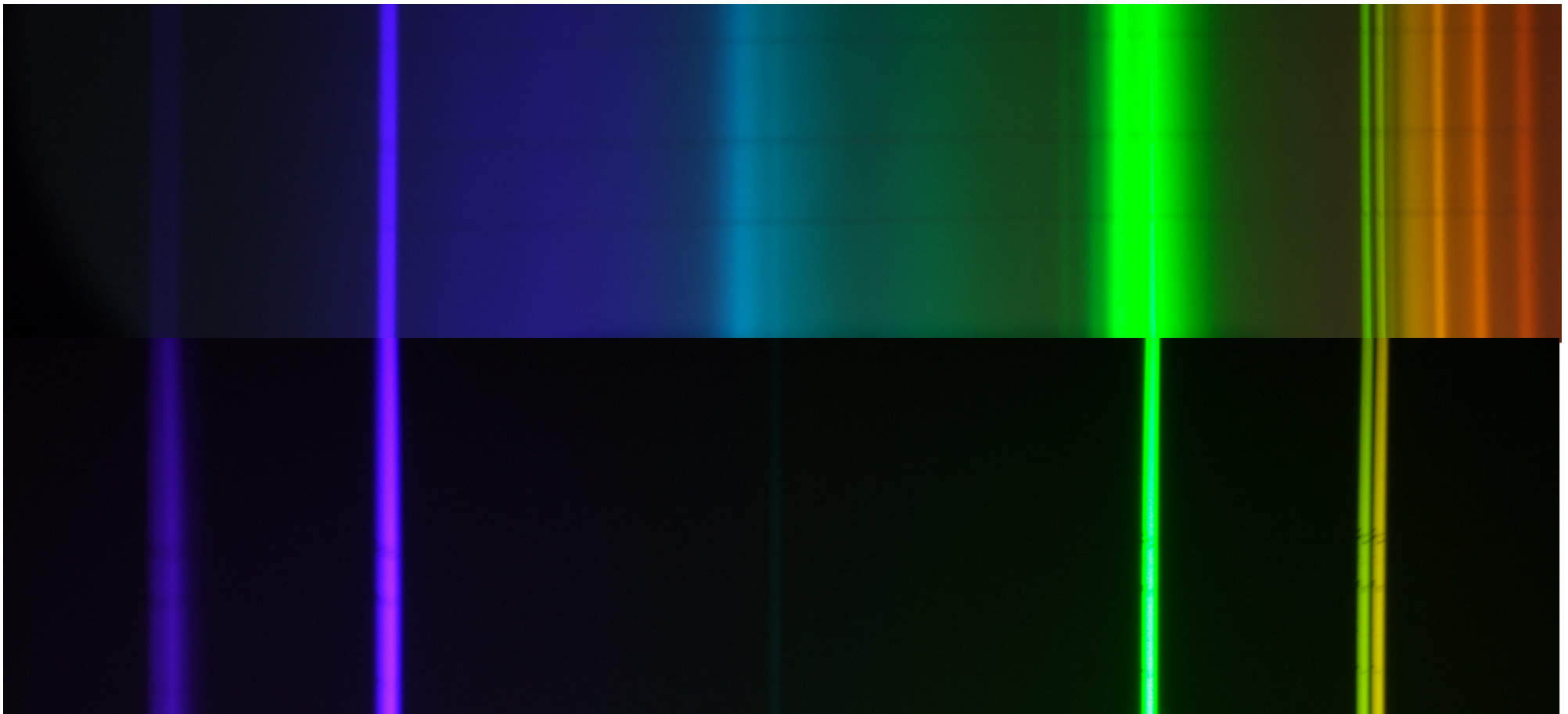


(b)

©2004 Thomson - Brooks/Cole

原子の離散的スペクトル. プリズムで分光した場合. (Serway, Jewett, "Physics for scientists and Engineers" より)





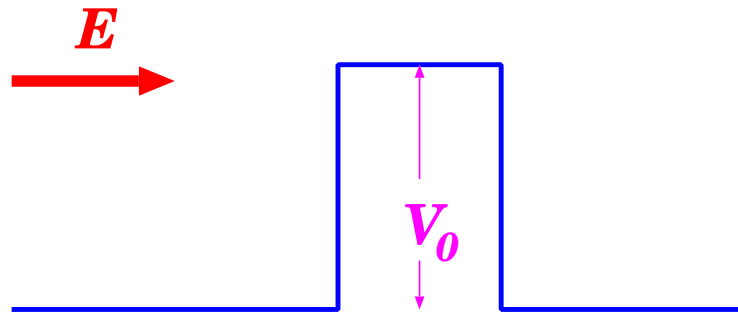
(上) 学生実験の分光器（回折格子）で分光した蛍光灯のスペクトル  
(下) 水銀原子の離散的スペクトル ← 後期学生実験

# 量子力学的な原子像

- 安定 ← そうでなければ困る
- 大きさは  $10^{-10}$  m 程度で実験と一致
- 離散的エネルギースペクトル ← 放出する光より明らか
- \* やっぱり不思議

# トンネル効果 (Tunneling effect)

- エネルギーの壁 (ポテンシャル障壁). 例：真空をはさんだ金属  
← 光電効果



古典力学における結果.

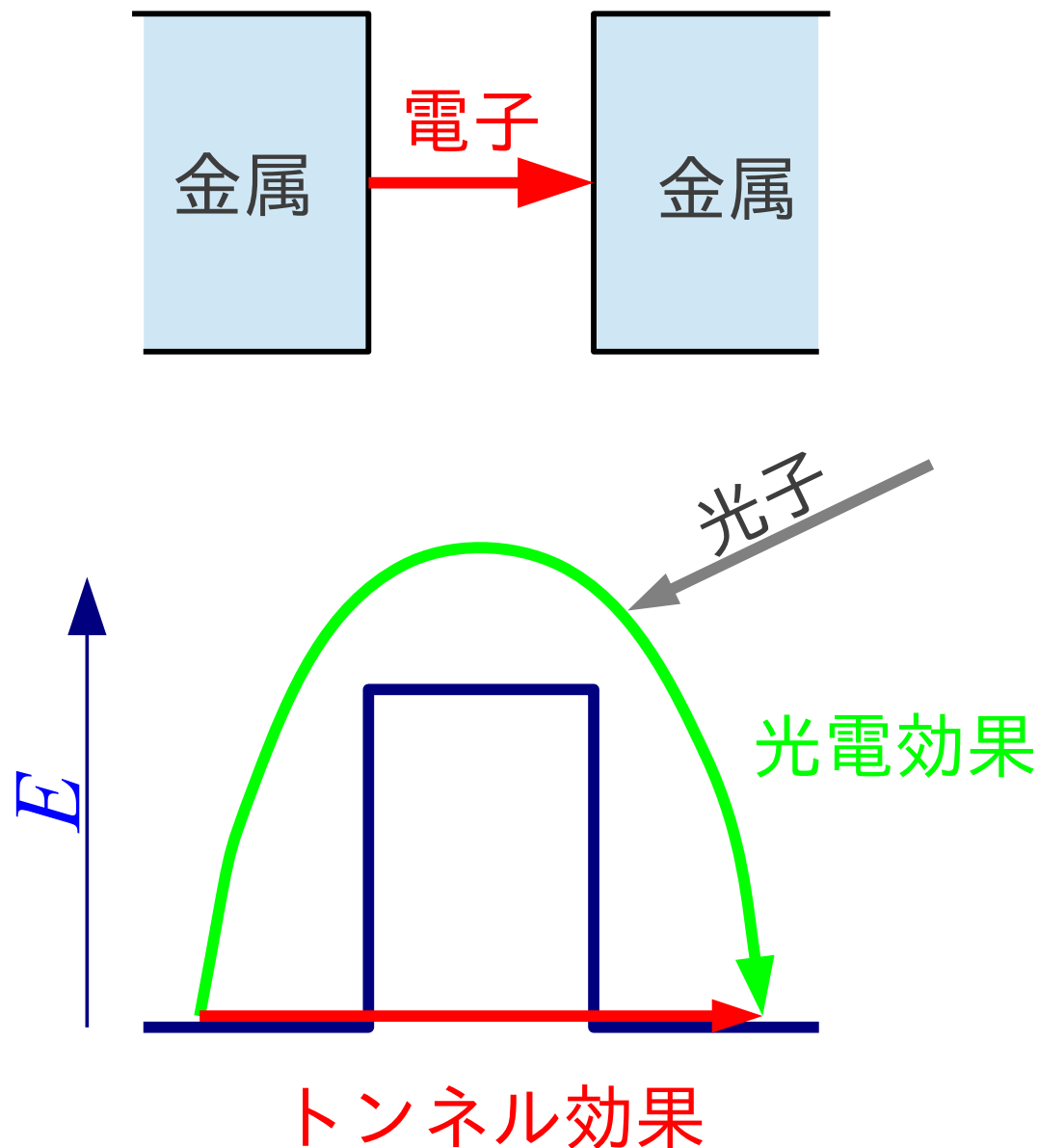
- ▶  $E > V_0$  透過
- ▶  $E < V_0$  反射
- ▶ 完璧に決定論的 (あいまいさ全くなし)

- 量子力学的ふるまい

- ▶  $E < V_0$  でもある程度の確率で透過.
- ▶  $E > V_0$  でもある程度の確率で反射.
- ▶ 確率論的なふるまい.
- ▶  $E \nearrow \Rightarrow$  透過確率  $\nearrow$

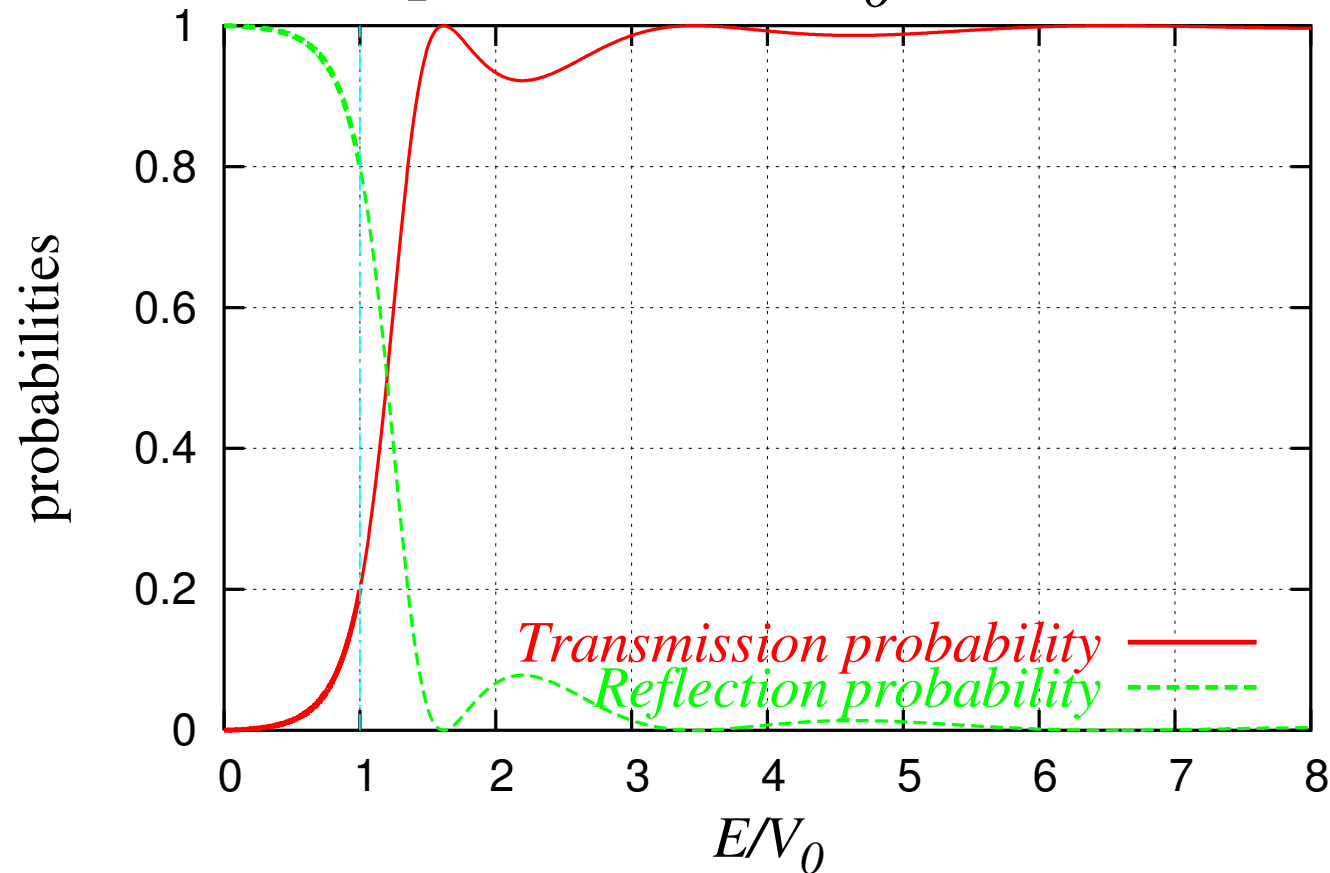
← トンネル効果

# 例：光電流（光電効果）とトンネル電流（効果）



- $V_0 = W$  金属外の方がエネルギー高い  $\Rightarrow$  電子は金属内
- $E > V_0$  光電効果（光子からエネルギー  $h\nu$  もらって壁乗り越える）
- $E < V_0$  トンネル効果（トンネル電流）。エネルギーもらわないでも、近ければ電流（わずかに）流れる。  
例：Scanning Tunneling Microscope, リーク電流.

## Square wall ( $mV_0 a^2/h^2=8$ )



箱形障壁での 透過確率 と 反射確率

- $h$ : Plank 定数
- $m$ : 粒子の質量
- $V_0$ : ポテンシャル障壁の (エネルギー的) 高さ
- $a$ : ポテンシャル障壁の厚さ

# トンネル効果に関する考察

## ● 古典論

- ▶  $E > V_0$ なら透過,  $E < V_0$ ならは反射.  $E = V_0$ で透過するか反射するかが 100% 切り替わる.
- ▶ 厚さは全く関係ない.
- ▶ 確率論的ではないので, 確率的な振る舞いはあり得ない.

## ● 量子論

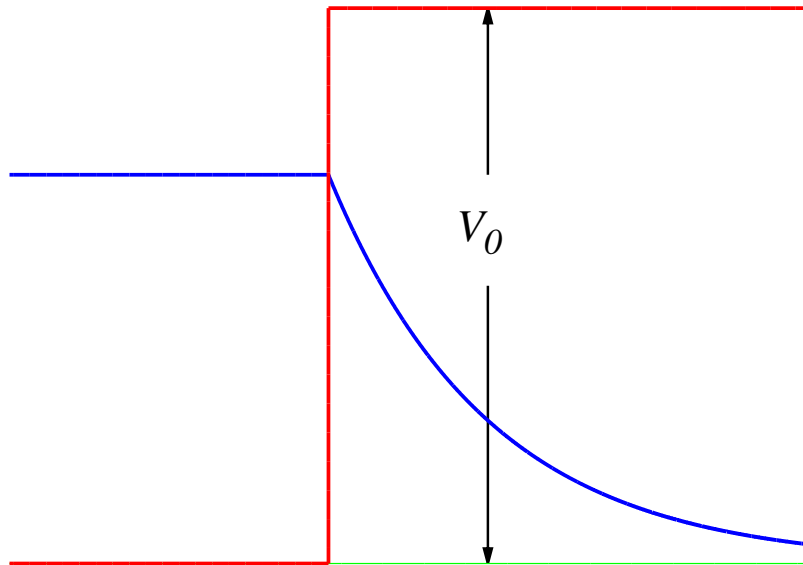
- ▶  $E$  を大きくすれば透過確率は上がる.
- ▶ うすくすれば透過確率は上がる.
- ▶ 透過確率も反射確率も連続的に変化.

# トンネル効果の仕組み

- エネルギー障壁 (高さ  $V_0$ ).
- 自由な粒子 (エネルギー  $E = p^2/2m =$  運動エネルギー) が低いエネルギーを持っている場合を考える.
  - ▶ 不確定性原理  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$

$$E = \frac{\Delta p^2}{2m} \geq V_0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta p \geq \sqrt{2mV_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta x \leq \frac{\hbar}{\sqrt{2mV_0}}$$

- ▶  $\hbar/\sqrt{2mV_0}$  程度内の距離であれば粒子はポテンシャル障壁に「しみ込む」.

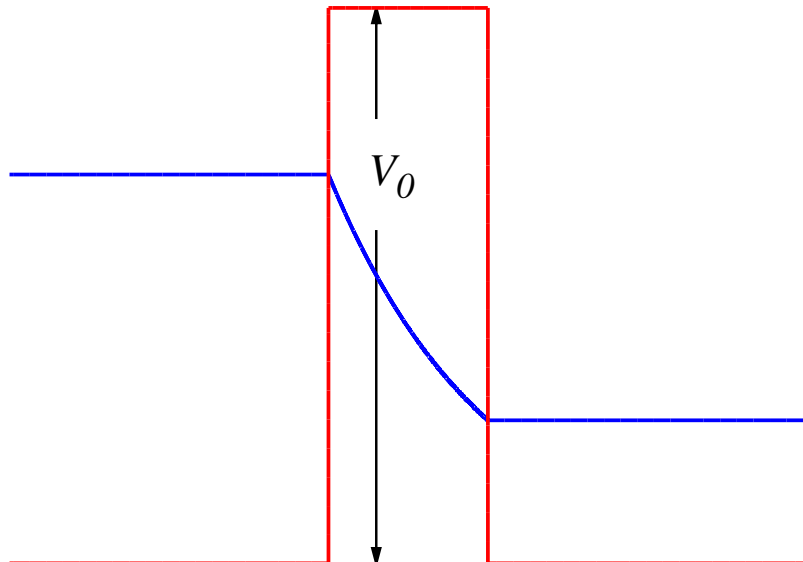


- 粒子の存在確率 (青)はポテンシャル障壁 (赤) の下で指数関数的に小さくなるが0ではない

$$P \sim e^{-2\kappa x} \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V - E)}}{\hbar}$$

$$e = 2.718\ldots$$

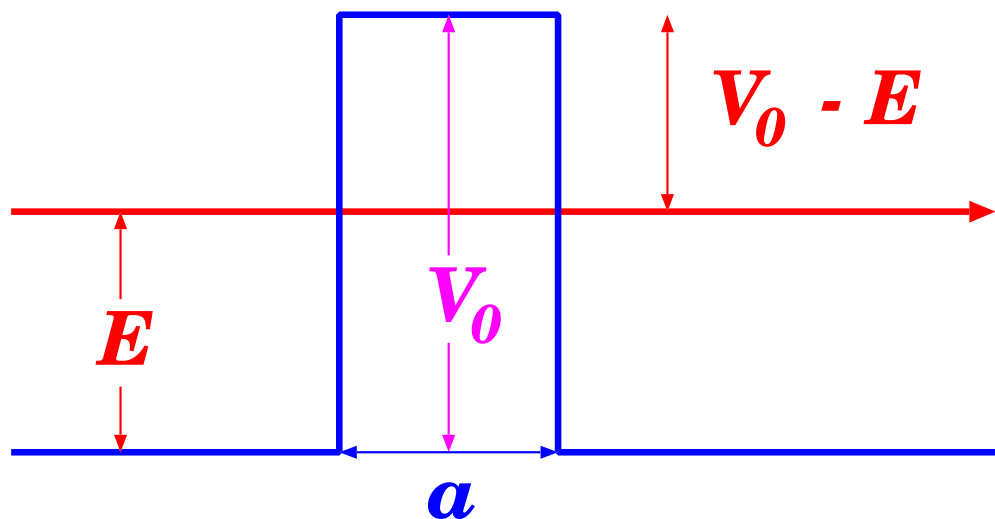
- \* 例：光電効果で光があたっていない場合



- 障壁が無くなれば，確率は減衰しない
- **波一般の現象.** “evanescent wave”，光であれば「エヴァネッセント光」.



# 透過確率



- 足りないエネルギー  
 $V_0 - E = \varepsilon$ , 壁の厚さ  $a$  とすると透過確率は

$$P(a) \sim e^{-2\kappa a}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar}$$

- 指数関数的になるのは壁の厚さが増えた分は積になるから当然！

$$P(a + b) \sim P(a)P(b), \quad \text{etc.}$$

# トンネル効果の影響の大きさ：マクロ現象

マクロな物体の例：人間が壁にぶつかった場合トンネル効果で反対側に通過する可能性は？

- 人間は  $m = 100 \text{ kg}$ , 壁の高さ  $h = 1 \text{ m}$ , 壁の厚さ  $10 \text{ cm}$  とする.
- 位置エネルギーによる障壁は

$$\varepsilon = V_0 = mgh = 100 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m} = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{\sqrt{2 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}}{10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} \simeq 4 \times 10^{36} \text{ m}^{-1}, \quad 2\kappa a \sim 8 \times 10^{35}$$

$$\text{透過確率} \sim e^{-8 \cdot 10^{35}} \sim 10^{-4 \cdot 10^{35}} \quad \leftarrow \text{とてつもなく低い確率}$$

# トンネル効果はミクロの世界では無視できない！

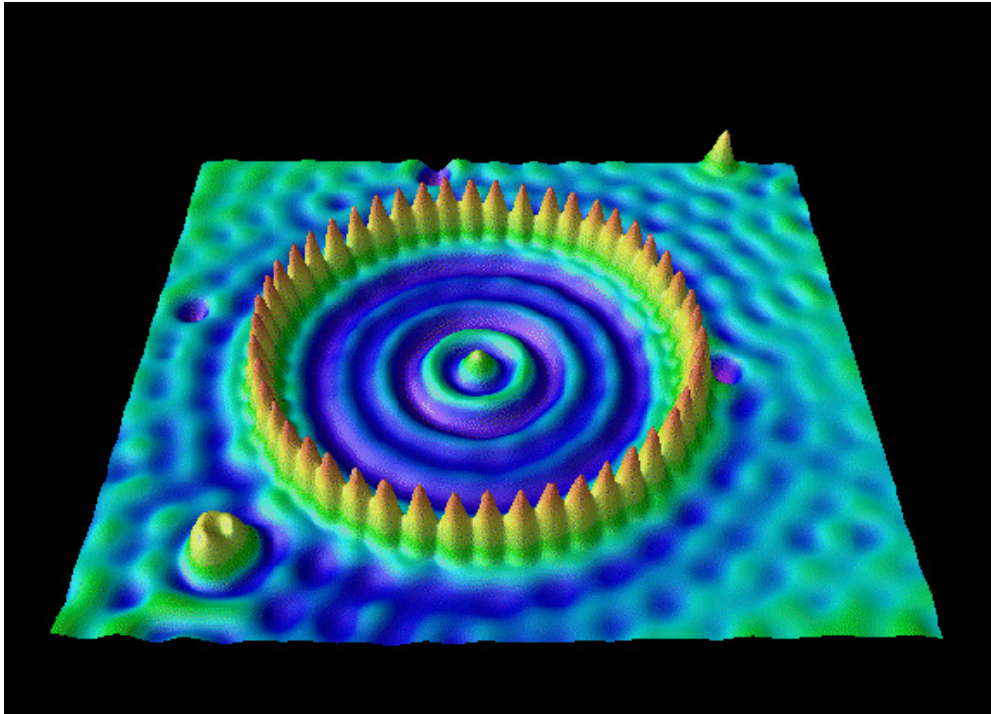
電子のトンネル現象を考える.

- 固体のなかで電子が1つの原子の周りから隣の原子に飛び移る確率を考える.
- 位置エネルギーによる障壁  $V_0 \sim 10 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-18} \text{ J}$ .
- 原子間距離  $a \sim 10^{-10} \text{ m}$
- 電子質量  $m = 10^{-30} \text{ kg}$

$$\kappa a = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} a \sim \frac{\sqrt{2 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot 2 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}}{10^{-34} \text{ Js}} 10^{-10} \text{ m} = 2$$

- 透過確率は無視できない. (cf.  $e^{-2} = 0.1$ )

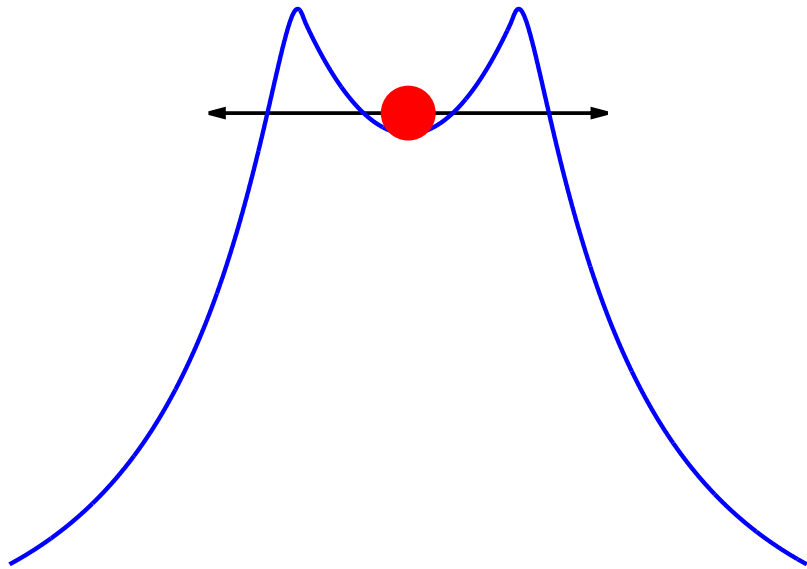
# トンネル効果の応用例/実例—トンネル電流



- STM (Scanning Tunneling Microscope) 走査トンネル顕微鏡 — トンネル効果による電流で針を制御して表面のトポグラフィーを描く. ← cf. 光電効果  
Eigler, 1993

- CPU チップ等におけるリーク電流  $\Leftarrow$  トンネル電流. 65nm プロセスではゲート絶縁膜の厚さは 1.2 nm 程度. 現在は大きな問題ではないが, CPUの性能の限界の要因になると予測.

# トンネル効果の応用例/実例—原子核の $\alpha$ 崩壊



- 原子核の $\alpha$ 崩壊 — 原子核が崩壊し（放射性原子）、 $\alpha$ 粒子（ヘリウム原子核）を放出. ← 理論的にはトンネル効果の始まり

- 常温核融合 — トンネル効果により核融合を起こす（はず）であるが普通に計算すると全く核融合は起きない. 実際にも起きない.

# 観測の理論, Theory of Measurement

- 観測が対象に与える影響を考慮して振る舞いを考慮.
- 量子力学に矛盾や不備があるわけではない ← 20世紀初頭の動機
- 量子力学は実験で非常に高い精度で検証, 実験との矛盾は皆無.
- 今の主な動機: 量子情報理論 ⇒ 量子力学を情報理論に応用
- 観測（しなければ振る舞いわからない!）と観測者が量子系とは別に必要
  - ▶ 観測により量子力学的な干渉をするような波が無くなる. (波動関数の収縮, collapse of the wave function)
  - ▶ 観測者は古典的, 系は量子的.
  - ▶ 量子力学が不思議に思えるのは理論が完全でないから?
  - ▶ 隠れた変数 (hidden variables) があるだけではないか?
  - ▶ 「観測の理論」は量子力学の持つ解釈の問題, 哲学的側面が大きい

# 観測の理論の典型例 — 2重スリット実験

- 二重スリット実験で粒子の位置を確認する.
  - ▶ スリット 1 で粒子を観測したとする.
  - ▶ 両方に来ていた粒子 (本来干渉するべきであった) が観測したためにスリット 1 を通る事に確定した.
  - ▶ スリット 2 には来ていない. ← 非局所的影響
  - ▶ 1を通る状態と2を通る状態の重ね合わせ (量子的絡み合い) が観測により, 1を通る状態だけになった  
← 「波動関数の収縮」 (Collapse of the wave function)
- 果たしてそうなのであろうか? — 単にスリット 1 に来ていたのを見ていなかっただけではないだろうか? ← 干渉するので単純には無理

cf. 朝永振一郎「光子の裁判」

# 観測の理論におけるポイント

- 観測者とは？ (どこまで含めるのか？宇宙全体の観測者は？)
- 「隠れた変数」で観測の影響を無くす事は可能か？
  - ▶ 結果を「知らなかった」 (= 隠れた変数) だけと考えられないか？  
← 干渉が無くなるから無理
  - ▶ Bell の不等式  $\Rightarrow$  隠れた変数で量子力学で説明できる結果を再現するためには、非局所的な理論が必要である.
  - ▶ 非局所的で良ければ、決定論的な定式化も存在(de Broglie-Bohm理論)
- 「波動関数の収縮」以外に「多世界」 **解釈** (many-worlds interpretation) も存在 (Hugh Everett, 1957).
  - ▶ 観測により世界が分かれる (いわば平行宇宙 (parallel universe) ).
  - ▶ 他の世界/宇宙同士は全く相互作用しない.



# EPR Paradoxと量子的絡み合い

Einstein, Podolsky, Rosen, 1935

- スピン 1 個の状態は  $|\uparrow\rangle$  か  $|\downarrow\rangle$  とする (電子はその例).
- スピン 2 個を全体としてスピン 0 の状態として用意する.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2]$$

- 2 個のスピンが離れ離れになるとする. 実験でこのような状況は生じる (ポジトロニウムの崩壊, etc).
- 片方のスピンが  $|\uparrow\rangle$  であればもう一方は  $|\downarrow\rangle$ .  $|\downarrow\rangle$  であれば  $|\uparrow\rangle$ .
- EPR の指摘: 片方のスピンが  $|\uparrow\rangle$  と観測した瞬間に, 一般に離れた場所にあるもう一方が  $|\downarrow\rangle$  であることが決まるというのはおかしい!!  
→ 通常の答: おかしいけどそれが正しいし, しょうがない.

- 情報が光速より伝達出来るわけではない。(スピンの向きはランダム.)
- この状況は本質的に二重スリット実験と同じ
  - ▶  $|\uparrow\rangle$  は粒子がスリットに来ている状況.
  - ▶  $|\downarrow\rangle$  は粒子がスリットに来ていない状況.
- スピンの向きは観測時に決まり (波動関数の収縮), 事前には決まっていない.
- このようなスピン1,2は量子的に絡み合っている (quantum entanglement).
- EPR状態は, 量子情報理論の問題を議論する際の基本的な要素.
- “EPR paradox” を論じた論文の題名 “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” (1935), が示すように, Einstein は量子力学が間違っていると主張したわけではなく, より「完全な」定式化を求めている. ← “Einstein’s dream”

# EINSTEIN ATTACKS QUANTUM THEORY

---

Scientist and Two Colleagues  
Find It Is Not 'Complete'  
Even Though 'Correct.'

New York Times の見出し, May 4th, 1935.

# Bell の不等式

- 隠れた変数の考え方 (“hidden variables”)
  - ▶ EPR paradox: 実は調べなかっただけで、初めから  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  のどちらになるか決まっていたのではないか？
  - ▶ 二重スリット実験: どちらのスリットを通るか決まっていたのではないか？
  - ▶ 単に、どちらになるかが隠れていた (hidden variable) だけで、それを統計的に見ているだけではないのか？
- 決まっていたものの統計的な平均とみなすと量子力学と同じ結果は得られない. (局所的理論においては) — Bell が数学的に証明 (1964).
- 実験的には量子力学的な結果が正しい.
- 直感的に考えるとこれはもっともである. — どちらかしか通らないのなら二重スリット実験で干渉するはずはない.

# 量子情報 bit vs. qubit

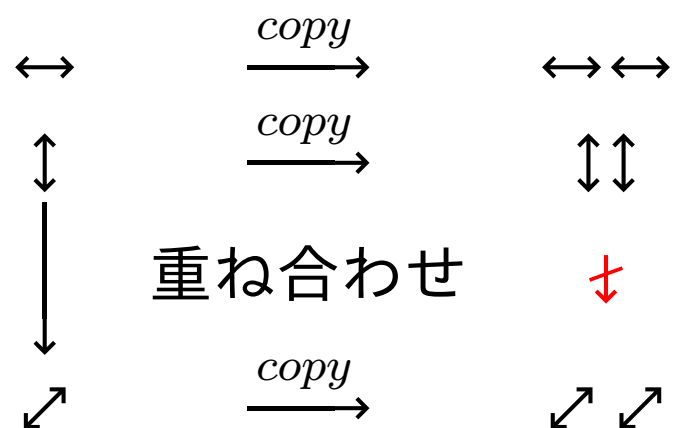
- 古典的な bit:  $|0\rangle$  か  $|1\rangle$  ( $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ と同値)
- 量子力学的な qubit:  $|0\rangle$  と  $|1\rangle$  任意の重ね合わせ.

$$a|0\rangle + b|1\rangle$$

- 量子情報の qubit の方が bit よりも無限に情報が多い. ← 取り出すには観測が必要!
- 観測 をすれば 0 か 1. 重ね合わせは無くなる. (波動関数の収縮)
- $a, b$  もわからない (少なくとも1回の観測では).

# The no-cloning theorem

量子状態はコピーできない



量子コピー機は重ね合わせと矛盾

重ね合わせ :  $\leftrightarrow + \updownarrow = \nearrow$

$$\nearrow \nearrow = (\leftrightarrow + \updownarrow)(\leftrightarrow + \updownarrow)$$

$$\neq \leftrightarrow\leftrightarrow + \updownarrow\updownarrow$$

- 1回コピーできればいくらかでもコピーを作れる (コピーをコピーできるから).

# 量子コピーできれば光速より速い情報伝達が可能

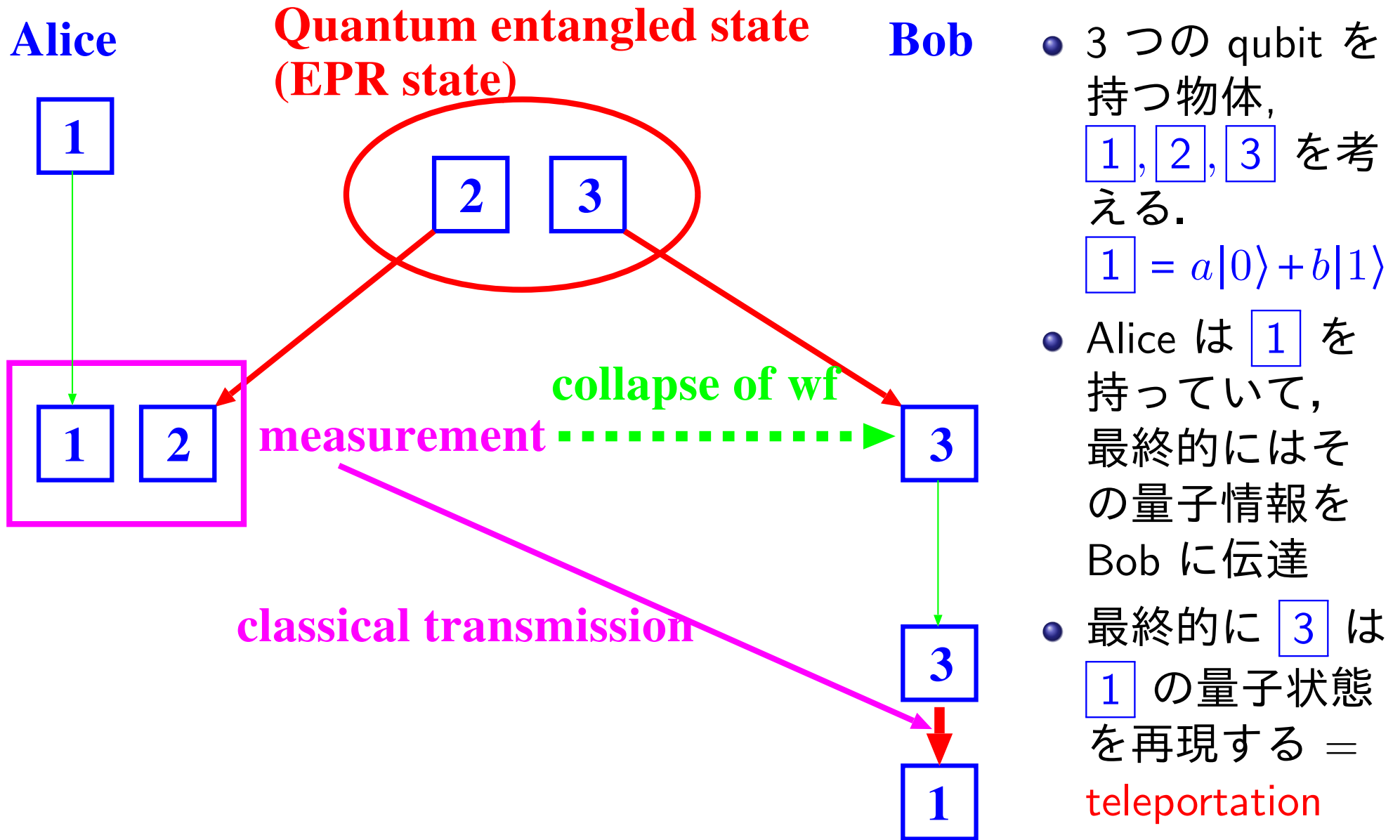
- AliceがBobに量子的に絡み合ったスピンの片方を送る.
- Bobはもらったスピンのコピーをたくさん作って, 同じ方向について測定する.
  - ▶ 平均0  $\Rightarrow$  Aliceはスピン測定していない.
  - ▶ 全て $\uparrow$ か $\downarrow$   $\Rightarrow$  Aliceはスピン測定した.

BobにAliceが測定したかの情報が瞬時にわかる!  $\leftarrow$  真空中光速より速い情報伝達. 相対性理論と現在までの実験結果と矛盾.

# 量子テレポーテーション (Quantum Teleportation, 1993)

- まとめ： Alice の持つ量子情報を Bob にわたす.
  - ▶ 単に量子情報を持つ物体 (原子, *etc.* ) を Bob にわたすこともできる(しかしこれでは“transportation”であって“teleportation”ではない. )
  - ▶ 量子情報は観測した瞬間に失われてしまう. よって **copy は不可能.**
  - ▶ 1 qubit で teleportation が可能であればより多くの情報量でも可能.





# 量子テレポーテーションの流れ

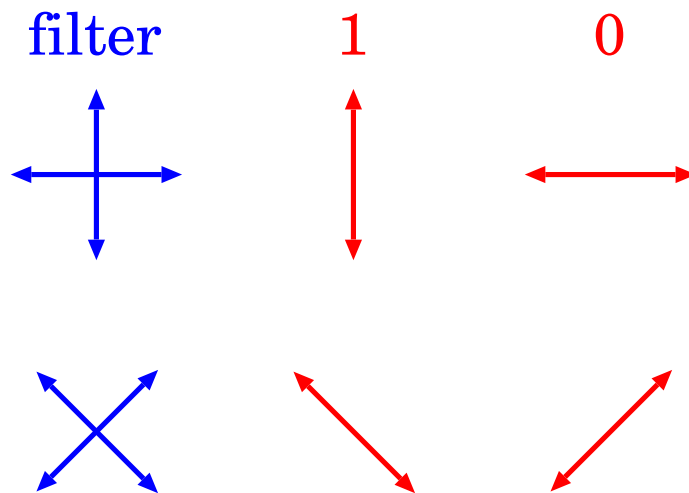
- **1**, **2**を単独で観測しない(単独で観測すれば量子情報は失われる.)
- **1** と **2** を合わせた状態で観測 (「ベル測定」, 両者の関係を調べる) を行う. **3** の状態は影響を受け(波動関数の収縮), **1** と関係付けられる.
- 観測の結果 (通常の日データ) を Bob に伝えて初めて**3** は**1** を再現できる. よって**光速より速い情報伝達はない**.
- Bob は情報に応じて **3** をそのままにするか,  $x, y, z$  軸どれかの回りに $180^\circ$ 回転する.
- **3** は **1** を再現しているが, その状態は我々は**知らない**.
- Alice, **1** は測定後は初めの量子情報をもはや持っていない. ←  
**copy ではなく “teleportation”**

# 量子テレポーテーションが持つ意味

- 1 qubit の伝達を組み合わせればどのような量子データも伝達できる（原理的には）.
- EPR paradox との比較
  - ▶ EPR paradox: 瞬時に「伝達」( $c$  より速い). しかし情報は伝達しない.
  - ▶ Quantum Teleportation:  $c$ 以下の速度での量子情報の伝達.
- 実験結果
  - ▶ 光子 (1997), 原子 (2004) で quantum teleportation が実現されている.
  - ▶ 600 m 離れた場所への teleportation を光子で実現 (2004).
- 通常のデータ通信 (E-mail 等) との比較
  - ▶ コピーできないので手元には情報残らない
  - ▶ 伝達する情報が量子情報

# 量子暗号：鍵の受渡し (Quantum Key Distribution, QKD)

- 暗号化するための鍵を，盗聴されても盗まれない，ことが目的.
- 光 (光子) で情報を A (Alice) → B (Bob) に送る. (原理的には光で無くても構わない.)
- 光子の性質の重要なポイント：
  - ▶ 偏光は方向(フィルターでコントロール) と向きがある.



フィルターと偏光方向と信号の対応.  
たとえば，縦方向のフィルタをかければ，縦偏光なら透過し，横偏光ならば透過しない. 偏光方向がそれ以外の場合は一定の確率で透過.

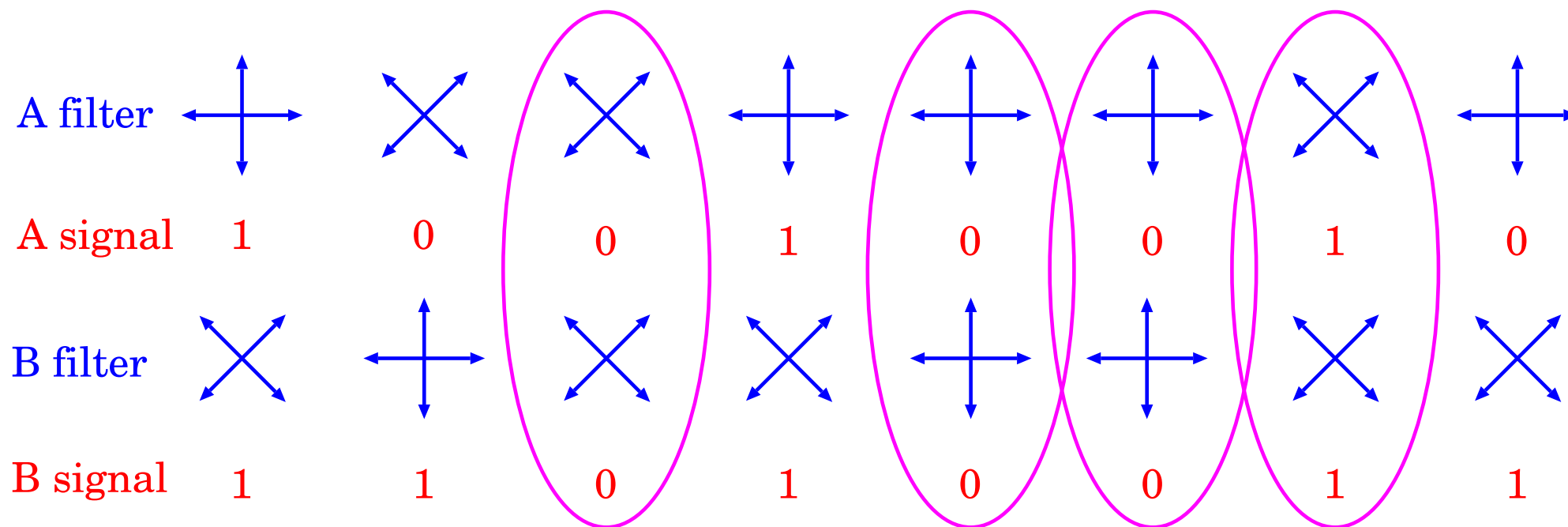
- ▶ 光子 1 個単位で偏光を与え，測定を確実行える.

- - ▶ 正しいフィルターで測定を行えば正しいデータを読み取れる.
  - ▶ フィルターが間違っただ測定をしてもデータ (0 or 1) を読み取れる. どちらが出るかは確率  $1/2$ . 間違っただ測定をしたことはわからない.
  - ▶ 測定をした光子は元の状態に戻せない. 間違えたフィルターで測定して測定した通りの偏光で送っても確率  $1/2$  で違う.
  - ▶ 鍵を盗もうとして途中で連絡を盗聴しても, コピーは作れないので測定をして同じ (だと思ふ) ものを流すしかない.

# Quantum Key Distribution – 手順

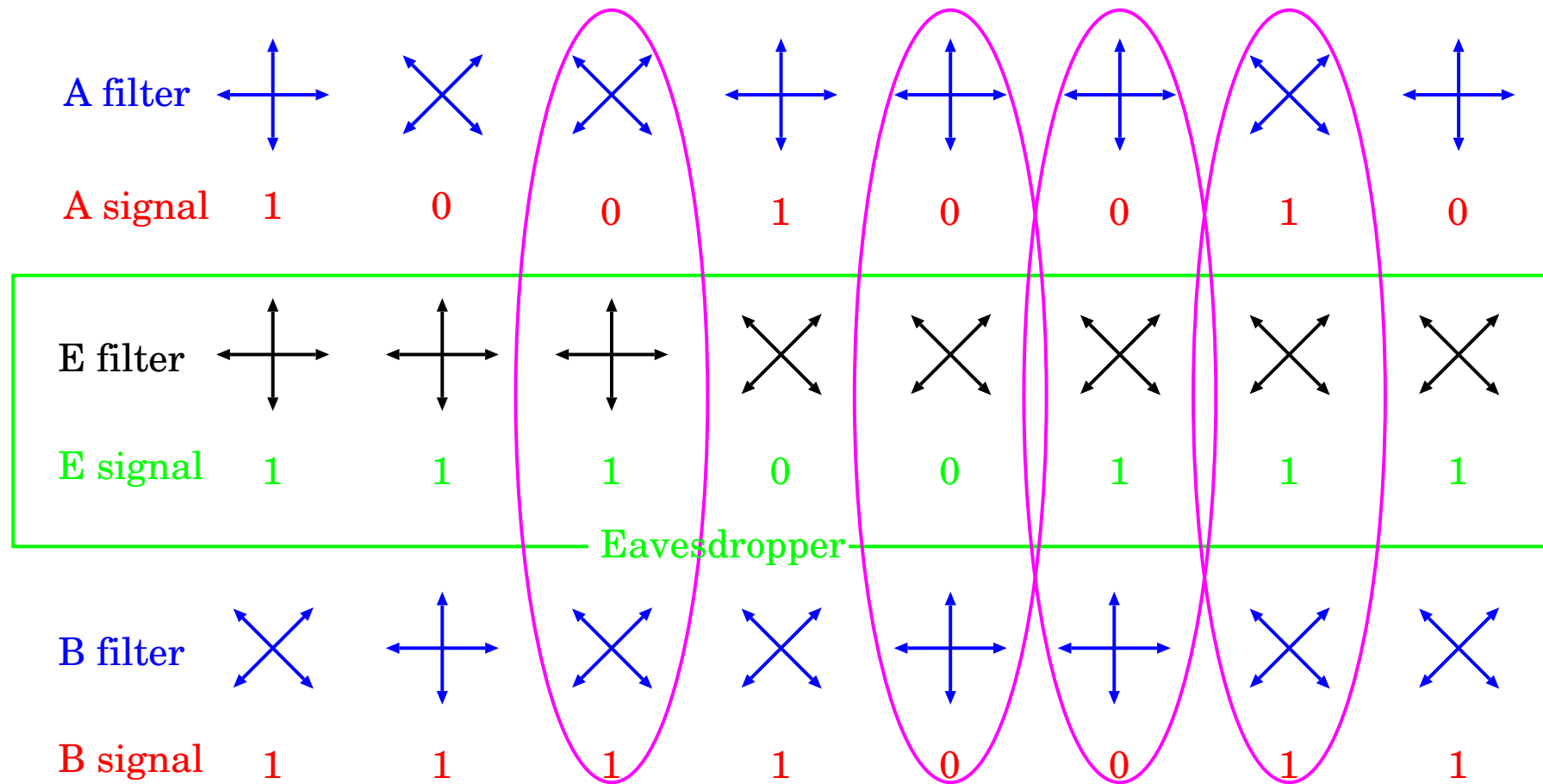
- A は光子をフィルターを通して偏光持った光子を B に送る.
- B は無作為に偏光した方向について測定し, その方向について A に伝える. 測定結果は **伝えない**.
- A はどの測定が正しい方向であったか B に伝える.
- 正しかったデータのみを A, B は鍵として使う.
- \* なぜ盗聴できないのか? — 全ての通信を傍受しても偏光が変わってしまうので正常な通信ができない. 厳密に言えば, 確率的に正しい偏光である可能性があるが, bit 長  $n$  として正しい確率は  $1/(2^n)$  になるので, 常にコイントスで表だけ出す確率と同じ.

# 量子的な鍵の受け渡しの例



key distribution: この場合の鍵は 0001.

# 盗聴ができない理由



A から B への鍵通信を E が傍受し、B へその情報を流した場合の例。C はどちらのフィルタを使うべきかわからないため読み間違える。鍵は A (0001), B(1001), E(1011)。A の通信はE にも B にも鍵が違い解読できない。



- どこが量子力学？
  - ▶ 観測が対象に影響を与えるので偏光を一回しか測定できない.
  - ▶ 光子の状態を確実に再現できない.
- 実用化されて既に販売(id Quantique, MagiQ, QinetiQ, NEC, etc. )
- 現実には普通の公開鍵で bit 数の大きいものを使い, Verisign のような Man in the middle attack への対策を取ることに比べて, 原理的に破れないということ以上に利点が無いと思われる.

# 量子情報，量子コンピューティング（Quantum computing）の展望

- 量子情報は古典的情報より無限に情報量が多い.
- 観測は対象に影響を与える.
  - ▶ 量子情報はコピーできない.
  - ▶ 量子情報自体は知ることができない.
- **たとえ実現できたとしても**，量子コンピューターの方が従来型よりも一般に速い/強力であるという根拠は無い. むしろ，特殊な問題においては非常に強力であるが一般的な問題は従来型の方が速い可能性が高い.

- 量子情報理論が有効な例で現在知られているもの：
  - ▶ 暗号の解読（素因数分解）P. Shor (1999) ← 原理的には有効だが、まだPCにすらかなわない
  - ▶ 暗号鍵の配布 (Quantum Key Distribution)
- 有効と思われる状況：
  - ▶ 多くの場合を一度に試したい場合（ $\Leftarrow$  重ね合わせ） $\rightarrow$  鍵検索
  - ▶ 観測すると量子情報が無くなることを利用する場合  $\rightarrow$  Quantum key distribution
- 現状では量子テレポーテーション，鍵の配布等の実現されているが，計算が速い量子コンピュータの実現は程遠い。
  - ▶ そこそこ速い量子コンピュータD-waveはあるが，qubitでの処理はしていない。

# Schrödinger の猫

- 放射性原子核は崩壊前の状態と崩壊した状態の重ね合わせ.
- 観測を行うと崩壊しているかしてい無いかのどちらか. (波動関数の収縮)
- Schrödinger's cat
  - ▶ 放射性原子核と猫を箱に密閉.
  - ▶ 検出器をおいて崩壊を検出すれば毒ガスを放出
  - ▶ 毒ガスを吸うと猫は死ぬ.
- 原子核の崩壊前の状態と崩壊後の状態と重ね合わせ.  
⇒ 猫は生きた状態と死んだ状態の重ね合わせ??
- 猫だったらどういう気分？

# Schrödingerの猫の解釈と量子力学の「不気味さ」

- 解釈の仕方

- ▶ 重ね合わせと考えても矛盾はない.
- ▶ 普通は「観測」は猫の生死する前に行われていると考える（たとえば，崩壊を検出した時）
- ▶ 多世界解釈の方が違和感が無いかも

- EPR paradox, Schrödinger の猫にしろ，量子力学的な絡み合いをミクロスケールで考えてもおかしくないが，マクロで現れる状況を作ると不気味という指摘（間違っている主張ではない).