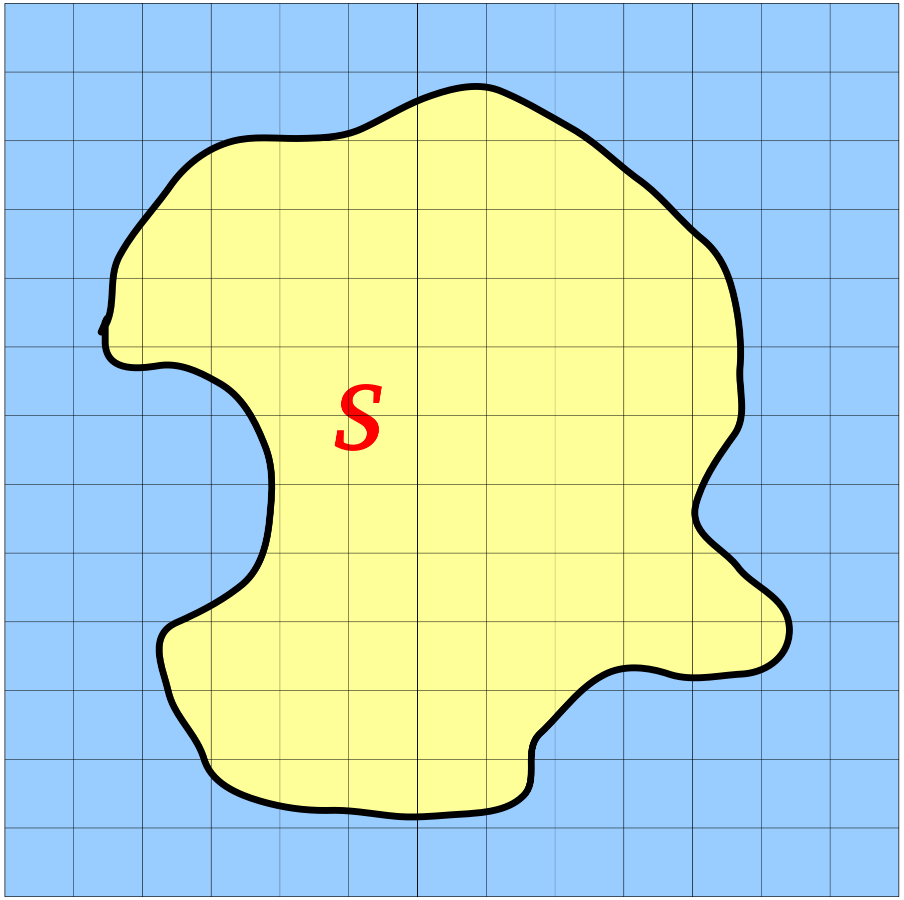
Monte Carlo 法

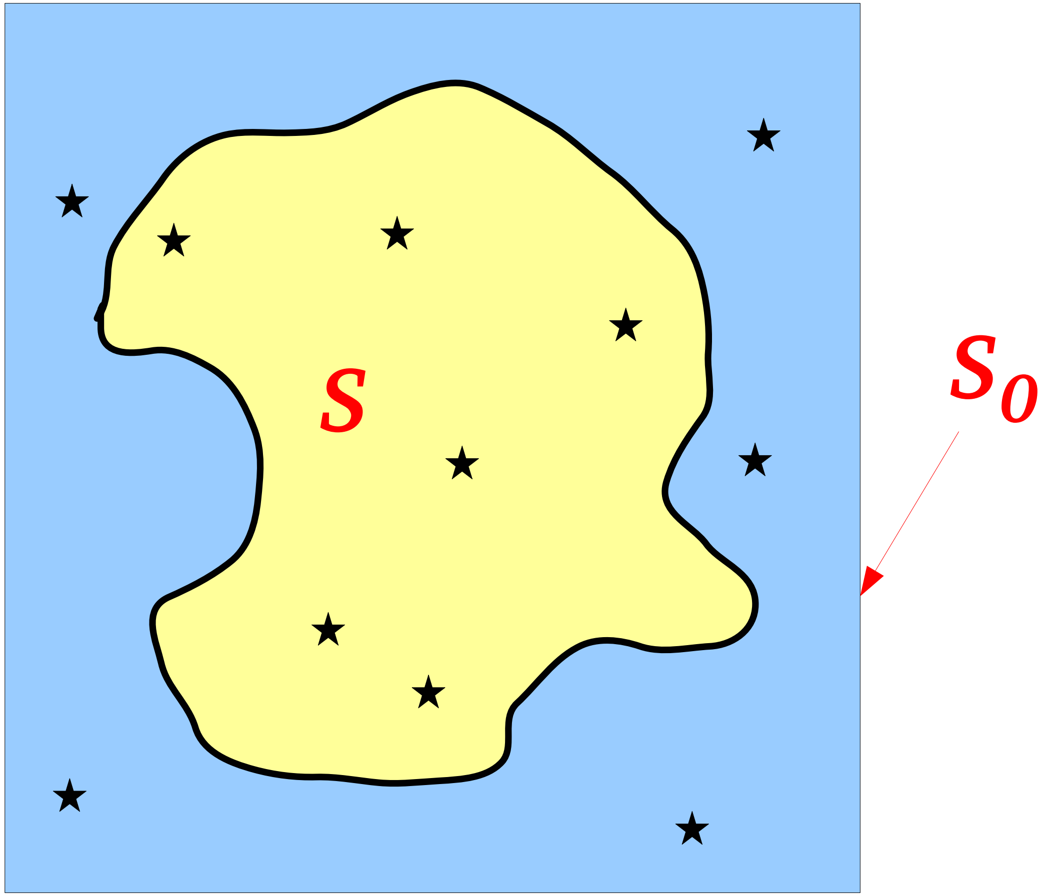
青木健一郎
日吉物理学教室

実験の概要



- 目的： Monte Carlo 法により面積を測定する.
- 面積の数値的測定法
  1. 区分けしてマスを数え上げる(左図） — 決定論的, deterministic
  2. Monte Carlo 法 (以下で説明) — 確率論的, stochastic
- Monte Carlo 法の実験は一人づつで行う.

MC 法とは？



- 領域 S_0 内に無作為(random) に点を打つ.

$$\text{面積比} = \frac{S}{S_0} = \frac{S\ \text{内の点の数}}{\text{全点の数}}$$

- 領域 S に入った点の数のを数えれば面積わかる！（入った点の割合 $=$ 面積比）

MC 法の特徴

- 単純 “simple is best!”
- あらゆる状況に適用可能
- 複雑な問題や多次元でも同様に適用できる
- 精度は統計誤差によって決まる

MC 法の誤差

- 誤差は基本的に統計誤差
- 統計誤差: N サンプル数として $N \nearrow \quad \Rightarrow \quad$ 誤差$\searrow$
- 統計の性質として相対誤差がわかる.

$$\frac{\Delta A}{A} \simeq \frac{1}{\sqrt{N}}, \qquad N = 100 \ \Rightarrow \ \frac{\Delta A}{A} = 0.1$$

$\leftarrow$ 一般的性質：アンケート，視聴率，出口調査，$\cdots$

- 他の誤差：測定誤差はほとんど無い（線上の点の処理等）．系統的誤差はありうる．例えば，サイコロは完璧ではない．我々の精度では問題にならないが，問題によっては「サイコロ」の精度が問題になる.

統計的誤差の性質

標準偏差σを持つ独立な確率変数N個の平均は標準偏差$\sigma/\sqrt{N}$を持つ.

以下では平均を $\langle \cdots \rangle$で表す.

平均： $\langle x \rangle = \overline{x}$, 分散=(標準偏差)^2： $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \left\langle (x - \overline{x})^2 \right\rangle = \sigma^2$

確率変数 $y = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j$ として，平均 $\langle y \rangle$ と(標準偏差)^2 $\langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle$ は

$$\langle y \rangle = \left\langle \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \langle x_j \rangle = \frac{1}{N} N \langle x \rangle = \langle x \rangle$$

$$\begin{aligned}\langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j - \overline{x} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} (x_j - \overline{x}) \right]^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{N^2}\left[\sum_{j=1}^{N} (x_j - \overline{x})^2 + \sum_{i \neq j}^{N} (x_i - \overline{x})(x_j - \overline{x}) \right] = \frac{\sigma^2}{N}\end{aligned}$$

MC 法の応用

- MC 積分　$\leftarrow$ 我々の方法
  - 特に次元が高い場合に非常に有用（面積は 2 次元）．区分けする考え方（決定論的方法）では実質不可能になってくる．（次元 Dとして N 点のデータで精度は $N^{-1/2}$ 対 $N^{-1/D}$. ）
- MC simulation　(確率論的モデル)
  - 現象の微視的な機構がわかっているときに結果がどのようになるかをいろいろな場合について計算し，結果の統計を求める．
  - 例：自然現象（非平衡，virus の増殖, $\cdots$），工学（電子回路，ネットワークトラフィック），社会現象（交通渋滞，ファイナンス, $\cdots$),
  - 応用範囲は非常に広い
  - MC 積分も MC simulation の一部とみなせる

シミュレーション（MC法）が有効な身近な具体例

- 100回サイコロを振った時にゾロ目が続けて出る確率
- ポーカーで2つ同じ数を持っていた場合に2枚引く場合と3枚引く場合の優劣
- 株を特定の戦略で売買した場合の利益