Newton の法則，古典力学，Chaos

青木健一郎
日吉物理学教室

2018年度春学期

内容

1. Newton の法則
2. 重力と等価原理
3. 古典力学と決定論
4. Chaos （カオス）

Newton の法則

Newtonの3法則

1. 慣性の法則 — 力を加えない物体は等速直線運動を続ける.
2. $\vec{F} = m\vec{a}$ — 力 $=$ (質量) x (加速度)
3. 作用・反作用の法則 — 力を加えればそれだけ力を受ける（同一直線上).

- $\boxed{\text{古典力学の全て}}$を 3 つの法則にまとめている. ← Newton の偉大な功績
- 量子力学的な実験でなければ古典力学で記述できる.

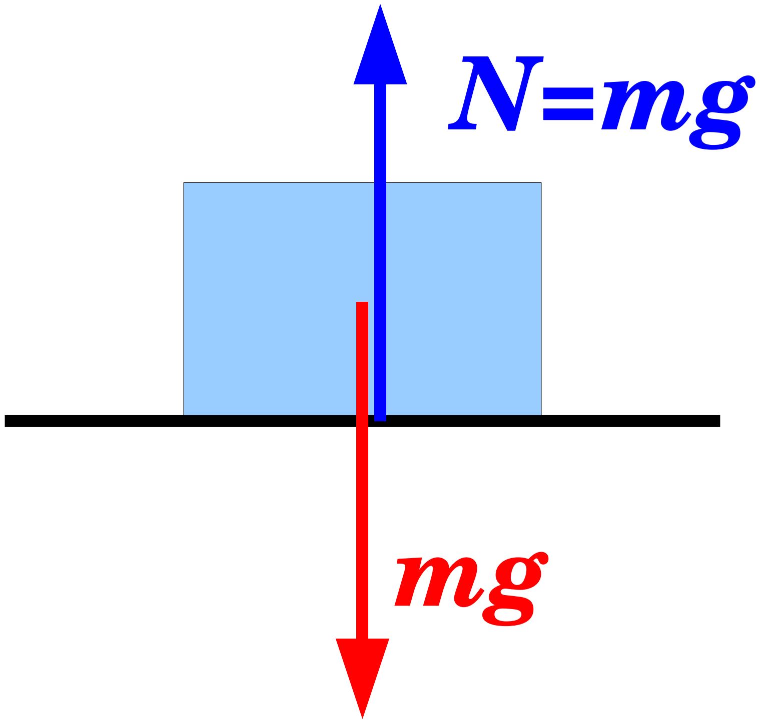
Newton の法則の持つ意味

- 慣性の法則
  - 日常生活ではみかけ上成り立たないことがほとんど（摩擦のため）
  - Aristotles — 速さが力に比例すると主張
  - Galileo が慣性の法則を発見
  - 宇宙空間（天体の運動），ミクロの世界では簡単に実現
- $\vec{F} = m\vec{a}$
  - m （慣性の）質量は重力とは関係ない．100 g の物体は地球上，月の上，無重力状態，どこでも100 g.
  - 無重力状態で加速すると考えて（も）法則は成り立つ.

- 作用反作用の法則
  - 作用反作用の法則が無いと体系が不完全．物体のふるまいが定まらない．
  - 保存則は作用反作用の法則が元になっている．保存則は独立した法則ではない．
  - 互いに力を及ぼし合うので力の作用する対象は異なる．

力学系：最も簡単な例 — 静止し続ける物体

静止し続ける物体 ($a = 0$) ⇔
まったく力が（合計として）働いていない場合 — 自明



重力下で静止する物体.
全体に働く力 $= 0$ ⇔ 加速度 $= 0$

力学の例：自由落下 (free fall)

重力下で自由落下する物体

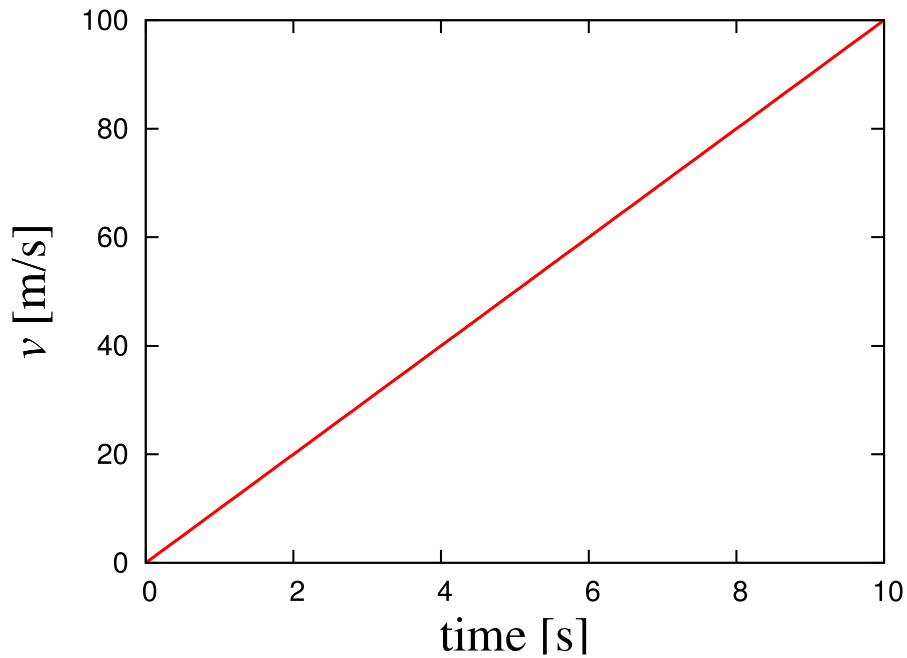
$$F = ma = mg \quad \Rightarrow \quad a = g = \frac{GM}{R^2}$$

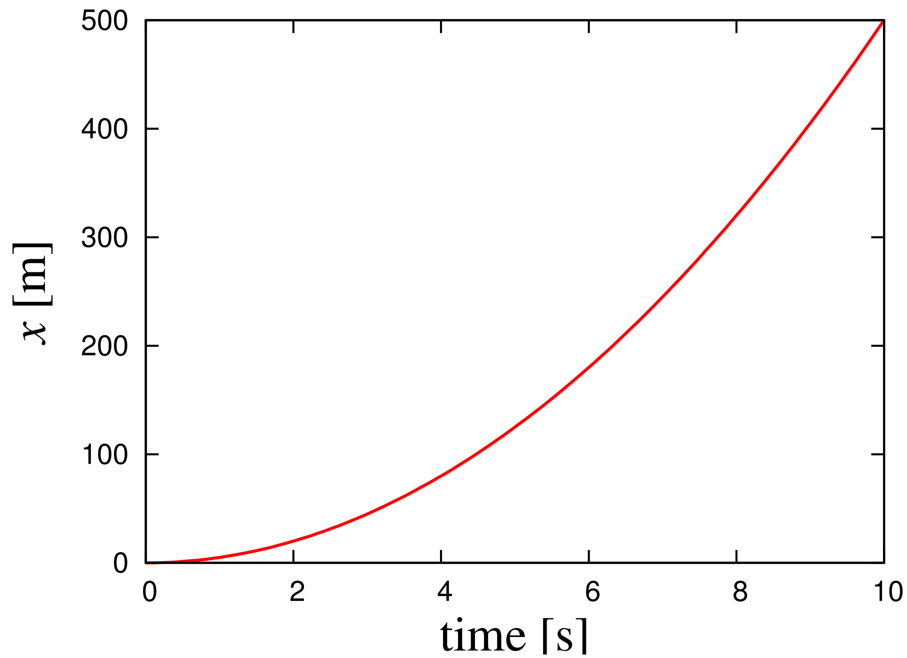
- 質量 m に関わらず加速度は同じ（重力加速度）
  $\leftarrow$ Galileo

* なぜ同じ？ — 重力は慣性の質量に比例 $\leftarrow$ 重力だけの特殊の性質

- g — 単位質量あたりの重力
- 重力加速度 $g \leftrightarrow$ 重力場の強さ

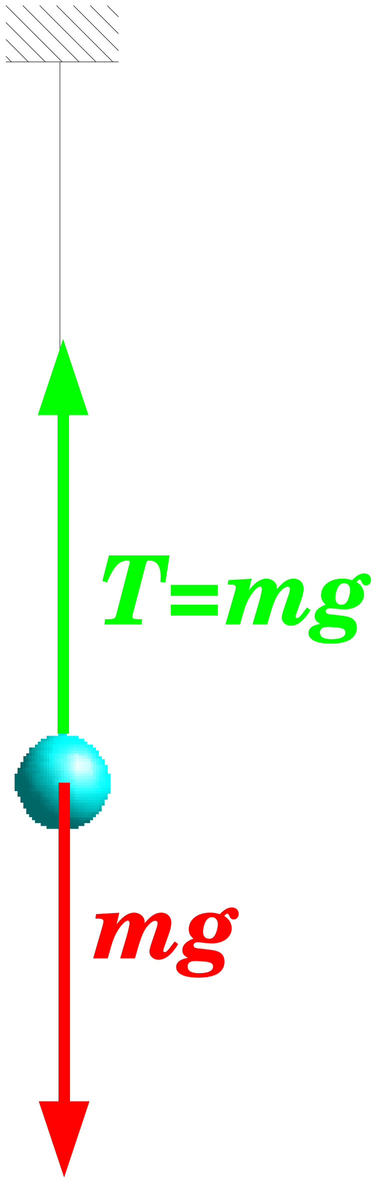
加速度 = 速度の変化/時間





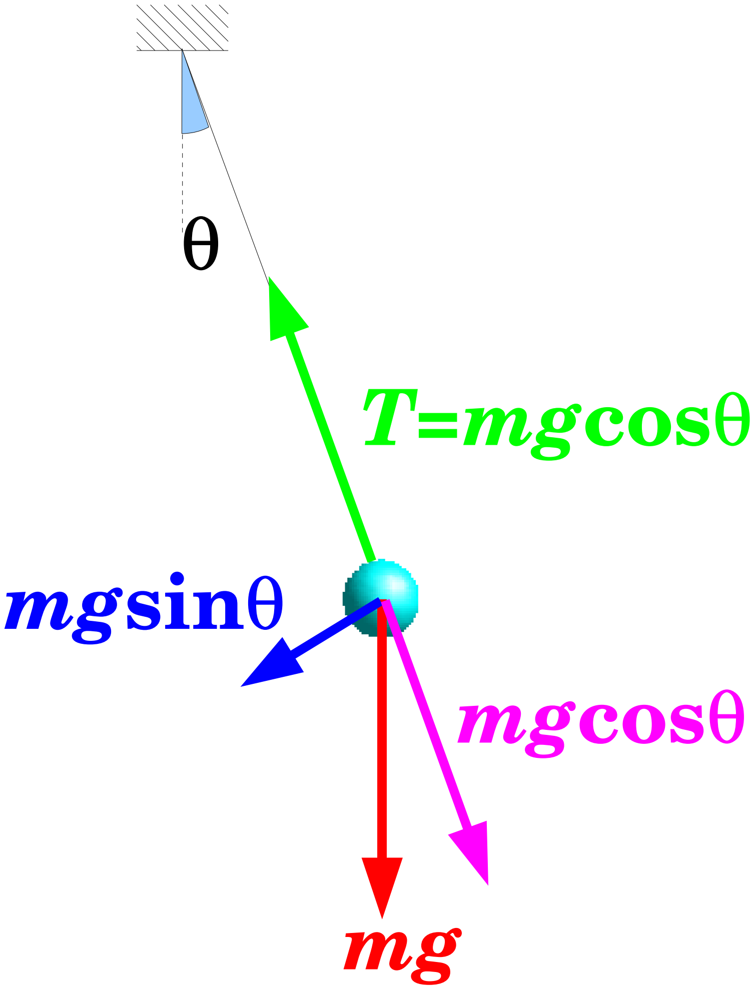
一定の加速度 a の運動（例：自由落下）．(左）速度と時間 $v = at$，(右）位置と時間 $x = at^2/2$，の関係．

振り子の運動 — 鉛直方向 $\theta = 0$



- 振り子が鉛直方向向いている時（$\theta = 0$）は振り子には力は全体として働かない．張力と重力がつり合う．
$$\vec{F} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{a} = 0$$
- 速度が 0 であってもそうでなくても加速度は同じ．
- 作用反作用の法則
  - 糸と玉の引っ張り合い
  - 地球と玉との引っ張り合い

振り子の運動 — 鉛直方向 $\theta \neq 0$



- 振り子の糸方向の力は重力の成分と張力で打ち消し合う．それに垂直な方向の成分は残る．

$$F = -mg\sin\theta \;\Rightarrow\; a = -g\sin\theta$$

- 加速度は質量 m に依らない $\Rightarrow$ 運動も m に依らない $\leftarrow$ 重力の性質！
- 速度によらず加速度は同じ．
- 加速度がわかれば，速度の変化がわかり，位置もわかる．初期条件を決めれば運動が定まる．

振り子の運動 — 解

水平方向の位置を θ とする（$\theta = 0$ は平衡点）．中心からの変移は $L\theta$．
速度は位置の変化 $v = L\frac{d}{dt}\theta$．加速度は速度の変化 $a = \frac{d}{dt}v = L\frac{d^2}{dt^2}\theta$．
よって Newton の法則は

$$F = -mg\sin\theta = mL\frac{d^2}{dt^2}\theta = ma$$

振れが小さい場合は $\sin\theta \simeq \theta$ と近似できるので，方程式は

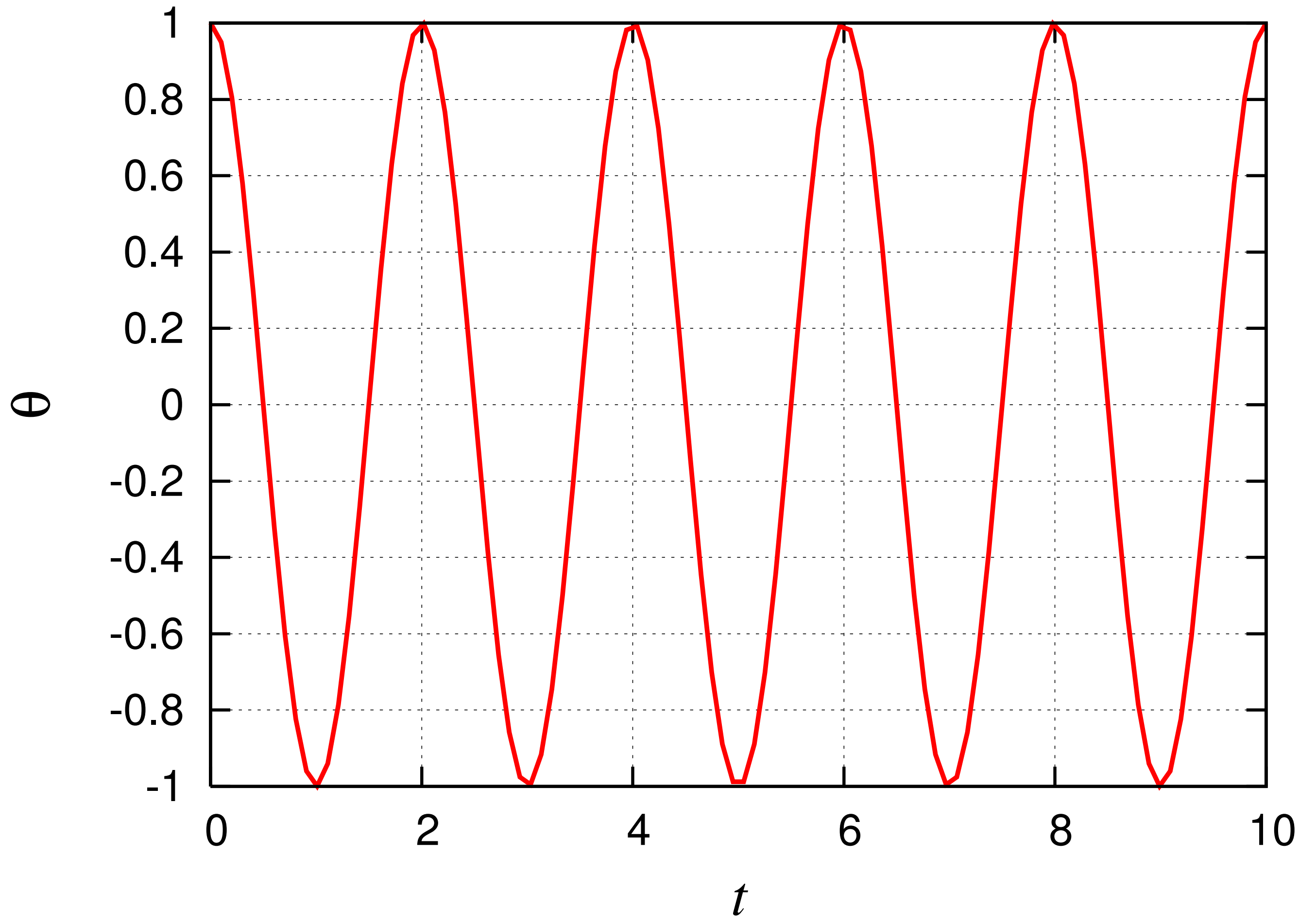
$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = -\frac{g}{L}\theta$$

この式の一般解は

$$\theta = A\cos(\omega(t-t_0)), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}},$$

A, t_0：初期条件から決まる定数

周期は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow$ TとLを求めればgが求まる（実験の原理）



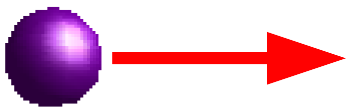
振り子の運動

- 周期は振幅に依らない
- 周期は質量に依らない

運動方程式と決定論

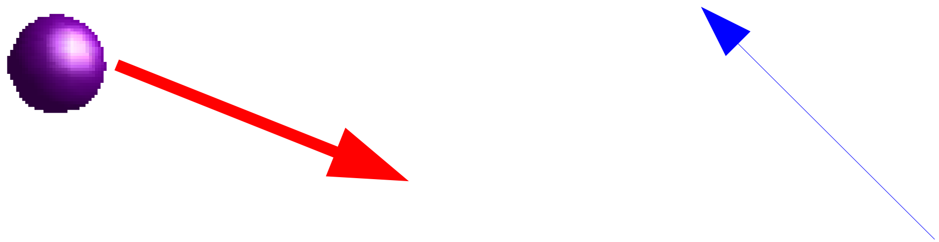
$\boldsymbol{x(t)}$

$\boldsymbol{v(t)}$



$$\boldsymbol{x(t+dt) = x(t)+v(t)dt}$$

$$\boldsymbol{v(t+dt) = v(t)+a(t)dt}$$



$\boldsymbol{a=F/m}$

時刻 t の位置と速度 $x(t), v(t)$ がわかれば，そのわずか後の時刻 $t+dt$ の位置と速度　$x(t+dt), v(t+dt)$ がわかる．これを繰り返す．

ある時刻 t_0 における物体の位置と速度 $x(t_0), v(t_0)$ （初期条件）が与えられれば，以降の運動は全て定まる（決定論的）．

古典力学の決定論的性質

- 通常「運動方程式を解く」と言う（例：振り子）
- Newton の法則 $\vec{F} = m\vec{a}$ が必要.
- 物体に加わる力の情報も必要 ← 知らなければ当然何が起きるかわからない！
- 一般に自由度が増えるだけで，方程式としては同じ形なので決定論的な見方は古典力学であれば全てのものに適用できる.
  - 物体の運動
  - 過去にも適用できる
  - 複雑な物体も全てあてはまる
  - 心理学を含めて未来を予言？ ← 初期条件さえあれば？…
  - 哲学的な意味を含め面白い考え方

決定論的な考え方の限界

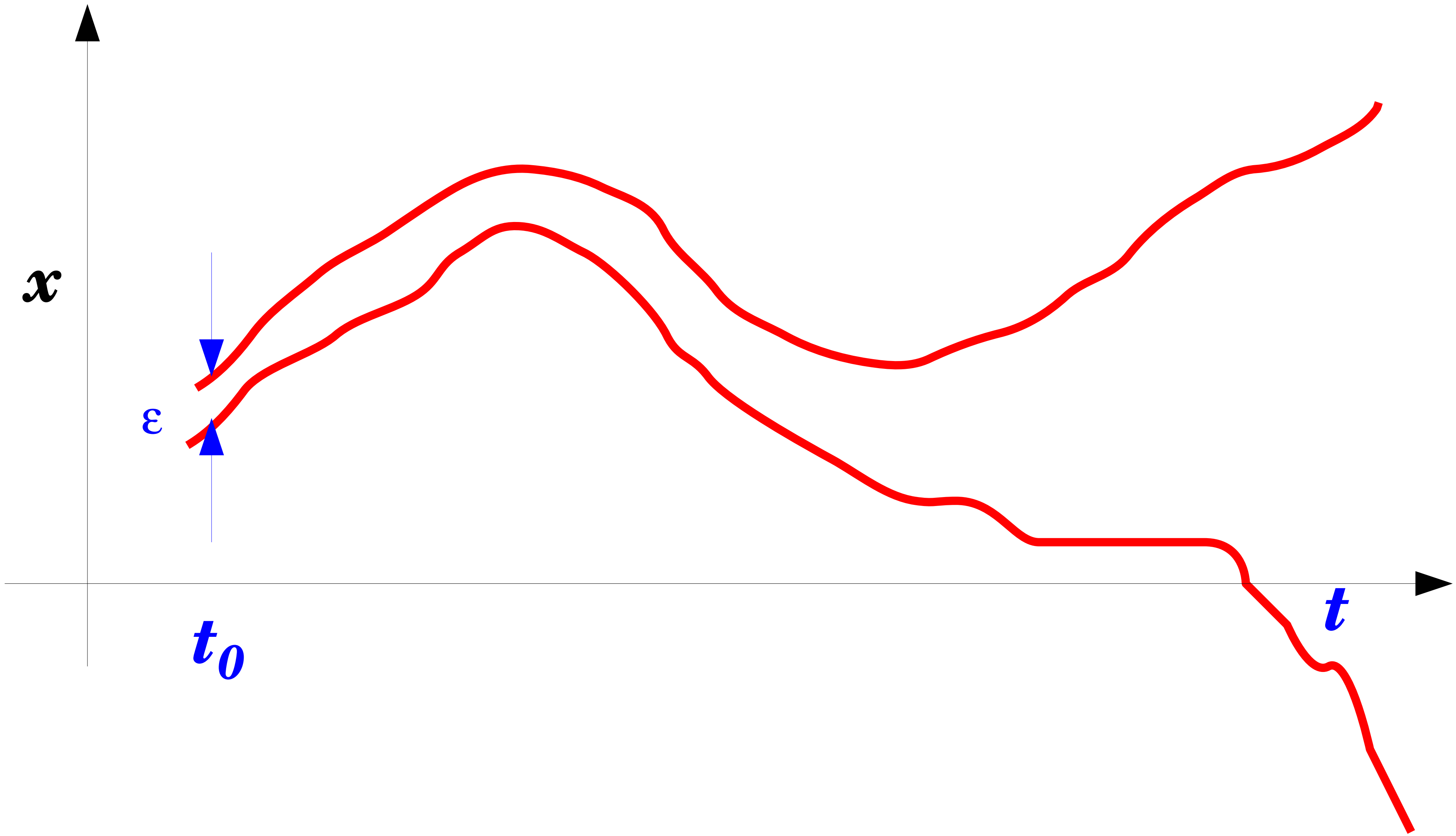
- 自由度が多い場合は初期条件が実質上決められない（巨視的な物体は原子分子の状態を全て知ることは実質上不可能 !)
- 量子力学 ⇒ 「不確定性」
- Chaos カオス（自由度が少ない場合も決定論に限界がある）

Chaos と決定論

自由度が少ない場合は将来が決定できる？

初期条件には当然誤差が付きまとう．この誤差 ($\sim \varepsilon$) による将来の予言の誤差は $\sim \varepsilon$?

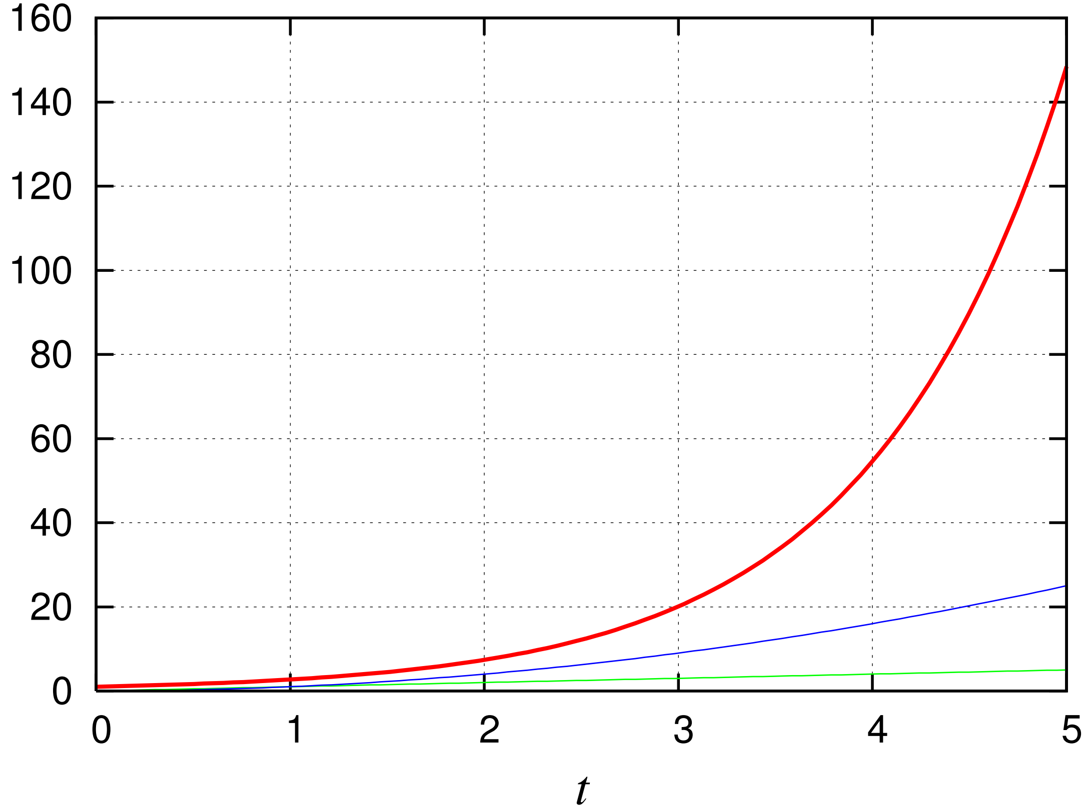
Chaos



一般には初期の小さな差が時間とともに指数関数的に大きくなる

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Chaos}}$

指数関数的な増大とその意味



$$dx(t) \sim \varepsilon e^{t-t_0}$$

確かに初期条件の差 ε に比例しているが，時間とともに指数関数的に大きくなる $\leftarrow$ 複利式の利子と同じ

指数関数的な増加は加速的． e^t, x^2, x の比較．

Chaosの持つ意味

Chaosが決定論に限界をもたらす

- 原理的には決定論的だが，実質的に予言不可能.
- 短期的には予言できるが長期的には実質予言不可能.

- 直感的に考えると，軌道が少しずれることにより加わる力に差が生じさらにずれる ← 非線形性が原因
- 一般にはあらゆる系で存在（非線型性の無い系は珍しい）．程度の問題．典型例：気象予報
- Chaos はあらゆる分野で使われる考え方．物理，生物，経済…
- 1961 Lorentz が気候のモデルを数値的に解析中に意図せず発見（3自由度の系）→ "butterfly effect"．19世紀に数学者 Poincaré が 3 体問題の研究中に実質上発見していたと言われている.
  - 3体問題の一般解：1887年に出された懸賞問題（スウエーデンの国王OskarII，60歳記念）.
  - Poincaréが受賞．実質解析的には解けないことを示した． → chaos
  - 例：太陽系の安定性 — 実質的な問題．千万年オーダーではカオスが重要.