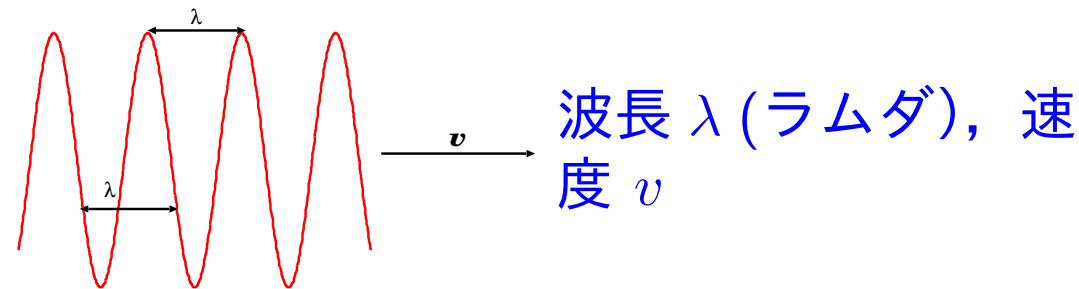


波 — Waves

青木健一郎
日吉物理学教室

波とは？

- 例：水面波，音，光
- 波を特徴付ける量
 - ▶ 媒質
 - ▶ 速さ (v)
 - ▶ 波長 (λ): 繰り返しの最小単位の長さ



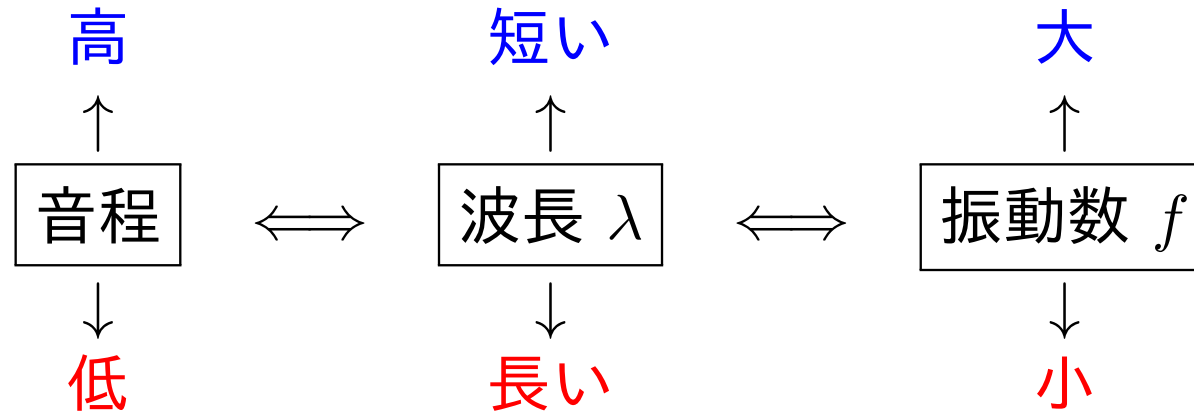
- ▶ 振動数 (f): 単位時間での繰り返しの回数. ($f = 1/T$, $T =$ 周期)

$$v = f\lambda \quad \leftarrow v \text{ が違う} \Leftrightarrow \lambda \text{ が違う (光速実験, 屈折率実験)}$$

- 波の振動方向 \neq 進行方向, 波の強さ \neq 波の高さ,
強さ = 定数 \times |振幅|².
- 一般に波長が λ の波は λ/n ($n = 1, 2, \dots$) の波長を持つ正弦波
(sin, cos) の重ね合わせ. \leftarrow 理想的波に分解できる

- 空気の振動 (圧縮波).
- $v_s = 340 \text{ m/s}$ (室温). 振動数 $f = \text{数 } 10 / \text{s} \sim \text{数 } 10^4 / \text{s}$. $[1/\text{s}] = [\text{Hz}]$.
cf. A は西洋音楽では通常 440 Hz.
- $\lambda = v/f = 1 \text{ cm} \sim 10 \text{ m}$. ← 日常的な長さのスケール
- 分子論的理解
 - ▶ 空気分子の平均速度 $v_0 \sim 500 \text{ m/s}$ (室温). $v_s \lesssim$ ← 当然!
 - ▶ $v \sim \sqrt{T} \quad \Leftarrow \quad \text{運動エネルギー} = mv_0^2/2$

音色，音程



- 波長の長さは日常経験と一致 (eg. 動物, 楽器, スピーカーの大きさ, 弦の長さ)
- オクターブ: 振動数 f より 1 オクターブ高い音は $2f$ の振動数.
← 実験「音程とドップラー効果」

- 平均律(Equal temperament)は 1 オクターブを均等に分割. 振動数 f より半音高い音は $f \times 2^{1/12}$. (1 オクターブ = 12 半音, C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B). 転調しても同じ.
 - ▶ \Leftrightarrow 純正律では振動数の比率が有理数.
 - ★ ドミ CE $2^{4/12} = 1.260 \Leftrightarrow 5/4$
 - ★ ドソ CG $2^{7/12} = 1.498 \Leftrightarrow 3/2$
- 音色 timbre ← 後期実験
 - ▶ 音程 = 波長 \Leftrightarrow 振動数
 - ▶ envelope — 音の強弱の付け方
 - ▶ スペクトル spectra — 振動数/周波数の重ね合わせのしかた (倍音, 3 倍音, etc.)

光

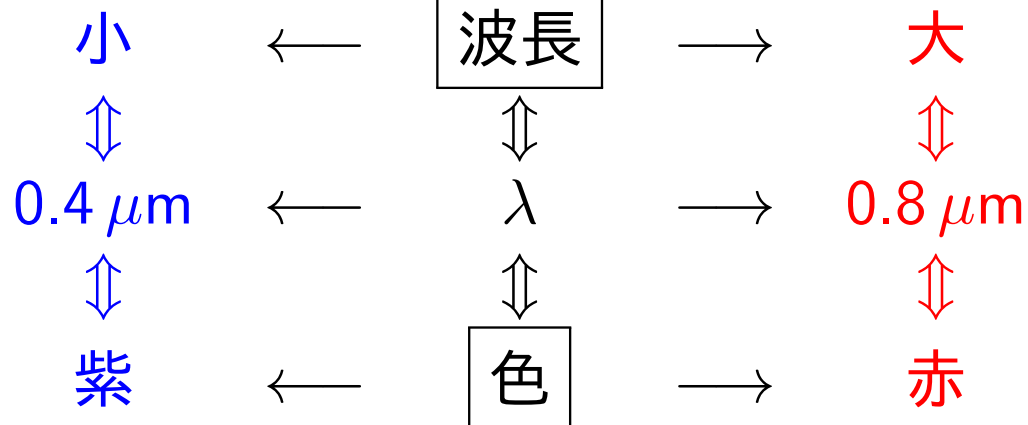
- 速度 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$. ← 有限 (1676! Ole Roemer, 木星の衛星 Io の観測より). 前期実験
- 現在は厳密に $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$ ← m の定義
- 可視光:
波長 $\lambda = 0.4 \mu\text{m} \sim 0.8 \mu\text{m}$ ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$.)
 $\Rightarrow f = c/\lambda = 8 \times 10^{14} [\text{s}^{-1}] \sim 4 \times 10^{14} [\text{s}^{-1}]$
- 光は電磁波の一領域. 電磁波は電場と磁場の波.
- 他の波長の電磁波はラジオ波, TV 波, X 線, etc. .

電磁波の波長と通称

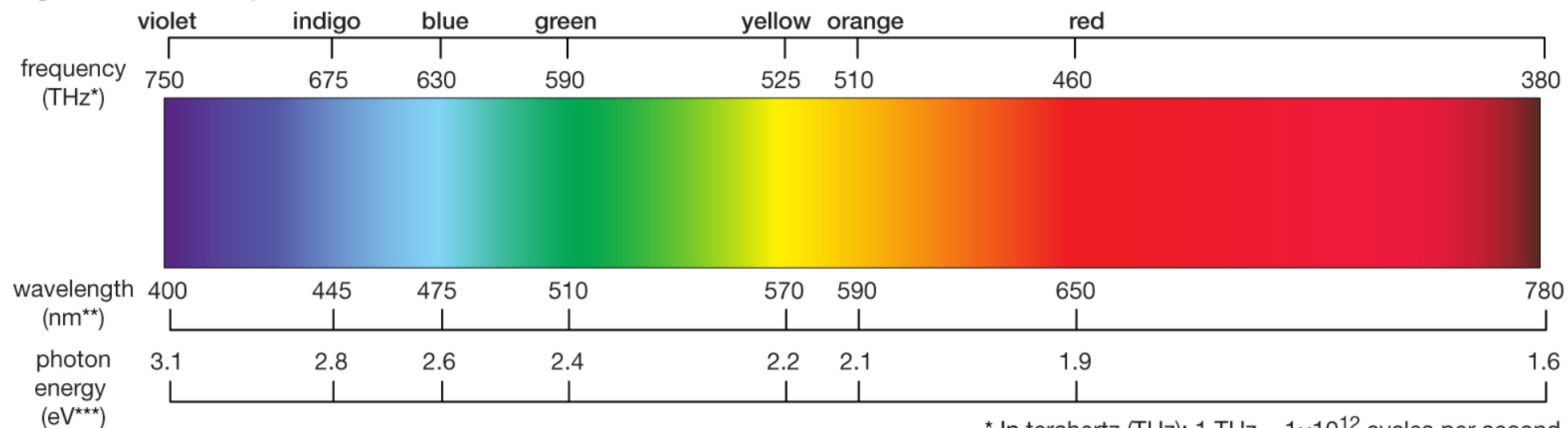
波長	振動数	名称	用途の例
10~100 km	3~30 kHz	VLF	
1~10 km	30~300 kHz	LF	電波時計
100~1000 m	0.3~3 MHz	MF	AM
10~100 m	3~30 MHz	HF	短波, HAM
1~10 m	30~300 MHz	VHF	FM
0.1~1 m	0.3~3 GHz	UHF	携帯電話
1~10 cm	3~30 GHz	SHF, マイクロ波	無線LAN
0.1~1 cm	30~300 GHz	EHF	衛星放送
0.1~1 mm	0.3~3 THz	サブミリ波	
0.01~0.1 mm	3~30 THz	遠赤外線	
1 ~ 10 μm	30~300 THz	赤外線	
0.1 ~ 1 μm	$3 \times 10^{14} \sim 3 \times 10^{15} \text{ Hz}$	光	
10~100 nm	$3 \times 10^{15} \sim 3 \times 10^{16} \text{ Hz}$	紫外線	
$10^{-12} \sim 10^{-8} \text{ m}$	$3 \times 10^{16} \sim 3 \times 10^{20} \text{ Hz}$	X 線	
$\lesssim 10^{-12} \text{ m}$	$\gtrsim 3 \times 10^{20} \text{ Hz}$	γ 線	

色

色 \leftrightarrow 波長



Light, the visible spectrum



* In terahertz (THz); 1 THz = 1×10^{12} cycles per second.

** In nanometres (nm); 1 nm = 1×10^{-9} metre.

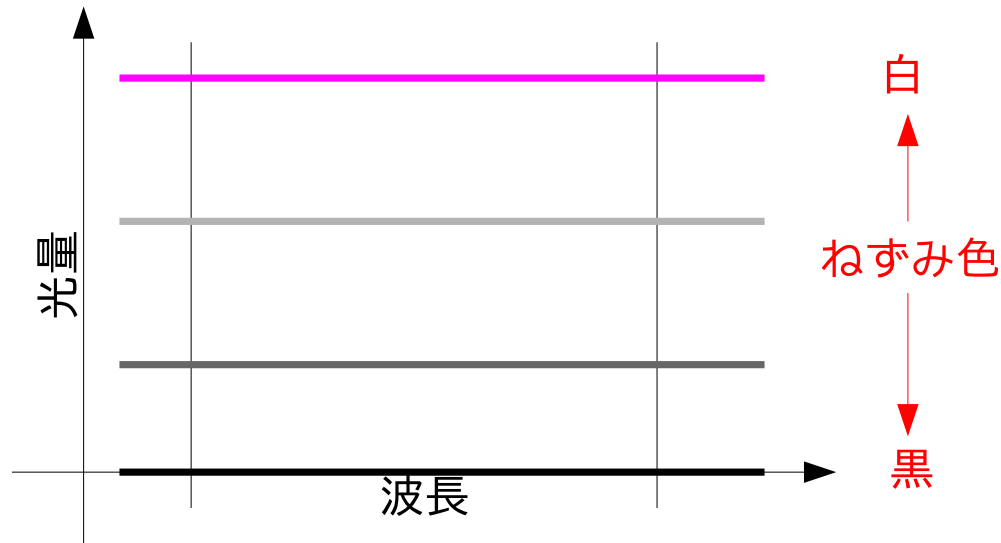
*** In electron volts (eV).

© 2012 Encyclopædia Britannica, Inc.

光の色と波長の関係 (Britannica より)

色の合成と分光

- 通常の色は様々な波長の光の重ね合わせ. 一つの波長の光 (単色光, monochromatic) という事はまずない. (例外: レーザー光, たとえば虹のように分光した光)
- 重ねあわせのしかた = 色合い

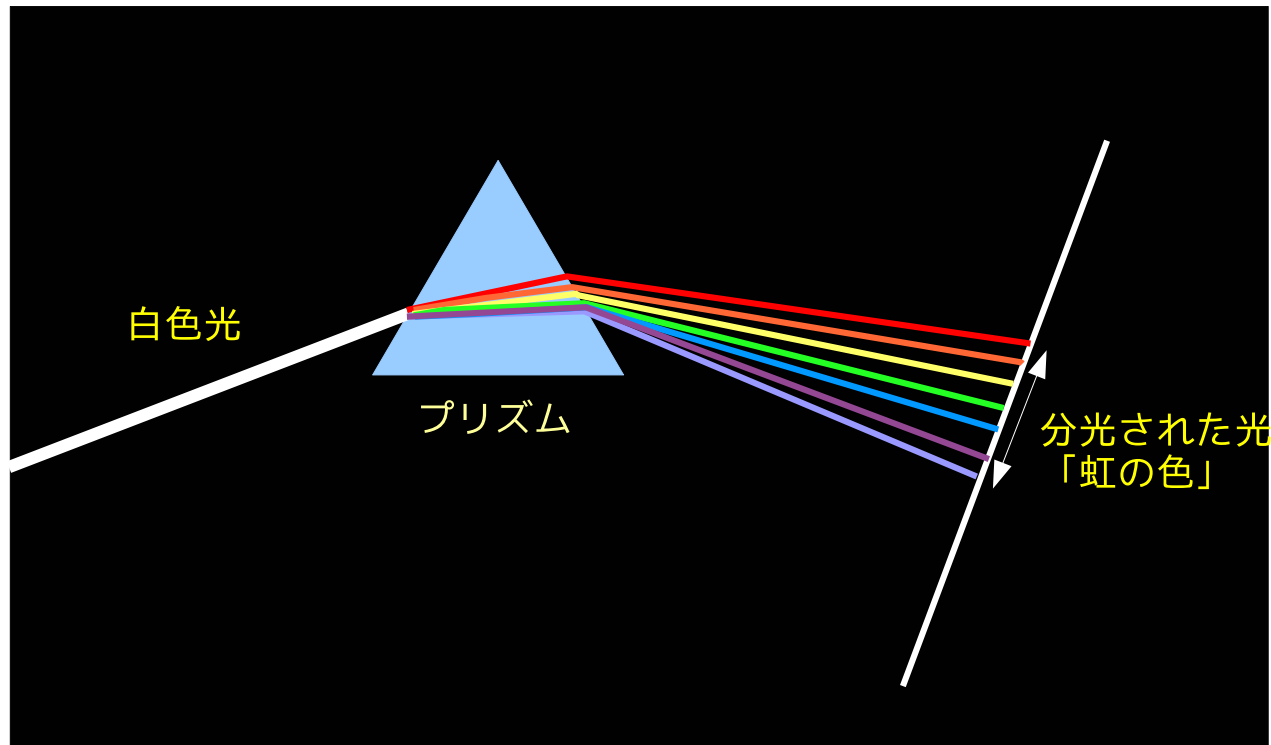


- ▶ 白色光: あらゆる波長の光が均等に含む光.
- ▶ 白 ← グレー → 黒
(白, 黒, グレーは厳密には色では無い.)

- 光をその波長毎に分解することを**分光** (スペクトル解析, spectroscopy) という. ← 後期実験「量子力学と原子のスペクトル」

虹，プリズム

分光の例：虹，プリズム （媒質の屈折率が波長が小さい程大きい）



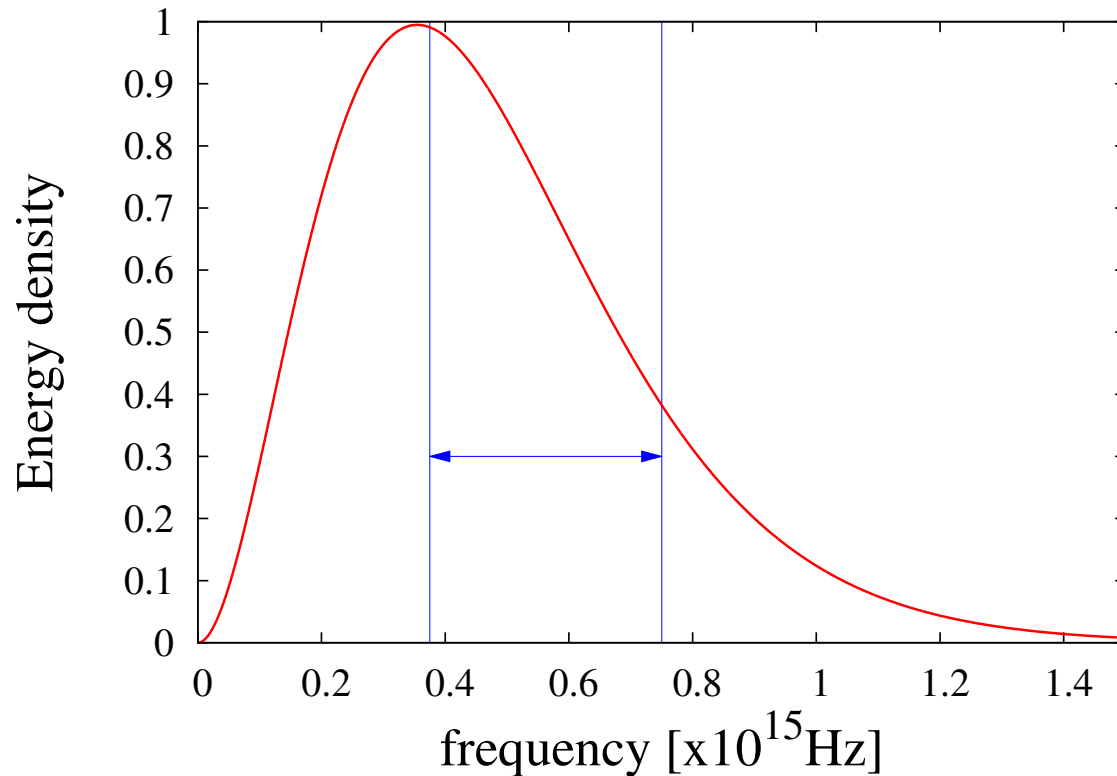
媒質の屈折率が波長によって少し異なる（波長が短い方が大きい）ために波長毎に光が分けられる（分光）。

光に対する自然な疑問

- どの系で光速は $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ なのか？ \Rightarrow どの系でも (特殊相対性理論)
- 何が振動しているのか？真空でも光は伝わるのか。 \Rightarrow 伝わる.
- 光は粒子でもある「光子」(古典力学では矛盾).
- 光に温度はあるのか？ \Rightarrow ある. (粒子と考えると 1 自由度あたりの平均エネルギーが温度！)

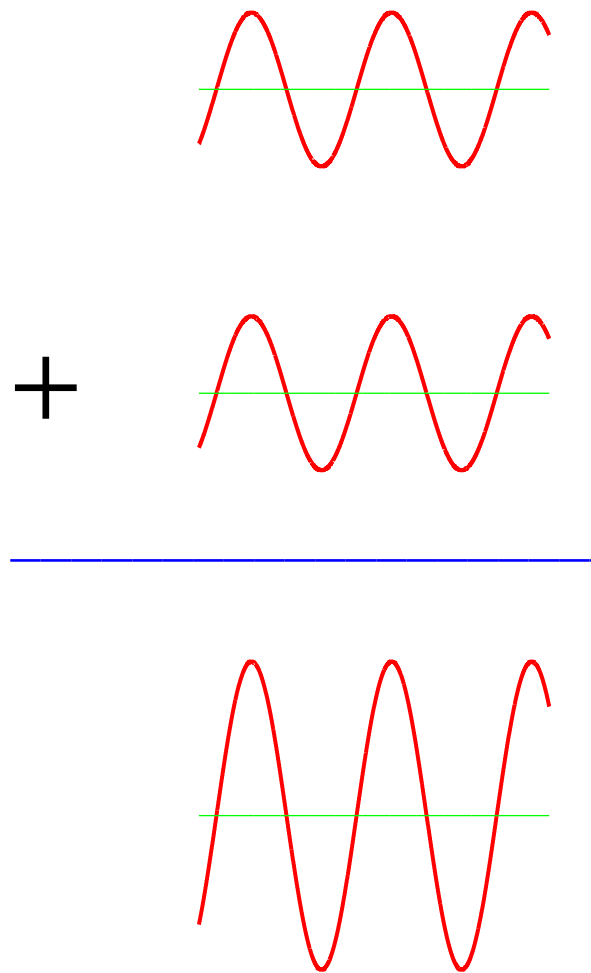
あらゆる有限温度の物体は物体の温度に対応した光を放射
太陽, 熱い鉄, 白熱灯, 人間, ...

光と温度



エネルギー密度の振動数依存性. $T=6000 \text{ K}$ の場合 (太陽). Planck 分布
横軸は振動数 ($10^{15}/s$ 単位), 縦軸はエネルギー密度. 青い直線の間が可視領域.

干渉 (interference) — 波特有の現象



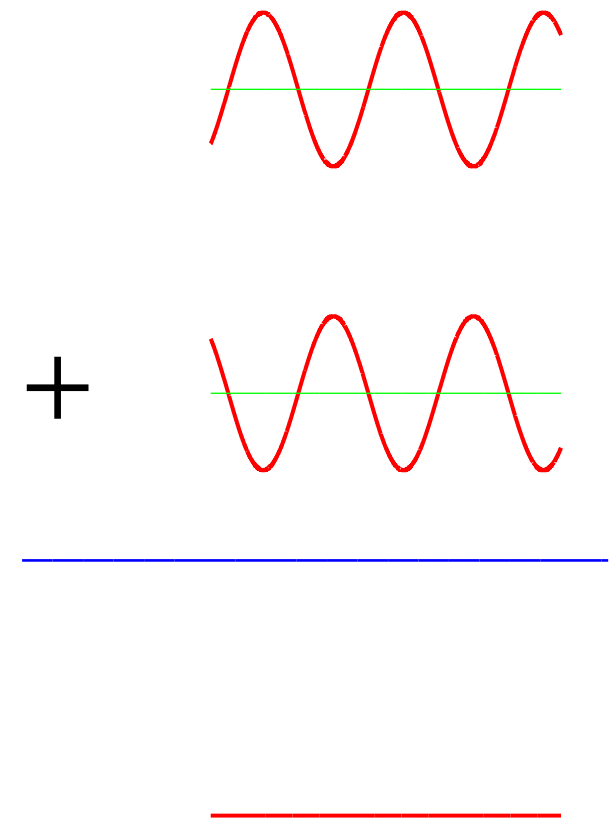
波の重ね合わせの原理

- ある地点で波が 2 つ ψ_A, ψ_B 来た場合, そこで観測される波は

$$\psi_A + \psi_B$$

(左図) 強め合い

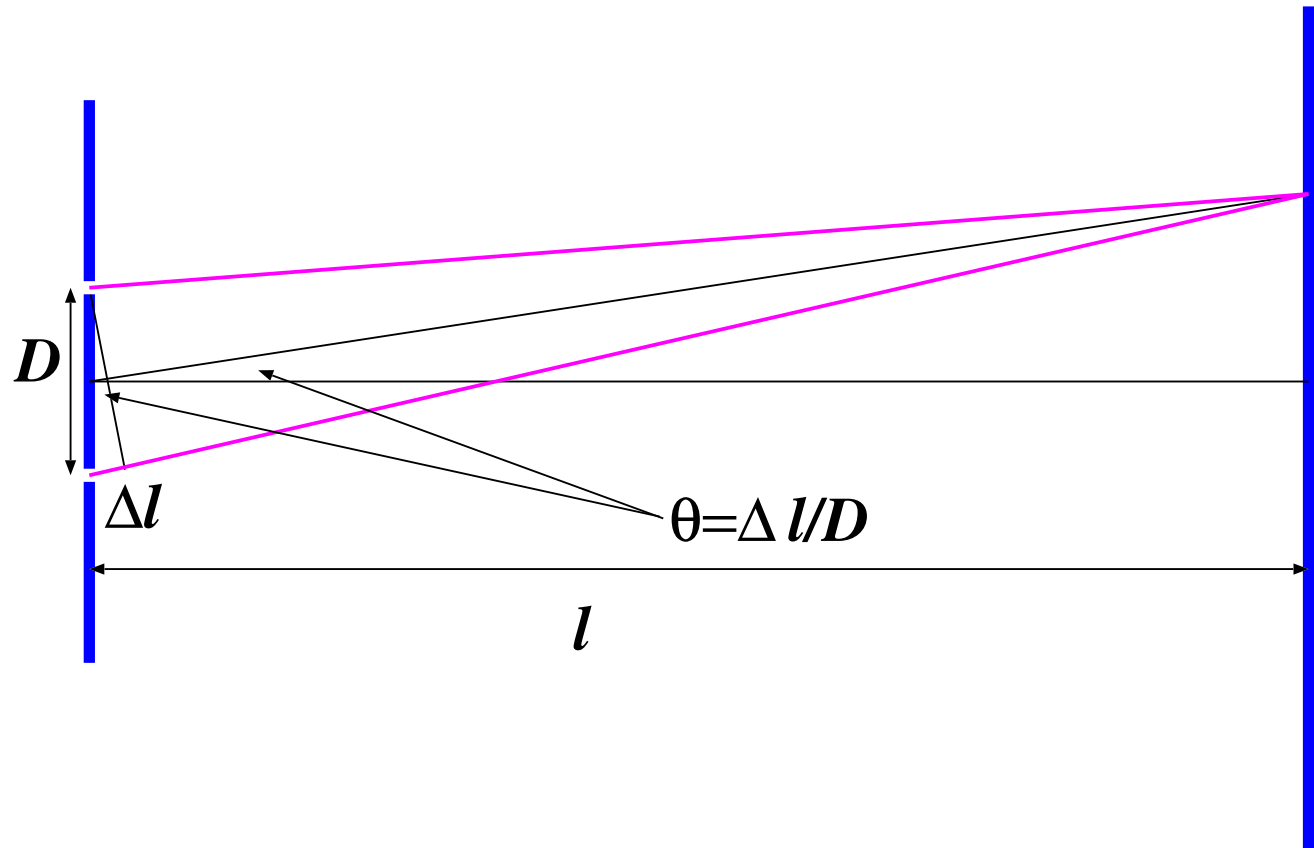
(右図) 打消し合い



重ね合わせの考え方

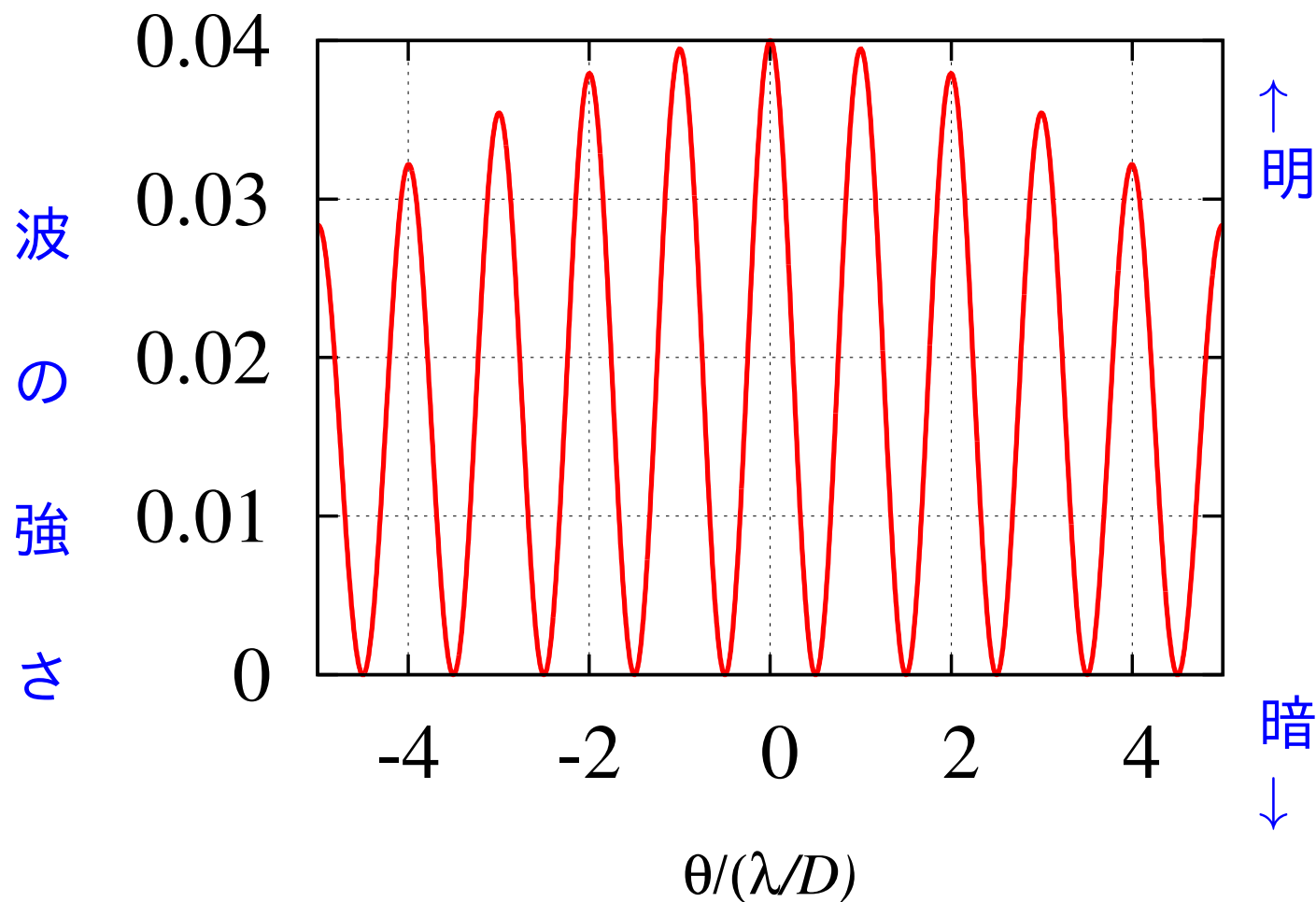
- 重ね合わせ = 「線形性」。波同士が相手の影響を受けない。
- 打ち消しあうことがあるのが特徴的。「もの」が来て、さらに「もの」が来て無くなるということは考えにくい。
- ノイズキャンセリングに応用 (noise cancelling): 逆位相の波を発生することにより騒音を消す。(active に解消. 通常は passive (=防音) で解消.) Bose, Sony などが実用化しているが, 低音に有効で高音は passive に対応.
- 光の強度が非常に強い場合には非線形性の影響もある。(光ファイバー内等)

Young の干渉実験 — 二重スリット



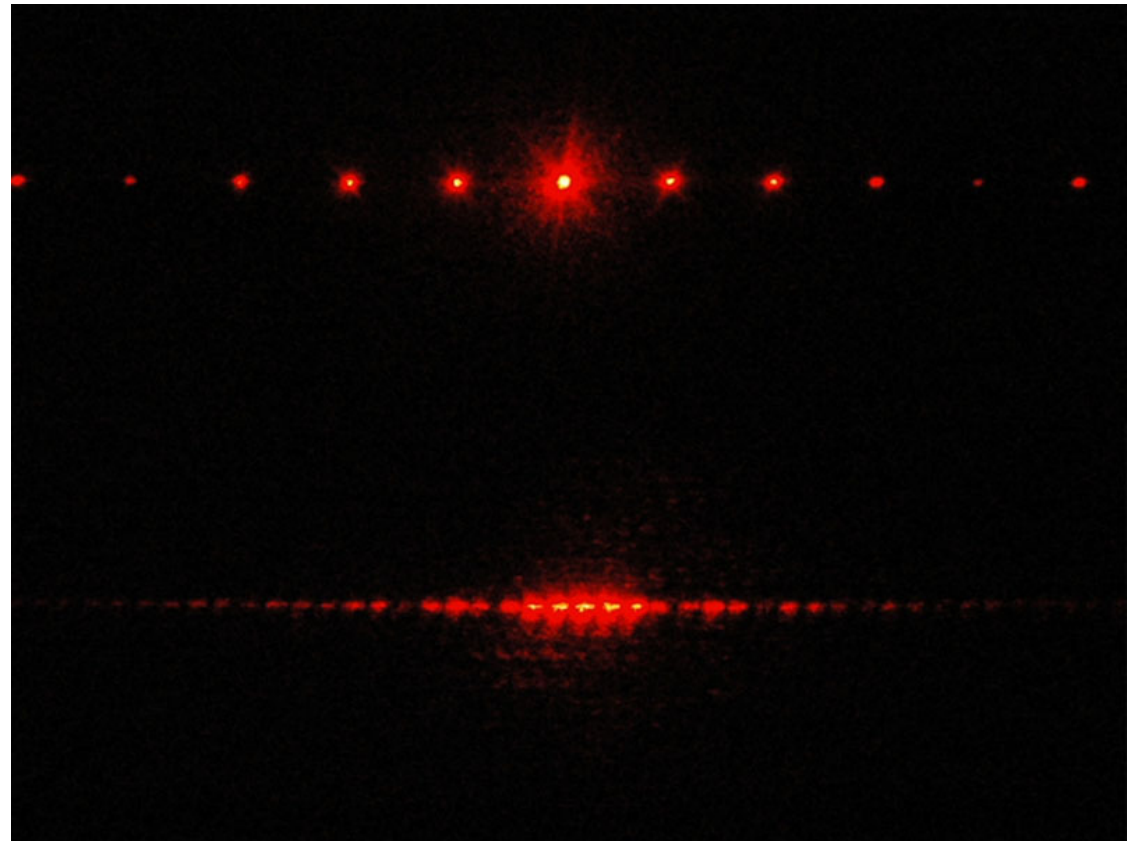
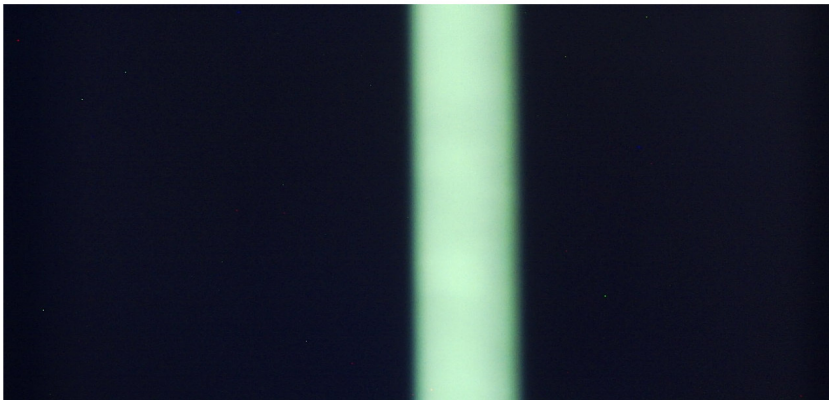
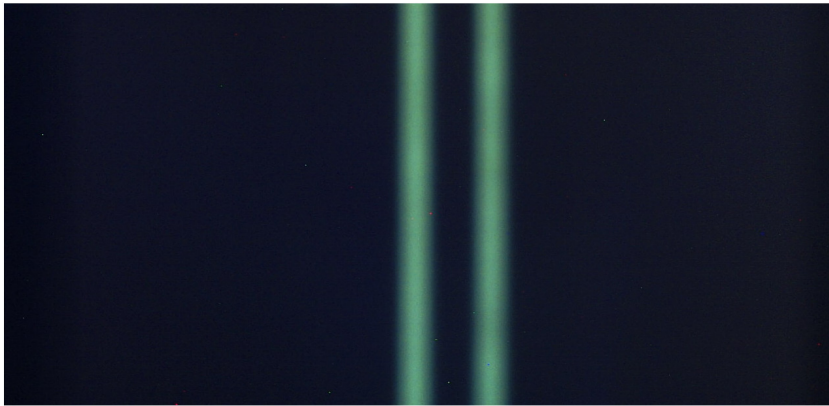
$\Delta l = \lambda \times n$
強め合い
中心は $\Delta l = 0$
 $\Delta l = \lambda \times (n + \frac{1}{2})$
打ち消し合い
($n = 0, 1, 2, \dots$)
← 実験(後期)

干渉じまを観測できる.

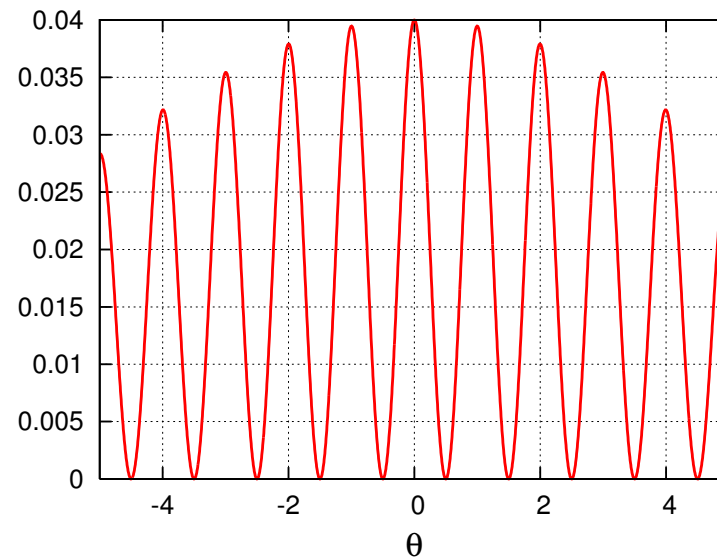


縦軸は波の強さ
(光であれば明るさ). 明るい, 暗い
の繰り返し.

$\theta = \lambda/D \leftrightarrow$ 経路
の長さの差が λ

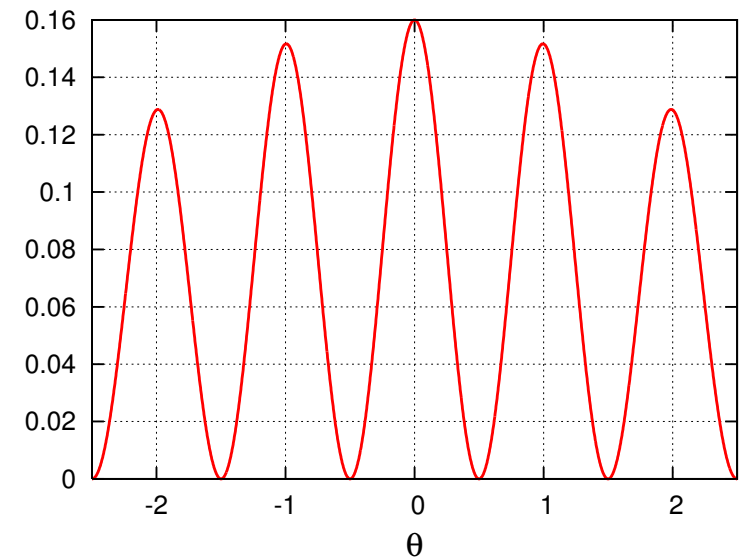
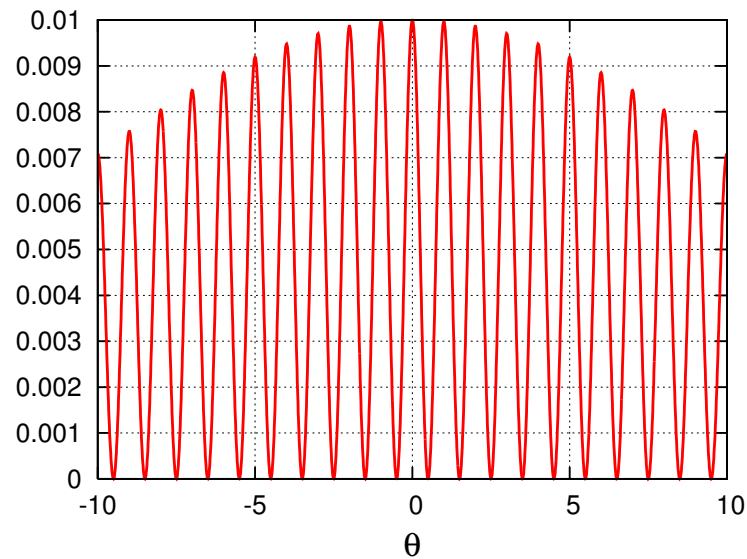


(上) 2重スリットと干渉縞. (下) 単スリットと干渉縞.
(学生実験の器材を用いた実験例, 後期実験)



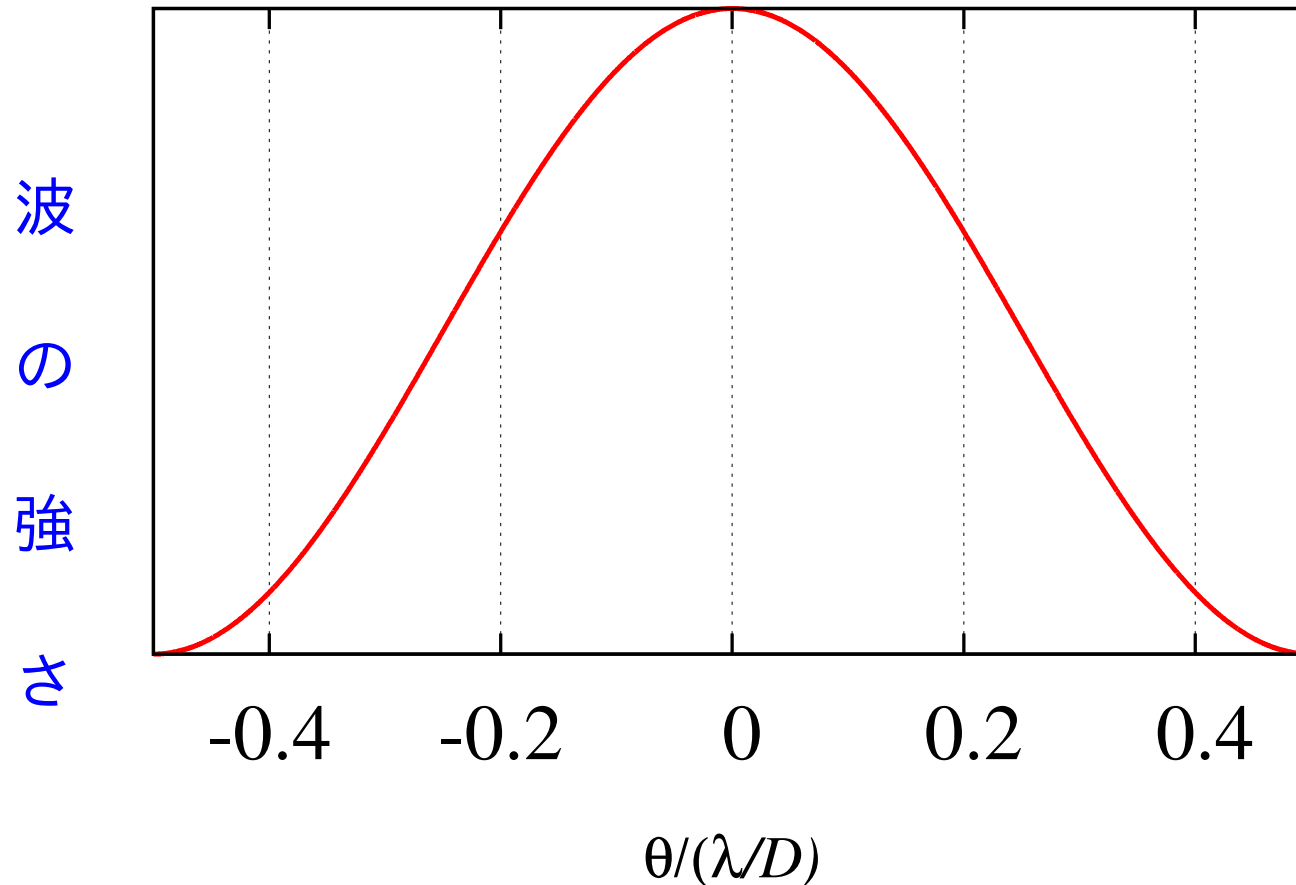
$D / \lambda \nearrow$

$D / \lambda \searrow$



スリット幅が広がると干渉縞の幅は反比例して狭まる.

λ が大きい極限 (D が小さい極限, $\lambda \gtrsim D$)



干渉じまが無くなる。スリットが2つの効果が無い。

⇒
波長より小さいものは見えない。
「ぼやけて」しまう。

“Abbe's Criterion”

2014年度ノーベル化学賞： Super-resolved fluorescence microscopy. 原子の発光を用いてこの限界を越える2方法。

波長より小さいものは識別できない

- 可視光の波長より小さいものは直接は識別できない. ($\sim 0.5 \mu\text{m}$)
 - ▶ 原子を光学顕微鏡で見ることはできない.
- なぜ Blu-ray Disk が登場したのか？データ読み取れる構造の小ささに限界があるから (⇐ 波長が限界を決めている！)

	CD	DVD	Blu-ray
レーザー波長 [μm]	0.78 近赤外	0.65 赤	0.41 青紫
トラック間隔 [μm]	1.6	0.74	0.32
データ容量 (一層) [GB]	0.70	4.7	25

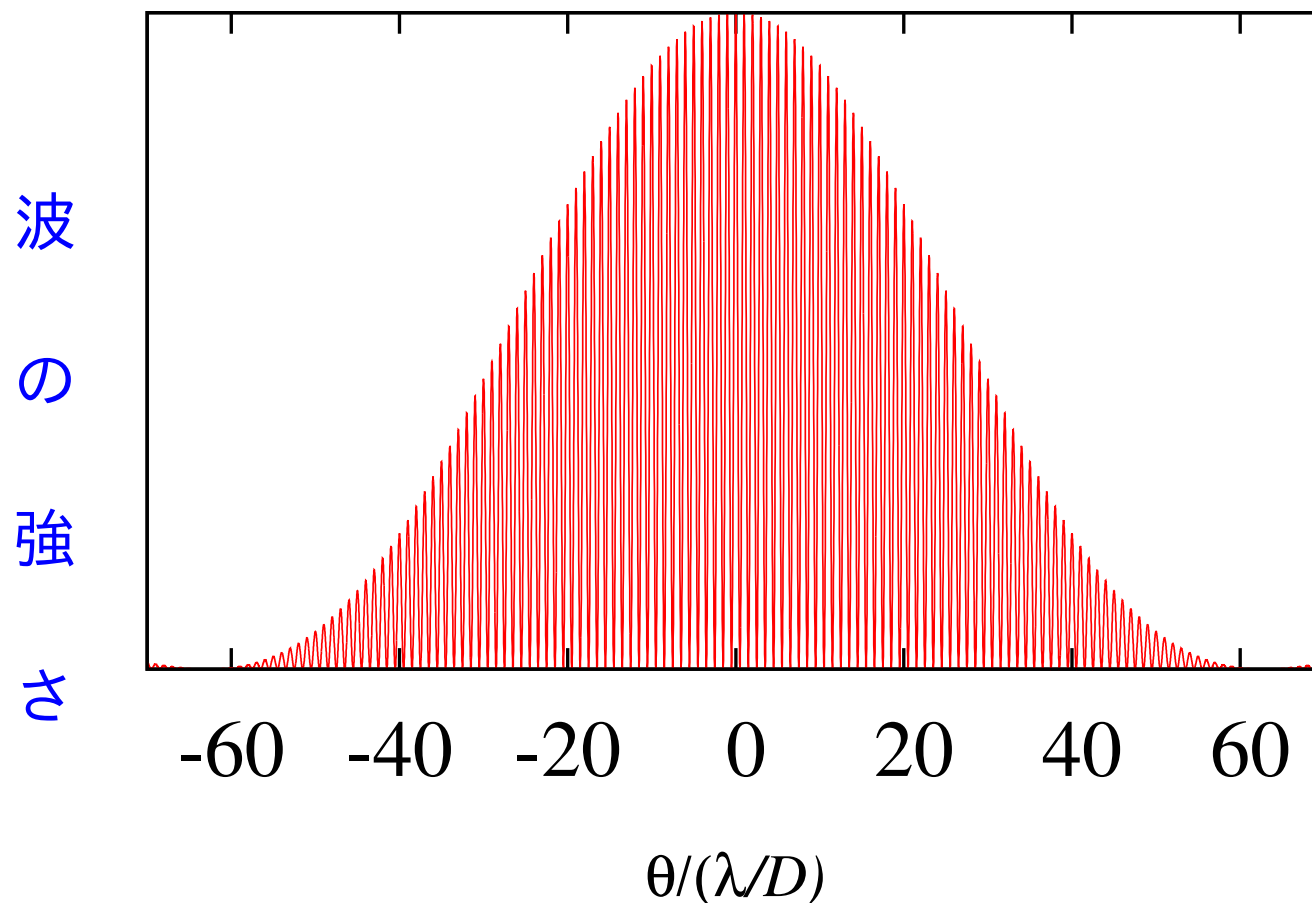
簡単な概算：CDのデータ容量（半径6 cm, 波長 $0.8 \mu\text{m}$ ）

$$\frac{6 \times 6 \times \pi \times 10^{-4} \text{m}^2}{(0.8 \times 10^{-6} \text{m})^2} \sim 10^{10} \text{ bits} \sim 1 \text{ GB}$$

CDの容量0.7 GBに近い. DVD, Blu-rayは単純に考えれば, その1.5倍, 4 ($=2^2$) 倍程度の容量. それ以上に技術的な改良もあったことがわかる.

- CPUのパターンの大きさの限界（現行Intel Core i7, Kabylake, AMD Ryzen 14 nm） — 現在は Exima laser (ArF, 193 nm, 紫外)+液浸を利用. 近い将来は EUV （Extreme Ultra Violet, 13.5 nm）.

λ が小さい極限 (D が大きい極限)



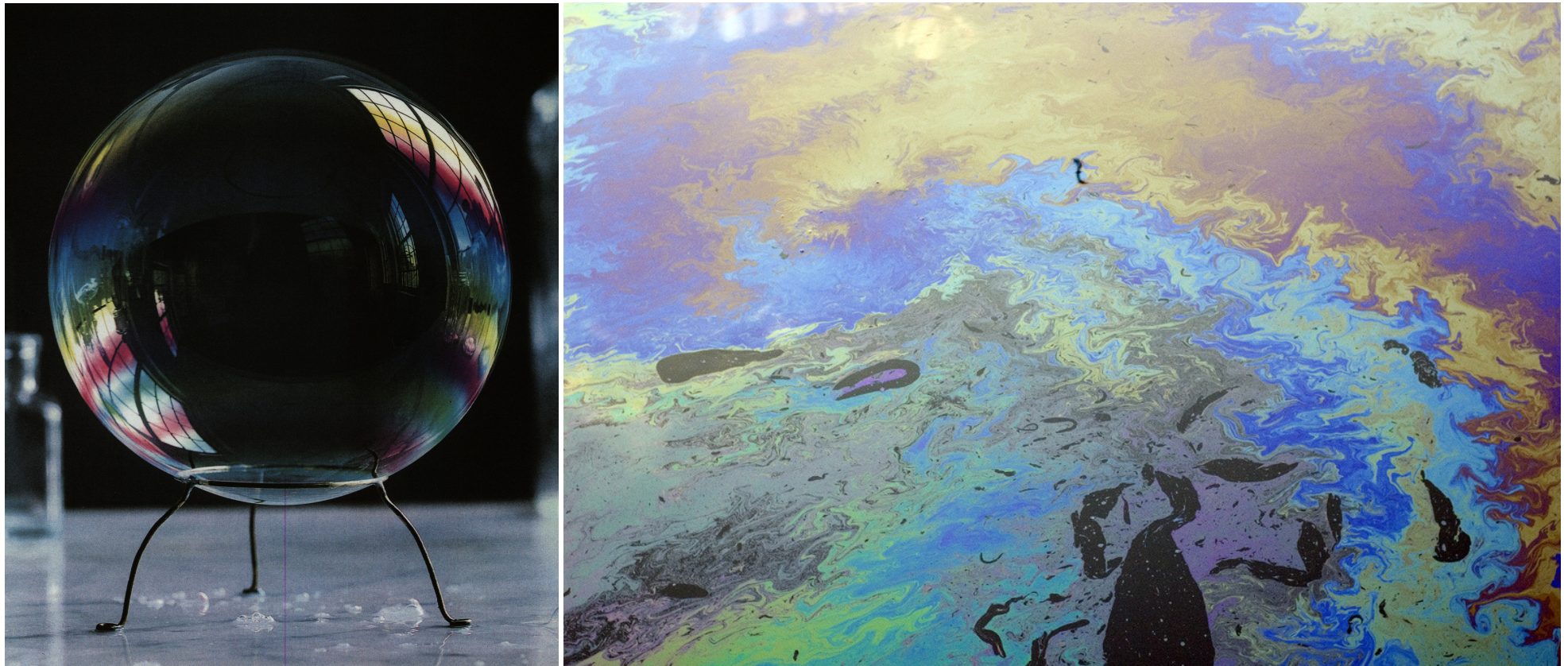
干渉じまが小さくなり，個々の干渉じまが見えない.

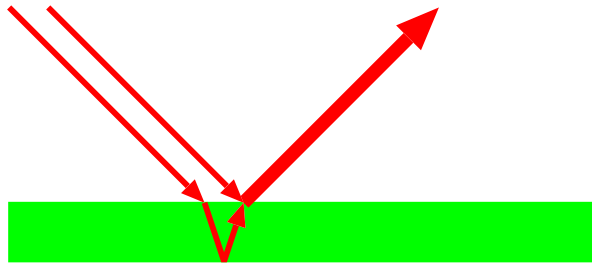
$\lambda \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ 幾何光学の極限

- 幾何光学の極限 — 波の性質を忘れて光は真っ直ぐ幾何的に進行すると考えて良い.
- 光に関しては波長が通常のスケールより桁違いに小さいので，日常生活は幾何光学で十分な場合が多い.

干渉現象の例

薄膜における干渉：シャボン玉，コーティング，油の膜，CD/DVD の裏 *etc.*

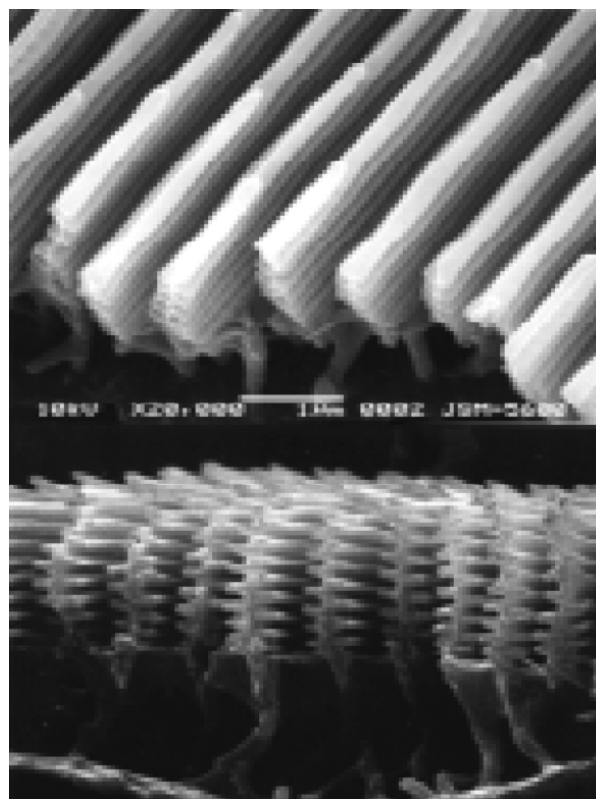




- 膜の外側と内側で反射する光同士が干渉する.
- 白色光であれば角度によって強め合う波長 (色) が違う.
- うすくないとコヒーレンス長を越えてしまうため干渉しない.
- 「構造色」の1例

「構造色」 — 構造により色がつく.

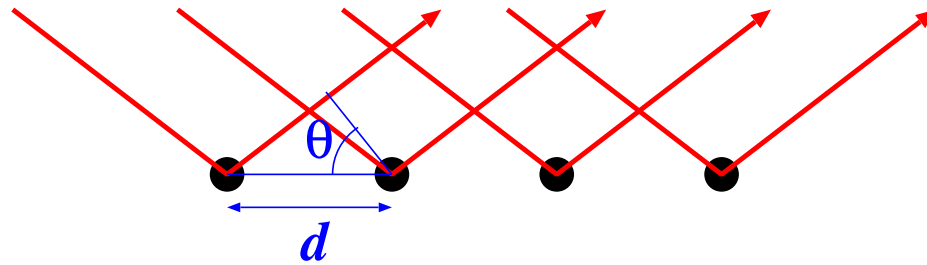
- 薄膜の干渉
 - モルフォ蝶の羽の青
 - 鳩の首の緑と紫の二色
 - アワビの貝殻
 - オパール (シリカ SiO_2 と水のアモルファス状態)
 - IMOD (Interferometric MOdular Display)
- ◇ 虹, プリズム (干渉ではなく屈折現象と分散)



モルフォ蝶（左）
とその羽の鱗粉
の電子顕微鏡写真
（右，木下修一，大
阪大学）.

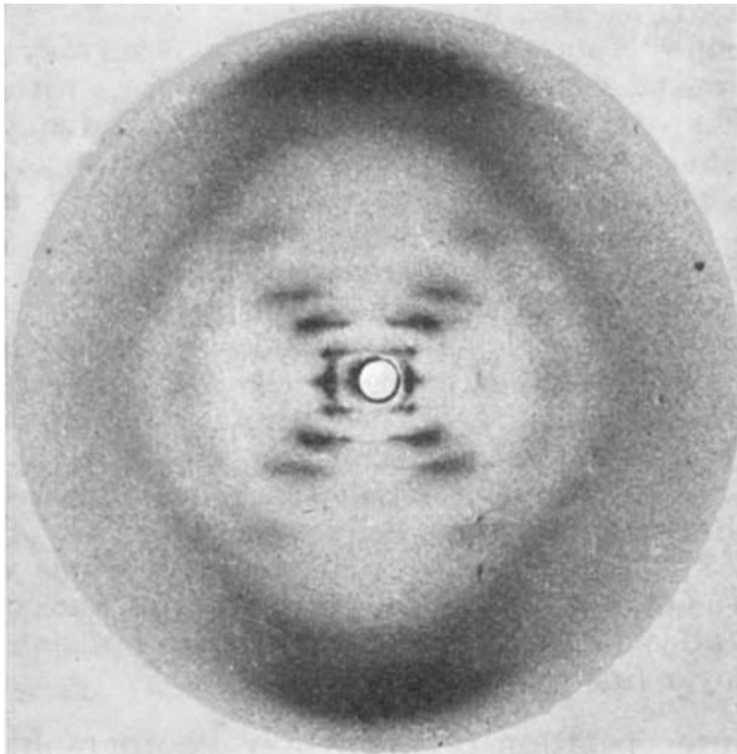
棚構造の棚の間隔は $0.2\ \mu\text{m}$. 切れ切れの多層膜での干渉と不規則性により、高角度範囲で同じ色に見える。精巧な構造。

● 結晶解析

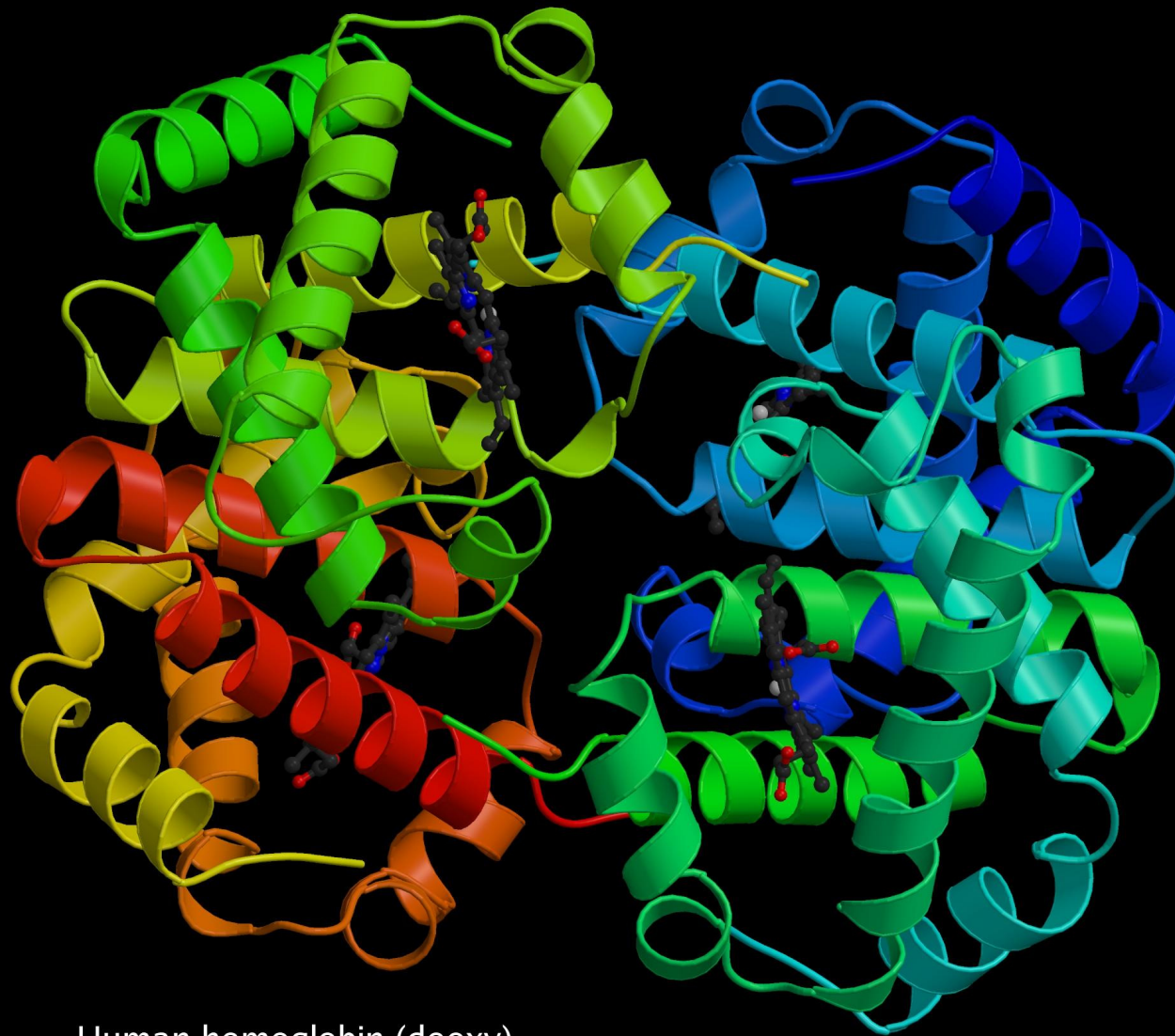


結晶格子による波 (X 線, 中性子線, 等) の干渉より結晶構造を解析する. $d \sin \theta = n\lambda$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) である方向で波の強度が大きい. (Bragg 反射)

- ▶ 結晶の構造 (格子の大きさ, 原子の並び方等々) を解明.



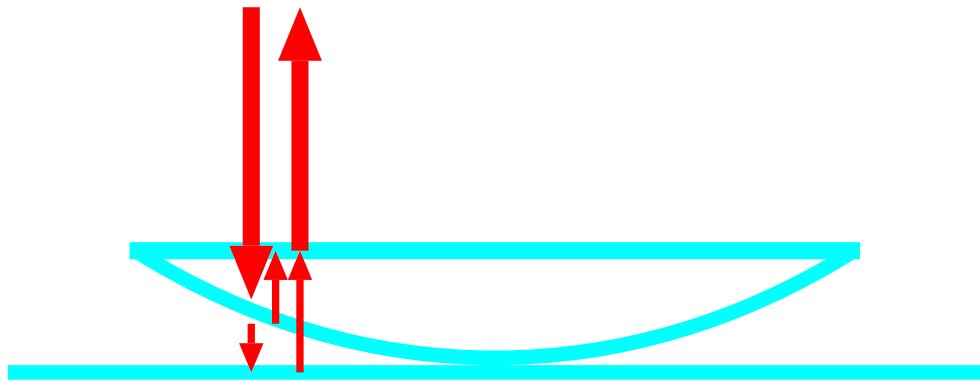
例: DNA の X 線構造解析.
Rosalind Franklin, 1950's (1958 没).
Francis Crick, James Watson が Nobel 賞受賞 (1962).



Human hemoglobin (deoxy)

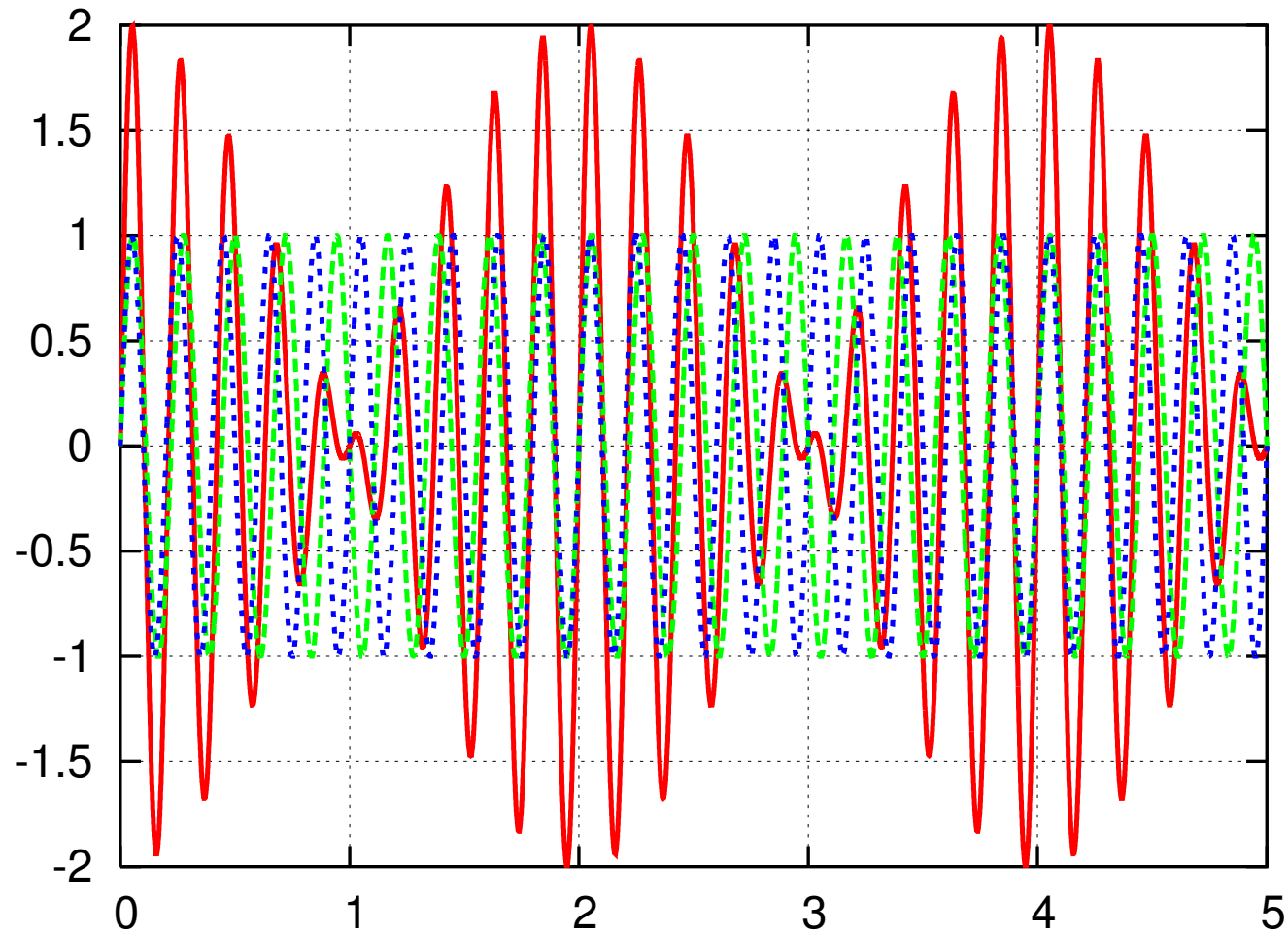
人間のヘモグロビンの立体構造. 干渉/回折実験の解析結果が使われている (PDBより). 色は見やすくするために付けてあるだけなので注意.

Newton Rings



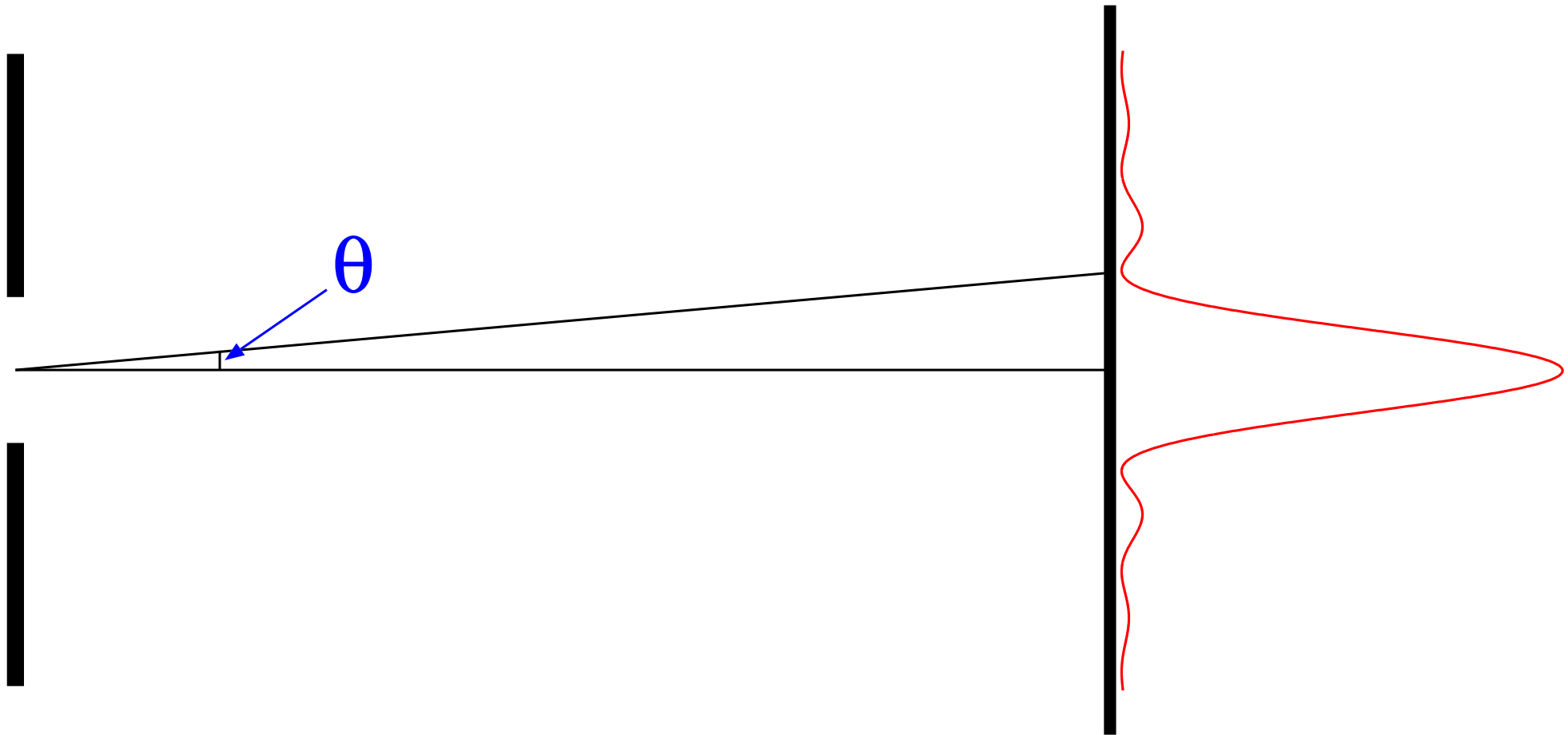
体構造レンズに単色光をあてると干渉によりリング状の干渉縞が生じる。光の波長精度でレンズ面の状況が測定できるので非常に有用。

うなり



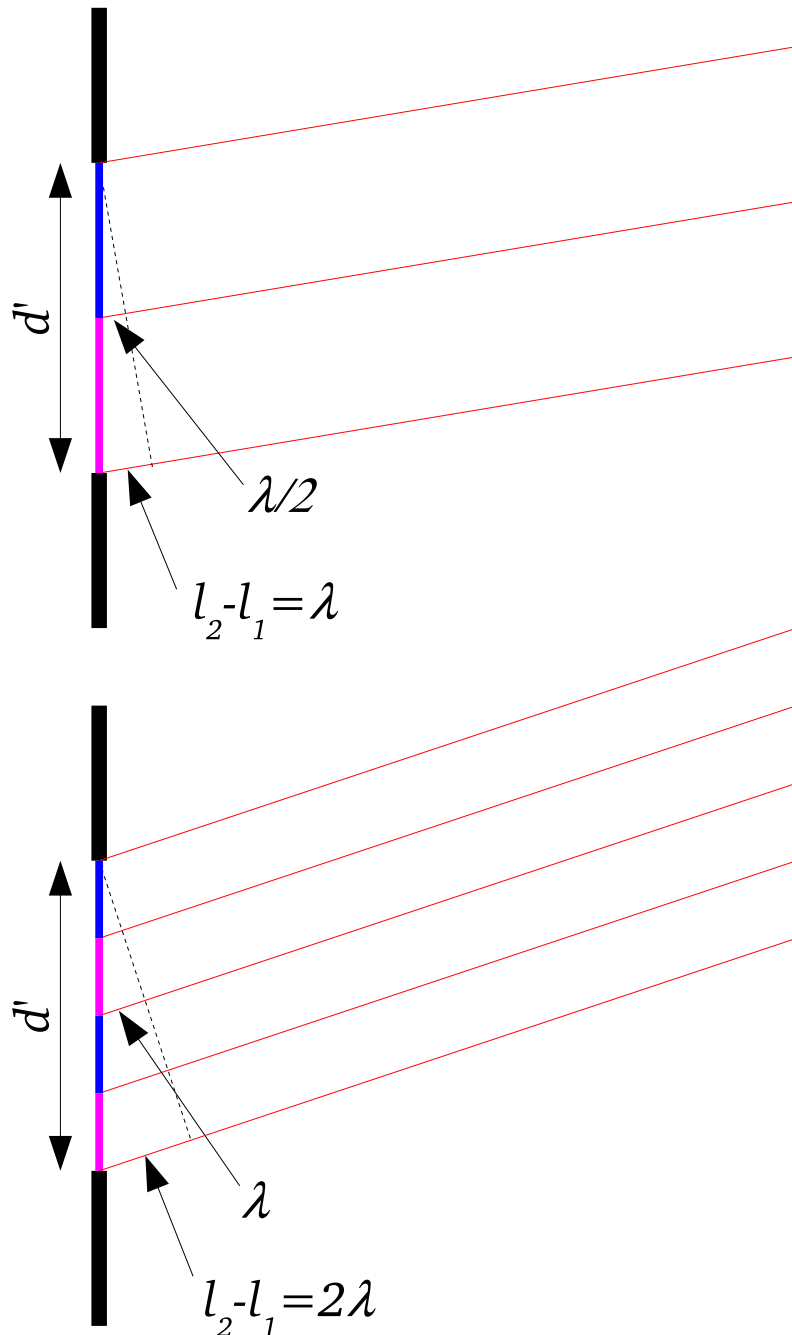
「うなり」の様子.
波長が近い波を重ね合わせると生じる.

波の回折 (diffraction)



一つのスリット（単スリット）での干渉 (Fraunhofer 回折).
回り込む = 回折現象 回り込む角度 $= \theta = \lambda/D$ ← 後期実験!

単スリットの干渉条件の仕組み



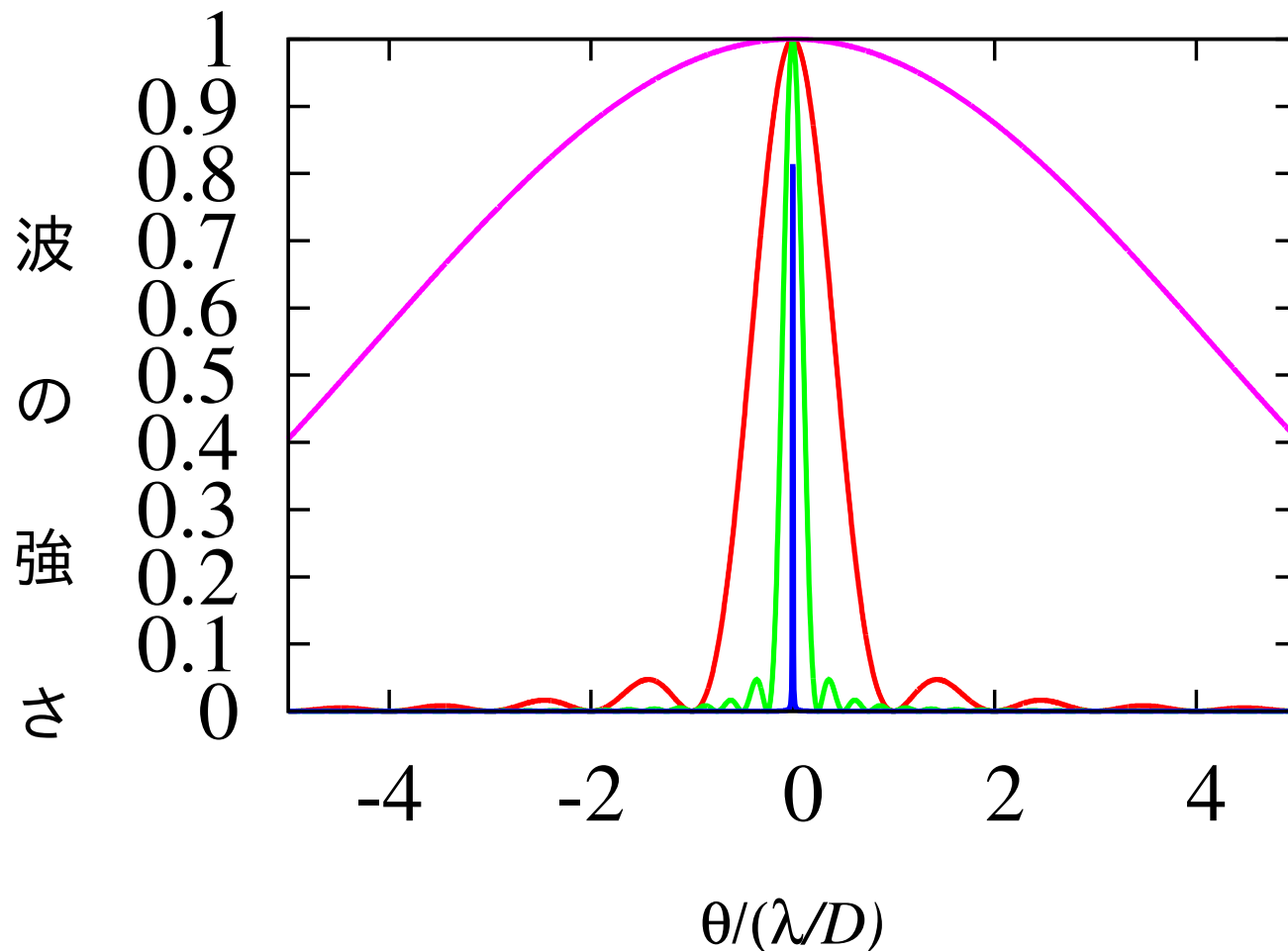
$$\frac{l_2 - l_1}{\lambda} = \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{打ち消し合う}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \pm \frac{\lambda}{D}, \pm 2 \frac{\lambda}{D}, \dots$$

(上) $l_2 - l_1 = \lambda$. 青の部分とピンクの部分はちょうど半波長ずれるので打ち消しあう.

(下) $l_2 - l_1 = 2\lambda$. 青の部分とピンクの部分はちょうど半波長ずれるので打ち消しあう.

よって, $l_2 - l_1 = (\text{整数}) \times \lambda$ の場合は必ず打ち消しあう.



一つのスリットでの干渉 (Fraunhofer 回折).
 $\lambda/D = 1, 1/4, 1/10, 10$ の場合. λ/D が小さくなると幾何極限に近づき, より前方に波が進む. 逆に λ/D が大きくなると回り込みが大きくなる.

- 波は直進するだけでなく, 回り込む.
- 回り込む角度 $\theta \sim \lambda/D$ (D : 波の幅).
- 干渉の一種. (干渉する波の多い場合に回折と呼ぶことが多い.)
- $\lambda/D \searrow 0 \Rightarrow \theta \searrow 0$ 幾何光学の極限. 波長が(他のスケールに比べて)小さい場合には波の性質は失われる.
- $\lambda/D \gtrsim 1 \Rightarrow$ 全く指向性は失われる.

回折現象の例

- レーザー光の広がり. レーザーは指向性があり広がらないように見える.

回折による理論限界を概算：

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{D} \sim \frac{0.5 \mu\text{m}}{5 \text{ mm}} \sim 10^{-4}$$

10 m 進んで $10^{-4} \times 10 \text{ m} = 1 \text{ mm}$ 程度広がる.

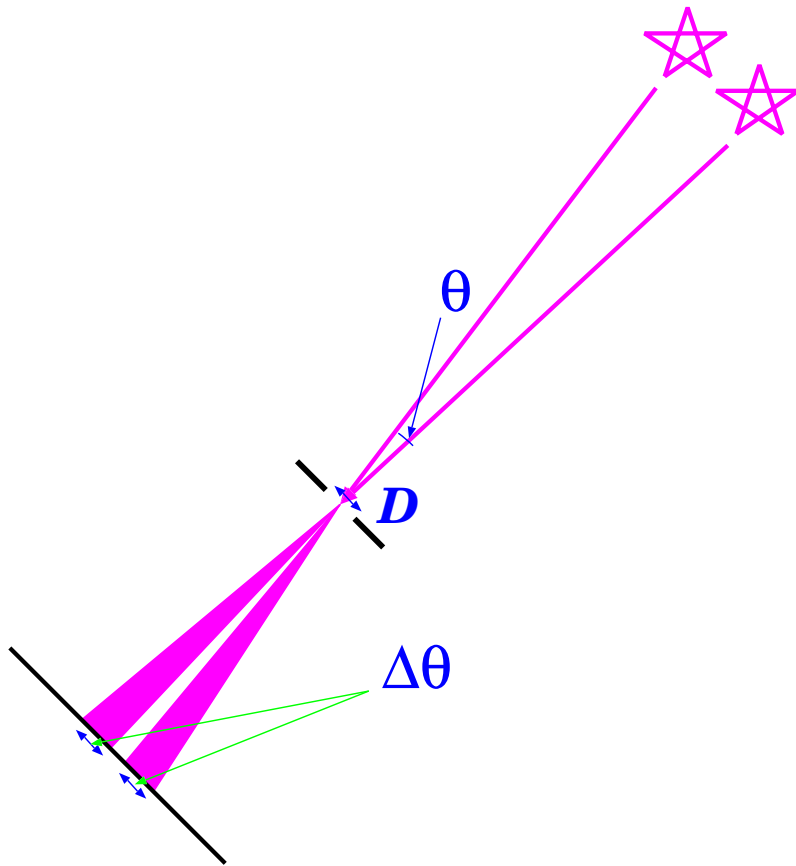
- 音の場合. 声を出す場合 ($50 \text{ cm} \leftrightarrow 700 \text{ Hz}$).

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{D} \sim \frac{50 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \gg 1!!!$$

⇒ **指向性がない.** 高音の方がまだ指向性がある.

- 音に指向性を持たせる； λ/D を小さくする.
 - ▶ D を大きくする. 例えばスピーカを並べる. (speaker arrays, “beamforming”). SONAR (SOund Navigation And Ranging), コンサート (室内外) でのスピーカー配置.
 - ▶ λ を小さくする. 超音波の modulation に音を載せ, 超音波があわさるところで非線型効果により音を再生. (hypersonic sound)

望遠鏡の角度分解能



- 望遠鏡の解像度. 2つの星を見分けられる限界. $\Delta\theta \sim \lambda/D$. (Rayleigh limit)
- 現在最大でも $D \sim 10\text{ m}$ (すばる, Keck 望遠鏡).
- $\lambda \sim 0.5\text{ }\mu\text{m}$. (可視光)

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{D} \sim 5 \times 10^{-8} \sim 0.1''$$

望遠鏡の角度分解能の理解: $\theta > \Delta\theta$ でないと光源の像が重なって分離できない. $\Delta\theta \sim \lambda/D$.

回折限界の実質的な意味

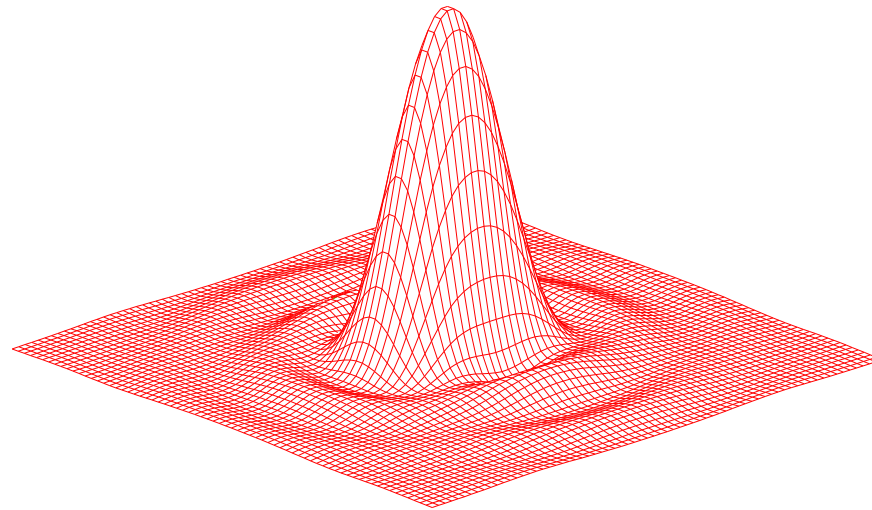
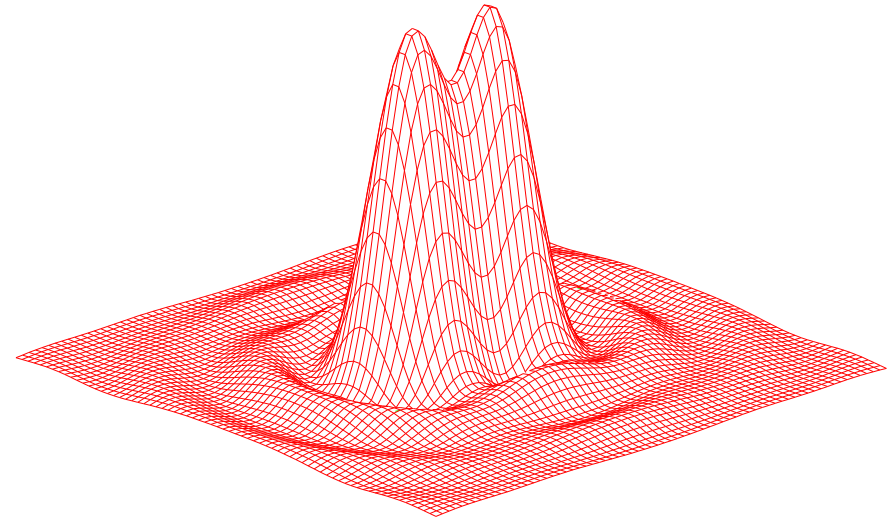
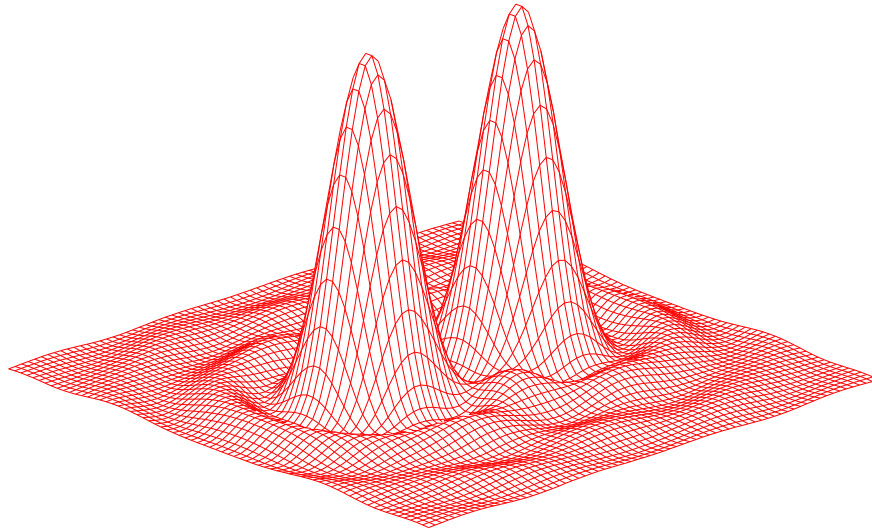
角度分解性能をあげるためには

- レンズ/鏡を大きくする. しかし,現実的には限界がある.
- 小さい波長の光 (X 線等) を見る. これは地上ではほとんど遮蔽されている.

1 つの解決案: VLBI (Very Long Baseline Interferometry, 超長基線電波干渉法)

- 複数の望遠鏡を用い, 実質的に D を大きくして角度分解能を上げる.
- VLBA (Very Long Baseline Array, 超長基線アレイ) が最大の例. USA10個の電波望遠鏡で, 最大間隔9,000 km.
- 角度分解能: $\lambda = 0.7 \text{ cm}$ で $\Delta\theta \sim 0.2 \times 10^{-3}''$.

Rayleigh限界



時計回りに：2つの光源が見分けられる場合，ぎりぎり見分けられる場合 (Rayleigh limit)，見分けられない場合．

身近な回折限界の例

- 視力 (visual acuity) = 人間の目の分解能. 全く同じ考えで
 $D \sim 2 \text{ mm}$

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{D} \sim \frac{0.5 \mu\text{m}}{2 \text{ mm}} \sim 3 \times 10^{-4} \sim 1'$$

視力 = 分で表して $1/\Delta\theta$. 上の例では視力 1. 人間の視力のデザイン性能のオーダーは決まる.

- レーダーの分解能, $D \nearrow \Rightarrow \Delta\theta \searrow$. 通常マイクロ波 (数 cm オーダーの波長を使う)

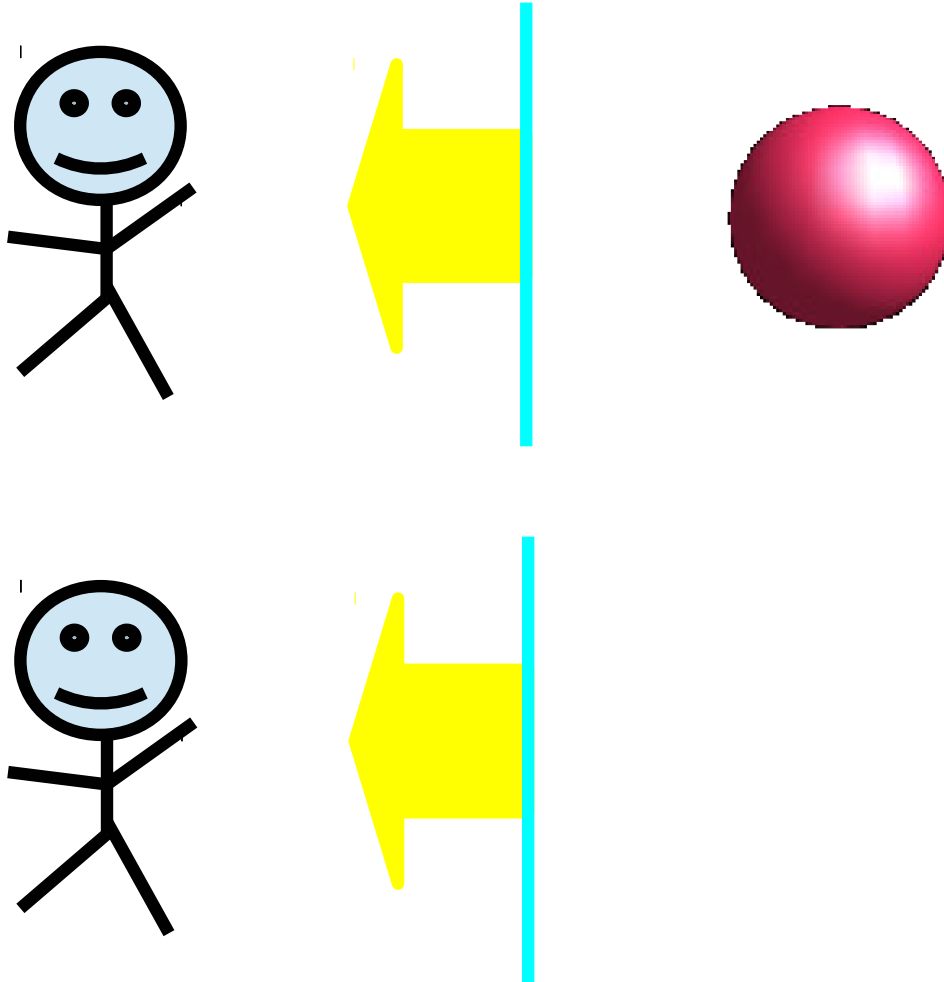
$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{D} \sim \frac{3 \text{ cm}}{3 \text{ m}} \sim 0.01 \sim 0.5^\circ$$

レーダーが方向を判別するためには大きくなければ不可能.

- 携帯電話 — なぜ「プラチナバンド」は重要か？

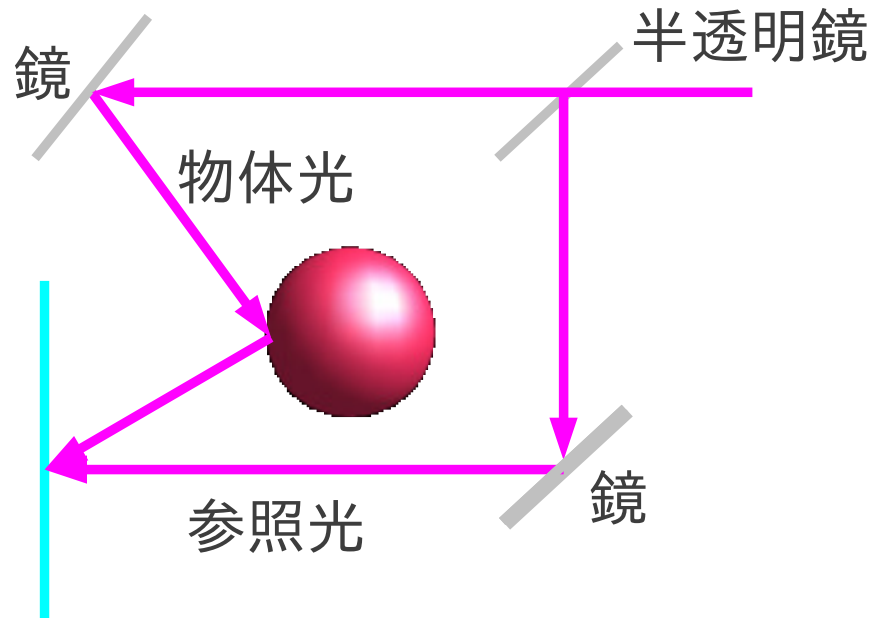
Hologram (ホログラム)

- **Hologram** : 3次元的な情報を2次元に記録したもの.

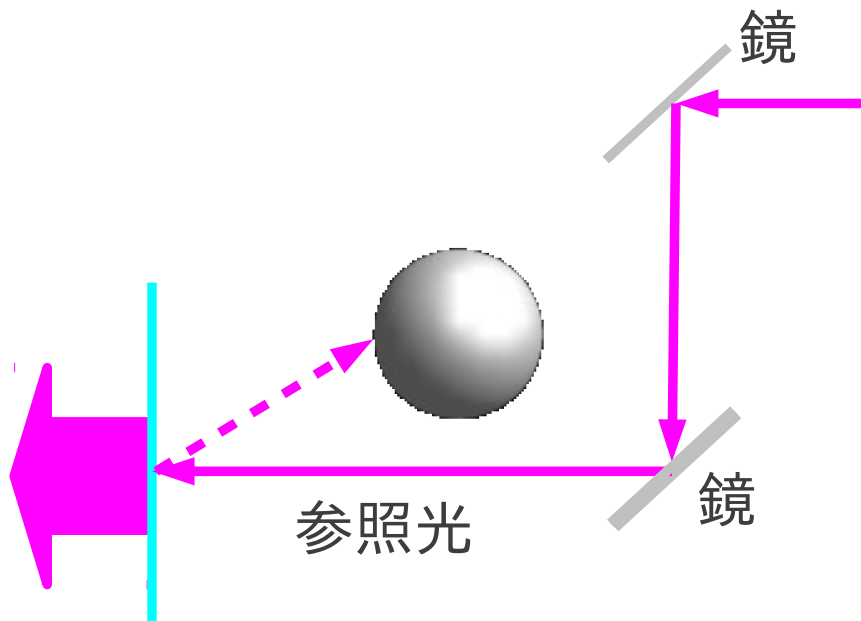


- ▶ たとえば窓の外にある立体的な画像を見るとは？
- ▶ 様々な方向から見ると見える部分が異なる.
- ▶ 窓から来る光の情報を見ている.
- ▶ 窓から来る光を再現できればOK! 完璧!
- ▶ これ以上の情報は無いはず. ← 物体があるとはどういうこと？
- ▶ 現状ではこれを完璧に行う事は不可能.

現在作られているHologramとは？



- 光を物体に照射し，参照光と重ねあわせた情報を記録 ← 干渉！
- 強度だけではなく，位相情報（ずれ，奥行き）も記録.



- 物体が無くて，その記録があるのでその像が再現される.
物体 + 参照光 = 干渉縞
⇒ 参照光 + 干渉縞 = 物体
- 位相情報もあるので奥行きも再現（通常の写真は強度だけで位相情報は無い）.

Hologram の特色

- ホログラムの種類

- ▶ イメージホログラム：像が物体のある場所に存在（通常よく見る「ホログラム」）。直視しただけで画像がわかる。
- ▶ リップマンホログラム：白色光の下でカラー立体像を再現。写真に厚みが必要。

- ホログラムの一部だけでも画質は下がるが全体像が見える（窓の一部から見ても立体的！）。

- 立体的な像には干渉が必要⇒ レーザー光のようにコヒーレンス長の長い光が必要。

- イメージホログラムでなければ、ホログラム写真は干渉パターンだけ！

- ステレオ画像（Stereoscopy, 19世紀から存在, 3D映画等も含む）とは違う！ステレオ画像にあるのは、2枚の画像にある情報だけで、両眼で見れば立体感はあるが3次元情報は無い。