

# 消費者行動の理論(1)

- 効用関数
  - 1財のケース
    - 効用関数の性質
    - 限界効用
  - 2財のケース
  - 無差別曲線, 限界代替率
- 予算制約
- 効用最大化の条件
- $n$ 財モデル

# 効用関数 utility function

効用(utility)

財(goods)の消費から消費者が得る満足感

効用関数 財の消費量( $x$ )と効用( $U$ )の対応関係

$$U=U(x)$$

限界効用(marginal utility)

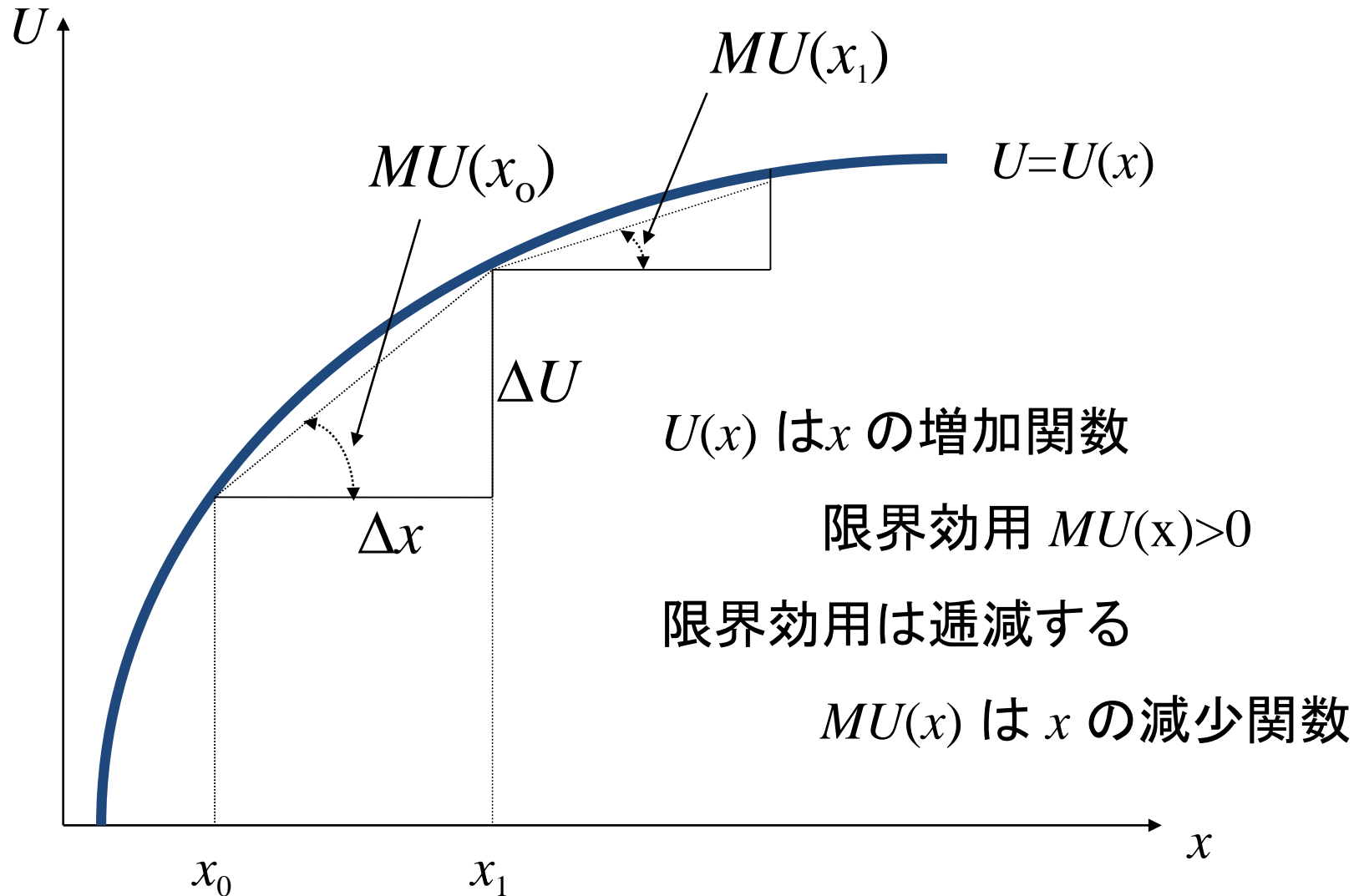
– 財を1単位追加的に消費した場合の効用の増分

$$MU(x) = \frac{U(x + \Delta x) - U(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

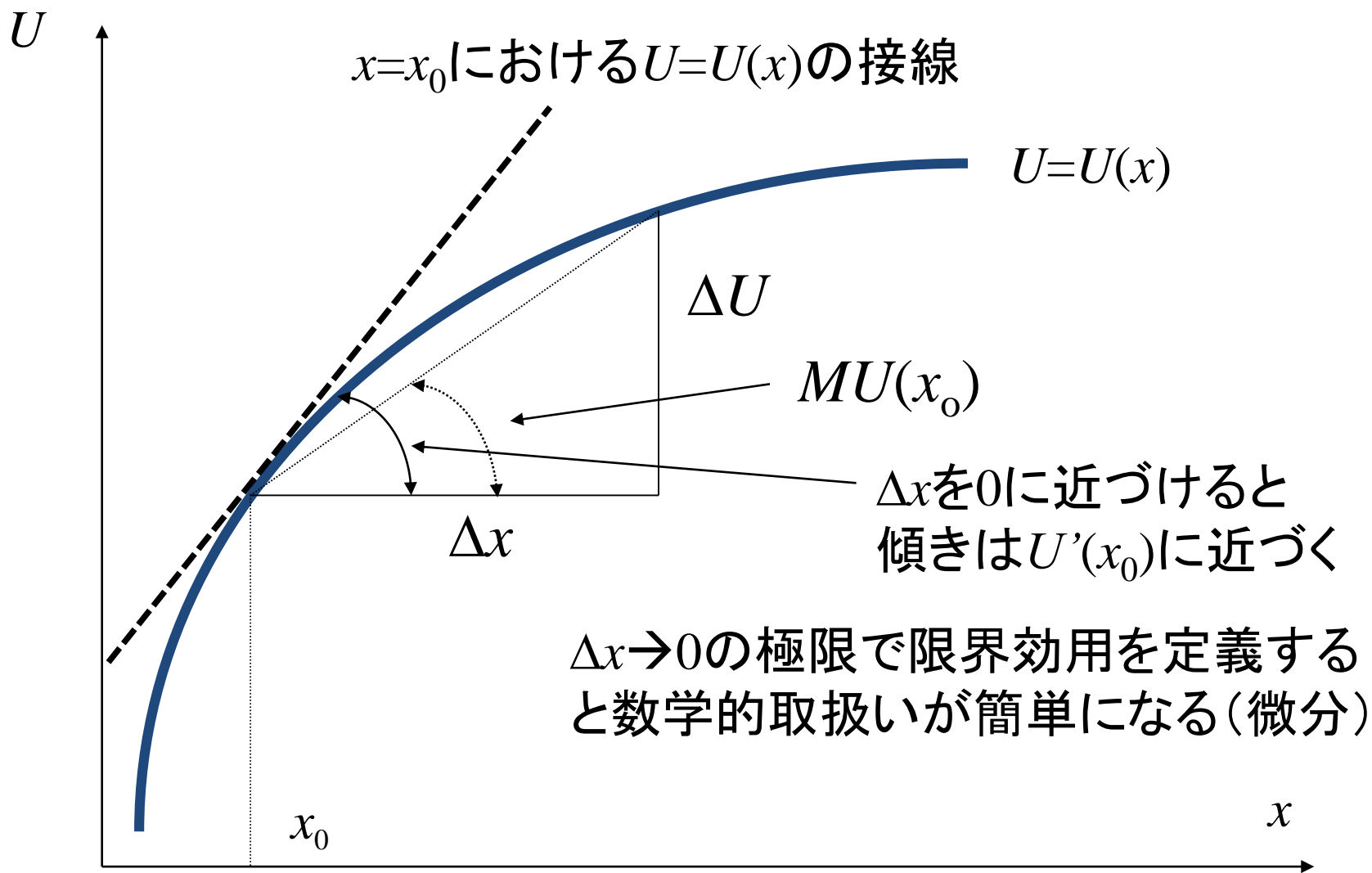
# 効用関数の性質

- $U(x)$  は  $x$  の増加関数
  - たくさん消費すればそれだけ満足が高まる
  - 消費の飽和点は存在しない
- 限界効用  $MU(x)$  は  $x$  の減少関数
  - 限界効用逓減の法則(the law of diminishing marginal utility)
  - 財の消費が増えるにつれて, 追加的1単位の消費のもたらす満足感は減少していく

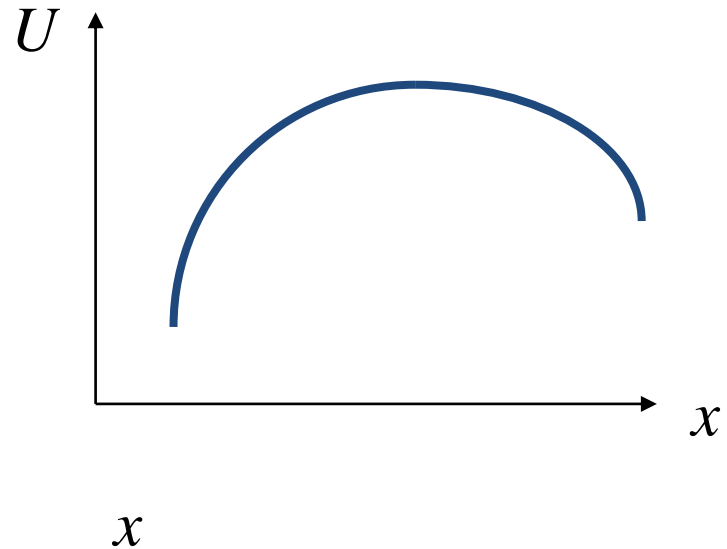
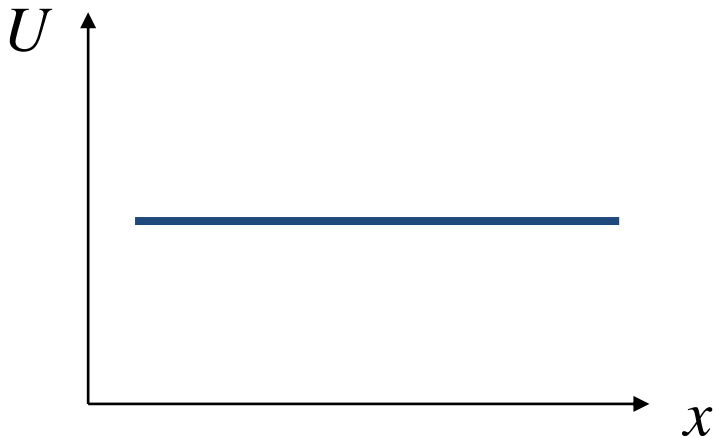
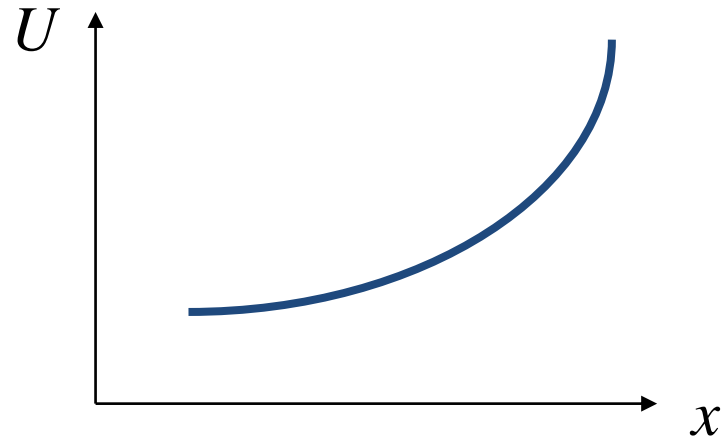
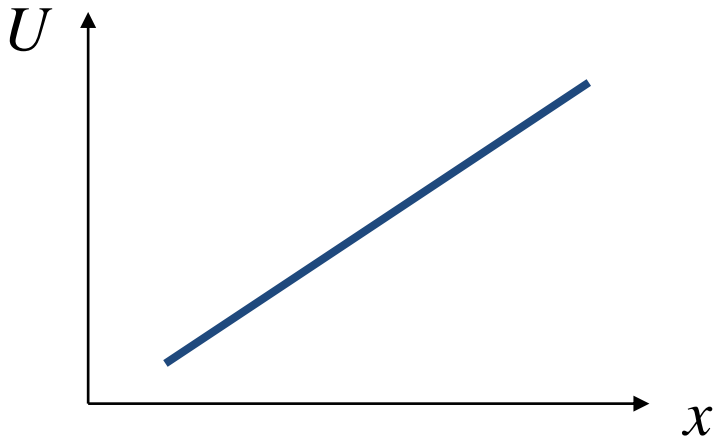
# 効用関数 1財のケース



# 限界効用(marginal utility)



Q. 次の曲線は効用関数として適当か



# 効用関数 2財のケース

- $U=U(x,y)$

$x$ : 財  $x$  の消費量

$y$ : 財  $y$  の消費量

- 効用関数の性質

- $y$  を一定にして,  $x$  を増加させれば,  $U$  は増加する→効用の増分 $\Delta U$ はプラス

- $y$  を一定にして,  $x$  を増加させていくとき,  $\Delta U$ の大きさは  $x$  の増加につれて減少する

- 限界効用の正確な定義

- 効用をグラフでどう表現するか

# 限界効用 2財のケース

$x$  の限界効用

$$MU_x(x_0, y_0) = \frac{U(x_0 + \Delta x, y_0) - U(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$y$  の限界効用

$$MU_y(x_0, y_0) = \frac{U(x_0, y_0 + \Delta y) - U(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

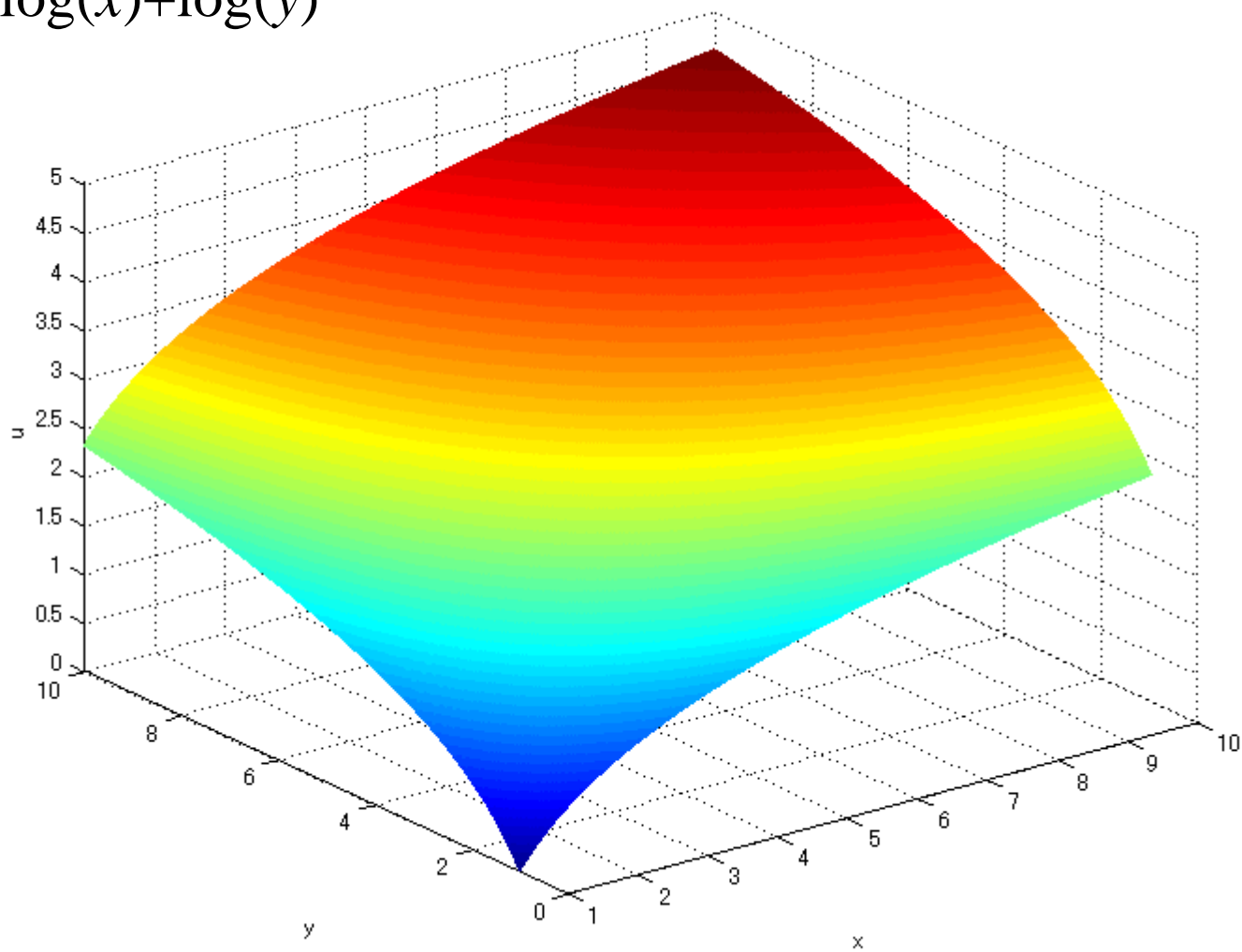
$$MU_x > 0, MU_y > 0$$

2財のケースでは、 $x$ の限界効用( $y$ の限界効用)は $x$ の増加とともに減少しなくてもよい

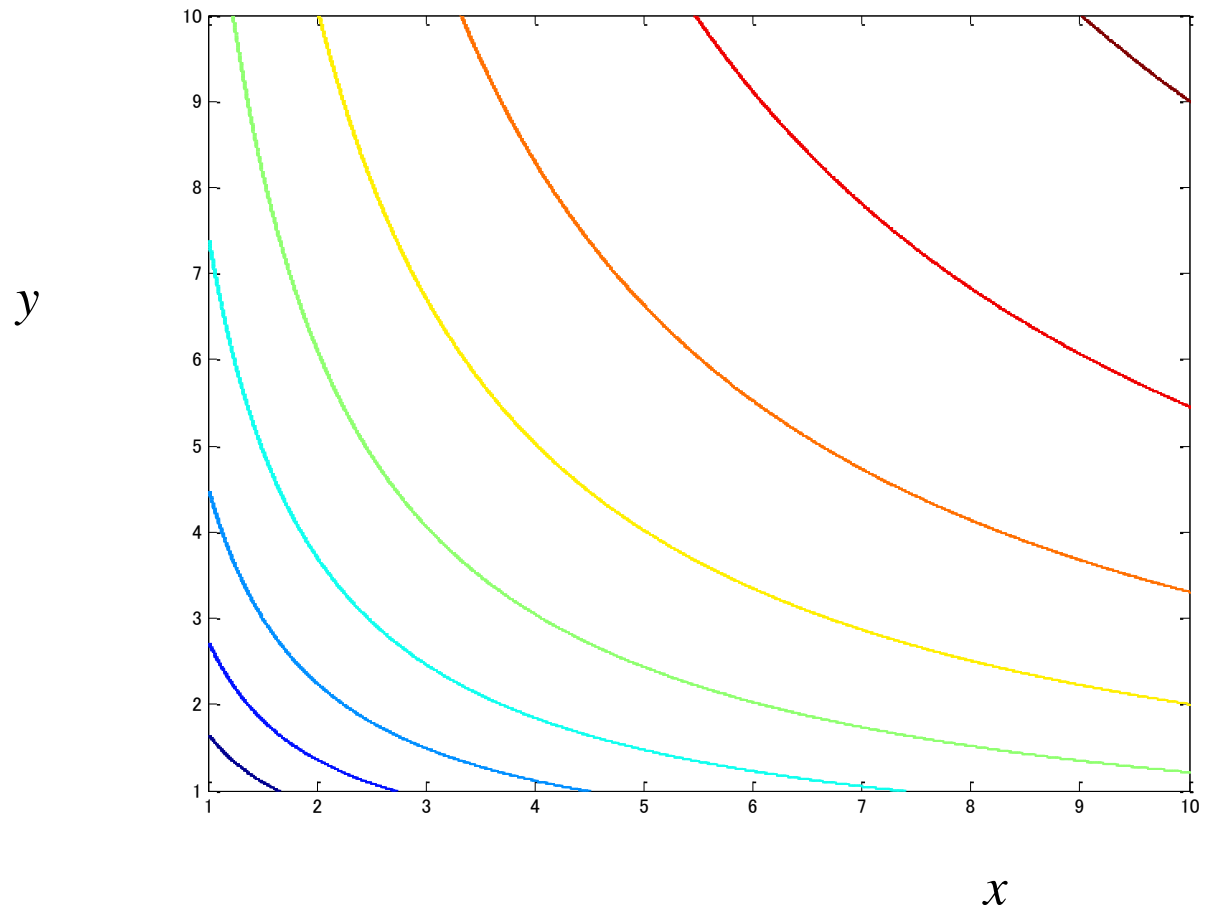


# 効用関数

$$U(x,y)=\log(x)+\log(y)$$



# 無差別曲線(indifference curve)



# 無差別曲線(indifference curve)

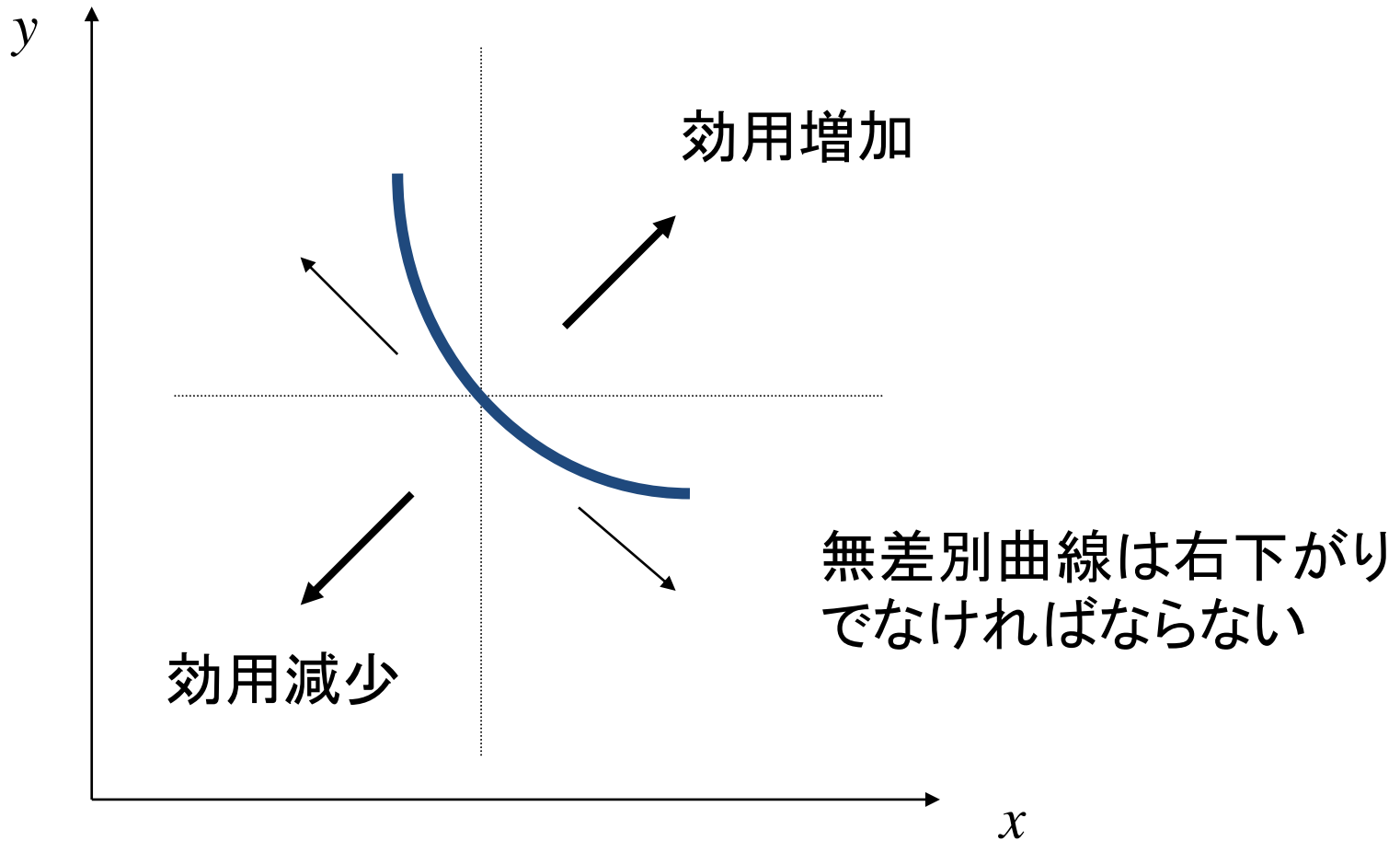
等しい効用をもたらす  $(x,y)$  の集り

- $U(x,y) = u_0$  をみたす  $(x,y)$  の集合
- 地図の等高線

無差別曲線の性質

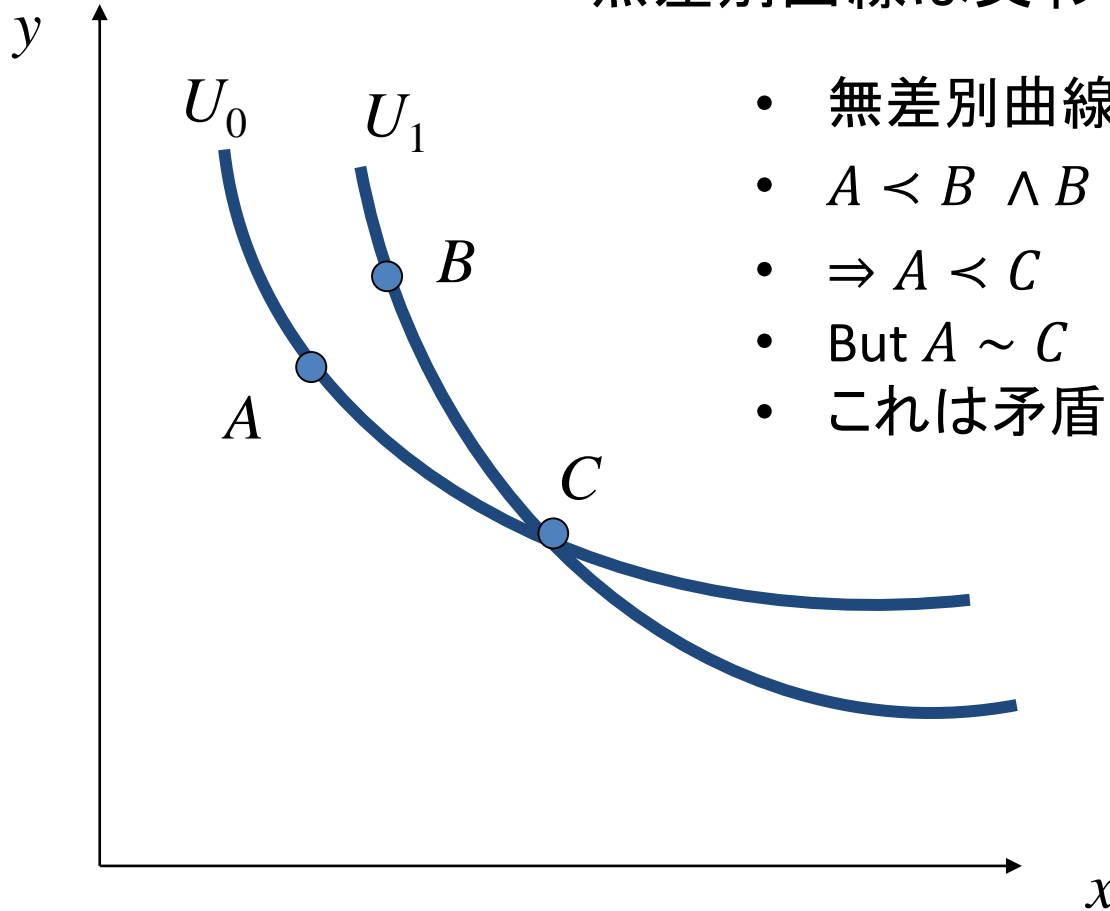
1. 原点から遠いほど高い効用
2. 無差別曲線は右下がりの曲線
3. 無差別曲線は交わらない
4. 原点に対して凸

# 無差別曲線の性質(1)



# 無差別曲線の性質(2)

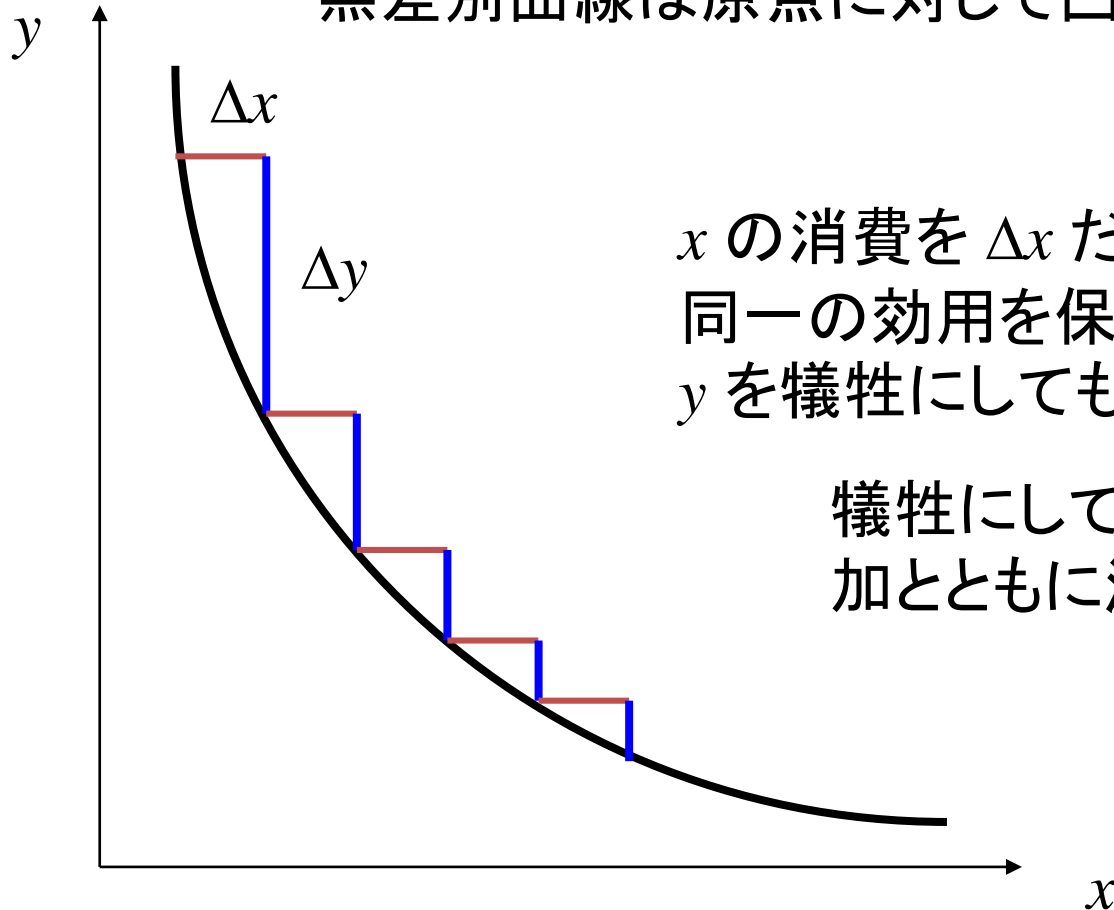
無差別曲線は交わらない



- 無差別曲線が交わったとする
- $A < B \wedge B \sim C$
- $\Rightarrow A < C$
- But  $A \sim C$
- これは矛盾

# 無差別曲線の性質(3)

無差別曲線は原点に対して凸



$x$  の消費を  $\Delta x$  だけ増やした場合、  
同一の効用を保つためには何単位  
 $y$  を犠牲にしてもよいか。

犠牲にしてもよい  $\Delta y$  が  $x$  の増  
加とともに減少していく

# 限界代替率

## marginal rate of substitution

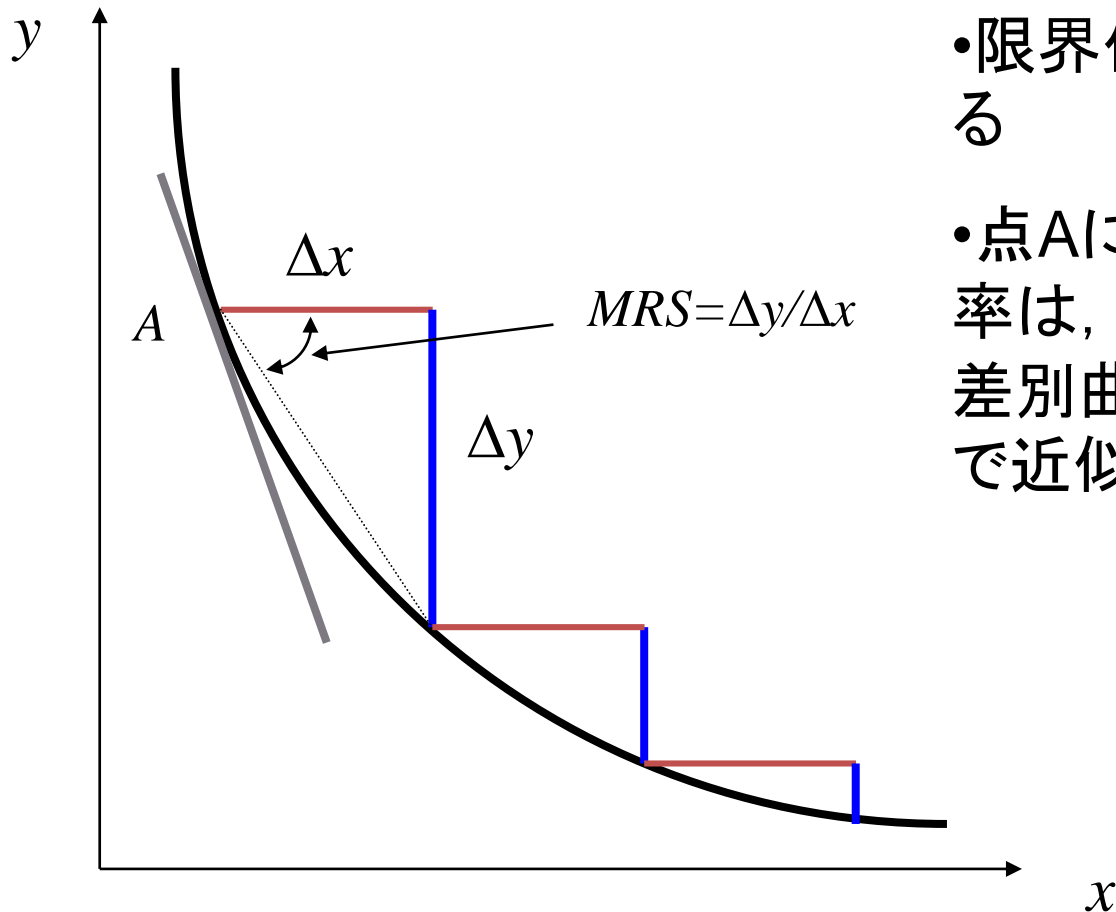
### 定義

- $x$ を1単位追加的に消費した場合に, 同一の効用を保つためには何単位の $y$ を犠牲にしてもいいか
- $x$ の追加的1単位に対する消費者の(主観的)評価:  
ただし,  $y$ の数量で表している

無差別曲線が原点に対して凸

- 限界代替率逓減の法則 (the law of diminishing marginal rate of substitution)
- 1財のケース:「限界効用逓減の法則」

# 限界代替率(2)



- 限界代替率は逓減する
- 点Aにおける限界代替率は、点Aにおける無差別曲線の接線の傾きで近似できる



# 限界代替率(3)

$\Delta x$ だけ $x$ の消費を増やすと,  $MU_x \Delta x$ だけ効用が増加する

$\Delta y$ だけ $y$ の消費を減らすと,  $MU_y \Delta y$ だけ効用が減少する

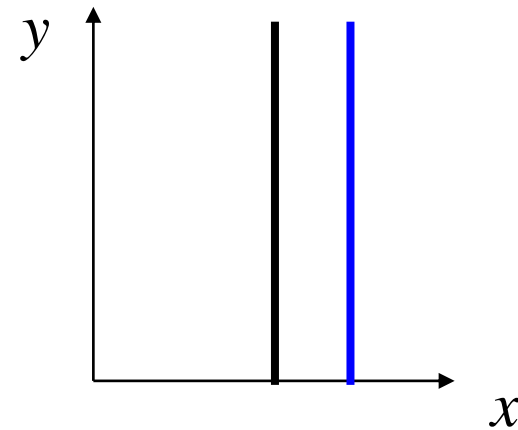
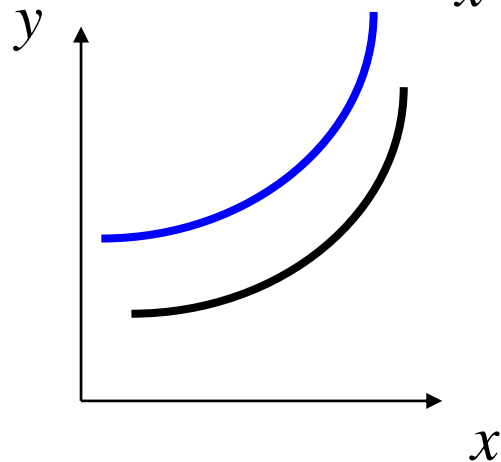
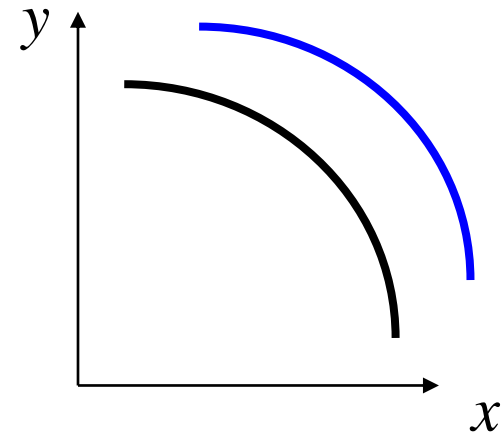
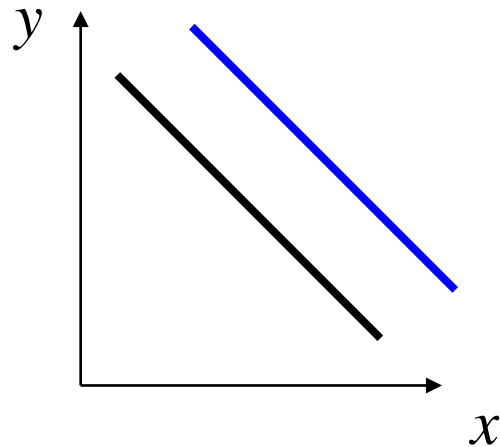
これらがちょうど相殺されなければならない→次の式が成立することが必要

$$MU_x \cdot \Delta x = MU_y \cdot \Delta y$$

この関係から次の式が導かれる

$$MRS \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

Q. 無差別曲線が次のようなグラフだったら、消費者はどのような選好 (preference) を持っているのだろうか



# 限界代替率逓減と限界効用の関係

$$(1) U(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$$

$$(2) U(x, y) = x \cdot y$$

$$(3) U(x, y) = x^2 \cdot y^2$$

- 上の効用関数の無差別曲線を描け
- $y$  を固定しておいて  $x$  だけ増加させた場合の  $x$  と  $U$  の関係をグラフで表せ
- それぞれの関数で、限界効用は逓減するか

# 予算制約 budget constraint

$p$  : 財  $x$  の価格

$q$  : 財  $y$  の価格

$I$  : 所得 (Income)

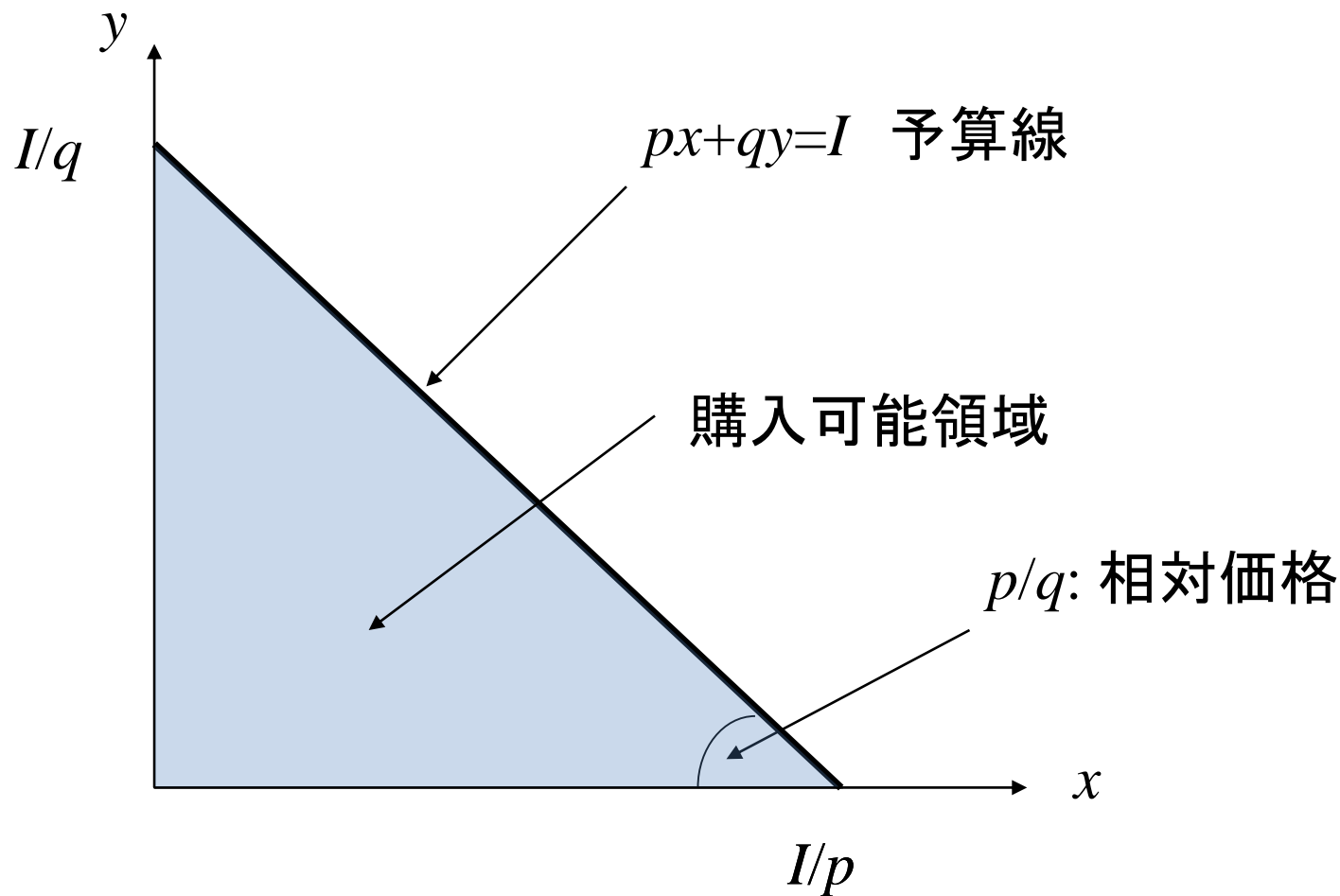
$p, q, I$  は与えられている (消費者にとっては外生的)

$x, y$  : それぞれの財の購入量 (内生的)

予算制約式は次の式で与えられる。

$$px + qy \leq I$$

# 予算線 budget line



# Q. 予算線の変化

次のような変化が生じた場合、予算線はどう変化するか

- 家計の所得が変化した場合
- $p$  が値上がりした場合
- $q$  が値上がりした場合
- インフレのため、 $p, q, I$  が同一の比率で上昇した

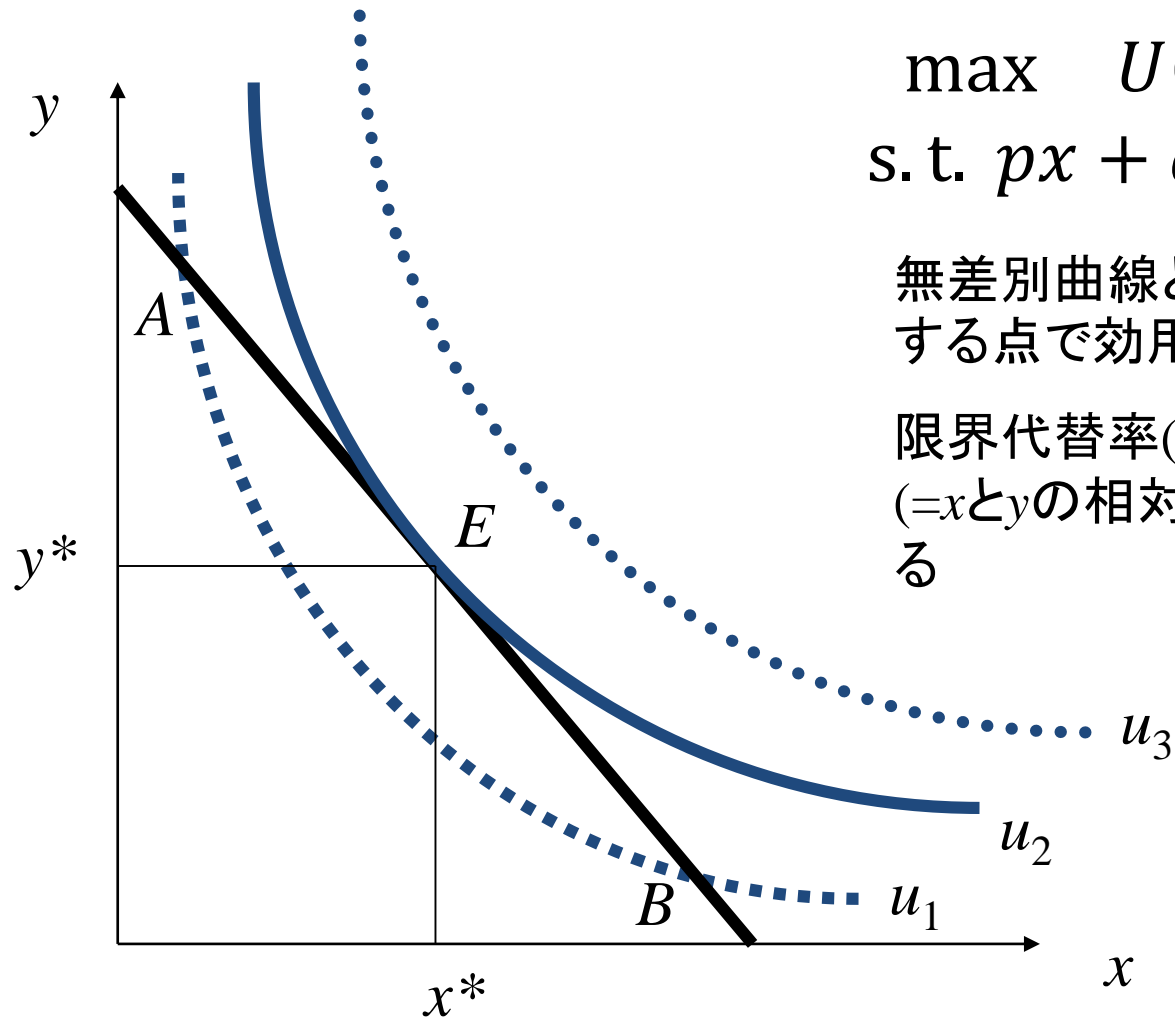
# 効用最大化

消費者の行動は次のように定式化される

- 予算制約  $px + qy = I$  のもとで効用  $U(x, y)$  を最大にするように  $(x, y)$  を選択する

$$\begin{array}{ll} \max & U(x, y) \\ \text{subject to} & px + qy \leq I \end{array}$$

# 効用最大化(2)



$$\begin{aligned} \max \quad & U(x, y) \\ \text{s. t.} \quad & px + qy \leq I \end{aligned}$$

無差別曲線と予算線がちょうど接する点で効用が最大になる

限界代替率( $MRS$ )と予算線の傾き  
( $=x$ と $y$ の相対価格 $=p/q$ )が一致する



# 効用最大化の(必要)条件

- 無差別曲線と予算線が接する
- 無差別曲線の接線の傾きと予算線の傾きが一致
- 限界代替率と相対価格の一致

- $MRS = p/q$

- 1円あたりの限界効用の均等

- $MRS = MU_x/MU_y$ であることを用いると  $\frac{MU_x}{p} = \frac{MU_y}{q}$

- $y$ の消費を1円減少  $\rightarrow y$ の購入  $(1/q)$ 単位減少  $\rightarrow (1/q)MU_y$  効用低下

- $x$ の消費を1円増加  $\rightarrow x$ の購入  $(1/p)$ 単位増加  $\rightarrow (1/p)MU_x$  効用増加

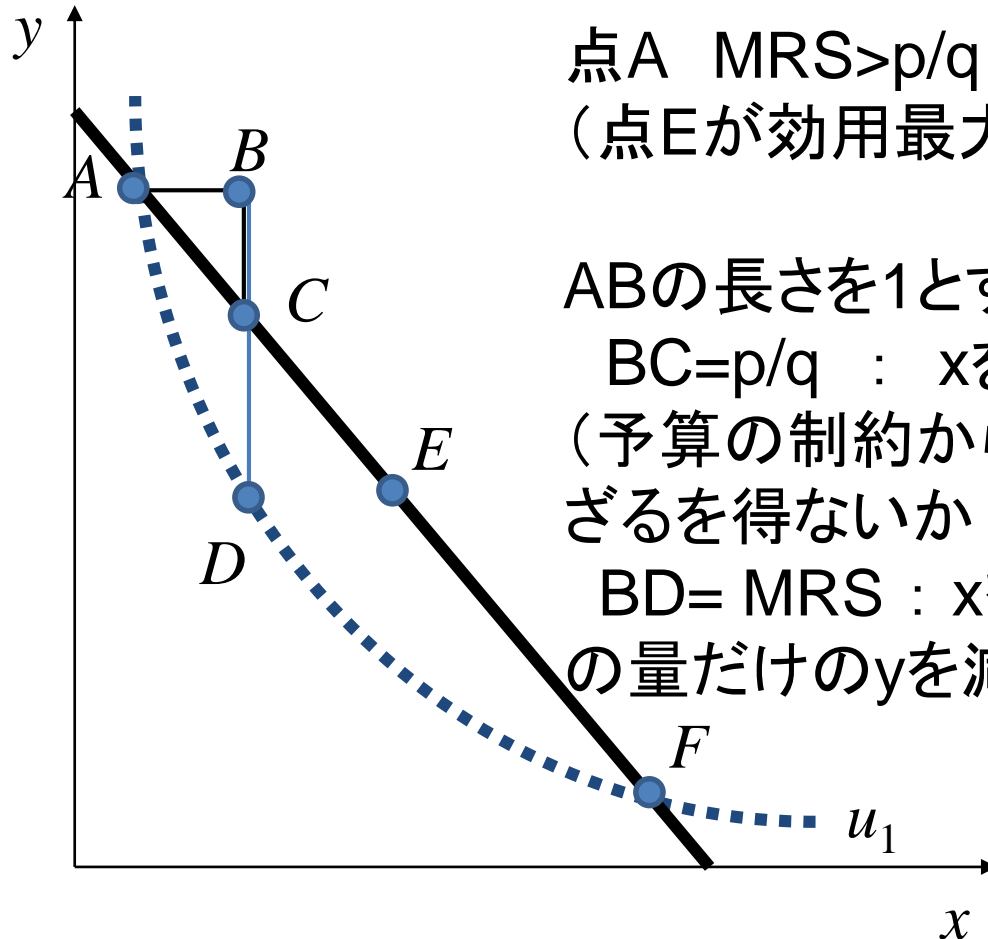
- 効用が最大化されるためにはこれらが釣り合わなければならない(そうでなければ、効用を増加させる余地が残っている)

# Question

- $MU_x/p > MU_y/q$  が成立しているとしよう。この場合、予算制約を守りながら効用を上げることができる。どのようにすればよいか。
- $MU_x/p > MU_y/q$  が成立している場合、予算線と無差別曲線はどのような状況にあるか。
- $MU_x/p < MU_y/q$  の場合について同様に考えよ。
- グラフからどのようにすれば、効用が上がるかを考えよ

# MRS>p/qの場合

点Aで効用が最大化されていないのは何故か



点A MRS>p/q  
(点Eが効用最大化点)

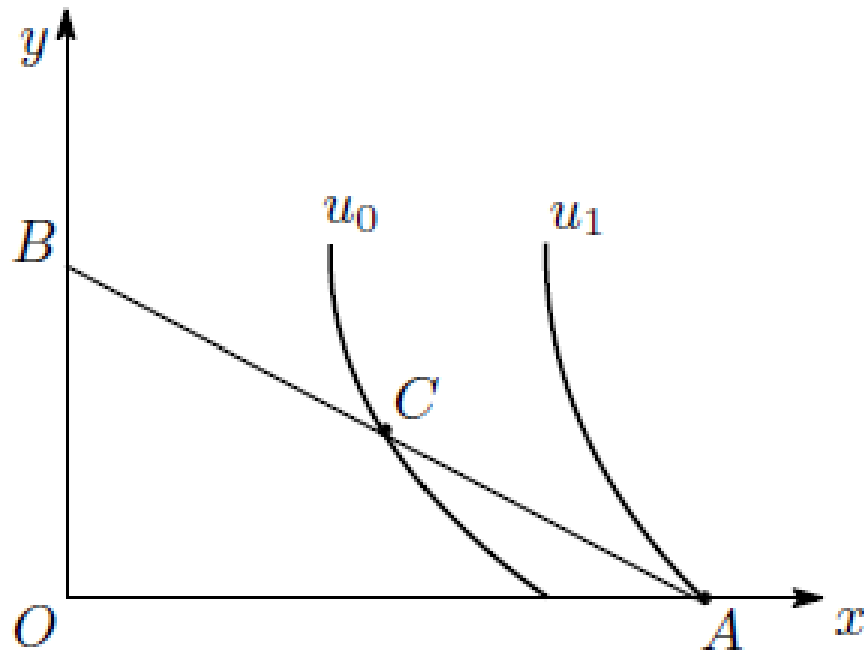
ABの長さを1とすると

BC=p/q : xを1単位増やすためには、  
(予算の制約から)yを何単位犠牲にせざるを得ないか

BD= MRS : xを1単位増やすとき、この量だけのyを減らしても効用は不変

# コーナー解

効用最大化点は、予算線と無差別曲線の接点でない場合もある。



点Cでは  $MRS > p/q$   
→  $x$ の増加,  $y$ の減少が  
効用を増加させる  
→ しかし, 点Aに到達し  
ても  $MRS > p/q$   
→ 効用最大化点は点A  
→  $y=0$ で効用最大化

# 2財モデルの解釈

- $x$ 財：ある特定の財
- $y$ 財：その他の全ての財
- 効用最大化の条件  $MRS=p/q$  または  $\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p}{q}$ 
  - $q \cdot y$  は  $x$ 財以外の財への支出合計。
  - $q=1$  とすると  $y$  の1単位は1円で買える財の量
  - $MU_y$  は所得の限界効用
  - 効用最大化の条件は, 所得の限界効用で評価した  $x$  の限界効用と  $x$  の価格が一致する
  - 限界便益(限界効用の金銭換算額)と価格が一致

# $n$ 財モデル

$n$ 種類の財を  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 価格を  $p_1, p_2, \dots, p_n$  で表せば,

$$\begin{aligned} & \text{Max } U(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s. t. } & p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = I \end{aligned}$$

効用最大化の(必要)条件

任意の  $i, j$  ( $= 1, 2, \dots, n$ )について

$$MRS_{i,j} = \frac{p_i}{p_j}$$

ただし,  $MRS_{i,j}$  は  $i$  財と  $j$  財の限界代替率

$x_i$  を追加的に1単位増やす場合, 何単位の  $x_j$  を犠牲にしても効用は一定にとどまるかを表す